Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique - ENSAE ParisTech

Mémoire d'actuariat - Promotion 2014

Méthodes d'allocation de capital dans le cadre de l'ORSA

Application d'une méthode d'allocation de capital par preneur de risque pour une compagnie d'assurance Vie

Florence Chiu

Directeur de mémoire : Pierre Thérond
Correspondant ENSAE : Xavier Milhaud

Résumé

Le dispositif ORSA, prévu par la Directive Solvabilité 2, constitue une réelle opportunité pour les organismes d'assurance d'intégrer la dimension « risque » dans la gestion de leurs activités. Une des possibilités qu'offre l'ORSA, de par son caractère prospectif et spécifique à l'entreprise (ou *entity specific*), est l'allocation de capital. Cet exercice nécessite, au préalable, la définition du capital à allouer, la segmentation des activités et donc des risques gérés par l'entreprise. Par ailleurs, une technique d'allocation de capital doit être choisie suivant une mesure de risque et les dépendances entre ces risques. La première partie de ce mémoire consiste à présenter les différentes techniques de mesure et d'agrégation des risques ainsi que les méthodes d'allocation de capital proposées dans la littérature. L'objectif d'une allocation de capital est d'appréhender les segments de risque les plus performants en termes de rentabilité tout en prenant en compte le niveau de risque auquel l'entreprise souhaite être exposée (ou son appétence au risque). Pour ce faire, le suivi d'indicateurs est essentiel. De tels indicateurs doivent être choisis en considérant à la fois l'aspect rentabilité de l'entreprise sans perdre de vue la dimension « risque ». La deuxième partie propose différents indicateurs permettant une gestion mesurée des risques encourus par la compagnie.

La définition de ces notions nous permet de présenter dans une troisième partie une méthode d'allocation de capital par preneur de risque. La Directive Solvabilité 2 conduit à une organisation des entreprises d'assurance structurée et basée sur le risque définie autour de quatre fonctions clés (fonction de gestion des risques, fonction de conformité, fonction actuarielle et la fonction d'audit interne). Les rôles et les responsabilités de chaque équipe opérationnelle devront être formalisés. Par ailleurs, étant donné que chaque équipe est le principal responsable d'un ou plusieurs risque(s), une telle allocation de capital permet alors un pilotage de l'entreprise plus pertinent qu'une gestion classique par ligne d'activité. Cette démarche rend possible la définition des objectifs et des limites en termes de risque de chaque équipe et permet alors, de manière opérationnelle, d'identifier les segments les plus consommateurs de capitaux, comme dans le cas inverse, les plus rentables, tout en prenant en compte les risques auxquels est exposée chaque équipe. La pertinence de cette méthodologie est alors illustrée par une application sur une compagnie d'assurance Vie. Le changement de stratégie d'investissement d'actifs modifie de manière non négligeable le niveau de capital à détenir mais également l'allocation de capital entre les différents propriétaires de risque. Nous montrons également qu'une prise de risque plus importante génère alors des profits plus élevés. L'arbitrage entre « risque » et « rentabilité » est donc à prendre en compte dans la gestion des activités.

Mots clés Allocation de Capital ; Mesure de Risque ; Solvabilité 2 ; ORSA ; Système de gouvernance ; Besoin Global de Solvabilité ; Gestion des risques ; Value-at-Risk ; Tail Value-at-Risk ; Méthode d'allocation de capital d'Euler ; Méthode d'allocation de capital proportionnelle ; Méthode d'allocation de capital de Shapley.

Abstract

The implementation of the ORSA process, defined by the pillar 2 of the prudential Solvency 2 Directive, should constitute a real opportunity for insurance companies to put the Risk at the heart of their business management. One of the possibilities that ORSA can offer, because of its prospective and entity specific aspects, is Capital Allocation. Such exercice requires, at first, to assess the capital to allocate, to define the business segmentation depending on how the company wants to manage its activities, and to choose a capital allocation method. All of this must be done by considering all the risks taken by the undertaking and the dependancies between them. The first part of our study provides an overview of all the different techniques to measure and aggregate risks, but also all the capital allocation methods that can be found in the literature. The aim of Capital allocation is to identify the most efficient business segments , while taking to account the risk level that the undertaking wants to be exposed to. To do so, monitoring indicators is essential. Such indicators must be chosen, considering both profitability and solvency aspects. With this in mind, the second part of this master thesis exposes different indicators that can be consider to manage risks efficiently.

Having defined all these concepts, we present a capital allocation method based on risk takers. The Solvency 2 Directive leads to an organizational structure based on risk and on four key functions (the risk management function, the compliance function, the internal audit function and the actuarial function). Roles and responsibilities of all teams must be precise and formalized. Since each operational team is mainly responsible for one or several risk(s), such a method enables to monitor the undertaking's business more efficiently than a risk based or business line based method. This approach makes it possible to define the objectives and limits in terms of risks for each operational team and the evaluation of the teams that consume too much capital, and inversely the most profitable ones. The relevance of this approach is illustrated through the example of a life insurance company, on which we apply our method. This exemple shows that change in asset investment strategy impacts the level of capital requirements but also the capital allocation between risk takers.

Keywords Capital Allocation ; Risk Measure ; Solvency 2 ; ORSA ; Overall Solvency Needs ; Risk Management Value-at-Risk ; Euler Capital Allocation Method ; Proportional Capital Allocation Method ; Shapley Capital Allocation Method.

Remerciements

Mes remerciements s'adressent, dans un premier temps, à Norbert Gautron pour m'avoir accueillie au sein de son cabinet GALEA & Associés mais également pour son écoute, son ouverture d'esprit et sa confiance.

Je remercie, bien évidemment, mon encadrant de mémoire, Pierre Thérond, pour m'avoir proposé ce sujet et pour m'avoir guidée dans l'élaboration de celui-ci. Je le remercie également pour ses bons conseils et sa bonne humeur. Ses compétences et ses connaissances du monde de l'actuariat m'ont permis de développer ma curiosité sur divers sujets : pour cela, je lui en suis particulièrement reconnaissante.

Je tenais également à remercier mon manager au cabinet, Fabien Perrucot, pour sa gentillesse, sa disponibilité et son suivi. Je suis heureuse de pouvoir continuer à travailler avec lui.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble du cabinet GALEA & Associés pour la bienveillance qui y règne et leurs sourires dans les bonnes comme dans les mauvaises périodes, et notamment à Sandra Dos Santos pour son extrême gentillesse et à Cédric Maxwell pour son aide précieuse.

Enfin, je tiens à saluer mes amis de l'ENSAE, Nadia Eng et David Quach, mais également Charlotte Huther et Perrine Carolo pour leur soutien.

Table des matières

Introduction

La prise de risque est à l'origine de l'activité des compagnies d'assurance. Un individu ou une organisation, qui souhaite se couvrir contre les aléas qu'il/elle subit, transfère ses risques à une société d'assurance. Pour assurer la pérennité de ses activités, celle-ci les mutualise et les gère. Les assureurs devraient alors avoir une vision globale et claire de tous les risques qu'ils supportent. Une culture de gestion des risques peut améliorer la situation et la solidité financière de l'entreprise.

Le dispositif d'évaluation interne des risques et de leur solvabilité, ou **ORSA** (*Own Risk and Solvency Assessment*), prévu dans le Pilier 2 de la Directive Solvabilité 2, se présente comme une réelle opportunité pour les assureurs, leur permettant ainsi d'intégrer l'aspect « risque » dans la gestion de leurs activités. Il est dans l'ambition de la Directive, de faire de l'ORSA, un outil de pilotage et d'aide à la décision. Contrairement aux exigences réglementaires de solvabilité (SCR, MCR) définies par le Pilier 1, l'ORSA se veut prospectif et spécifique à l'entreprise (*Entity Specific*) : à travers ce processus, ce sont les risques et les stratégies spécifiques à l'entreprise d'assurance qui y ressortent. Ainsi, peu d'indications ont été fournies par les autorités de contrôle sur les méthodes à utiliser. Ils préconisent trois études devant être contenues dans le dispositif ORSA :

- l'évaluation du **Besoin Global de Solvabilité**, ou **capital ORSA** ;
- l'évaluation du respect permanent des obligations réglementaires concernant la couverture des exigences réglementaires (SCR et MCR) et des exigences concernant le calcul des provisions techniques ;
- l'évaluation de la mesure dans laquelle le profil de risque de l'organisme s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le calcul du SCR.

La mise en place effective de ce processus requiert une bonne connaissance des risques encourus, c'est-à-dire son profil de risque, du niveau de risque global que l'entreprise souhaite prendre ou ne pas prendre mais également de ses stratégies et de ses plans d'action en termes de risques. L'exposition au risque souhaitée par l'entreprise constitue alors ce qu'on appelle l'**appétence au risque** de la compagnie. L'évaluation du profil de risque et de l'appétence au risque constitue un enjeu nouveau et décisif pour les assureurs. La détermination du profil de risque a longtemps intéressé les assureurs anglophones qui se sont dotés de processus de type *Enterprise Risk Management* (ERM), regroupant des méthodes et des outils tels que le « *Dynamic Financial Analysis* » (DFA) (Kaufmann et al.), préconisant une gestion de l'entreprise basée sur les risques et constituant une aide précieuse à la décision (Blum and Dacorogna (2004)). Du côté de la France, Thérond and Valade (2010) et Agenos (2006) étudient l'importance de l'intégration de la notion d'appétence au risque dans le pilotage d'une entreprise en mettant en lumière ses impacts sur la gestion de la compagnie. L'assureur doit tout d'abord identifier tous les risques, auxquels il est exposé, qu'ils soient quantifiables ou non, pour en dégager les risques les plus dangereux. La traduction quantitative des risques se fait *via* l'utilisation d'une mesure appropriée à la vision qu'a l'entreprise de son exposition au risque. La définition d'une mesure de risque peut être très vague. La littérature a fourni un certain nombre de propriétés pour les mesures de risque permettant une interprétation économique de celle-ci. Artzner et al. (1999) ont alors introduit la notion de « mesure de risque cohérente ». Pourtant, il n'existe pas de consensus quant aux propriétés que doit vérifier une bonne mesure de risque. Les réglementations des domaines bancaire et assurantiel, Bâle 2 (bientôt 3) et Solvabilité 2 privilégient la simplicité d'interprétation de la mesure de risque réglementaire en préconisant l'utilisation de la *Value-at-Risk*, qui n'est pourtant pas cohérente au sens de Artzner et al. (1999). Par ailleurs, les corrélations entre les risques doivent être modélisées de la façon la plus juste possible. Elles peuvent être formalisées à l'aide de l'utilisation de copules, par exemple. La Formule Standard modélise les corrélations *via* une matrice de corrélation. Celle-ci donne des corrélations linéaires qui peuvent être peu adaptées à la situation de l'entreprise. Des mesures de dépendance, autres que le coefficient de corrélation de Pearson, comme le rho de Spearman ou le tau de Kendall, peuvent être utilisées.

Ces différentes notions permettent alors de calculer un capital réflètant les risques pris par l'assureur. Il existe différents capitaux. Alors que le capital économique calculé dans le cadre du Pilier 1 de la Directive a un aspect normative, le **Besoin Global de Solvabilité** introduit l'ensemble des risques spécifiques à l'entreprise et ses stratégies opérationnelles. Celui-ci reflète alors l'appétence au risque de l'assureur. Elle présente une vision globale de sa prise de risque. Une déclinaison en une maille plus fine doit être établie pour une gestion pertinente des risques. Une agrégation des risques peut être faite suivant la taille et le type d'activité exercée par la compagnie. Une segmentation par ligne d'activité est particulièrement appréciée par les assureurs de type non-vie leur permettant de gérer leurs risques par produit. Au niveau d'un groupe, la segmentation par filiale peut se justifier. L'allocation de capital est la traduction même de cette déclinaison. Cette exercice a fait l'objet de nombreuses études du fait des enjeux liés à la diversification des risques. La littérature a proposé un certain nombre de techniques utlisant tant des notions de théorie des jeux que des concepts de finance d'entreprise. Parmi celles-ci, nous pouvons citer les méthodes proportionnelles, la méthode d'Euler, permettant le calcul des contributions de chacun des segments sur le risque global, mais également la méthode de Shapley utilisant la valeur de Shapley. Dans son mémoire d'actuariat, Decupère (2011) discute du choix des techniques d'agrégation des risques et d'allocation de capital en exposant les avantages et les défauts de chaque méthode. De son côté, Cummins (2008) reprend les diverses approches d'allocation de capital pour la maximisation de la valeur de l'entreprise d'assurance en se basant sur des mesures de risque différentes de la traditionnelle *Value-at-Risk* (VaR), comme l'*Expected Policyholder Deficit* (EPD) et sur des indicateurs de type RAROC (*Risk-Adjusted Return On Capital*). L'auteur s'inspire également des travaux menés par Merton and Perold (1993) et par Myers and Read (2001) qui préconisent une approche d'allocation de capital par un modèle de *pricing* d'option *put* (*Insolvency Put Option*). Dhaene et al. (2012), quant à eux, présentent des méthodes d'allocation basées sur la minimisation des pertes de chaque ligne d'activité. Dans leur sillage, Denault (2001) étudie les effets de diversification dans les méthodes d'allocation de capital en s'inspirant de notions de théorie des jeux. Par ailleurs, Ruhm and Mango (2003) et Kreps (2005) ont mis en place un algorithme d'allocation de capital, permettant l'application de différents techniques d'allocation et notamment celle de Myers and Read (2001). Cette algorithme a l'avantage d'être simple d'utilisation mais nécessite l'obtention de distribution de résultats aux titres de chacun des risques considérés. Il peut alors être utilisé dans le cadre d'une segmentation par ligne d'activité ou par filiale. Zec (2013) a proposé un exemple d'utilisation pour une compagnie d'assurance non-vie.

Le processus ORSA, s'inscrivant aux cotés des exigences en termes de système de gouvernance dans le Pilier 2 - Exigences qualitatives - de la Directive Solvabilité 2, nécessite la mobilisation de l'ensemble des équipes de la société d'assurance. La Directive Solvabilité 2 suggère une organisation structurelle de l'entreprise basée sur des fonctions clés permettant ainsi aux assureurs d'optimiser le pilotage de leurs activités. Alors que les équipes opérationnelles alimentent le dispositif, c'est du rôle de l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle (AMSB), en plus de valider les différents rapports et politiques (de gestion des risques, d'investissement, etc.), de définir l'appétence au risque de l'entreprise. Ces différentes stratégies doivent également prendre en compte les priorités de toutes les parties prenantes de l'entreprise (agences de notation, actionnaires, direction, etc.). Les problématiques auxquelles l'AMSB est exposé résident sur l'attribution des priorités entre les parties prenantes dans la politique de gestion mais également sur la difficulté de mise en œuvre de ce dispositif. La littérature préconise la formalisation d'une politique stratégique de l'entreprise.

La mise en place d'un dispositif ORSA constitue alors un point de départ pour les assureurs dans leurs processus de décision. De là, ils peuvent définir, à l'aide d'indicateurs de performance, leurs stratégies de risque, de capital, de réassurance ou encore d'investissement. Il peut s'avérer également utile pour le lancement de nouveaux produits, et notamment dans leurs tarifications et l'évaluation de leurs rentabilités futures. Par ailleurs, de par le caractère spécifique à l'entreprise (ou *Entity Specific*) du dispositif ORSA, l'intégration de la notion d'appétence au risque dans le pilotage stratégique d'une compagnie d'assurance constitue un avantage important, lui permettant ainsi d'arbitrer de manière optimale entre rentabilité et solvabilité. L'exercice d'**allocation du**

capital permet de gérer ces deux aspects en prenant en considération des seuils de tolérance et des niveaux cibles de prise de risque et ce, selon une segmentation des risques cohérente avec les activités de l'entreprise. L'assureur pourra attribuer à chaque segment de risque, un capital, également appelé **budget de risque**, conforme au niveau d'exposition de risque de celui-ci. De cet exercice, l'assureur pourra identifier les segments trop consommateurs de capital relativement à leurs expositions au risque ou dans le cas contraire, les segments peu gourmands en capital mais rentables pour l'entreprise.

A partir d'une allocation de capital, de nombreux indicateurs de pilotage peuvent être évalués. Ils se segmentent suivant les différentes dimensions de risque : résultat, valeur et solvabilité de l'entreprise. Au delà des indicateurs classiques utilisés habituellement dans la gestion d'entreprise, comme le *Return On Equity* (ROE) ou le *Return On Assets* (ROA), Holton (2011) a proposé des indicateurs de valeur de l'entreprise basés sur le risque comme le *Risk Adjusted Return On Capital* (RAROC) ou le *Return On Risk Adjusted Capital* (RORAC). Ces indicateurs permettent d'évaluer le profit d'une société par rapport au capital ajusté aux risques auxquels elle est exposée. Ceux-ci ont été étudiés par Albrecht (1997) qui propose une démarche théorique de gestion de la performance d'une compagnie d'assurance Non-Vie *via* une allocation de capital basée sur la *Value-At-Risk*. D'autres indicateurs peuvent être utilisées. La littérature a défini deux catégories d'indicateurs de pilotage de l'entreprise : les indicateurs clés de performance (ou *Key Performance Indicators*, KPI) comme le nombre d'affaires nouvelles et les indicateurs clés de risque (ou *Key Risk Indicators*, KRI), permettant le suivi de l'évolution du risque. Alors que les KPI intégrent les objectifs stratégiques de l'entreprise, les KRI se concentrent uniquement sur l'aspect « risque ». Les modes de pilotage de l'entreprise à l'aide de tels indicateurs seront alors discutés dans la deuxième partie de ce mémoire.

Alors que la Directive Solvabilité 2 préconise la mise en place d'un système de gouvernance plus structuré et porté par une gestion des risques, il parait alors pertinent d'allouer les risques par preneur de risque. La troisième partie présentera les motivations pour une telle allocation. Cette méthode devrait alors permettre une organisation structurelle de l'entreprise plus pertinente qu'un pilotage des activités uniquement par risque ou par ligne d'activité. Par exemple, la fonction ALM d'une compagnie d'assurance est principalement propriétaire des risques de marché et de rachat. Les décisions opérationnelles liées à ces deux risques sont donc à considérer au niveau de cette fonction. Cette démarche rend alors possible l'identification des objectifs et des limites d'activité par preneur de risque. Cependant, les principales difficultés que l'on peut rencontrer seront le traitement des risques partagés par plusieurs preneurs de risques mais également des effets de diversification. Elle sera illustrée par un exemple de modélisation d'une compagnie d'assurance fictive de type Vie. Celle-ci commercialise des contrats d'épargne. Cette application se focalisera sur la première composante du dispositif ORSA : l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité. De ce capital, la compagnie d'assurance pourra alors en déduire une allocation de capital par les méthodes proportionnelles et de contribution au risque global selon différents preneurs de risque. Nous mesurons les évolutions des capitaux (SCR et BSG) lors d'un changement de stratégie d'investissement d'actifs mais également de l'allocation de capital. Cet exemple montre également la nécessité d'arbitrer entre « risque » et « rentabilité ».

Première partie

Notions théoriques d'agrégation des risques et d'allocation de capital

1 Mesurer le risque

L'activité de l'assureur consiste à supporter les risques de ses assurés moyennant une contrepartie (la prime). De ce fait, pour gérer son activité de façon pérenne, une compagnie d'assurance doit maîtriser de manière pertinente les risques auxquels elle est exposée. Le premier exercice demandé aux actuaires est alors de mesurer ces risques. Cet exercice permet l'intégration du risque dans des problématiques de calcul de capital économique mais également de pilotage stratégique de l'entreprise. L'utilisation d'une mesure de risque appropriée est primordiale et peut faire l'objet de différences importantes dans, par exemple, l'évaluation du capital économique global.
Dans cette première partie, nous formalisons mathématiquement la notion de mesure de risque. Après avoir défini ce concept, nous présentons les mesures les plus utilisées et introduisons les notions de comparaison de risques. En pratique, les évaluations du risques peuvent se faire de façon diverse.

1.1 Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité et Γ l'ensemble des variables aléatoires réelles.

Définition I.1. Une **mesure de risque**, ρ, est une fonction définie sur l'ensemble Γ et à valeurs sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{array}{cccc} \rho & : & \Gamma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & X & \mapsto & \rho(X). \end{array} \tag{1.1}$$

$\rho(X)$ représente alors un montant monétaire dont la compagnie doit disposer pour se couvrir contre le risque X : il représente alors une perte lorsqu'il s'agit d'une valeur positive et d'un gain dans le cas contraire. La quantité $\rho(X)$ capte la dangerosité de X : plus $\rho(X)$ est grand, plus le risque X est dangereux. Il faut donc choisir une bonne mesure de risque qui permet une interprétation juste des risques encourus par l'entreprise.

1.2 Propriétés de mesure de risque

La définition d'une mesure de risque (1.1), reste vague : toute fonction d'une variable aléatoire peut alors représenter une mesure de risque. En exigeant de la mesure de risque de vérifier un certain nombre de caractéristiques, la fonction ρ peut modéliser alors des propriétés économiques intéressantes.

Définition I.2. Soient X et Y deux variables aléatoires dans l'espace $\mathcal{X}$ et une mesure de risque, ρ.

- ρ est **invariante par translation**, si pour tout $k \in \mathbb{R}$, alors $\rho(X+k) = \rho(X)+k$.
- ρ est **monotone**, si $X \geq Y$ p.s., alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- ρ est **homogène positive**, si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
- ρ est **sous-additive**, si $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$.
- ρ est **convexe**, si pour tout $\beta \in [0,1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\rho(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \beta\rho(X) + (1-\beta)\rho(Y)$.
- ρ est **invariante en loi**, si $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$, $\rho(X) = \rho(Y)$.
- ρ est **comonotone additive** si pour tout vecteur comonotone (X_1, X_2), $\rho(X_1+X_2) = \rho(X_1)+\rho(X_2)$.

Définition I.3. On dit qu'une mesure de risque est **monétaire** si elle est monotone et invariante par translation.

Remarque I.1. Si une mesure de risque est monétaire et homogène, alors la convexité est équivalente à la sous-additivité pour cette mesure.

L'invariance par translation signifie que l'ajout d'une perte certaine à un risque augmente de la même façon la mesure de ce risque. La monotonie d'une mesure de risque cohérente traduit le fait que si une variable aléatoire X représente une perte plus importante que la variable aléatoire Y, alors cette variable est plus risqué que cette dernière. L'axiome d'homogénéité est motivé par un argument de constance par rapport à un changement de numéraire : un changement de devise par exemple n'implique pas de risque supplémentaire. La propriété de sous additivité, quant à elle, implique la possibilité de diversification des risques agrégés : une compagnie d'assurance qui couvre deux risques n'a pas besoin de plus de capitaux que la somme de capitaux de deux entreprises distinctes combinant ces deux risques. Enfin, la relation de comonotonie additive traduit le fait que deux risques comonotones ne se mutualisent pas. Pour le calcul du capital de solvabilité, il est essentiel d'utiliser une mesure de risque vérifiant cette propriété. En effet, lorsque le risque U se produit, les risques comonotones X_1 et X_2 se produisent aussi avec la même croissance que celle de U.

Artzner et al. (1999) ont introduit la notion de mesure de risque cohérente.

Définition I.4. Une mesure de risque est dite **cohérente** si elle est monétaire (invariante par translation et monotone), homogène positive et sous additive.

Le recours à une mesure de risque cohérente permet un cadre mathématique confortable. Cependant, elle ne capte pas forcément les réalités économiques et peut s'avérer inutile et/ou contraignante dans l'étude de certaines problématiques. La littérature scientifique n'a pas trouvé de consensus sur les propriétés que doit vérifier une bonne mesure de risque. Dhaene et al. (2003) porte, notamment, un regard critique sur l'utilisation d'une mesure de risque cohérente. Par exemple, l'homogénéité reflète l'indépendance de la quantité de capital à disposer pour couvrir un risque par rapport à la devise dans laquelle elle est exprimée. Une mesure de risque vérifiant cette propriété ne prend alors pas en compte les effets de changement de devise qui peuvent être plus que proportionnels sur la mesure du risque. De plus, bien que la diversification permette à l'entreprise de décentraliser ses activités sans avoir recours à un besoin en capital supplémentaire, cette propriété ne permet en rien de réduire la probabilité de ruine.

Le domaine de l'assurance comme de la finance ne fait appel que très rarement à ce type de mesure et préfère l'utilisation d'une mesure de risque facilement interprétable par tous les acteurs du marché. Par exemple, la Directive Solvabilité 2 préconise pour l'évaluation du capital de solvabilité réglementaire, un calcul de *Value-at-Risk*, qui ne vérifie cependant pas tous les axiomes d'une mesure de risque cohérente, et notamment la propriété de sous-additivité.

Faisons alors un tour d'horizon des différentes mesures de risques les plus fréquemment rencontrées dans la littérature. Elles se divisent en trois catégories.

1.3 Mesures de risque usuelles

On pose $X \in \Gamma$ une variable aléatoire réelle quelconque représentant un risque et F_X sa fonction de répartition.

Rappelons au préalable quelques notions de fonctions de distribution inverses.

Définition I.5. La **fonction quantile** de la variable aléatoire X, notée F_X^{-1}, est donnée par :

$$F_X^{-1}(\alpha) = inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Définition I.6. Définissons également la **fonction de distribution inverse supérieure**, notée par F_X^{-1+}, et définie par :

$$F_X^{-1+}(\alpha) = sup\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Remarque I.2. Si X est continu, alors $F_X^{-1}(\alpha) = F_X^{-1+}(\alpha)$.

Définition I.7. La **fonction de distribution inverse η-mélange** de X, notée $F_X^{-1(\eta)}$, est définie par :

$$F_X^{-1(\eta)}(\alpha) = \eta F_X^{-1}(\alpha) + (1-\eta)F_X^{-1+}(\alpha), \quad \alpha \in (0,1), \quad \eta \in [0,1].$$

1.3.1 Mesures en un point

Les mesures en un point représentent des niveaux de quantile de la variable aléatoire X : elles reposent sur un point de la distribution. Les autorités de contrôle assurantielles et bancaires recommandent le recours à ce type de mesures de risque du fait de sa simplicité. La *Value-at-Risk* est la mesure la plus souvent rencontrée pour le calcul de capitaux réglementaires.

Définition I.8. La ***Value-At-Risk*** de niveau $\alpha \in (0,1)$ du risque $X \in \mathcal{X}$ s'écrit $VaR_\alpha(X)$ et est le quantile de niveau α :

$$VaR_\alpha(X) = inf\{x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha),$$

où F_X^{-1} est la fonction quantile de X comme définie précédemment.

Etant définie comme le quantile de X, la *Value-at-Risk* représente le montant de perte qui n'est dépassé que dans $1-\alpha\%$ des cas. La probabilité α est à déterminer en fonction du niveau de sécurité que la compagnie considère. Ce concept peut être également relié à des notions de théorie de la ruine. En effet, si une entreprise d'assurance dispose d'un montant $VaR_\alpha(X)$ et ne couvre qu'un risque X alors sa probabilité de ruine est de $1-\alpha$. De ce fait, la *Value-at-Risk*, est particulièrement facile d'interprétation et intuitive.

La *Value-at-Risk* n'est pas cohérente car elle ne vérifie pas la propriété de sous additivité. Cette mesure de risque est néanmoins invariante par translation, homogène et comonotone additive. Cela résulte des propriétés suivantes.

Propriété I.1. Soit $\alpha \in (0,1)$.

– Si g est une fonction strictement croissante et continue à gauche, alors

$$VaR_\alpha(g(X)) = g(VaR_\alpha(X)).$$

– Si g est une fonction strictement décroissante et continue à droite et si F_X est bijective, alors

$$VaR_\alpha(g(X)) \leqslant x \Leftrightarrow \alpha \leqslant F_{g(X)}(x).$$

Cependant, deux critiques peuvent être apportées à cette mesure de risque. Premièrement, la *Value-at-Risk* ne permet pas de capter le comportement de la distribution au delà du seuil α. Ensuite, les effets de diversification ne peuvent pas être pris en compte du fait de la non sous-additivité de la mesure. Cependant, la sous-additivité de cette mesure est vérifiée lorsqu'on considère des risques de distribution dite **elliptique** [1], c'est-à-dire pour des risques ayant des queues de distribution pas trop épaisses.

1.3.2 Écart type

L'écart type de la variable aléatoire X constitue une mesure de risque. Il est notamment utilisé dans le modèle de Markovitz (moyenne-variance) dans la théorie d'évaluation d'actifs. Il permet de déterminer la dispersion de la distribution. Cette mesure reste plutôt limitée dans son interprétation du fait qu'il peut exister des distributions différentes ayant la même volatilité mais pour lesquelles l'appréhension du risque est totalement différente. Il est notamment préférable d'utiliser de manière supplémentaire les moments de degré plus important, comme le *sknewness* ou le *kurtosis*. Rappelons que l'écart type n'est pas monotone donc non cohérent.

1. Le vecteur $\mathbf{X}$ de taille n a une loi elliptique si et seulement si $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu + AY$ où Y est une loi sphérique de générateur Ψ dans $\mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, A une matrice de dimension $n \times k$.

1.3.3 Mesures de dépassement espéré

Cette famille de mesure de risque permet la mesure des résultats espérés dépassant un certain seuil. Elle se compose des mesures de risque comme la *Conditional Tail Expectation* (CTE), la *Tail Value-at-Risk* (TVaR) ou encore l'*Expected Shortfall* (ES). L'un des enjeux, dans ce cas de figure, est alors de définir le seuil à considérer. A l'inverse des mesures de risque en un point, les mesures de dépassement espéré renseignent sur les queues de distribution.

Définition I.9. Soit X une variable aléatoire continue telle que $\mathbb{E}[X] < +\infty$.On définit la ***Tail Value-at-Risk*** (ou TVaR) au niveau α de la façon suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(X)du,$$

et peut se réécrire :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left((X - VaR_\alpha(X))^+\right).$$

La *Tail Value-at-Risk* a également rencontré un grand succès car elle précise le comportement de la distribution au-delà de la *Value-at-Risk*. La *Tail Value-at-Risk* est comonotone additive et contrairement à la *Value-at-Risk*, elle est cohérente. De plus, elle admet un chargement de sécurité par rapport à la prime pure ; $\mathbb{E}(X)$: $TVaR_\alpha(X) \geqslant TVaR_0(X) = \mathbb{E}(X)$.

Définition I.10. La ***Conditional Tail Expectation*** au niveau de probabilité α, notée $CTE_\alpha(X)$ est définie par :

$$CTE_\alpha(X) = \mathbb{E}(X|X > VaR_\alpha(X)).$$

Elle représente la perte espérée sachant que la *Value-at-Risk* au niveau α est dépassée.

Définition I.11. La ***Conditional Value-at-Risk*** de niveau α est l'excédent moyen de sinistre au delà de la VaR au niveau de probabilité α :

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)|X > VaR_\alpha(X)].$$

Définition I.12. L'***Expected Shortfall*** au niveau de probabilité α est définie comme une prime stop-loss :

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[(X - VaR_\alpha(X))^+].$$

L'*Expected Shortfall* représente le montant de la prime *Stop-Loss* avec pour un rétention de l'assureur égale à la Value-at-Risk au niveau α si X est la charge de brute de sinistres.
Il existe un lien entre ces différentes mesures de risque.

Propriété I.2. Pour le niveau $\alpha \in (0,1)$, on a la propriété suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}ES_\alpha(X),$$

et

$$CTE_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{\bar{F}_X(VaR_\alpha(X))}ES_\alpha(X).$$

où $\bar{F}_X$ est la fonction de survie de X.

Ces différentes notions sont alors relativement proches. Par ailleurs, dans le cas d'une variable aléatoire continue, ces différentes définitions sont confondues.

Propriété I.3. Dans le cas où la variable aléatoire X est **continue**, alors on a les égalités suivantes :

$$TVaR_\alpha(X) = CTE_\alpha(X) = CVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X).$$

1.3.4 Mesures de type transformation

Ces mesures permettent d'établir des ajustements sur la distribution originale pour obtenir une nouvelle distribution permettant une mesure plus aisée du risque. La différence entre la moyenne de la nouvelle distribution et celle de la distribution originale donne alors la mesure du risque. Parmi ces mesures de risque, on trouve les mesures de risque de Wang permettant de transformer, à l'aide d'une fonction de distorsion, la fonction de queue pour obtenir un chargement de sécurité par rapport à la prime pure.

Définition I.13. On appelle **fonction de distorsion** toute fonction croissante g telle que :

$$g \quad : \quad [0,1] \quad \rightarrow \quad [0,1] \quad \text{et } g(0)=0 \text{ et } g(1)=1.$$

Définition I.14. Une **mesure de distorsion** de fonction de distorsion g, est donnée par :

$$\rho_g(X) = \int_0^1 F^{-1}(1-x)dg(x).$$

Les mesures de risques de Wang sont les mesures de distorsion les plus utilisées.

Définition I.15. La **mesure de risque de Wang** associée à la fonction de distorsion g est définie par :

$$\rho_g(X) = \int_0^{\infty} g(\bar{F}_X(x))dx.$$

Remarque I.3.
- Si la fonction de distorsion g est définie par $g : x \rightarrow g(x) = x$ alors la mesure de risque associée à g est alors l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
- Si la fonction g est telle que $g(x) \geqslant x$, pour tout $x \in [0,1]$, alors la mesure de Wang ρ_g contient un chargement de sécurité puisque $\rho_g(X) \geqslant \mathbb{E}(X)$.
- De plus, nous remarquons que si $\forall x \in [0,1]$, $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, alors $\rho_{g_1}(X) \leqslant \rho_{g_2}(X)$.

Propriété I.4. La mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion, g, peut s'écrire en fonction de la Value-at-Risk :

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X)dg(\alpha).$$

Remarque I.4.
- Si la fonction de distorsion est définie par $g : x \rightarrow g(x) = 1\!\!1_{x \geqslant 1-\alpha}$ alors $\rho_g(X) = VaR_\alpha(X)$.
- La Value-at-Risk et la Tail Value-at-Risk font également partie de cette classe.

Les mesures de risque de Wang sont **homogènes**, **invariantes par translation** et **monotones**. Elles ne sont cependant pas cohérentes du fait de la non sous additivité de la *Value-at-Risk*. Seulement, celle-ci peut être sous additive et donc cohérente si la fonction de distorsion associée est concave. Une mesure de Wang pouvant s'écrire comme une somme de *Value-at-Risk*, elle est alors comonotone additive.

Il est essentiel de choisir une mesure de risque adaptée à l'étude que l'on souhaite menée. Pour des lois continues, voici le tableau de synthèse des différentes propriétés des mesures de risques :

	Mesures de risque				
Propriétés	VaR_α	Ecart-type	$TVaR_\alpha$	Mesure de distorsion	Mesure de Wang
Invariance par translation	✓	✓	✓	✓	✓
Monotonie	✓		✓	✓	✓
Homogénéité positive	✓	✓	✓	✓	✓
Sous additivité		✓	✓		
Cohérence			✓		
Invariance en loi	✓	✓	✓	✓	✓
Comonotonie additive	✓		✓	✓	✓

Table 1.1 – Les propriétés des mesures de risque

1.4 Comparaison de risques

L'objet de cette partie est de présenter les outils nécessaires pour classer les risques selon leurs dangerosités. Une mesure de risque ρ, comme on l'a vu précédemment, est à valeur dans $\mathbb{R}$. Intuitivement, on peut comparer les risques X et Y en étudiant $\rho(X)$ et $\rho(Y)$. Cela revient à dire que X est plus dangereux que Y si $\rho(X) \geq \rho(Y)$. On notera alors cet ordre : $X \succeq_\rho Y$. Cela a l'avantage de permettre la comparaison de deux lois de probabilités différentes. Cette relation n'est cependant pas antisymétrique, (i.e. si $X \succeq_\rho Y$ $\rho(X) \leq \rho(Y)$ et $Y \succeq_\rho X$ $\rho(Y) \leq \rho(X)$, alors cela n'implique pas que $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$). De plus, on peut également se retrouver dans un cas où pour deux mesures de risque différentes ρ et ρ' on ait $X \succeq_\rho Y$ et $Y \succeq_{\rho'} X$. C'est pourquoi, il est intéressant de présenter des notions d'ordre partiels qui disposent de davantage de propriétés. Nous présentons dans cette partie, les différents ordres que l'on trouve dans la littérature.

1.4.1 Dominance stochastique d'ordre 1

La dominance stochastique à l'ordre 1 est induite par la Value-at-Risk.

Définition I.16. Soient X et Y deux risques. Si X est considéré comme moins dangereux que Y en se basant sur la Value-at-Risk si :

$$VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y), \text{ pour tout } \alpha \in (0,1).$$

On dit que X **domine stochastiquement** Y **à l'ordre 1**. Nous adopterons la notation $X \preceq_{VaR} Y$.

Plusieurs propositions permettent d'établir des équivalences entre la dominance stochastique et des notions statistiques fréquemment utilisées.

Propriété I.5. Soient X et Y deux variables aléatoires.

$$\begin{aligned} X \preceq_{VaR} Y \quad & \text{si et seulement si} \quad F_X(t) \geq F_Y(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ & \text{si et seulement si} \quad \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $\bar{F}_X$ et $\bar{F}_Y$ les fonctions de survie de X et Y.

Propriété I.6. $X \preceq_{VaR} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$ pour toute fonction g croissante, lorsque ces espérances existent.

A partir de la proposition I.5, on peut en déduire que si les densités des variables aléatoires X et Y ne se croisent qu'une seule fois alors on peut en conclure la dominance stochastique entre les deux variables. Formellement, on a la proposition suivante :

Propriété I.7. Soient les variables aléatoires X et Y, si $f_X(t) \geq f_Y(t)$ pour $t < c$ et $f_X(t) \leq f_Y(t)$ pour $t > c$ alors $X \preceq_{VaR} Y$.

1.4.2 Dominance stochastique d'ordre 2

Comme la dominance stochastique d'ordre 1, celle d'ordre 2 est basée sur une mesure de risque fréquemment utilisée, la Tail Value-at-Risk.

Définition I.17. Soient X et Y deux variables aléatoires de moyenne finie, X est considérée moins dangereuse que Y au sens de la **dominance stochastique d'ordre 2** si :

$$TVaR_\alpha(X) \leq TVaR_\alpha(Y), \text{ pour tout } \alpha \in [0,1].$$

Nous notons alors $X \preceq_{TVaR} Y$.

Remarque I.5. La dominance stochastique d'ordre 2 est également appelée l'ordre ***stop loss*** ou **ordre convexe croissant**.

Une relation d'ordre découle de la dominance stochastique d'ordre 2 (ou ordre convexe croissant), l'ordre convexe, qui restreint la dominance stochastique d'ordre 2 aux variables ayant la même moyenne. On utilisera la notation $\preceq_{CX}$.

Définition I.18. Soient X et Y deux variables aléatoires.

$$X \preceq_{CX} Y \quad \begin{array}{ll} \text{si et seulement si} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y), \\ X \preceq_{TVaR} Y, \end{array} \right. \\ \text{si et seulement si} & \left\{ \begin{array}{l} TVaR_0(X) = TVaR_0(Y), \\ TVaR_\alpha(X) \leq TVaR_\alpha(Y), \text{ pour tout } \alpha \in (0,1). \end{array} \right. \end{array}$$

1.5 Approches induites de mesure de risque

Les notions présentées précédemment nécessitent de disposer des distributions des pertes aux titres des risques considérés. D'un point de vue opérationnel, il peut sembler difficile d'obtenir de telles distributions. La Directive Solvabilité 2 prévoit alors différentes méthodologies pour mesurer le risque.

1.5.1 Scénario stressé

La méthodologie du scénario stressé consiste à effectuer un choc au titre du risque considéré sur le bilan de la compagnie à la date initiale et à évaluer alors le niveau de fonds propres dont dispose la compagnie dans ce cas là. Le risque est alors mesuré comme la différence du niveau de fonds propres entre la situation normale et le scénario stressé.

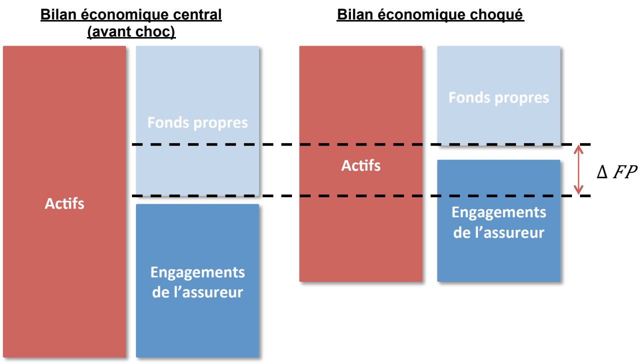

FIGURE 1.1 – Application d'un choc sur le bilan économique central [2]

2. Le bilan économique Solvabilité 2 sera explicité dans la deuxième partie

1.5.2 Mesure de risque de type Formule Standard non-Vie

Pour le cas particlier du module de Souscription Non-Vie, la Formule Standard du Pilier 1 a proposé une tout autre approche pour le SCR élémentaires. Le calcul pour l'obtention du quantile à $99,5\%$ est plutôt complexe. C'est pourquoi la Formule Standard propose de calculer le quantile sous l'hypothèse de log normalité de la distribution des réserves à 1 an. Elle introduit donc le coefficient suivant :

$$\rho(\sigma) = \frac{exp(q_{99,5\%}(\mathcal{N}(0,1)) \times \sqrt{ln(\sigma^2+1)})}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ est une loi normale centrée réduite.

En effet, si X est une variable log normale d'espérance μ et de variance η, alors

$$F_X^{-1}(99,5\%) = \rho\left(\frac{\eta}{\mu}\right) \times m.$$

Ce coefficient donne donc le montant à disposer par rapport à l'exposition au risque que prend l'assureur. L'exposition au risque est mesurée par le *Best Estimate*. Ainsi les SCR élémentaires de chacun de sous module i du module de Souscription non-Vie dans la Formule Standard sont donnés par :

$$SCR_i = \rho(\sigma_i) \times BE.$$

Et les chocs de la Formule Standard sont alors effectués sur la volatilité σ des distributions des réserves.

1.5.3 Projection de scénarios

La méthode la plus juste pour mesurer un risque est de projeter un grand nombre de scénarios pour obtenir une distribution de la différence des fonds propres économiques au titre du risque considéré. Ainsi, le risque est alors mesuré à partir de cette distribution via une mesure de risque. La Directive préconise l'utilisation de la Value-at-Risk pour le calcul de l'évaluation du capital réglementaire. L'obtention d'un échantillon assez important pour être fiable nécessite un temps de calcul conséquent et une technicité pointue et n'est donc pas à la portée de tous les assureurs. Ce type de méthode nécessite l'évaluation du bilan à la date initiale $t = 0$ et à la date $t = 1$ pour chaque simulation.

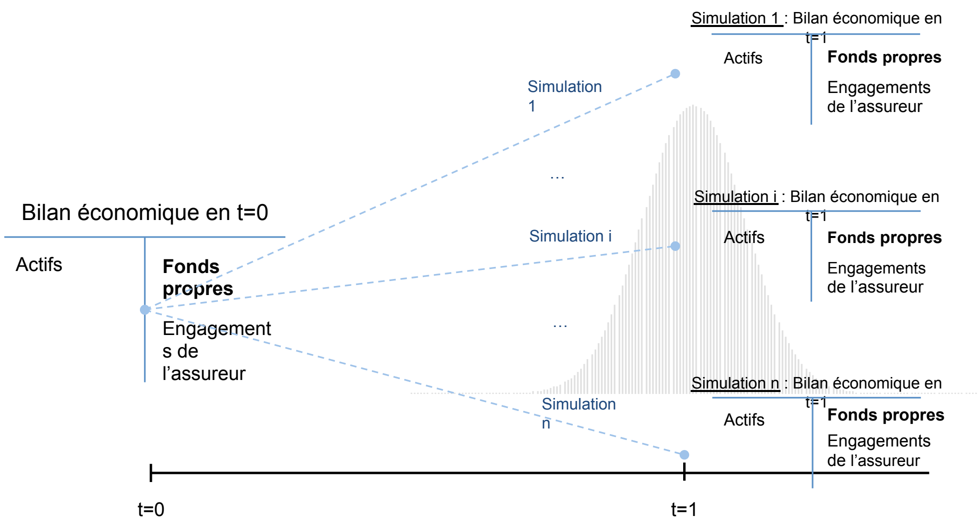

FIGURE 1.2 – Projection du bilan pour le calcul du capital économique au titre d'un risque

Le calcul de Fonds propres à la date $t = 1$ prend en compte les interactions entre les actifs et les passifs et les stratégies de gestion des risques. Ces projections permettent de représenter les bilans économiques de façon réaliste. Cette méthode reste très flexible et permet de capter la nature des spécificités de la compagnie d'assurance.

1.5.4 Réconciliation des deux approches

Les deux approches d'évaluation du capital sont totalement différentes. Alors que la Formule Standard préconise l'application de chocs sur les différents risques, l'approche par modèle interne (MI) applique de façon littérale la définition du capital économique par la Directive Solvabilité 2. Dans ce sens, on peut alors formaliser mathématiquement ces deux approches :

$$C_{QIS} = FP_0 - f(VaR_{0,5\%}(X)) \text{ ou } C_{QIS} = FP_0 - f(VaR_{99,5\%}(X)),$$
$$C_{MI} = FP_0 - VaR_{0,5\%}(f(X)).$$

où f est la fonction permettant le calcul des fonds propres par rapport à la valeur du risque X.

Or Devineau and Loisel (2009) ont montré que sous l'hypothèse de monotonie de la fonction « Fonds Propres », f, les deux approches sont équivalentes.

Par ailleurs, cette hypothèse peut être relâchée. Le résultat reste vrai lorsque la fonction, f, permettant le calcul des fonds propres est décroissante au delà du quantile à $99,5\%$ du facteur de risque X et prend des valeurs plus élevées lorsque X est inférieur à $VaR_{99,5\%}(X)$.

1.5.5 Projection sur un horizon de temps long

Lorsqu'il s'agit d'évaluer le besoin de capital à chaque date durant un horizon de temps long, il est alors nécessaire d'effectuer à chaque date d'évaluation un certain nombre de simulations à partir des bilans obtenus grâce à des simulations antérieures : on parle alors de simulations dans les simulations. En clair, si on suppose qu'on fait un nombre de simulations, N fixé à chaque date, la manière la plus juste d'évaluation du risque sur un horizon de temps T serait d'effectuer N^T simulations.

En pratique, plus on avance dans le temps, plus on peut diminuer le nombre de simulations à effectuer étant donné qu'on peut retomber sur des scénarios identiques de scénarios d'origine différents au cours du temps.

Cette approche demande une mise en oeuvre considérable en termes de temps de calcul. Des techniques de type Accèlération des Simulations dans les Simulations, ou de type écriture des fonds propres comme une fonction polynomiale de facteurs de risque (Curve Fitting, Least Square Monte Carlo) peuvent être envisagées.

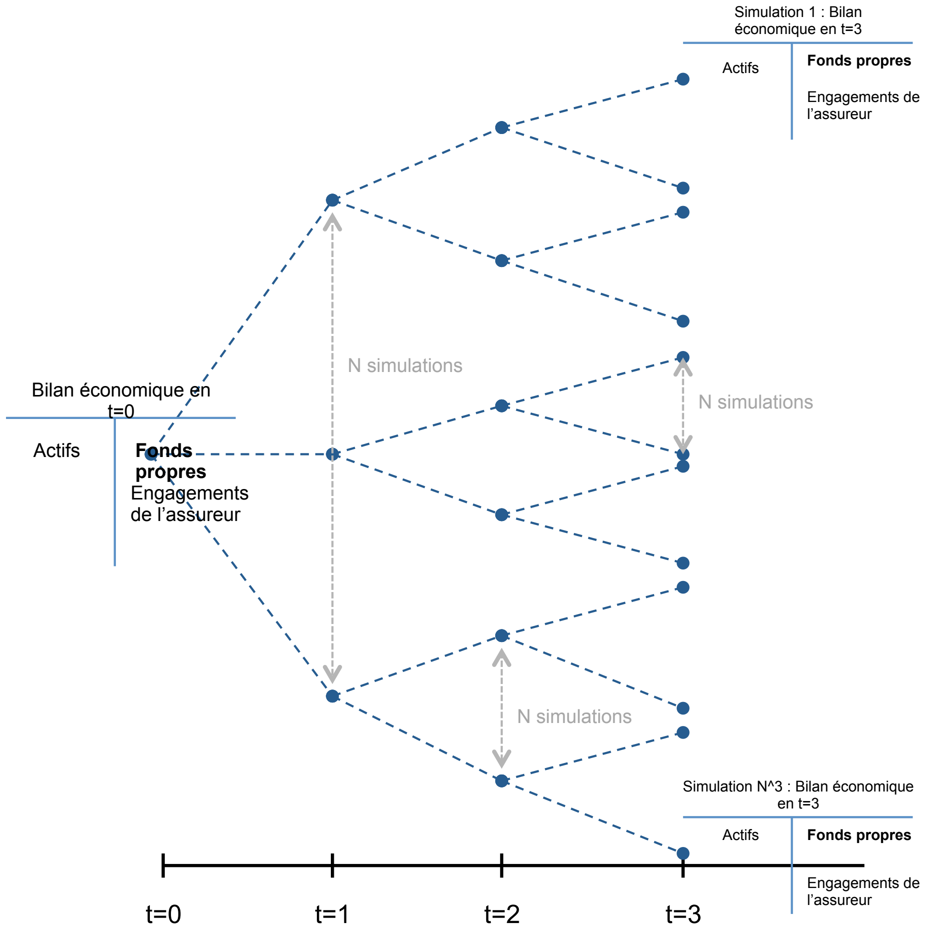

Figure 1.3 – Projection du bilan sur un horizon de temps long

2 Dépendance entre les risques

La survenance d'un sinistre peut impacter plusieurs postes du bilan de la compagnie d'assurance. Il n'est donc pas rare de percevoir une dépendance entre plusieurs risques. La littérature fournit de nombreux outils permettant de capter la force des dépendances entre variables aléatoires : la mesure et la structure de dépendance.

2.1 Mesure de dépendance

2.1.1 Définitions

Dans cette partie, nous présentons les différentes mesures de dépendance que l'on peut trouver dans la littérature. Nous considérons tout d'abord deux variables aléatoires.

Définition I.19. Une **mesure de dépendance** est une application définie sur l'ensemble des couples de variables aléatoires et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et est de la forme :

$$\delta \ : (X,Y) \mapsto \delta(X,Y) \in \mathbb{R}^+.$$

Ainsi, $\delta(X,Y)$ permet de capter la force de la dépendance entre les variables X et Y.

Bien que peu restrictive, il est convenable que la mesure de dépendance, comme la mesure de risque, possède quelques bonnes propriétés.

Définition I.20. Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques ayant respectivement F_X et F_Y comme fonctions de répartition. Une mesure de dépendance δ est une **mesure de concordance** si elle possède les propriétés suivantes :

(1) δ est **symétrique**, si $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$;

(2) δ est **normalisé**, si $1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$;

(3) $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow (X,Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)\right)$ où $U \sim \mathcal{U}[0,1]$;

(4) $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow (X,Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U)\right)$ où $U \sim \mathcal{U}[0,1]$;

(5) si f est une fonction strictement monotone quelconque,

$$\delta(f(X),Y) = \begin{cases} \delta(X,Y) & \text{si } f \text{ croissante,} \\ -\delta(X,Y) & \text{si } f \text{ décroissante.} \end{cases}$$

Une mesure de dépendance δ ayant la propriété suivant $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X$ et Y sont indépendantes n'est pas concordante. En revanche, la plupart des mesures de dépendance vérifie l'implication :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Rightarrow \delta(X,Y) = 0 \text{ pour } \delta \text{ une mesure de dépendance concordante.}$$

2.1.2 Coefficient de corrélation de Pearson

Ce coefficient est également appelée coefficient de corrélation linéaire car il capte les structures de dépendance linéaire.

Définition I.21. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments jusqu'à l'ordre 2. Le **coefficient de corrélation de Pearson** ou **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y, noté $r(X,Y)$ est défini par :

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}.$$

Remarque I.6.
- Plus ce coefficient est élevé, plus la dépendance entre les deux variables aléatoires sera importante.
- Notons tout de même que $|r(X,Y)| \leq 1$ pour X et Y deux variables aléatoires admettant des moments jusqu'à l'ordre 2.
- Une corrélation positive montre que les deux variables varient dans le même sens alors qu'une corrélation négative implique des mouvements dans le sens opposé.
- Le coefficient de corrélation de Pearson prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$.

Propriété I.8. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant au moins des moments d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes, alors $r(X,Y) = 0$. La réciproque est cependant fausse.

Le coefficient de corrélation de Pearson semble peu satisfaisant du fait de la forte rigidité de la structure de dépendance linéaire. De plus, il n'est pas une mesure de concordance car il ne vérifie pas les propriétés (3) et (4) de la définition (I.20). Pour remédier aux défauts de ce coefficient, la littérature propose d'autres mesures de dépendance permettant l'étude de la corrélation non affine de deux variables aléatoires.

2.1.3 Le tau de Kendall

Définition I.22. Soit (X_1,X_2) le couple de variables aléatoires dont on connait les fonctions marginales F_{X_1} et F_{X_2}. Le **tau de Kendall**, ou le **coefficient de corrélation des rangs de Kendall** de (X_1,X_2), noté $\tau(X_1,X_2)$, est donné par :

$$\tau(X_1,X_2) = \mathbb{P}\left[(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) > 0\right] - \mathbb{P}\left[(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) < 0\right].$$

où $(X_1^{\perp},X_2^{\perp})$ est un couple de variables aléatoires indépendant de (X_1,X_2) possédant les mêmes marginales.

Remarque I.7. Le tau de Kendall prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$

On peut montrer facilement que le tau de Kendall peut s'écrire différemment.

Propriété I.9. Soit le couple (X_1,X_2) de fonctions de répartition continues F_{X_1} et F_{X_2}. On peut donc réécrire le tau de Kendall de la façon suivante :

$$\tau(X_1,X_2) = 4\mathbb{E}\left(F_{X_1,X_2}(X_1,X_2)\right) - 1.$$

où F_{X_1,X_2} est la fonction de répartition jointe de (X_1,X_2).

Remarque I.8. Le tau Kendall est une mesure de concordance comme définie par I.20

La définition du tau de Kendall, I.22, permet d'en donner un estimateur simple donné pour un échantillon $(x_t,y_t)_{1\leq t\leq T}$ par :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{(T-1)T}\sum_{i=2}^{T}\sum_{j=1}^{i-1} sign[x_i - x_j)(y_i - y_j)].$$

2.1.4 Le rho de Spearman

Le rho de Spearman étudie non pas la corrélation des valeurs prises par les variables aléatoires en elles-mêmes comme le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, mais la dépendance entre les rangs de ces valeurs.

Définition I.23. Soit le couple (X_1,X_2) de fonctions de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2} continues. Nous introduisons, comme précédemment, le couple de variables aléatoires $(X_1^{\perp},X_2^{\perp})$ indépendant de (X_1,X_2) et possédant les mêmes marginales. Le **rho de Spearman** est défini de la manière suivante :

$$\rho_S(X_1,X_2) = 3\left[\mathbb{P}\left((X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) > 0\right)\mathbb{P}\left((X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) < 0\right)\right].$$

Il existe un lien direct entre le rho de Pearson et le rho de Spearman.

Propriété I.10. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires de fonctions de répartition marginales continues. On a la relation suivante :

$$\rho_S(X_1, X_2) = r(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Remarque I.9. Le rho de Spearman est une mesure de concordance comme définie par I.20

2.2 Dépendance de queue

La notion de dépendance de queue propose une description de la dépendance au niveau des queues de distribution qui peut être particulièrement utile lors de la survenance simultanée de valeurs extrêmes. Contrairement aux mesures de dépendance présentées précédemment, elle permet une étude locale et non sur l'ensemble de la distribution.

Définition I.24. La coefficient de dépendance de queue inférieure (*lower tail dependence coefficient*) des variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y, est donné par :

$$\lambda_L(X,Y) = \lim_{\alpha \to 0^+} \mathbb{P}\left(X \leq F_X^{-1}(\alpha) | Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)\right).$$

Définition I.25. La coefficient de dépendance de queue supérieure (*upper tail dependence coefficient*) des variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y, est donné par :

$$\lambda_U(X,Y) = \lim_{\alpha \to 1^-} \mathbb{P}\left(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha)\right).$$

Si $\lambda_U(X,Y) \in]0,1]$, alors on dit que X et Y sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution et si $\lambda_U(X,Y) = 0$, alors X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution. La relation peut être également établie en considérant $\lambda_L(X,Y)$ et le niveau inférieur de la queue de distribution.

2.3 Structure de dépendance

Nous avons vu précédemment que le coefficient de corrélation linéaire ne capte que la dépendance linéaire entre deux variables aléatoires : un coefficient de Pearson nul ne veut pas dire que les variables sous jacentes sont indépendantes mais qu'il n'existe pas de relation affine entre ces deux variables. En effet, la dépendance peut se présenter sous différentes formes. Nous présentons dans cette partie plusieurs structures de dépendance. Introduisons d'abord le cadre d'étude.

2.3.1 Les espaces de Fréchet

Soient $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires, de fonction de répartition jointe $F_{X_1,...,X_n}$ définie sur $\bar{\mathbb{R}}^n$ et à valeurs dans $[0,1]$ telle que :

$$F_{X_1,...,X_n} \quad : \quad (x_1,...,x_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n \quad \mapsto \quad F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, ..., X_n \leqslant x_n).$$

Définition I.26. Soient $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ des fonctions de répartition univariées. La **classe de Fréchet** $\mathcal{F}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ contient tous les vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ...X_n)$ dont $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ sont les fonctions de répartition marginales :

$$F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \leqslant x),\ x \in \mathbb{R} \text{ et } i = 1, ..., n.$$

Dans la classe de Fréchet $\mathcal{F}(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$, il existe deux éléments jouant des rôles particuliers : la borne supérieure et la borne inférieure de Fréchet.

Définition I.27. La fonction de répartition W définie par :

$$W(\mathbf{x}) = min\{F_{X_1},...F_{X_n}\},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

est la **borne supérieure de Fréchet** dans $\mathcal{F}(F_{X_1},...,F_{X_n})$.

Définition I.28. De la même manière, la fonction de répartition M définie par :

$$M(\mathbf{x}) = max\{\textstyle\sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - (n-1), 0\},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

est la **borne inférieure de Fréchet** dans $\mathcal{F}(F_{X_1},...,F_{X_n})$.

Propriété I.11. L'espace de Fréchet $\mathcal{F}(F_{X_1},...,F_{X_n})$ est bornée, au sens où pour tout $F_{\mathbb{X}} \in \mathcal{F}(F_{X_1},...,F_{X_n})$,

$$M(\mathbf{x}) \leqslant F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leqslant W(\mathbf{x}).$$

2.3.2 Comonotonie et antimonotonie

La notion de comonotonie modélise une dépendance parfaite entre plusieurs risques.

Définition I.29. Un couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit **comonotone** s'il existe des fonctions croissantes h_1, h_2 et une variable aléatoire Z telles que :

$$\mathbf{X} =_{loi} (h_1(Z), h_2(Z)).$$

Définition I.30. Un couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit **antimonotone** s'il existe une fonction croissante h_1 et une fonction décroissante h_2 et une variable aléatoire Z telles que :

$$\mathbf{X} =_{loi} (h_1(Z), h_2(Z)).$$

La notion de comonotonie veut facilement s'étendre à des dimensions supérieures à 2.

Définition I.31. Un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ est dit **comonotone** s'il existe des fonctions non décroissantes $h_1, ..., h_n$ et une variable aléatoire Z telles que :

$$\mathbf{X} =_{loi} (h_1(Z), ..., h_n(Z))$$

Le vecteur $(X_1, ..., X_n)$ est donc fonction d'une unique variable aléatoire ; les dépendances entre les composantes du vecteur sont alors très fortes. La comonotonie d'un vecteur de risques rend alors l'étude de la dépendance entre celles-ci, simple : il est ainsi seulement nécessaire de considérer qu'un seul risque. De là découle un certain nombre de propriétés intéressantes.

Propriété I.12. Le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ est dit comonotone si et seulement si, il admet la borne supérieure de Fréchet, W, comme fonction de répartition.

Propriété I.13. Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur comonotone dont la fonction de répartition jointe appartient à $\mathcal{F}(F_{X_1},...,F_{X_n})$ avec $F_{X_1},...F_{X_n}$ les fonctions de répartition marginales continues et croissantes. On a alors :

$$VaR_\alpha(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n VaR_\alpha(X_i).$$

On dit dans ce cas là, que la Value-at-Risk est additive.

Bien que très aisée d'utilisation, la notion de comonotonie des risques est très peu rencontrée en pratique.

2.3.3 Dépendance positive par quadrant

La dépendance positive par quadrant compare un couple de variables aléatoires avec sa version indépendante.

Définition I.32. Le couple (X_1, X_2) de fonctions de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2} et dont la fonction de répartition F_{X_1,X_2} appartient à $\mathcal{F}(F_{X_1}, F_{X_2})$ est dit **dépendant positivement par quadrant (PQD)** lorsque :

$$\bar{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq \bar{F}_{X_1}(x_1)\bar{F}_{X_2}(x_2),$$

pour tous x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$.

Cela signifie que la probabilité que le vecteur (X_1, X_2) soit dans le quadrant supérieur droit au point (x_1, x_2) est supérieure à la probabilité que sa version indépendante y soit.

La notion de dépendance positivement par quadrant donne une caractérisation forte de l'indépendance des variables considérées.

Propriété I.14. Soit (X_1, X_2) un couple dépendant positivement par quadrant. Alors on a les équivalences suivantes : X_1 et X_2 sont indépendants $\Leftrightarrow r(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow \tau(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_S(X_1, X_2) = 0$

D'autres structures de dépendance (comme la comparaison supramodulaire), existent, elles ne seront pas présentées dans le cadre de ce mémoire. Le lecteur pourra se reporter à la thèse de Thérond (2007).

2.4 Modélisation de la dépendance : les copules

Pour modéliser la dépendance entre plusieurs variables aléatoires, il est intuitif d'identifier la densité jointe de ces risques car elle permet alors de capter leur structure de dépendance. Il n'est cependant pas facile d'obtenir cette fonction de répartition. La théorie des copules permet le passage de lois marginales, facilement discernables, à une distribution jointe des risques tout en contrôlant la structure de dépendances entre celles-ci via le théorème fondamental de Sklar.

2.4.1 Définitions

Définition I.33. Une **copule** à n dimensions est une application C de $[0,1]^n$ à valeurs dans $[0,1]$ satisfaisant :
- $C(u_1, ..., u_{i-1}, 0, u_{i+1}, ..., u_n) = 0$, $\forall i = 1, ..., n$.
- $C(1, ..., 1, u, 1, ..., 1) = u$, $\forall 0 \leqslant u \leqslant 1$.
- C est n-croissante, c'est-à-dire pour chaque $B = \prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i] \subseteq [0,1]^n$,

$$\int_B dC(u) = \sum_{\mathbf{z} \in x_{i=1}^{d} x_i, y_i} (-1)^{N(\mathbf{z})} C(\mathbf{z}) \geqslant 0,$$

où $N(\mathbf{z}) = \sharp k : z_k = x_k$.

Le théorème de Sklar permet une écriture plus aisée et interprétable de la notion de copule.

Théorème I.1 (Théorème de Sklar)**.** *Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles. On note F_{X_i} la fonction de répartition marginale de X_i, $i = 1, ..., n$ et $F_{X_1,...,X_n}$ la fonction de répartition jointe du n-uplet $(X_1, ..., X_n)$. Alors il existe une copule $C : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n, F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)).$$

Si $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ sont continues alors la copule C est unique.

Réciproquement, si C est une copule et si $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ sont des fonctions de répartition univariées, alors la fonction $F_{X_1,\ldots,X_n}$ définie comme ci-dessus est une fonction de répartition multivariée dans $\mathcal{F}(F_1, \ldots, F_n)$ ayant pour marginales $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$.

Remarque I.10. Si $f_{X_1,\ldots X_n}$ est la densité du vecteur $(X_1, ..X_n)$ de copule C dont les densités marginales s'écrivent $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$, alors

$$f_{X_1,\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) c(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)), \tag{2.1}$$

avec $c(u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \ldots \partial u_n} c(u_1, \ldots, u_n)$.

Le théorème propose un résultat important. L'étude de l'agrégation des risques peut alors se faire en deux étapes :

(1) Analyse des risques individuellement ;

(2) Analyse de la structure de dépendance entre les variables aléatoires.

Il est alors nécessaire de trouver une copule adaptée définissant la structure de dépendance des risques considérés. Il existe un grand nombre de copules permettant de modéliser différentes situations. Dans les deux sections suivantes, nous présentons les copules les plus utilisées, les plus flexibles mais également les plus simples. Elles sont reparties dans deux grandes familles : les copules elliptiques et les copules archimédiennes.

2.4.2 Copules elliptiques

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés réelles de taille n.

Définition I.34. On appelle **loi elliptique** une loi continue de paramètre de position $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et de matrice symétrique définie positive $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ si sa densité, f, peut s'écrire :

$$f(x) = (det\Sigma)^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)'),$$

où g est une fonction à valeurs positives vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} g(xx')dx = 1$

On note alors $\Xi(\mu, \Sigma, g)$ la famille elliptique associée à la même fonction g et aux paramètres μ et Σ.

Définition I.35. Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n) \sim \Xi(\mu, \Sigma, g)$ et F_g la fonction de répartition des variables $\frac{X_i}{\sqrt{\Sigma_{i,i}}}$. On appelle **copule elliptique** de paramètres μ, Σ et g :

$$\left(F_g\left(\frac{X_1}{\sqrt{\Sigma_{1,1}}}\right), ..., F_g\left(\frac{X_n}{\sqrt{\Sigma_{n,n}}}\right) \right).$$

La copule gaussienne et la copule de Student sont deux copules elliptiques les plus couramment rencontrées dans la littérature.

Copule gaussienne La copule gaussienne, notée C_{Norm}, est définie de la façon suivante :

$$C_{Norm}(\mathbf{t}) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(t_1), ..., \Phi^{-1}(t_n)), \quad \mathbf{t} \in [0,1]^n,$$

où Φ_Σ est la fonction de répartition d'un vecteur normal à n dimensions, centré et de matrice de variance covariance Σ et Φ^{-1} l'inverse généralisée de la fonction de répartition normale centrée et réduite univariée.

La copule gaussienne est peu adaptée aux valeurs extrêmes car elle ne présente pas de dépendance de queue. Elle permet de modéliser une structure de dépendance linéaire à l'image d'une structure de dépendance par un coefficient de corrélation linéaire.

Copule de Student Soit M une matrice diagonale définie positive de dimension n avec $diag(M) = 1$ et $t_{M,v}$ la fonction de répartition d'une loi de Student multivariée standard de dimension n de v degrés de liberté et de matrice de corrélation M. La copule de Student, $C_{t_{M,v}}$, est alors définie par :

$$C_{t_{M,v}}(\mathbf{u}, M) = t_{M,v}(t_v^{-1}(u_1), ..., t_v^{-1}(u_n)), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^n.$$

où t_v est la fonction de répartition d'une Student univariée standard de v degrés de liberté.

Contrairement à la copule gaussienne, cette structure permet de capter les dépendances extrêmes positives comme négatives entre les différents risques à travers son degré de liberté. Cependant, lorsque le degré de liberté v tends vers $+\infty$, alors la copule de Student est égale à la copule Gaussienne.

2.4.3 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes ont été introduites par Genest and MacKay (1986), et sont basées sur une transformation permettant l'indépendance des marginales.

Définition I.36. Soit φ une fonction décroissante convexe de $(0,1]$ et à valeurs dans $[0,+\infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$. Si $\varphi(0) < +\infty$, alors on peut définir la fonction quasi-inverse :

$$\varphi^{(-1)}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leqslant t \leqslant \infty. \end{cases}$$

Définition I.37. Soit φ une fonction décroissante convexe définie sur $(0,1]$ et à valeurs dans $[0,+\infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$ et on suppose que φ^{-1} est d-complètement monotone (continue et de dérivées monotones et de signe alterné, i.e. pour tout $k = 0,1,...,d, (-1)^k \partial^k \varphi(t)/\partial t^k \geqslant 0$). Une copule archimédienne de générateur φ est définie par :
Quelque soit $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n) \in [0,1]^n$,

$$C(\mathbf{t}) = \varphi^{-1}(\varphi(t_1) + ... + \varphi(t_n)), \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i) \leqslant \varphi(0)$$
$$C(\mathbf{t}) = 0 \text{ sinon.}$$

La fonction φ doit être de classe C^2 telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(t) \leq 0$ et $\varphi''(t) \geqslant 0$.

Propriété I.15. Soit $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires Soit Z une variable aléatoire telle que :
- la transformée de Laplace de Z est $\Psi = \varphi^{-1}$;
- conditionnellement à Z, les variables $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes ;
- $\mathbb{P}(X_i \leqslant x|Z) = exp\left(-\varphi\left(F_{X_i}(x)\right)\right)^Z$

alors la copule de $(X_1, ..., X_n)$ est

$$C(\mathbf{t}) = \varphi^{-1}(\varphi(t_1) + ... + \varphi(t_n)), \mathbf{t} \in [0,1]^n.$$

Le tableau ci-dessous présente les principales copules archimédiennes :

Nom	**Fonction φ**	**Copule**	**Tau de Kendall** [1]
Indépendance	$-ln(t)$	$\prod_{i=1}^n t_i$	
Clayton	$u^{-\theta} - 1,\ \theta \leqslant 0$	$(t_1^{-1/\theta} + ... + t_n^{-1/\theta} - (n-1))^{-\theta}$	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Franck	$-ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right),\ \theta \neq 0$	$-\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta t_1}-1)...(e^{-\theta t_2}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right)$	$1 - 4\theta^{-1}(1 - D_1(\theta))$
Gumbel	$(-ln(t))^\theta, \theta \leqslant 1$	$exp\left(-\left((-ln(t_1))^\theta + ... + (-ln(t_n))^\theta\right)^{1/\theta}\right)$	$\frac{(\theta-1)}{\theta}$

TABLE 2.1 – Les principales copules archimédiennes

où D_1 est la fonction de Debye

L'un des avantages des copules archimédiennes réside dans le choix de la dépendance de queue grâce au générateur φ. Par exemple, la copule de Gumbel permet la représentation de la dépendance des événements extrêmes en jouant sur le paramètre θ. Par contre, la copule de Gumblel n'a pas de dépendance de queue à gauche mais admet une dépendance de queue à droite.

2.4.4 Lien entre mesures de dépendance et copules

Le concept de copule est très utile dans l'analyse de la dépendance de queue.

Définition I.38. Soient X et Y deux variables aléatoires de copule C, alors on a : $\lambda_L(X,Y) = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}$ et $\lambda_U(X,Y) = \lim_{u \to 0^+} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}$.

La copule de deux variables aléatoires représentant la structure de dépendance, il est alors intuitif d'exprimer les mesures de dépendance en fonction de cette copule.

Théorème I.2. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de copule C, alors*

$$\tau(X,Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) dC(u,v) - 1 = 1 - 4 \iint_{[0,1]^2} \partial_u C(u,v) \partial_v C(u,v) dudv.$$

On peut également réécrire cette valeur :

$$\tau(X,Y) = 4\mathbb{E}\left(C(U,V)\right) - 1,$$

avec $U,V \sim U(0,1)$.

Théorème I.3. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de copule C, alors le rho de Spearman s'écrit :*

$$\rho_S(X,Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv dC(u,v) - 3 = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) dudv - 3.$$

Il existe également des propriétés reliant la notion de dépendance positive par quadrant et les copules.

Propriété I.16. Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires continues possédant la copule C. Alors (X_1, X_2) est PQD si et seulement si :

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2,$$

pour tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.

Remarque I.11. Les copules de Gumbel et de Clayton impliquent une dépendance positive par quadrant. De plus, la copule de Frank implique une dépendance positive par quadrant $\theta \geq 0$

L'obtention d'une copule pour un vecteur de variables aléatoires permet donc à la fois de modéliser la structure de dépendance entre celles-ci mais également de mesurer la force de la relation entre elles. Le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage Nelson (2006) pour plus de détails sur les processus de choix et d'estimation d'une copule.

3 Agrégation des risques

Pour calculer des capitaux tels que le capital économique (ou SCR) ou le Besoin Global de Solvabilité (ou capital ORSA), l'assureur est amené à agréger les risques auxquels il est exposé. Cette étape d'agrégation est alors indispensable. Il existe cependant plusieurs façons de regrouper les risques. Le terme "agrégation des risques" peut signifier le rapprochement de capitaux requis élémentaires calculés à partir des risques pris un à un, ou le calcul d'un capital requis d'une agrégation de risques. Mathématiquement ces deux notions se traduisent respectivement de la manière suivante :

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, où n est le nombre de risques ou de segments de risques considérés, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une agrégation de capitaux élémentaires, $\rho(X_i)$ $\forall i \in 1,...,n$, se traduit alors par $f(\rho(X_1),...,\rho(X_n))$ où ρ est une mesure de risque. Cette quantité donne alors le capital consolidé.
- La deuxième vision qu'on peut donner au terme « agrégation des risques » est mathématiquement plus littérale. En prenant une fonction g définie sur l'ensemble Γ^n [1] et à valeurs dans Γ. $g(X_1,...X_n)$ donne alors une variable aléatoire réelle agrégée. Le capital requis au titre de l'agrégation de ces risques pourra être calculé par $\rho(g(X_1,...,X_n))$ où ρ est une mesure de risque.

3.1 Agrégations de capitaux type Formule Standard

La Formule Standard de la Directive Solvabilité 2 définit une agrégation de capitaux élémentaires sur plusieurs niveaux et peu adaptée pour une approche *Entity Specific*. Les paramètres de corrélation entre les capitaux élémentaires et les périmètres de risques sont notamment communs à toutes les compagnies d'assurance, et ne prennent pas en compte la composition du portefeuille de risques spécifiques de l'entreprise.

La Formule Standard de la Directive Solvabilité 2 repose sur une agrégation des risques sur trois niveaux. On parle d'approche ***Bottom-Up*** : en effet, les risques dits élémentaires (risque actions, taux, souscription, etc.) sont regroupés en sous ensembles formant ainsi des modules de risques (risque Marché, risque Non-Vie, etc.). La Directive propose une agrégation en deux étapes des capitaux réglementaires élémentaires aux titres des risques pour obtenir un capital réglementaire de solvabilité global, le **BSCR**. On distingue deux types d'agrégation : le regroupement des capitaux élémentaires, dit **agrégation intra-modulaire** et l'agrégation des capitaux entre les modules de risques, appelée **agrégation inter-modulaire**. Une dernière agrégation est prévue pour intégrer les divers ajustements et les risques opérationnels.

Pour modéliser les dépendances entre les risques élémentaires ou entre les modules de risque, des matrices de corrélations sont utilisées. Le calcul du coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires permet de lier ces variables par une droite. Cette structure de dépendance rend les calculs de capitaux économiques aisés. Cependant, les dépendances observées entre les risques sont très peu souvent linéaires : c'est pourquoi cette démarche semble peu réaliste.

Enfin, le calcul du capital économique se fait par l'agrégation de capitaux économiques élémentaires, et non par une agrégation des risques eux-mêmes. La structure de dépendance reflète une relation entre capitaux et non entre risques.

1. On rappelle que Γ est l'ensemble des variables aléatoires réelles et n est le nombre de risques ou de segments de risque considérés

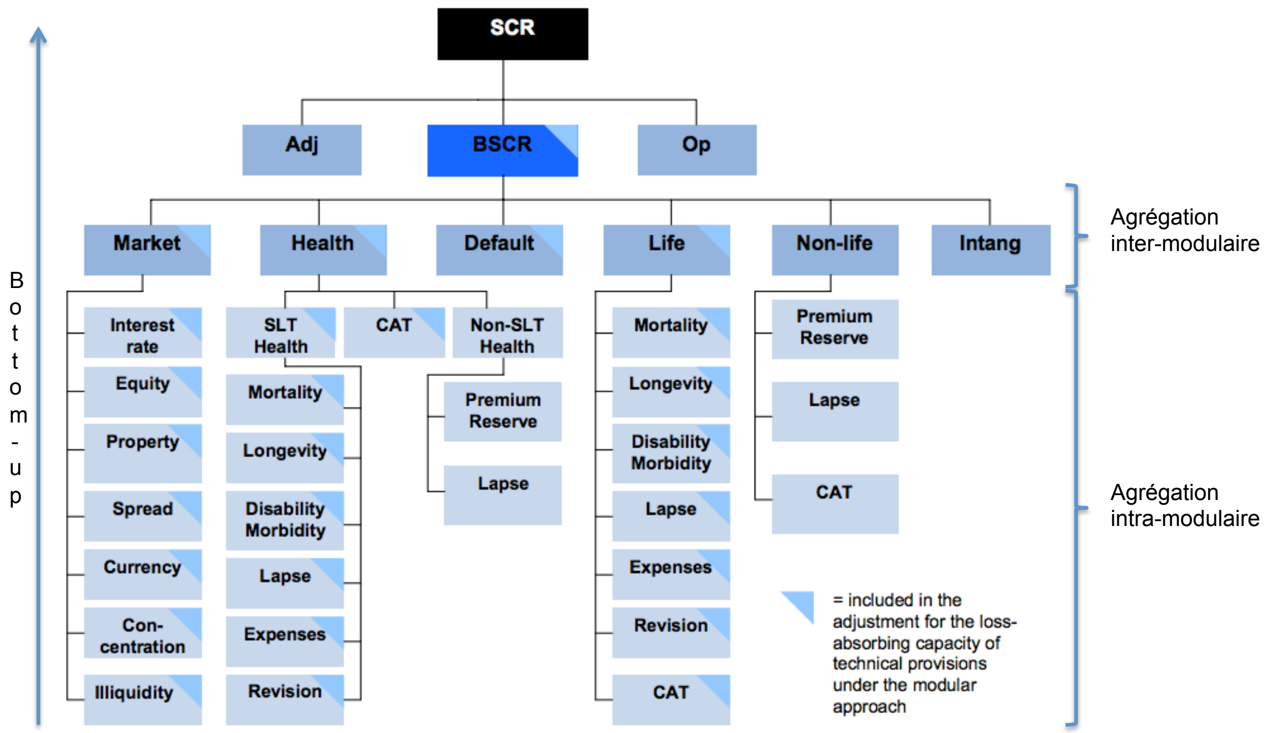

FIGURE 3.1 – Cartographie des risques Formule Standard pour le capital économique sous Solvabilité 2 [2]

On pose :
- SCR_m : le capital économique au titre du module m,
- $\mathcal{R}_m$: l'ensemble des risques du module de risque m,
- C_k : le capital économique au titre du risque k,
- $\rho^{\mathcal{R}_m}_{(i,j)}$: le coefficient de corrélation entre le risque i et j, défini par la matrice de corrélation des spécifications techniques de l'EIOPA [3],
- $\mathcal{M}$: l'ensemble des modules m,
- $\rho^{\mathcal{M}}_{(m,m')}$: le coefficient de corrélation entre les modules m et m', défini par la matrice de corrélation des spécifications techniques de l'EIOPA.

3.1.1 Agrégation intra-modulaire

Le capital économique réglementaire du module m, ou SCR_m, s'obtient par l'agrégation intra-modulaire des capitaux économiques au titre des risques élémentaires par une matrice de corrélation définie par les autorités de contrôle.

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{R}_m} \rho^{\mathcal{R}_m}_{(i,j)} C_i C_j}.$$

3.1.2 Agrégation inter-modulaie

De la même façon, le capital économique global, $BSCR$, se calcule par l'agrégation inter-modulaire à l'aide d'une matrice de corrélation :

2. Source : European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), Long-Term Guarantees Assessment (LTGA)
3. European Insurance and Occupational Pensions Authority ou Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} \rho^{\mathcal{M}}_{(m,m')} SCR_m SCR_{m'}}.$$

3.2 Agrégation *via* l'utilisation de copules

L'agrégation de variables aléatoires peut conduire à l'obtention d'une distribution de pertes au titre de l'ensemble des risques agrégés. Comme nous l'avons vu précédemment, la notion de copule *via* le théorème fondamental de Sklar permet de disposer de distributions multivariées. On peut donc appliquer une mesure de risque pour obtenir le capital économique au titre de ce segment de risques.

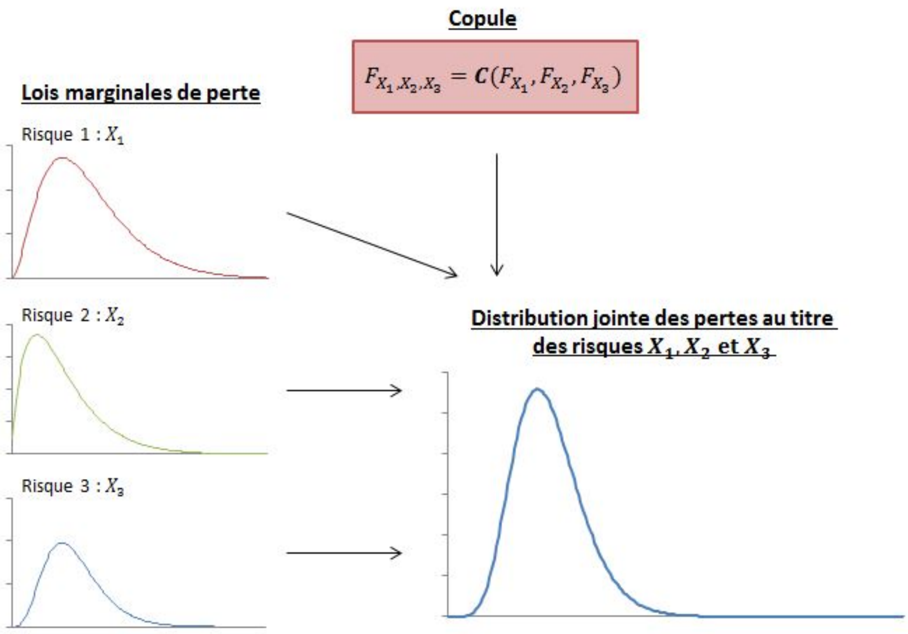

FIGURE 3.2 – Agrégation des risques à l'aide d'une copule

3.3 Évaluation de risques multivariés

Nous avons vu, dans la partie 1.5, la manière dont les risques peuvent être évalués individuellement. Ces méthodes présentées peuvent être étendues pour un ensemble de risques afin d'obtenir un capital économique au titre de cette agrégation en prenant en compte les interactions entre les différents risques.

Dans le cas d'une méthode de *stress test* multivarié, on pourra appliquer instantanément au bilan plusieurs chocs associés à des risques corrélés. Par exemple, dans le cas de la faillite de Lehman Brothers en 2008, la crise des crédits immobiliers a eu des impacts conséquents sur les valeurs de nombreux actifs sur les marchés financiers. Ici, il a été évident que le risque de crédit est fortement lié aux autres risques de marché.

Dans le cas d'une méthodologie de projections de scénarios, les impacts des interactions entre plusieurs risques pourront être modélisés par le biais d'un modèle de gestion d'actif/passif permettant d'introduire les différentes dépendances entre les actifs et les passifs ou entre les passifs entre eux. Un générateur de scénarios économique est souvent utilisé dans ce cas là pour intégrer à la fois les aspects stochastiques à la modélisation et en amont, les dépendances entre les actifs (par exemple les valeurs des actions dépendent au taux d'intérêt). Cette méthode dispose d'une grande flexibilité concernant les hypothèses et les modèles utilisés. Le réalisme des résultats obtenus n'est pas sans conséquence en termes de temps de calcul et de complexité calculatoire. Cette démarche peut également servir de base pour la mise en place de stratégies de gestion des risques et peut facilement s'étendre à une modélisation sur plusieurs périodes. Le calibrage des modèles utilisés dans les générateurs de scénarios économiques (GSE) doit faire l'objet d'une grande attention. Une différence est importante entre la période de calibrage et la période de projection de scénarios : cette divergence réside sur le monde probabiliste dans lequel on souhaite effectuer les simulations (univers risque neutre/historique).

3.4 Effets de diversification

L'agrégation de capitaux au titre des risques considérés peut conduire à des effets de diversification. Considérons deux risques X_1 et X_2. En supposant que le capital requis pour couvrir les risques X_i pris séparément, ou en « *stand-alone* », est donné par $\rho(X_i)$ et en agrégeant ces deux risques, on obtient un capital au titre du risque X_1+X_2 donné par $\rho(X_1+X_2)$. Avec l'utilisation d'une mesure de risque cohérente et par sous additivité, l'inégalité suivante s'établit :

$$\rho(X_1+X_2) \leq \rho(X_1)+\rho(X_2).$$

Cela s'explique par le fait que les pertes provoquées par un risque peuvent être compensées par les gains que l'on obtient grâce à l'autre.

Définition I.39. Soient $X_1,...,X_n$ les risques supportés par la compagnies d'assurance alors, les bénéfices D_ρ obtenus par la diversification :

$$\begin{aligned} D_\rho &= \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i) - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= 1 - \frac{\rho\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)}. \end{aligned}$$

L'obtention de bénéfices de diversification dépend de la mesure de risque ρ utilisée. Tant que la mesure est sous-additive, alors on peut bénéficier des effets de diversification.

Il faut cependant prendre avec des « pincettes » cette notion de diversification. En effet, diversifier le risque ne signifie pas diminuer la probabilité d'insolvabilité. Prenons l'exemple suivant.

Exemple I.1. Soient deux risques modélisés par les variables aléatoires discrètes de pertes [4] suivantes X_1 et X_2. On considère trois états du monde équiprobables : $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.

$$\begin{array}{ll} X_1(\omega_1) = 100 & X_2(\omega_1) = 0 \\ X_1(\omega_2) = 0 & X_2(\omega_2) = 100 \\ X_1(\omega_3) = -100 & X_2(\omega_3) = -100 \end{array}$$

Les deux variables aléatoires ont la même distribution. Si la compagnie d'assurance choisit de s'exposer uniquement à $2X_1$ au lieu de X_1+X_2, un capital nul est suffisant pour se couvrir contre ce risque dans $2/3$ des cas. Dans le cas où il exposé au risque X_1+X_2 alors ce même capital nul lui permet de faire face à une ruine dans seulement $1/3$ des cas. La diversification dans cette situation n'a pas amélioré la solvabilité de la compagnie.

4. Une valeur négative signifie que la compagnie fait un gain alors qu'une valeur positive une perte.

4 Allocation de capital

Le calcul d'un capital économique (SCR) ou d'un Besoin Global de Solvabilité permet à l'assureur de quantifier le risque total de la compagnie. Celle-ci peut allouer, suivant la segmentation qui lui convient, ce capital, permettant ainsi la déclinaison du risque total en une maille plus fine. Cette phase d'allocation est en effet un exercice important dans la bonne gestion de l'entreprise : cela permet à l'assureur de capter les défaillances des segments de risque trop consommateurs de capitaux ou à l'inverse déceler les segments les plus efficaces en termes de rentabilité. Il est, de plus, intuitif d'attribuer un capital plus important à un segment plus exposé au risque. L'allocation de capitaux passe donc par l'évaluation de la **contribution au risque global** de chaque segment. Cette quantité est évaluée selon une mesure de risque et une méthode d'allocation de capital. Le sujet est particulièrement étudié dans la littérature tant dans le domaine de la théorie des jeux que dans la théorie des risques. Denault (2001) a pris parti pour l'établissement d'une allocation de capital dite « juste et cohérente » en modélisant les interactions entre les individus (ici les segments de risques) et en utilisant la solution de *Aumann-Shapley*, résultat majeur de la théorie des jeux. De son côté, Tasche (2008) a utilisé un autre paradigme. Il prend comme point de départ les notions de théorie du risque. L'allocation du capital découle de la contribution du risque de chaque segment sur le risque global. Il utilise le théorème d'Euler pour définir cette allocation.

L'importance d'une allocation de capital pertinente sera discutée dans la deuxième partie de ce mémoire.

Les segments de risques pourront être définis en utilisant les mêmes notions que développées précédemment. Cette étape peut cependant dévier de la méthodologie adoptée d'agrégation des risques pour le calcul du capital à détenir en utilisant par exemple une autre mesure de risque ou en définissant une autre répartition des risques.

Soient $(X_1, ..., X_n)$ l'ensemble des risques supporté par la compagnie d'assurance. En utilisant les notions présentées précédemment, on peut alors définir une agrégation des risques en sous-ensemble de risque, $(Y_1, ..., Y_m)$, de telle sorte que l'on ait :

$$Y_j = \Phi_j(X_1, ..., X_n),$$

pour tout $j \in \{1, ..., m\}$ et avec les fonctions Φ_j, définies sur l'ensemble Γ^n [1] et à valeur dans l'ensemble Γ, à définir dans une étape préalable. En posant X le risque global de l'entreprise, la relation suivante est nécessairement vérifiée : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{m} Y_j$.

4.1 Notations

Avant de parcourir les différentes méthodes d'allocation de capital, posons les notations suivantes :
- T : l'horizon de temps ;
- m : le nombre de segments ;
- $(Y_1, ..., Y_m)$: le portefeuille des m segments de risques $X_1, ..., X_n \in \Gamma$;
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{m} Y_j$: le risque global ;
- $\rho^{Alloc}(X)$: le capital-risque total défini à partir de la mesure de risque ρ^{Alloc} ;
- $\rho^{Alloc}(Y_j)$: le capital-risque associé au segment j évalué en *stand alone* ;
- $\rho^{Alloc}(Y_j|X)$: la contribution au risque global du segment j à partir de la mesure de risque ρ ;
- K : le capital consolidé à allouer ;
- K_j : le capital alloué au segment j ;

1. On rappelle que Γ^n définit l'ensemble des variables aléatoires réelles

– M : l'ensemble des m segments sur lesquels le capital consolidé est alloué ;
– $\mathcal{A}$: l'ensemble des principes d'allocation de capital-risque, composé des pairs (M, ρ).

Remarque I.12. La mesure de risque choisie pour la définition des contributions au risque peut être différente de celle utilisée dans la phase d'agrégation des risques pour le calcul du capital risque global. Par construction, il est probable que le capital risque global $\rho^{Alloc}(X)$ soit différent du capital consolidé à allouer. C'est pour cela qu'on différencie le capital à allouer K au capital-risque $\rho^{Alloc}(X)$.

Introduisons la notion de principe d'allocation.

Définition I.40. Un principe d'allocation est une fonction $A : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^m$ qui à chaque élément, (M, ρ), de $\mathcal{A}$ associe une unique allocation :

$$A \quad : \quad (M,\rho) \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} A_1(M,\rho) \\ \ldots \\ A_m(M,\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \ldots \\ K_m \end{bmatrix}$$

telle que :

$$\sum_{j=1}^{m} K_j = K. \tag{4.1}$$

La condition 4.1 assure l'allocation totale du risque-capital.

La propriété d'allocation totale, 4.1, assure que l'intégralité du capital économique est allouée à un segment de risque, évitant ainsi une situation d'inallocation du capital.

4.2 Allocation de capital cohérente

A l'image des mesures de risque cohérente, Denault (2001) a défini la notion d'allocation cohérente de capital basée sur la propriété sous additive des mesures de risques cohérentes.

Définition I.41. On dit qu'une méthode d'allocation, A, est dite **cohérente** si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

– (**Non sur-allocation** ou « ***No undercut*** »)

$$\forall O \subseteq M, \sum_{j \in O} K_j \leqslant \rho^{Alloc}\left(\sum_{j \in O} Y_j\right).$$

– (***Symétrie***) Si, en joignant tout sous ensemble $O \subseteq M \backslash \{i, j\}$, les segments i et j ont la même contribution au risque-capital, alors $K_i = K_j$.
– (**Hors risque** ou « ***Riskless allocation*** ») L'allocation de capital à un segment non risqué est nulle.

La propriété de non sur-allocation traduit le fait qu'il n'y aura pas de situation de surallocation d'un segment empêchant ainsi que celui-ci reçoive plus de capital au détriment d'un autre. La propriété de symétrie signifie que l'allocation dépend strictement de la contribution au risque des segments de risques par rapport au risque total.

Comme pour les mesures de risque cohérentes, de nombreuses réserves peuvent être faites dans l'utilisation d'une allocation de capital vérifiant ces propriétés. La propriété de symétrie conduit à l'utilisation d'une mesure de risque linéaire : ce qui n'est pas vraiment souhaitable étant donné que ça annulerait tout effet de diversification.

Une correspondance peut être établie entre les mesures de risque cohérentes et les allocations de capital cohérentes. L'utilisation d'une mesure de risque positive permet d'obtenir une méthode d'allocation totale alors que la sous additivité d'une mesure de risque conduit à une non sur-allocation. Enfin, l'invariance par translation d'une mesure de risque conduit à une propriété d'allocation hors risque.

4.3 Méthodes d'allocation proportionnelles

Ces méthodes d'allocation ont toutes la même structure. L'allocation en capital pour les différentes segments considérés s'écrit :

$$K_j = \frac{\rho^{Alloc}(Y_j)}{\sum_{k=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_k)} K, \quad j = 1, ..., m, \tag{4.2}$$

avec ρ^{Alloc} une mesure de risque.

A chaque segment de risques est alloué un capital dépendant de son niveau de risque. La contribution au risque global du segment j est alors donnée par :

$$K_{j|X} = \frac{\rho^{Alloc}(Y_j)}{\sum_{k=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_k)}.$$

Dhaene et al. (2012) présentent dans leur article un ensemble de méthodes proportionnelles d'allocation de capital.

Principe d'allocation	**Mesure des risques**
Haircut Allocation	$\rho^{Alloc}(Y_j) = F_{Y_j}^{-1}(\alpha)$
Quantile Allocation	$\rho^{Alloc}(Y_j) = F_{Y_j}^{-1}(F_{S^c}(K))$ avec α tel que $K = F_{S^c}^{-1(\eta)}(F_{S^c}(K))$
Covariance Allocation	$\rho^{Alloc}(Y_j) = cov(Y_j, X)$
CTE Allocation	$\rho^{Alloc}(Y_j) = \mathbb{E}(Y_j \mid X > F_X^{-1}(\alpha))$

TABLE 4.1 – Les principes d'allocation proportionnelles

avec S^c, une somme "comonotonique", définie par :

$$S^c = \sum_{j=1}^{m} F_{Y_j}^{-1}(U),$$

où U est une variable aléatoire uniforme sur $(0, 1)$.

Remarque I.13. – Elles vérifient alors la condition d'allocation totale, 4.1.
- L'entreprise peut bénéficier d'un effet de diversification, $\rho^{Alloc}(X) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_j)$ si et seulement si, $K_j \leqslant \rho^{Alloc}(Y_j)$, $\forall j = 1, ..., m$. Cette condition est vérifiée lorsque la mesure de risque utilisée ρ est sous-additive.
- Ces méthodes sont également appelées méthodes *au pro-rata* ou méthodes « *First-in* » car ils considèrent le risque de chaque segment pris en *stand-alone* par rapport à l'ensemble des segments.

4.3.1 *Haircut Allocation Principle*

Ce principe d'allocation permet d'allouer à chaque segment j, une proportion $\frac{K}{\sum_{k=1}^{m} F_{Y_k}^{-1}(\alpha)}$ du quantile $F_{Y_j}^{-1}(\alpha)$. Il est dans la pratique, en assurance comme en banque, de mesurer les risques avec la Value-at-Risk, bien qu'elle ne soit pas toujours sous additive : l'allocation est alors déterminée en prenant en compte les segments séparément (ou en *stand-alone*), chaque risque est ainsi mesuré par $F_{Y_j}^{-1}(\alpha)$. Il est donc probable que $K \geqslant \sum_{k=1}^{m} F_{Y_k}^{-1}(\alpha)$, ainsi le capital alloué K_j peut être supérieur à la mesure du risque pour le segment j, considéré en *stand-alone*, $F_{Y_j}^{-1}(\alpha)$.

4.3.2 *Quantile Allocation Principle*

Au lieu d'appliquer un coefficient de proportionnalité à la valeur $F_{Y_j}^{-1}(\alpha)$ pour chaque segment j comme dans la méthode précédente, la méthode *Quantile Allocation Principle* permet d'appliquer un coefficient de proportionnalité au niveau de risque α de telle sorte que l'allocation de capital s'écrit :

$$K_j = F_{Y_j}^{-1(\eta)}(\beta\alpha), \tag{4.3}$$

avec η et β tels que $\sum_{j=1}^{m} K_j = K$. Les paramètres η et β sont choisis pour vérifier la propriété d'allocation totale, (4.1), et $F_{Y_j}^{-1(\eta)}$ est la fonction de distribution inverse η-mélange définie par (I.7). En posant $\beta\alpha = F_{S^c}(K)$, alors on obtient une forme comme définie en (4.2) avec $\rho(Y_j) = F_{Y_j}^{-1}(F_{S^c}(K))$. Comme la méthode *Haircut Allocation Principle*, les capitaux alloués K_j ne prennent pas en compte la structure de dépendance entre les différents segments de risques Y_j, $j = 1,...,m$. Le niveau de risque $\beta\alpha$ reste constant pour toutes les variables aléatoires Y_j.

4.3.3 *Covariance Allocation Principle* et *CTE Allocation Principle*

Contrairement aux méthodes précédentes, ces principes permettent de prendre en compte la structure de dépendance entre les segments de risques $Y_1,...,Y_m$. Les segments étant les plus corrélés à l'ensemble des risques X sont les plus pénalisés et demandent le plus de capitaux que les autres. Cette méthode est également appelée **méthode Bêta** car assimilée au coefficient bêta en finance qui mesure les corrélations du rendement d'un actif avec celui de l'ensemble du marché.

4.3.4 Avantages et inconvénients

Les méthodes *Haircut Allocation* et *Quantile Allocation* est particulièrement simple d'utilisation et de mise en oeuvre. Elles peuvent donner une première appréciation de la gestion des risques de l'entreprise et sont également parfaitement adaptées aux petites structures qui n'ont pas forcément les moyens d'implémenter des méthodes poussées dont la nécessité semble futile. Elles peuvent servir de référence à des approches plus complexes et être utilisée pour les tester. Cependant, l'un des inconvénients les plus remarquables de ces méthodes est sa défaillance dans la modélisation des dépendances entre les différents segments. La contribution au risque global de chaque segment est prise seule (en *stand-alone*), en ne tenant donc pas des corrélations qu'il peut exister entre eux. Il est alors probable d'allouer un capital trop important à un segment qui n'en nécessite pas tant. De ce fait, la gestion des risques peut s'avérer dans ce cas là déficiente. Une surconsommation de capital peut être effectivement risquée du fait des coûts du capital que l'assureur peut subir. Les autres méthodes, *Covariance Allocation* et *CTE Allocation*, sont plus compliquées à mettre en oeuvre mais prennent en compte la contribution de chaque risque au risque global. Il est cependant nécessaire de pouvoir calculer les différentes quantités présentées dans le tableau (4.1), c'est-à-dire pouvoir obtenir des distributions pour chacun des risques considérés. Par ailleurs, les corrélations modélisées dans ces méthodes peuvent être peu adaptées aux risques considérés. L'assureur doit préalablement étudier chaque risque et leurs dépendances entre eux avant de choisir une de ces méthodes.

Par ailleurs, l'exercice d'allocation de capital se reporte souvent à des problématiques d'allocation de la diversification. Dans les cas de ces méthodes, cette diversification, considérée, dans le capital à allouer, K, due à l'agrégation de risques, est appréhendée de façon proportionnelle sur l'ensemble des segments. Un segment ayant un besoin de capital conséquent se verra attribué une plus grosse part de cette diversification. Un ensemble de risques peut contribuer très largement à ces effets de diversification et se voir diminuer d'un capital qui pourrait lui être, en fait, nécessaire.

4.3.5 Application sur un exemple

Considérons, par exemple, une compagnie d'assurance supportant trois segments de risques Y_i pour $i = 1,2,3$. Imaginons que cette compagnie dispose 10 000 €. Chaque segment i pour $i = 1,2,3$ est mesuré par une mesure de risque quelconque, ρ^{Alloc} donnant ainsi les capitaux-risque en *stand-alone*. De plus, les segments sont agrégés de telle sorte que $\rho^{Alloc}(X) = \sum_{j=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_j)$.

	Capital évalué en *stand-alone*[2]	Capital alloué
Segment Y_1	4 000 €	3 077 €
Segment Y_2	6 000 €	4 615 €
Segment Y_3	3 000 €	2 308 €
Total	13 000 €	10 000 €

Table 4.2 – Exemple d'allocation proportionnelle

Par exemple pour le segment 1, le capital à allouer se calcule de la façon suivante :

$$K_1 = \frac{4\ 000€}{13\ 000€} \times 10\ 000€.$$

4.4 Méthodes marginales

4.4.1 Contributions marginales discrètes

La contribution marginale discrète d'un segment j au risque global est calculé à partir de l'évaluation du capital requis pour l'ensemble du portefeuille en excluant le segment considéré. En posant $K_{|j}$ le capital à allouer évalué en prenant en compte l'ensemble des risques sauf le segment j, la contribution du segment j est alors donnée par :

$$K_{j|X} = K - K_{|j} \tag{4.4}$$

Ces contributions peuvent être mises à l'échelle de sorte que la somme des contributions soit égale au capital total à allouer. Par exemple, on peut appliquer le coefficient suivant $\frac{K}{\sum_{i=1}^{m} K_{j|X}}$ à chaque contribution au risque global des segments j. Les contributions s'écrivent donc :

$$K^*_{j|X} = K_{j|X} \frac{K}{\sum_{k=1}^{m} K_{k|X}} = (K - K_{|j}) \frac{K}{\sum_{k=1}^{m} K - K_{|k}}.$$

On pourra donc définir les capitaux risque de chaque segment comme :

$$K_j = K^*_{j|X}. \tag{4.5}$$

Remarque I.14. Cette méthode est également appelée méthode « *Last-in* ».

Reprenons l'exemple précédent. Il nous faut dans ce cas, calculer les capitaux pour les portefeuilles de segments de risque suivants : $Y_1\&Y_2$, $Y_1\&Y_3$ et $Y_2\&Y_3$.

	Capital pour le portefeuille en excluant le segment	Contribution au risque	Capital alloué
Segment Y_1	7 500 €	2 500 €	2 941 €
Segment Y_2	6 000 €	4 000 €	4 706 €
Segment Y_3	8 000 €	2 000 €	2 353 €
Total		8 500 €	10 000 €

Table 4.3 – Exemple d'allocation marginale discrète

2. Ces valeurs ont été définies arbitrairement pour l'exemple

Par exemple ,pour le segment 1, on a :

$$K_1 = (10\ 000€ - 7\ 500€) \times \frac{10\ 000€}{8\ 500€}.$$

4.4.2 Contributions marginales pour les « entrants intermédiaires »

Nous avons vu que les méthodes proportionnelles peuvent être également appelées méthodes « *First-in* » et la méthode marginale discrète, « *Last-in* » dues à la manière dont les contributions au risque global sont calculées. Nous pouvons également suivre ces méthodes pour les entrées intermédiaires.

En reprenant les exemples précédents, on veut calculer les capitaux lorsque les segments « arrivent » en second dans le portefeuille. La première colonne du tableau (4.3) présente les capitaux pour les portefeuilles excluant pour chaque ligne un seul segment. Par exemple, le segment Y_1 peut « arriver » en second dans les portefeuilles $Y_1\&Y_2$ et $Y_1\&Y_3$, disposant respectivement de 8 000 € et 6 000€. Si Y_1 « arrive » en second dans ces portefeuilles, il contribue donc respectivement à 8 000 € $-$ 4 615 € $=$ 3 385 € dans le portefeuille $Y_1\&Y_2$ (4 615 € étant le capital alloué au segment Y_2 en « *First-in* ») et 6 000 € $-$ 2 308 € $=$ 3 692 € dans le portefeuille $Y_1\&Y_2$ (2 308 € étant le capital alloué au segment Y_3 en « *First-in* »). Nous pouvons procéder de la même façon pour les segments Y_2 et Y_3. Les résultats sont, ainsi donnés dans le tableau suivant :

	2nd In		Moyenne ajustée
Segment Y_1	3 385 €	3 692 €	3 077 €
Segment Y_2	4 923 €	5 192 €	4 398 €
Segment Y_3	2 923 €	2 885 €	2 525 €
Total			10 000€

Table 4.4 – Exemple d'allocation de deuxième entrée

Nous calculons une moyenne ajustée au capital à allouer pour obtenir l'allocation finale suivant les trois segments. Ainsi le segment Y_1 dispose du capital :

$$K_1 = \frac{\frac{3\ 385\ € + 3\ 692\ €}{2}}{11\ 500€} \times 10\ 000€.$$

4.4.3 Avantages et inconvénients de méthodes d'allocation discrètes

Ces méthodes d'allocation de capital reprennent, d'une certaine façon, les méthodes proportionnelles. Néanmoins, elles se concentrent principalement sur les effets de l'apport d'un segment de risque sur le risque global. Les méthodes du « premier entrant » comme des « entrants intermédiaires » supposent le calcul de capitaux en excluant un ou plusieurs segments de risque. Ces méthodes se basent alors sur la modification des capitaux du fait de ce changement dans la cartographie des risques. Il est cependant probable que ces calculs soient en partie biaisés, notamment par la façon dont on calcule cette contribution par une simple différence des capitaux.

4.4.4 Contributions marginales continues

Les contributions marginales discrètes au risque global sont des approximations des contributions marginales continues. Cette méthode de calcul des contributions marginales continues est aussi connue sous le nom de **méthode d'Euler** : elle calcule l'impact marginal infinitésimal de chaque segment j. Introduisons tout d'abord les notions de RORAC compatibilité.

4.4.4.1 La RORAC compatibilité

On définit l'indicateur *Return On Risk Adjusted Capital* (RORAC), dont Holton (2011) en a donné la définition.

Définition I.42. Soit $\mu_i = \mathbb{E}(X_i)$.

– Le **RORAC du portefeuille total** de risques est défini par :

$$RORAC(X) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\rho(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\rho^{Alloc}(X)}.$$

– Le **RORAC du segment de risques** j par rapport à l'ensemble des risques est défini :

$$RORAC(Y_j|X) = \frac{\mathbb{E}(Y_j)}{\rho^{Alloc}(Y_j|X)}.$$

Cet indicateur permet de mesurer la performance du portefeuille. Nous discuterons de cette mesure dans la partie II.

Nous pouvons alors à partir de cet indicateur, définir la notion de RORAC compatibilité.

Définition I.43. Les contributions $\rho(Y_j|X)$ au risque global X sont **RORAC compatibles** si, pour des $\varepsilon_j > 0$, on a

$$RORAC(Y_j|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + hY_j) > RORAC(X),$$

pour tout $0 < h < \varepsilon_j$ et $\forall j \in 1,...,m$.

Cette définition suppose que si la rentabilité d'un segment j est supérieure à la rentabilité globale de l'assureur alors il est possible de manière certaine d'augmenter la rentabilité globale en ajoutant une part h suffisamment petite au segment de risques, j.

Par ailleurs, on peut rapprocher la notion d'allocation totale des contributions au risque au sens RORAC.

Définition I.44. Les contributions, $\rho(Y_1|X)$, ..., $\rho(Y_n|X)$, au risque global mesuré par $\rho(X)$ vérifient la propriété d'allocation totale, (4.1), si

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(Y_i|X) = \rho(X).$$

Remarque I.15. Une méthode d'allocation est alors dite **RORAC compatible** si elle fournit des contributions au risque **RORAC compatibles**.

4.4.4.2 Méthode d'allocation d'Euler

Redéfinissons un autre ensemble de segments de risques $\{Z_j\}_{j=1,...,m}$ tel que $Z(u) = Z(u_1,...,u_m) = \sum_{j=1}^{m} u_j Z_j = X = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ et posons la fonction $f_{\rho,Z}$ positivement homogène et continument différentiable définie par : $f_{\rho,Z}(u) = \rho(Z(u))$. Le vecteur $(u_1,...,u_m)$ peut être vu comme le montant investi dans les segments Z_j.

Les contributions des segments $\{Z_j\}_{j=1,...,m}$ au risque global X est donnée par :

$$\rho^{Alloc}(Z_j|X) = \left.\frac{\partial \rho^{Alloc}(X + hZ_j)}{\partial h}\right|_{h=0} = \frac{\partial f_{\rho^{Alloc},Z}}{\partial u_j}(1,...,1). \tag{4.6}$$

L'allocation du capital devient alors :

$$K_j = \frac{\rho^{Alloc}(Z_j|X)}{\rho^{Alloc}(X)} K, \ \forall j \in 1,...,m. \tag{4.7}$$

Comme $f_{\rho,Z}$ est positivement homogène et continument différentiable, on peut écrire d'après le théorème d'Euler :

$$f_{\rho^{Alloc},Z}(u_1,...u_m) = \sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial f_{\rho^{Alloc},Z}}{\partial u_j}, \tag{4.8}$$

et d'après les équations (4.6) et (4.8), on a :

$$\rho^{Alloc}(X) = f_{\rho,Z}(1,...1) = \sum_{j=1}^{m} \rho^{Alloc}(Z_j|X) = \sum_{j=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_j|X). \tag{4.9}$$

Or comme la méthode d'Euler donne des allocations définies par (4.7) et par la relation 4.9), on obtient en sommant toutes les capitaux alloués :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} K_j &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\rho^{Alloc}(Y_j|X)}{\rho^{Alloc}(X)} K \\ &= \sum_{j=1}^{m} \rho^{Alloc}(Y_j|X) \frac{1}{\rho^{Alloc}(X)} K \\ &= K.\end{aligned}$$

Cette méthode d'allocation vérifie alors la propriété d'allocation totale, 4.1.

Remarque I.16. – Cette méthode d'allocation est cohérente.
– Elle donne une allocation unique.

Reprenons l'illustration précédente. En imaginant qu'une augmentation de 1% de l'évaluation du risque Y (par exemple, la Value-At-Risk de Y) provoque une augmentation de $0,725\%$ de l'évaluation du risque totale, alors la contribution marginale et le capital à allouer s'établit donc pour le segment Y à $\frac{0{,}00725}{0{,}01} \times 4000 = 2900$. Avec cette méthode, on obtient donc les capitaux suivants :

	Capital évalué en *stand-alone*	Evolution Y_i / Evolution $Y_1Y_2Y_3$	Capital alloué
Segment Y_1	4 000 €	$0,00725$	2 900 €
Segment Y_2	6 000 €	$0,00833$	5 000 €
Segment Y_3	3 000 €	$0,007$	2 100 €
Total	13 000 €		10 000 €

TABLE 4.5 – Exemple d'allocation d'Euler

4.5 Théorie des jeux

La théorie des jeux permet de résoudre des problématiques de décision dans des situations de conflit et/ou de coopération. Kaye (2005) explique que la problématique d'allocation de capital peut être assimilé à la recherche d'un équilibre dans le cadre d'une coalition entre plusieurs agents rationnels qui veulent tous protéger leurs intérêts. Leur association peut s'avérer avantageuse notamment dans le cas où leur alliance peut conduire à bénéficier de la diversification. Shapley (1953) a introduit une valeur, appelée **Valeur de Shapley**, permettant d'obtenir une répartition équitable des gains dans un jeu coopératif. Ce concept a été utilisé dans le domaine de la microéconomie (par exemple dans l'étude de cartels). Présentons d'abord les notions théoriques de la méthode de Shapley avant de l'appliquer à notre problématique d'allocation de capital. Aumann and Shapley (1974) ont élargi ce concept à des jeux non atomiques, c'est-à-dire des jeux avec un nombre infini de joueurs.

4.5.1 La méthode de Shapley

4.5.1.1 Le principe

Un jeu coopératif est un jeu dans lequel les joueurs ont la possibilité de s'allier pour augmenter leurs gains. Posons quelques notations.
On définit un **jeu coopératif** par :
– un ensemble M composé de m joueurs,
– une fonction de coût c prenant ses valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles de M et renvoir une valeur réelle. Cette fonction est appelée **coalition**. On notera C l'ensemble de ces fonctions de coût.

Remarque I.17. On dit que la fonction de coût est dite **sous additive** si : $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ pour toutes coalitions S et T telles que $S \cap T = \varnothing$. Il est alors plus avantageux (moins couteux) de coopérer que d'agir seul.

L'allocation est traduite par une fonction valeur définie de la manière suivante.

Définition I.45. Une fonction valeur $V_M : C \to \mathbb{R}^m$ est une fonction qui associe à chaque fonction de coût de C une unique allocation :

$$V_M : c \mapsto V_M(c) = \begin{bmatrix} c^{alloc}(1) \\ ... \\ c^{alloc}(m) \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

avec $\sum_{j \in M} c^{alloc}(j) = c(M)$ et $c^{alloc}(j)$, les coûts alloués à chacun des agents j.

Chaque joueur souhaite minimiser sa fonction de coût et adopte une stratégie dans cette optique. Un joueur refusera de coopérer et donc d'intégrer à une coalition S si le coût qui lui est alloué après la mise en place de cette coalisation est plus élevé que si il était indépendant. De plus, les joueurs d'une coalisation seront amenés à détruire la coalition si le coût total alloué à l'ensemble des joueurs est supérieur à la somme des coûts individuels si ils étaient indépendants.

Définition I.46. On appelle **noyau**, l'ensemble des allocations possibles respectant les deux contraintes évoquées ci-dessus :

- $\sum_{j \in S} c^{alloc}(i) \leq c(S)$ pour toute coalition S ;
- $c^{alloc}(i) \leq c(i)$ tout $i \in S$ et pour toute coalition S.

L'équilibre du jeu est alors donné par la valeur de Shapley.

Définition I.47. La **valeur de Shapley** est le vecteur donné par :

$$c^{alloc}_{Shapley}(i) = \sum_{\substack{S \in D_i \\ i \in N}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(c(S) - c(S \backslash \{i\})\right), \tag{4.11}$$

où $s = \#\{S\}$ et D_i l'ensemble des coalitions de N contenant i, et $S \backslash \{i\}$ est la coalition S en excluant l'agent j.

4.5.1.2 Application à la problématique d'allocation de capital

La méthode de Shapley peut être utilisée pour le problème d'allocation de capital (Denault (2001)). Les segments de risques représenteront les joueurs du jeu coopératif et les fonctions de coûts sont alors définies par la mesure de risque utilisée ρ^{Alloc}.

La fonction de coût c est alors définie pour chaque coalition $S \in M$, par :

$$c(S) = \rho^{Alloc}\left(\sum_{j \in S} Y_j\right).$$

La contribution au risque global du segment j est alors donnée, en se basant sur la définition de la valeur de Shapley, (I.47), par :

$$\rho(Y_j|X) = \sum_{\substack{S \in D_j \\ j \in N}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(\rho^{Alloc}(S) - \rho^{Alloc}(S \backslash \{j\})\right), \tag{4.12}$$

où $s = \#\{S\}$ et D_j l'ensemble des coalitions de N contenant j. et ainsi, le capital alloué pour chaque segment $j = 1, ..., m$ devient :

$$K_j = \frac{\sum_{\substack{S \in D_j \\ j \in N}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(\rho^{Alloc}(S) - \rho^{Alloc}(S \backslash \{j\})\right)}{\rho^{Alloc}(X)} K. \tag{4.13}$$

Reprenons l'illustration précédente. On a vu que les contributions marginales peuvent être calculées selon l'entrée des différents segments dans l'évaluation du risque global. La méthode de Shapley permet la réconciliation de ces différentes méthodes en prenant la moyenne de capitaux alloués pour chaque segment de risque. La méthode « *First-In* » correspond à une méthode d'allocation proportionnelle tandis que la méthode marginale discrète correspond à une méthode « *Last-In* ». Pour calculer l'allocation de Shapley, nous devons également s'intéresser à l'allocation « *2nd In* » décrite précédemment, (4.4.2).

Pour le calcul des « *2nd In* », on peut se référer au tableau suivant, (4.4).

On a donc les allocations suivantes :

	1st In	*2nd In*	*Last In*	Capital alloué
Segment Y_1	3 077 €	3 077 €	2 941 €	3 032 €
Segment Y_2	4 615 €	4 398 €	4 706 €	4 573 €
Segment Y_3	2 308 €	2 525 €	2 353 €	2 395 €
Total				10 000 €

Table 4.6 – Exemple d'allocation de Shapley

Le capital alloué pour le segment i est alors donné par la moyenne entre les capitaux *1st In*, *2nd In* et *Last In*. Ainsi, pour le segment Y_1, on a :

$$K_1 = \frac{3\ 077\ € + 3\ 077\ € + 2\ 941\ €}{3} = 3\ 032\ €.$$

4.5.2 La méthode de Aumann-Shapley

Aumann and Shapley (1974) ont étendu la concept de la valeur de Shapley à des jeux non atomiques. Les jeux non-atomiques sont des jeux où il y a un nombre infini de joueurs et où un seul joueur a une influence négligeable sur les utilités des autres. Ce cadre permet de modéliser facilement des problématiques de décision dans un jeu avec un nombre m fini mais grand de joueurs. Dans la partie précédente, nous avons présenté un jeu où les joueurs n'étaient pas divisibles. La propriété de divisibilité du portefeuille de risques est alors prise en compte dans la présente méthode.

Définition I.48. Un jeu coopératif non-atomique (N, Λ, r) est alors défini par :
- un ensemble M composé de m joueurs,
- un vecteur $\Lambda \in \mathbb{R}_+^m$ représentant l'« investissement » total de chaque joueur
- une fonction de coût, r est définie par :
$$\begin{array}{cccc} r & : & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & & \lambda & \mapsto & r(\lambda). \end{array}$$
où $r(0) = 0$. La fonction de coût associe au vecteur $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, qui représente le niveau de présence de chaque joueur dans la coalition, un coût positif.

Remarque I.18. – Λ représente pour chaque joueur, la taille maximale de l'« investissement » du joueur
- En réalité, pour chaque joueur $j \in S$ (où S est un sous-ensemble de M), λ_j peut varier de 0 à Λ_j. La fonction de coût r est alors définie sur $[0, \Lambda_1] \times ... \times [0, \Lambda_s]$ (où $s = \#\{S\}$).
- Le ratio $\frac{\lambda_j}{\Lambda_j}$ est alors le taux d'« investissement » du joueur dans le jeu.
- Les quantités Λ et λ doivent être données dans la mêmes unités.

Comme pour la méthode précédente, on introduit une fonction valeur.

Définition I.49. La fonction valeur, appelée ***fuzzy value***, qui associe, à un jeu coopératif non-atomique, une unique allocation :

$$\Phi : (N, \Lambda, r) \mapsto \begin{bmatrix} \Phi_1(N, \Lambda, r) \\ ... \\ \Phi_m(N, \Lambda, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^r(X, \lambda) \\ ... \\ a_n^r(X, \lambda) \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

avec $\sum_{j=1}^{m} \Lambda_j k_j = r(\Lambda)$.

Théorème I.4. *Soit* (N, Λ, r) *un jeu coopératif non-atomique. Alors la valeur de Aumann-Shapley est donnée par :*

$$\Phi_j^{AS}(N, \Lambda, r) = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_j}(t\Lambda)dt, \tag{4.15}$$

pour tout $j = 1, ..., m$.

Le coût pour une unité d'investissement du joueur j est alors vu comme la moyenne du coût marginal du joueur j en augmentant son investissement de O à son investissement total Λ_j.

Comme pour la méthode de Shapley, les notions présentées par Aumann and Shapley (1974) peuvent être reprises dans un problème d'allocation de capital. La valeur de Aumann-Shapley peut permettre le calcul des capitaux alloués selon le même principe que ce qui a été montré pour la méthode de Shapley. Le lecteur, souhaitant approfondir l'étude, pourra se référer à l'article de Denault (2001).

4.6 Comparaison des méthodes

Les exemples donnés précédemment nous permettent de comparer les différentes techniques d'allocation de capital. Ici, nous avons considéré les méthodes *First-In*, *2nd-In*, *Last-In*, Shapley et Euler. Ces techniques donnent des allocations de capital très proches pour chacun des segments Y_1, Y_2 et Y_3. Le segment Y_2, dont le capital évalué en *stand-alone* est égal à 6 000 € nécessite l'immobilisation d'un capital plus important : sa contribution au risque total est supérieure à celle des autres segments.

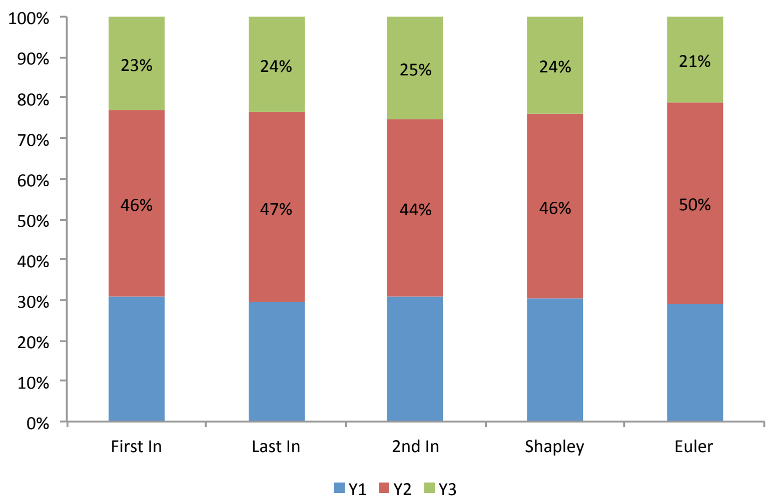

FIGURE 4.1 – Comparaison des cinq méthodes : *First-In*, *2nd-In*, *Last-In*, Shapley et Euler

Par ailleurs, la méthode d'Euler attribue un capital plus élevé au segment Y_2 portant des risques plus dangereux. La contribution au risque global de ce segment, donnée par l'évolution du risque global lorsque le capital en *stand alone* de ce segment augmente de façon infinitésimale, est la plus conséquente et vaut 0,833%.

Nous remarquons également que la méthode de Shapley donne bien une moyenne entre les trois méthodes *First-In*, *2nd-In* et *Last-In*. Celle-ci permet de donner un équilibre sur les méthodes « d'entrée » dans le portefeuille de risques de l'assureur.

4.7 Méthode d'allocation Myers-Read

Cette méthode d'allocation de capital a été introduite par Myers and Read (2001) et repose sur l'évaluation de l'impact marginal de chacun des segments considérés. Elle permet de repartir le capital en introduisant des options de défaut de l'assureur. L'allocation est basée sur la contribution marginale d'une ligne d'activité sur la probabilité de défaut de la compagnie, en utilisant des techniques d'évaluation de prix d'options. Les actionnaires investissant dans la compagnie d'assurance disposent d'une quantité de fonds limitée, alors si la compagnie fait défaut, ils ne seront pas à même de financer les excès de pertes de celle-ci. En posant E les fonds propres de la compagnie uniquement apportés par les actionnaires et P les pertes globales. En cas de faillite de la société d'assurance, i.e. lorsque $P > E$, les pertes restantes deviennent alors $P - E$. Cette valeur représente alors les charges de sinistres ne pouvant être réglées par l'assureur et peut se réécrire comme :

$$P - (P - E)^+. \tag{4.16}$$

En considérant E comme le prix d'exercice, alors $(P-E)^+$ peut représenter le *pay-off* d'une option de vente (ou *put*). Cette option est appelée **Put d'Insolvabilité**. La méthode de Myers and Read (2001) repose sur le calcul de l'impact d'un petit changement sur les pertes d'une ligne d'activité sur la solvabilité de l'assureur et donc sur la quantité donnée par (4.16).

En utilisant les notations exposées précédemment, la formule d'allocation de Myers and Read (2001) est donnée par :

$$\mathbb{E}[(\rho^{Alloc}(X) - K)^+] = \sum_{j=1}^{m} (\rho(Y_j) - K_j)\mathbf{1}_{\rho^{Alloc}(X)>K}, \tag{4.17}$$

avec $X = \sum_{j=1}^{m} Y_j$.

Remarque I.19.
- Cette méthode est également souvent appelée Option d'Echange de Solvabilité (ou **Solvency Exchange Option**) car elle peut s'apparenter à un swap entre le passif et le capital dépendant de l'état de solvabilité de la compagnie d'assurance.
- On peut également qualifier cette **méthode d'allocation micro marginal** contrairement à la méthode de Merton and Perold (1993), utilisant également les méthodes de *pricing* d'option mais basée sur l'ajout d'une ligne entière d'activité à la compagnie pour évaluer la contribution du risque de chaque segment. Cette dernière méthode est alors qualifiée d'**allocation macro marginal**.
- Cette méthode respecte la propriété d'allocation totale, (4.1).

4.8 Méthodes d'allocation basées sur la théorie économique

4.8.1 Principe

Cummins (2008) a exposé une méthode d'allocation de capital basée sur un des modèles les plus anciens de la théorie financière : le modèle de *Capital Asset Pricing*, ou CAPM. Cette approche, loin d'être la meilleure, peut servir de référence.

Le modèle CAPM donne le rendement espéré du capital ou le coût du capital d'une entreprise, noté r_{CoC}, par :

$$r_E = r_f + \beta_E(r_M - r_f),$$

où
- r_E : le coût du capital ;
- r_f : le taux sans risque ;
- r_M : le rendement espéré du « marché » ;
- β_E : le coefficient béta de l'entreprise d'assurance.

Des stratégies peuvent être faites en décomposant le coefficient béta par différents bétas par segment. Prenons l'exemple d'une compagnie d'assurance ayant défini deux segments de risque. Ici, les segments seront définis par des lignes d'activité. Pour cette compagnie d'assurance, le chiffre d'affaire est donné par :

$$I = r_A A + r_1 P_1 + r_2 P_2,$$

où
- I : le chiffre d'affaire de la compagnie ;
- r_A : le taux de rendement des actifs ;
- A : les actifs ;
- r_1 et r_2 : le taux de rendements des lignes d'activité 1 et 2 ;
- P_1 et P_2 : les primes pour les lignes 1 et 2.

En divisant cette équation par le capital et en utilisant l'égalité comptable de l'actif et du passif, on obtient :

$$r_E = r_A \frac{E + L_1 + L_2}{E} + r_1 \frac{P_1}{E} + r_2 \frac{P_2}{E},$$

où
- L_1 et L_2 : les engagements aux titres des activités 1 et 2 ;
- E : les fonds propres de l'entreprise.

Ainsi, en utilisant le fait que la fonction de covariance est linéaire, le béta global de la compagnie peut se décomposer de la façon suivante :

$$\beta_E = \beta_A (1 + k_1 + k_2) + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2$$

où
- β_E, β_A, β_1 et β_2 sont les bétas de la compagnie, des actifs et des risques aux titres de lignes d'activité 1 et 2 ;
- k_1 et k_2 : les ratios de leviers des engagements des lignes d'activité 1 et 2, avec $k_i = \frac{L_i}{E}$, $\forall i = 1,2$;
- s_1 et s_2 : les ratios de leviers des engagements des lignes d'activité 1 et 2, avec $s_i = \frac{P_i}{E}$, $\forall i = 1,2$;

Le modèle peut être résolu pour les taux de rendement de chaque ligne d'activité.

$$r_i = -k_i r_f + \beta_i (r_M - r_f),$$

pour chaque ligne d'activité $i = 1$ et $i = 2$.

La première partie du terme de droite de l'équation précédente $(-kr_f)$ donne les intérêts sur les fonds des assurés et ainsi, le deuxième terme $(\beta_i(r_M - r_f))$ donne le taux de rendement basé sur le risque systématique de chaque ligne d'activité par rapport au marché. On peut alors allouer au moins le coût du capital donné par r_i à chaque ligne d'activité.

4.8.2 Avantages et inconvénients

De nombreuses inconvénients peuvent être faits à ce modèle. D'abord, il ne prend en compte que les risques du marché : l'assureur peut faire face à des risques non liés au marché comme les risques de souscription, les catastrophes naturelles, etc. Par ailleurs, du fait de données disponibles actuellement, il est difficile d'estimer les bétas. Enfin, le modèle CAPM semble beaucoup trop simpliste car les taux de rendement peuvent dépendre de d'autres facteurs que les bétas.

Cependant, lorsque les données le permettent, cette méthode peut être servie en tant que référence pour des modèles plus poussées. Elle semble notamment plus adaptée à des compagnies d'assurance de grande taille où un béta peut alors être estimé, contrairement à des petites mutuelles non cotées sur le marché.

4.9 Algorithme de Ruhm-Mango-Kreps

Ruhm (2003) a mis en application l'alogrithme de Ruhm-Mango-Kreps permettant d'allouer le capital d'une compagnie d'assurance. Les fondements de cet algorithme sont expliqués dans les articles de Ruhm and Mango (2003) et Kreps (2005). Cet algorithme est particulièrement facile d'utilisation lorsque les pertes par segment de risque sont quantifiables. Ainsi, il peut être utilisé lorsque la segmentation des risques se fait par ligne d'activité ou de zone géographique.

4.9.1 Présentation de l'algorithme

Posons les notations suivantes :
- X : les pertes globales de la compagnie d'assurance ;
- Y_k : le segment de risques k, $\forall k = 1,...,m$ et tel que $\sum_{k=1}^{m} Y_k = X$;
- C : le capital nécessaire pour couvrir X ;
- C_k : le capital nécessaire pour couvrir X_k ;
- ρ : la mesure de risque utilisée supposée invariante par translation.

Le capital nécessaire, C, pour couvrir X est donné par :

$$C = \rho(X).$$

En posant $X = \mathbb{E}(X) - \varepsilon$, avec ε une variable représentant l'aléa des pertes de X et en utilisant la propriété d'invariance par translation, on a :

$$\begin{aligned} C &= \rho(\mathbb{E}(X) + \varepsilon) \\ &= \rho(\mathbb{E}(X)) + \rho(\varepsilon) \\ &= \mathbb{E}(X) + \rho(\varepsilon) \\ &= \mathbb{E}(X) + R \\ &= \mu + R. \end{aligned} \tag{4.18}$$

On appelle, $\rho(\varepsilon)$, la **charge pour risque** de X, encore appelée *Risk Leverage* et on la note $R = \rho(\epsilon)$.

Par analogique à l'équation (4.18), on a également :

$$\begin{aligned} C_k &= \mathbb{E}(X_k) + R_k \\ &= \mu_k + R_k. \end{aligned}$$

On peut relier les capitaux alloués aux différents segments C_k au capital global C. En effet,

$$\mu_k \equiv \int x_k f(x_1,...,x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n,$$

avec $f(x_1,...,x_n)$ la fonction de densité jointe du vecteur $(X_1,...,X_n)$. Ainsi,

$$\mu \equiv \int \left[\sum_{k=1}^{n} x_k \right] f(x_1,...,x_n) dx_1 ... dx_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k.$$

Kreps (2005) a proposé des modèles pour les charges pour risque, appelés encore *Risk Leverage Models*, de la forme :

$$R_k \equiv \int (x_k - \mu_k) L(x) f(x_1,...,x_k) dx_1 ... dx_n,$$

avec $x \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On a également :

$$\begin{aligned} R &= \int (x-\mu)L(x)f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n \\ &= \int f(x)(x-\mu)L(x)dx, \end{aligned}$$

où f est la fonction de densité de la variable $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le point essentiel de cette modélisation est que le levier de risque, $L(x)$, également appelé *Riskiness Leverage* dépend seulement de la somme des variables marginales. Ainsi, on peut obtenir les propriétés confortables suivantes, et ce peu importe le type de dépendance des différentes variables individuelles :

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

et

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

C'est uniquement la fonction $L(.)$ qui capte les types de dépendance entre les variables.

Kreps (2005) a montré les propriétés suivantes :

Propriété I.17.
- $R(c) = 0$ pour c une constante ;
- $R(\lambda X) = \lambda R(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.9.2 Les différents types de leviers de risque, *Riskiness Leverage*

Kreps (2005) a proposé des formes différentes pour la fonction L en fonction de la mesure de risque utilisée. On présente ici uniquement les leviers de risque associées aux mesures de risque : *Value-at-Risk* et *Tail Value-at-Risk*.

4.9.2.1 *Tail Value-at-Risk*

Pour la mesure de risque, *Tail Value-at-Risk*, on prend le levier défini par :

$$L(x) = \frac{\theta(x - x_\alpha)}{1-\alpha}.$$

où
- α est le degré de risque ;
- x_α est le quantile de la variable X au niveau α, de sorte que $F(x_\alpha) = \alpha$;
- $\theta(.)$ est la fonction qui donne 1 si son argument est positif et 0 sinon. Cette fonction est appelée fonction index.

Le levier de risque L, vaut 0 jusqu'à un certain point où il devient constant.

Ainsi, les charges pour risque s'écrivent :

$$\begin{aligned} R &= \int_{x_\alpha}^{\infty} f(x)\frac{x-\mu}{1-\alpha}dx, \\ R_k &= \int_{x_\alpha}^{\infty} \frac{x_k-\mu_k}{1-\alpha} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n. \end{aligned}$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} C &= \mu + \int f(x)(x-\mu)\frac{\theta(x-x_\alpha}{1-\alpha}dx_1...dx_n \\ &= \mu + \int_{x_\alpha}^{\infty} f(x)\frac{x-\mu}{1-\alpha}dx \\ &= \mu - \frac{\mu}{1-\alpha}(1-\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{x_\alpha}^{\infty} f(x)xdx \\ C &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{x_\alpha}^{\infty} xf(x)dx. \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'équation (4.19) donne alors la définition de la *Tail Value-at-Risk*.
Ainsi le capital alloué au segment k, pour tout $k = 1,...,n$ est donné par :

$$\begin{aligned} C_k &= \mu_k + \int f(x_1,...,x_n)(x_k-\mu_k)\frac{\theta(x-x_\alpha}{1-\alpha}dx_1...dx_n \\ &= \mu_k - \frac{\mu_k}{1-\alpha}\int f(x_1,...,x_n)\theta(x-x_\alpha)dx_1...dx_n + \frac{1}{1-\alpha}\int f(x_1,...,x_n)\theta(x-x_\alpha)x_k dx_1...dx_n \\ C_k &= \frac{1}{1-\alpha}\int f(x_1,...,x_n)\theta(x-x_\alpha)x_k dx. \end{aligned}$$

4.9.2.2 *Value-at-Risk*

On prend le levier de risque suivant :

$$L(x) = \frac{\delta(x-x_\alpha)}{f(x_\alpha)},$$

où
- $\delta(.)$ la fonction de Dirac ;
- α est le degré de risque ;
- x_α est le quantile de la variable X au niveau α, de sorte que $F(x_\alpha) = \alpha$.

Le capital à allouer est alors écrit :

$$\begin{aligned} C &= \mu + \int f(x)(x-\mu)\frac{\delta(x-x_\alpha)}{f(x_\alpha)}dx \\ &= \mu + x_\alpha - \mu \\ C &= x_\alpha. \end{aligned}$$

On retrouve alors bien la définition de la *Value-at-Risk*.
Les capitaux à allouer aux segments de risque sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} C_k &= \mu_k + \int f(x_1,...,x_n)(x_k-\mu_k)\frac{\delta(x-x_\alpha)}{f(x_\alpha)}dx_1...dx_n \\ C_k &= \frac{1}{f(x_\alpha)}\int f(x_1,...,x_n)x_k\delta(x-x_\alpha)dx_1...dx_n. \end{aligned}$$

4.9.3 Mise en place de l'algorithme de Ruhm-Mango-Kreps

L'algorithme permet d'allouer un capital global à différentes sources de risque. Le capital alloué à chaque segment de risque dépend de sa contribution au risque global. L'un des grands avantages de cet algorithme est qu'il permet à l'utilisateur de choisir sa propre mesure de risque : en d'autres termes, l'algorithme marche avec n'importe quelle mesure de risque. Il permet également de reproduire les résultats des méthodes apportées par Myers and Read (2001) par exemple.

L'algorithme marche de la façon suivante :

a) Simulation de m scénarios de pertes possibles du portefeuille global de risques, X mais également de chaque segment de risques, Y_j, $\forall j$;
b) Calcul de l'espérance de ces pertes : $\mathbb{E}(X)$ et ;
c) Choix de la mesure de risque ;
d) Calcul des poids du risque (ou encore appelés en anglais *Risk Leverage*) pour chaque scénario $j = 1,...,m$;
e) Calcul des espérances des pertes ajustées au risque en utilisant les poids du risque ;
f) Calcul du capital alloué à chaque risque avec le risque défini comme la différence entre l'espérance des risques pris en *stand-alone* et l'espérance des pertes ajustées au risque.

Les poids calculés à l'étape d) traduit la contribution de chaque segment au risque global mais également la dangerosité de ces risques. On donnera un point plus élevé à une perte très importante.

4.9.4 Lien avec le modèle CAPM

Le modèle présenté par Ruhm and Mango (2003) et Kreps (2005) peut être relié au célèbre modèle de CAPM. En effet, en posant $C = \alpha\mu_k - \beta Cov(X_k, X)$, on a :

$$R_k = \beta Cov(X_k, X),$$
$$R = \beta Var(X).$$

Ainsi, on obtient :

$$R_k = R\frac{Cov(X_k, X)}{Var(X)}.$$

4.9.5 Avantages et inconvénients

L'algorithme de Ruhm-Mango-Kreps est particulièrement simple d'utilisation et d'implémentation. Il permet également de reproduire différentes techniques exposées ici, comme la méthode de Myers and Read (2001) par exemple. Cependant, il nécessite les distributions de pertes pour chaque segment de risque et dans chaque scénario économique. L'obtention de telles distributions dans chaque scénario économique peut s'avérer être délicate, notamment lorsque l'agrégation des risques choisie crée des dépendances trop importantes entre les segments. Cet algorithme pourra être utilisé pour une segmentation par zone géographique ou par ligne d'activité.

4.9.6 Application numérique

Soit une compagnie d'assurance exposée à deux risques représentés par deux variables aléatoires discrètes X_1 et X_2.

On pose les notations suivantes :
- ω_i l'état du monde i, avec $i = 1,...,10$;
- w_i le levier de risque pour le scénario i ;
- p_i la probabilité d'être dans l'état du monde ω_i ;
- et $\tilde{p}_i$ la probabilité ajustée au risque d'être dans l'état du monde ω_i.

i	X_1	X_2	$X_1 + X_2$	w_i	p_i	$\tilde{p}_i$
1	1 500 €	−800 €	7000 €	4,10	10%	27,8%
2	400 €	300€	700 €	3,20	10%	21,7%
3	200 €	−1 200 €	−1 000 €	1,50	10%	10%
4	−5 000 €	0 €	−5 000 €	1,10	10%	8%
5	200 €	−1 400 €	−1 200 €	1	10%	6,8%
6	−400 €	−2 200 €	−2 600 €	0,90	10%	6%
7	500 €	−2 000 €	−1 500 €	0,85	10%	5,8%
8	200 €	100 €	300 €	0,80	10%	6%
9	−1 500 €	−800 €	−2 300 €	0,70	10%	5%
10	−1 250 €	0€	−1 290 €	0,60	10%	4%

TABLE 4.7 – Exemple de données pour l'application de l'algorithme de RMK

Remarque I.20. Les pertes sont données par des valeurs positives tandis que les gains par des valeurs négatives.

Les probabilités ajustées au risque sont calculées de la façon suivante :

$$\tilde{p}_i = \frac{w_i p_i}{\sum_{j=1}^{10} w_j p_j}$$

On obtient donc les résultats suivants :

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
Espérance des pertes	−519 €	−800 €	−1 319 €
Espérance des pertes ajustées au risque	21,08 €	−648,14 €	−627,05 €
Mesure de risque	−540,08 €	−151,86 €	−691 €
Proportion de capital à allouer	78%	22%	100%
Capital alloué	7 805,27 €	2 194,73 €	10 000 €
Retour sur investissement ajusté au risque (RORAC)	6,65%	36,45%	13,19%
Taux minimum de création de valeur	6,92%	6,92%	6,92%
Création de valeur	−21,08 €	648,14 €	627,05 €

TABLE 4.8 – Allocation de capital par l'algorithme de RMK

Remarque I.21. Contrairement aux pertes, il y création de valeur lorsqu'il s'agit d'un montant positif et destruction de valeur lorsqu'il s'agit d'une quantité négative.

Nous remarquons que les espérances des pertes ajustées au risque pour les différentes variables aléatoires (X_1, X_2 et $X_1 + X_2$) sont supérieures aux simples espérances. La mesure de risque calculée peut être assimilée à la méthode par choc des capitaux propres préconisée par la Formule Standard, calculée par la différence entre les simples espérances et les espérances ajustées au risque. La proportion de capital alloué à chaque segment dépend alors de cette mesure de risque. Le segment X_1 contribue à $\frac{-540{,}08}{-691{,}95} = 78\%$ au risque pris par l'entreprise. Le retour sur investissement ajusté au risque, (ratio « gain / capital alloué »), ou RORAC (dont la définition est donnée par II.10 de la deuxième partie de ce mémoire) pour chacun des segments peut être calculé en rapportant les gains du segment à son capital alloué. Par exemple, pour le segment X_1, nous avons le retour sur investissement ajusté au risque égal à $RORAC_1 = \frac{519}{7805{,}27} = 6{,}65\%$. Par ailleurs, le seuil de création de valeur est donné par le risque pris par l'ensemble de l'entreprise rapporté au capital disponible, ainsi ce seuil est égal à $\frac{627{,}05}{10\ 000} = 6{,}92\%$.

L'espérance de ses pertes est également inférieure, qu'elle soit ajustée au risque ou non à celle du segment X_1. Par ailleurs, le segment X_2 crée plus de valeur que le segment X_1 : son *RORAC* est plus important que celui de X_1 mais également que celui de l'entreprise d'assurance dans sa globalité. De plus, le capital alloué au segment X_1 est plus important que celui de X_2 car il est plus exposé à des risques de pertes financières.

4.10 Stabilité de l'allocation dans le temps

Le dispositif ORSA, prévu par la Directive Solvabilité 2, doit être implémenté sur un horizon fixé par le plan stratégique de l'entreprise, contrairement aux évaluations du Pilier 1. Or, l'exercice d'allocation de capital est établi à un instant donné. De ce fait, la dimension « temps » doit être prise en compte dans la procédure. De manière opérationnelle, il est nécessaire de définir une allocation de capital stable dans le temps. Decupère (2011) a proposé la méthode suivante :

On considère :

- t, l'année à laquelle on souhaite que l'allocation du capital soit stable par rapport aux années antérieures ;
- m, le nombre de segments ;
- N, le nombre d'années durant lesquelles une allocation de capital a été établie ;
- $(K_i(s))_i$, les capitaux à allouer calculés à partir d'une des techniques présentées précédemment, pour les années $s = t-N, ..., t$;

On introduit alors les poids, pour $s = t-N, ..., t$ et pour chaque segment $i = 1, ..., m$:

$$\omega_i(s) = \frac{K_i(s)}{\sum_{i=1}^m K_i(s)}.$$

Les poids $\omega_i(t)$ ont été évalués sans prise en compte de la stabilité dans le temps de l'allocation de capital. On cherche ici des nouveaux poids $(\omega_i^*(t))_i$ pour la date t de telle sorte qu'on ait une certaine stabilité avec les années antérieurs $s = t-N, ..., t-1$.

Ces poids optimaux sont obtenus par le programme d'optimisation suivant :

$$(\omega_i^*(t))_i = \underset{(\alpha_i)_i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{s=t-N}^{t-1} \left[p_s \sum_{i=1}^m (\omega_i(s) - \alpha_i)^2 \right] + p_t \sum_{i=1}^m (\omega_i(t) - \alpha_i)^2 \right\},$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Les pondérations $(p_s)_{s=1,...,t}$ permettent d'accorder plus ou moins d'importance à certaines années $s = 1, ..., t$. Il est évidemment plus raisonnable d'attribuer des poids plus importants pour les années proches de t.

Ainsi, la nouvelle allocation de capital à l'année t sera donnée par :

$$K_i^*(t) = \omega_i^*(t) \times \sum_{i=1}^m K_i(t).$$

Deuxième partie

Gestion stratégique d'une entreprise d'assurance

1 Intégration du risque dans la gestion d'une compagnie d'assurance

Les acteurs du marché ont porté jusqu'à présent une attention particulière sur l'analyse des exigences de capital réglementaire définies par le Pilier 1 permettant aux assureurs et aux réassureurs de respecter au mieux leurs engagements vis-à-vis de leurs assurés. L'intégration du risque dans la gestion de l'entreprise est l'une des grandes nouveautés de la réglementation Solvabilité 2 dont l'entrée en vigueur est prévue pour Janvier 2016. Cette Directive prévoit la mise en place d'une évaluation interne des risques et de la solvabilité (***Own Risk and Solvency Assessement*** ou **ORSA**) des différentes compagnies d'assurance et de réassurance. Une bonne maîtrise de l'ORSA contribue alors à l'obtention d'une vision claire des risques spécifiques supportés par l'entreprise. Cela lui permet ainsi d'assurer un suivi continu de sa prise de risque et de définir des stratégies optimales en termes d'investissements et/ou de stratégies de réassurance. Au delà d'un processus d'évaluation de solvabilité à moyen terme (3 à 5 ans), l'ORSA se présente alors comme un réel outil de pilotage stratégique d'entreprise. Une culture de gestion d'entreprise portant sur les risques s'est progressivement installée dans les pays d'Amérique du Nord à partir des années 2000 avec l'introduction de la définition de la discipline, ***Enterprise Risk Management***, par la *Casualty Actuarial Society* (CAS). En Europe, bien que de plus en plus développé, ce concept est moins répandu parmi les acteurs du marché.

1.1 Processus d'intégration du risques dans la gestion d'une entreprise

1.1.1 *Enterprise Risk Management*

Le concept d'*Enterprise Risk Management* a été pour la première fois défini par la *Casualty Actuarial Society* dans les années 2000. L'institution l'introduit de la sorte :

« ERM est la discipline par laquelle une organisation de n'importe quelle industrie évalue, contrôle, exploite, finance et surveille les risques de toutes les sources dans le but d'augmenter à court et à long terme la valeur de l'entreprise » (CAS (2003)).

Formellement, la mise en place de l'*Enterprise Risk Management* se compose de plusieurs étapes :

1. Etablissement du contexte : l'entreprise doit définir le contexte interne et externe, permettant l'élaboration des objectifs de stratégie. Etablissant la politique de gestion des risques et des lignes de conduite de l'entreprise, le conseil d'administration représente alors le principal acteur de cette étape.
2. Identification des risques : l'entreprise identifie tous les facteurs de risques pouvant affecter les activités de l'entreprise.
3. Evaluation et hiérarchisation des risques : l'entreprise doit évaluer la probabilité et l'impact sur ses activités des sinistres possibles au titre de chaque risque.
4. Intégration des risques dans les stratégies : la compagnie d'assurance doit intégrer ses risques dans ses stratégies permettant d'éviter, de couvrir ou de bénéficier des opportunités potentiels.
5. Contrôle : l'entreprise doit suivre régulièrement ses risques et s'assurer de leurs bonnes évaluations.

La mise en place de l'*Enterprise Risk Managment* implique notamment une bonne définition des objectifs de l'entreprise mais également de son attirance/aversion au risque et des limites de tolérances au risque. Ces notions constituent le profil de risque de l'entreprise. Nous introduisons ce concept dans la partie 1.2.2 de ce chapitre.

Par ailleurs, alors que la discipline s'est de plus en plus popularisée dans le domaine financier, le monde assurantiel est paradoxalement beaucoup moins familier avec cette notion. Les agences de notations ont intégré le critère de qualité de l'ERM dans la procédure d'établissement des notations des assureurs, incitant ceux-ci à adopter au plus vite cette démarche.

1.1.2 *Own Risk and Solvency Assessement*

Le processus *ORSA* définit par l'article 45 de la Directive Solvabilité 2 reprend de nombreuses notions présentes dans la démarche *Enterprise Risk Management.* La Directive présente le processus ORSA dans son article 45.

Article 45

1. « Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte **au moins** sur les éléments suivants :
   a) le besoin global de solvabilité, compte tenu du **profil de risque spécifique**, des **limites approuvées de tolérance au risque** et de la **stratégie commerciale** de l'entreprise ;
   b) le respect **permanent** des exigences de capital prévues au chapitre Vi, sections 4 et 5, et des exigences concernant les provisions techniques prévues au chapitre Vi, section 2.
2. Aux fins du paragraphe 1, point a), l'entreprise concernée met en place des procédures qui sont **proportionnées à la nature, à l'ampleur et à la complexité des risques** inhérents à son activité et qui lui permettent d'identifier et d'évaluer de manière adéquate les risques auxquels elle est exposée à **court et long terme**, ainsi que ceux auxquels elle est exposée, ou pourrait être exposée. L'entreprise démontre la pertinence des méthodes qu'elle utilise pour cette évaluation.
3. Dans le cas visé au paragraphe 1, point c), lorsqu'un modèle interne est utilisé, l'évaluation est effectuée parallèlement au recalibrage qui aligne les résultats du modèle interne sur la mesure de risque et le calibrage qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.
4. L'évaluation interne des risques et de la solvabilité fait **partie intégrante de la stratégie commerciale** et il en est tenu systématiquement compte dans les **décisions stratégiques** de l'entreprise.
5. Les entreprises d'assurance et de réassurance procèdent à l'évaluation visée au paragraphe 1 sur une base **régulière et immédiatement** à la suite de toute évolution notable de leur profil de risque.
6. Les entreprises d'assurance et de réassurance **informent les autorités de contrôle** des conclusions de chaque évaluation interne des risques et de la solvabilité, dans le cadre des informations à fournir en vertu de l'article 35.
7. L'évaluation interne des risques et de la solvabilité ne sert pas à calculer un montant de capital requis. Le capital de solvabilité requis n'est ajusté que conformément aux articles 37, 231 à 233 et 238. »

Ce processus à mettre en place, dans le cadre de la Directive Solvabilité 2, a pour ambition de promouvoir une culture de gestion des risques dans les compagnies d'assurance. Dans ce sens, l'ORSA peut être perçu comme un processus pour appréhender, de la meilleure façon possible, les risques inhérents aux activités de l'assureur lui fournissant une bonne connaissance des risques de l'entreprise à moyen terme. En considérant un horizon plus important que celui proposé dans le Pilier 1 de la Directive, il se présente également comme un outil de pilotage de l'entreprise : la prise en compte des risques de manière prospective dans les décisions stratégiques permet à celle-ci de conduire ses activités de la façon la plus saine possible. L'ORSA devrait donc occuper un rôle central dans la gestion des risques. Cependant, il doit être en concordance avec la taille de la compagnie mais également avec la nature et la complexité de ses risques. Les méthodes, les hypothèses et les modèles appliqués dans le cadre de l'ORSA doivent respecter le principe de Proportionnalité. Ces méthodologies mais également les résultats issus du processus doivent être formalisés et transmis aux superviseurs et aux autorités de contrôle. Le rapport ORSA constitue alors un document de référence quant à la mesure et à l'appréhension du risque de l'entreprise et à sa stratégie décisionnelle.

De plus, les exigences réglementaires du Pilier 1 de la Directive Solvabilité 2 ne reflètent pas fidèlement le réel besoin en fonds propres de l'entreprise d'assurance. L'ORSA peut être également perçu comme un moyen supplémentaire d'évaluation du besoin en solvabilité considérant les risques réellement supportés par la compagnie. Par ailleurs, le dispositif ORSA défini par la directive ne préconise aucune méthode particulière de projection ou d'évaluation des risques.

L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), lors de la conférence du 13 Mars 2014, a mis en avant les trois points clés de la mise en œuvre de l'ORSA :

- L'évaluation du besoin global de solvabilité reposant notamment sur une description détaillée du profil de risque et une définition des moyens nécessaires pour faire face aux risques les plus importants ;
- Le respect permanent des obligations réglementaires permettant de mesurer la capacité qu'a l'entreprise à respecter les exigences réglementaires (SCR et MCR) sur un horizon de temps supérieur ou égal à celui de son plan d'affaires ;
- La déviation du profil de risque par rapport aux hypothèses qui sous-tendent le calcul du SCR permettant à l'organisme de choisir des hypothèses autres que pour l'évaluation des exigences réglementaires en capitaux définis par le Pilier 1 de la Directive.

Le dispositif ORSA permet à l'assureur de démontrer qu'il dispose d'un système de gestion des risques intégré à ses stratégies et son plan d'activité.

1.2 Notions de prise de risque et d'exposition au risque

L'activité d'une compagnie d'assurance repose sur la prise de risque. Le transfert du risque de l'assuré à l'assureur permet à celui-ci de recevoir une prime. Cette recette doit être utilisée de la meilleure façon possible pour soit constituer un matelas assez confortable pour éviter tout risque d'insolvabilité soit pour verser des dividendes aux apporteurs de capitaux. L'activité assurantielle d'une compagnie repose sur un certain nombre de personnes particulièrement impliquées dans la gestion de l'entreprise.

1.2.1 Parties prenantes

Avant de préciser les notions de profil de risque et d'appétence au risque, il est bon de rappeler les différents acteurs impliqués dans le niveau d'exposition au risque de la compagnie d'assurance. Chaque partie prenante a une vision propre du risque et a un objectif différent quant à la formulation de l'appétence pour le risque. Le profil de risque d'une compagnie d'assurance peut constituer une information précieuse pour tous ces acteurs.

1.2.1.1 Les actionnaires

Les actionnaires d'une compagnie d'assurance recherchent, en tant que propriétaire du capital de l'entreprise, un certain niveau de rentabilité. Ils ont des perspectives de résultats et peuvent donc inciter la compagnie à la prise de risque. Il existe cependant deux types d'actionnaires. Certains d'entre eux préfèrent favoriser la création de valeur à long terme et conçoivent d'obtenir un rendement faible à court terme si cela permet d'améliorer les résultats futurs de la compagnie. D'autres ont une vision à court terme et s'intéressent particulièrement à l'amélioration immédiate des résultats de l'entreprise. Ils portent également une attention sur les pertes potentiels de la compagnie. Ils sont donc particulièrement sensibles aux pertes extrêmes mais également aux pertes moins élevées mais régulières.

1.2.1.2 La direction

Les objectifs de la direction sont très proches de ceux des actionnaires. Étant pilote de l'entreprise, elle cherche notamment à optimiser la performance de l'entreprise. Elle souhaite en général maximiser les profits de l'entreprise tout en s'assurant du respect des engagements envers leurs assurés. Elle cherche plus globalement à maîtriser le risque supporté par l'entreprise d'assurance.

1.2.1.3 Les assurés

Les assurés sont principalement concernés par le respect des engagements qu'ils ont pris auprès de la compagnie d'assurance. Particulièrement en assurance non-vie, les assurés ne s'intéressent pas aux résultats de la compagnie, mais plutôt à la capacité de l'entreprise à faire face à des sinistres extrêmes. En revanche en assurance-vie, par le biais des mécanismes de participation aux bénéfices, les assurés se voient alors également concernés par la faculté qu'a la compagnie d'assurance de générer du résultat.

1.2.1.4 Les autorités de contrôle et les agences de notation

Les autorités de contrôle, représentant les intérêts des assurés, doivent s'assurer que les compagnies d'assurance restent solvables tout au long de leurs activités. Elles peuvent donner des alertes en cas de non respect des règles de solvabilité et font en sorte que les assureurs disposent d'une gestion efficace et maîtrisée des risques.

Les agences de notation, quant à elles, sont chargées d'évaluer la solidité et la performance de l'entreprise d'assurance. Leur avis est une information importante à la fois pour les détenteurs d'obligations émises par la société mais également pour les assurés.

Elles sont toutes deux sensibles à un niveau élevé de capitalisation pour minimiser le plus possible le risque d'insolvabilité.

Le schéma ci-dessous montre les intérêts distincts que peuvent avoir les différentes parties prenantes sur le résultat d'une entreprise d'assurance.

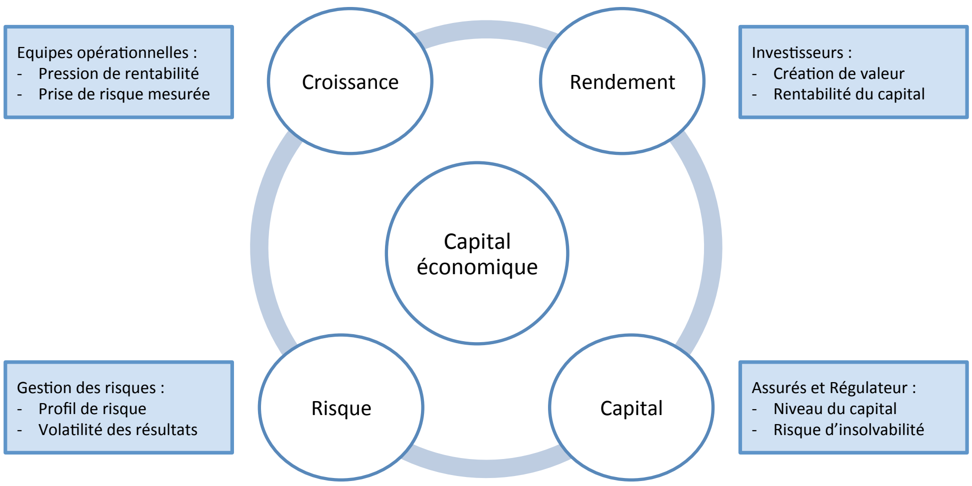

Figure 1.1 – La divergence des intérêts des parties prenantes sur le résultat d'une compagnie d'assurance

1.2.2 Profil de risque

La compagnie d'assurance doit définir préalablement son profil de risque avant la mise en place du processus ORSA ou ERM. On définit le profil de la manière suivante :

Définition II.1. Le **profil de risque** représente l'exposition aux risques mesurée par l'entreprise.

L'exposition du risque de l'assureur dépend également des stratégies de développement et de pilotage de l'entreprise. Par exemple, une compagnie d'assurance vendant un nombre important de contrats sera plus exposée aux risques. La souscription d'un nouveau traité de réassurance soumet l'assureur à un risque de défaut du réassureur. Un assureur, aimant le risque, est amené à investir de manière importante dans des actifs risqués. Le pilotage de l'entreprise mais également l'établissement de nouvelles stratégies caractérisent le **profil de risque** de l'assureur. Celui-ci doit prendre en compte toutes les parties prenantes.

La directive Solvabilité 2, *via* la démarche ORSA, incite les assureurs à avoir au préalable une vision claire de leurs risques pour que la gestion de l'entreprise soit mesurée et maîtrisée par rapport aux risques qu'elle supporte. Les assureurs doivent ainsi définir de manière précise leur profil de risque. Avant toute chose, la compagnie d'assurance doit faire l'inventaire de tous les risques auxquels elle est exposée.

1.2.3 Cartographie des risques

Premièrement, la compagnie d'assurance doit identifier tous les risques spécifiques auxquels elle peut faire face, leurs origines et leurs répercussions sur son organisation et sur les comptes de son bilan. Ces risques peuvent être déterminés grâce à la réalisation par exemple d'entretiens avec les responsables des directions opérationnelles. La Formule Standard préconisée par la Directive Solvabilité 2 regroupe un ensemble de risques qui ne couvre en général pas certains risques spécifiques de l'organisme d'assurance. Le périmètre de risques à considérer dans le cadre de l'ORSA peut être élargi par rapport à celui de type Formule Standard. L'identification conduit alors à la hiérarchisation des risques en fonction de leur importance (leur dangerosité et leur fréquence d'occurrence) au sein de l'entreprise. Par ailleurs, cette cartographie doit être mise à jour régulièrement pour être en parfaite adéquation avec la situation de l'entreprise.

1.2.3.1 Risques quantifiables et calculables

Dans le document « Préparation à Solvabilité 2, Enseignements de l'exercice d'ORSA pilote 2013 » de l'ACPR paru le 21 Mars 2014, l'autorité de contrôle définit les risques quantifiables et les risques calculables.

« Un risque est quantifiable au sens de la directive Solvabilité 2 si :

– il correspond à une perte pour la mesure spécifique donnée par l'article 101 de la directive (perte sur un horizon d'un an et avec un niveau de confiance de $99,5\%$;
– il peut être convenablement contré par la présence de capital, comme il est précisé dans le considérant 29 de la directive : « Certains risques ne peuvent être convenablement contrés qu'au moyen d'exigences concernant la gouvernance, et non par des exigences quantitatives exprimées dans le capital de solvabilité requis... »

La directive prévoit explicitement que certains risques ne sont pas quantifiables comme les risques découlant des décisions stratégiques et les risques de réputation. »

Un risque calculable est un risque qu'on peut appréhender numériquement et qui se distingue d'un risque quantifiable par le deuxième point exposé ci-dessus. Par exemple, un risque opérationnel est difficilement calculable mais est quantifiable dans le sens où il peut être contré par des exigences concernant la gouvernance.

Le calcul du SCR, dans le sens du Pilier 1 de la Directive, couvre l'ensemble des risques importants et quantifiables. Le besoin global de solvabilité, ou capital ORSA, quant à lui, doit couvrir l'intégralité des risques importants, qu'ils soient quantifiables ou non.

1.2.3.2 Risques de type Formule Standard et définis dans l'article 44 de la Directive

En première partie, nous avons présenté les différents risques pris en compte dans le calcul des exigences en solvabilité dans le cadre du pilier 1 de la Directive Solvabilité 2 (voir figure 3.1). Comme présentés précédemment, les risques élémentaires sont regroupés en module de risques. Le calcul du SCR distingue 6 modules de risques. Ces risques peuvent être modélisés différemment que dans le cas du calcul du capital économique requis dans le cadre du pilier 1.

Risque de marché Ce module regroupe tous les risques de perte résultant des fluctuations impactant la valeur ou la volatilité des valeurs de marchés des actifs, des instruments financiers et des passifs.

- **Taux** : La courbe de taux d'intérêt concerne à la fois les actifs et les passifs de la compagnie d'assurance. Elle est utilisée pour l'actualisation des flux futurs dans le calcul du *Best Estimate* des engagements mais également pour l'évaluation des valeurs de marché des actifs à revenu fixe (obligations et OPCVM obligataires), des instruments de financement (capital d'emprunt), des produits dérivés de taux d'intérêt, etc. Ces postes du bilan peuvent être sensibles à une baisse des taux comme à une hausse des taux. Dans le cas de la Formule Standard, le calcul des capitaux économiques se fait par des chocs directement sur la courbe des taux à la hausse et à la baisse.
- **Action** : Le risque action survient par la fluctuation des valeurs ou des volatilités des actions dans le portefeuille de l'entreprise.
- **Immobilier** : Il résulte de la sensibilité des actifs, des passifs et des instruments financiers au niveau de la valeur ou de la volatilité des prix des actifs immobiliers.
- **Signature ou *Spread*** : Ce risque correspond à l'évolution à la hausse ou à la baisse des *spread* de crédit, i.e. la différence entre le taux actuariel d'une produit de taux et le taux sans risque. Les *spread* de crédit dépendent de l'offre et la demande globale en capitaux mais également des perspectives économiques.
- **Change** : Ce module vise à quantifier le besoin en capital correspondant à la perte générée par l'effet de change sur la valeur des actifs (titres libellés en devises étrangères, produits dérivés de change).
- **Concentration** : Un risque de concentration constitue un manque de diversification ou une surexposition au risque de défaut d'un émetteur. Un portefeuille d'actifs concentrés (même émetteur, même zone géographique ou même industrie par exemple) induit une volatilité supplémentaire et en cas de défaut de l'émetteur, implique une perte supplémentaire due à une forte corrélation entre les actifs.

Remarque II.1. Souvent considérée comme un actif non risqué, l'obligation est cependant exposée au risque de taux et au risque de défaut de l'émetteur. Elle peut également être soumise à deux effets opposées en cas de hausse des taux d'intérêt par exemple. En effet, cette hausse est favorable lors de réinvestissements des coupons perçus par une obligation mais est défavorable lorsque l'assureur veut vendre cette obligation.

Risque de défaut et de contrepartie Le risque de défaut correspond aux pertes possibles en cas de défaut d'une contrepartie mais également en cas de dégradation de la qualité du crédit ou des contreparties.

Risque de souscription Vie Le risque de souscription Vie regroupe tous les risques dus à une tarification non adéquate lors de la souscription ou du rachat du contrat. (ex : réassurance, dépôts, etc.)

- **Mortalité** : Le risque de mortalité survient lorsque la mortalité n'a pas été bien estimée pour le calcul du Best Estimate par exemple. Lorsqu'un assuré meurt « trop vite », les prestations à payer en cas de décès deviennent alors supérieures aux provisions techniques.
- **Longévité** : Contrairement à ce que l'on peut penser, le risque de longévité n'est pas l'antithèse du risque de mortalité. Il est défini par l'allongement de l'espérance de vie. Par exemple, les innovations médicales peuvent rendre les tables de mortalité utilisées par les actuaires arriérées.
- **Invalidité ou morbidité** : Ce risque survient lorsqu'il y a un changement dans le niveau, la tendance ou la volatilité des taux d'invalidité.
- **Rachat** : Ce risque modélise le comportement de rachat des assurés. C'est un risque particulièrement important en assurance-vie, car des rachats massifs peuvent causer des crises systémiques de grande ampleur. Un rachat peut être dû à une opportunité d'arbitrage sur le marché (hausse des taux) ou à un besoin de liquidité (achat immobilier par exemple). Ce risque est particulièrement difficile à modéliser car il dépend de nombreux facteurs dont notamment les caractéristiques et les désirs des assurés.
- **Frais de gestion** : Ce risque survient lorsque les frais de gestion subissent une forte inflation.
- **Révision** : Ce risque s'applique à des contrats pour lesquels les prestations peuvent évoluer en fonction d'un changement de l'environnement légal.

- **Catastrophe** : C'est le risque de pertes dues à des événements extrêmes impactant fortement la mortalité des assurés.

Risque de Souscription Non-Vie Le risque de Souscription Non-Vie regroupe l'ensemble des risques relatifs aux contrats d'assurance de type Non-Vie. Il resulte des incertitudes liées aux résultats des souscriptions de ces contrats.

- **Tarification** : Il définit le risque que les coûts futurs des sinistres soient supérieurs aux primes perçues.
- **Provisionnement** : Ce risque correspond à une mauvaise estimation dans l'évaluation des sinistres.
- **Rachat** : c'est le risque dû à la duration courte en moyenne des contrats d'assurance non-vie, ce risque concerne principalement les contrats pluri-annuels et de la prise en compte des primes futures.
- **Catastrophe** : C'est le risque de pertes dues à des événements extrêmes et non pris en compte par les risques de tarification et de provisionnement.

Risque de souscription Santé Parmi les risques associés à une activité de santé, il existe deux types de risques. La distinction entre ces risques est principalement due au type d'activité de l'assureur : une activité assimilée à de l'assurance Vie et une activité proche de l'assurance Non-Vie. Selon les cas, les risques à considérer sont ceux définis par ces deux catégories. Ces deux types d'activité peuvent se distinguer en utilisant le classement en ligne d'activité (LoB).

Risque Opérationnel « Le risque opérationnel couvre les risques de pertes dues l'inadéquation ou des défaillances de modèles, des systèmes, du personnel ou résultant d'événements extérieurs. Il prend également en compte les risques juridiques mais n'est pas influencé par les décisions stratégiques (réputation, etc.). » [1]

1.2.3.3 Risques spécifiques supplémentaires

Dans le cadre de l'ORSA comme pour une démarche ERM, la compagnie d'assurance doit prendre en compte les risques spécifiques qui lui paraissant les plus pertinents. Les risques qui n'ont pas été pris en compte par le Pilier 1 de la Directive sont en général des risques opérationnels. Par exemple, l'entreprise pourra considérer :

- les risques stratégiques : gouvernance, plan stratégique, communication externe, conformité et déontologie ;
- les risques de réputation et d'image ;
- les risques de fraude : interne (divulgation d'information, vol, corruption, blanchiment, etc.) et externe (vol, sécurité des systèmes d'information, etc.)
- les risques des ressources humaines : relations de travail, recrutement, management, respect du code du travail.

Ces risques sont difficilement quantifiables du fait de la fréquence peu importante de la survenance de ces sinistres et de leurs caractères principalement qualitatifs.

1.2.3.4 Corrélations entre les risques

A la présentation de chaque risque, il est intuitif de supposer qu'il existe des dépendances plus ou moins fortes entre les risques. Par exemple, une relation importante peut être établie entre le risque de taux et le risque de rachat. En cas de hausse des taux, un risque de rachat est perceptible : les assurés seront amenés à trouver un contrat plus avantageux avec un taux de revalorisation de leur épargne plus élevé. Par ailleurs, l'assureur est exposé à des moins values en cas de vente sur son portefeuille d'actifs. En cas de baisse des placements, il y a alors une perte de rentabilité de ceux-ci : dans ce cas là, l'assureur peut rencontrer des difficultés à respecter ses engagements.

Comme on l'a vu précédemment, une matrice de corrélation est utilisée pour représenter les dépendances entre les différents risques et sous modules de la Formule Standard. Cette agrégation des risques ne capte que les corrélations linéaires entre les différents capitaux élémentaires.

1. *Technical Specification for the Preparatory Phase*, EIOPA, 2014

Remarque II.2. Les risques opérationnels peuvent être également corrélés à des risques assurantiels ou financiers. Dans le cadre de la Formule Standard, ces dépendances ne sont pas prises en compte. Il est alors possible, par l'utilisation d'une structure d'agrégation de type Formule Standard, d'évaluer deux fois un même risque.

1.2.3.5 Hiérarchisation des risques

La compagnie d'assurance peut en général identifier un nombre important de risques. Il est alors nécessaire d'en sélectionner un nombre restreint pour une meilleure gestion des risques. L'assureur doit procéder à une hiérarchisation de tous les risques dont il est exposé pour en extraire les plus dangereux en termes de sévérité et d'occurrence.

Une hiérarchisation des risques prend souvant la forme d'une matrice de criticité, comme présenté ci-dessous.

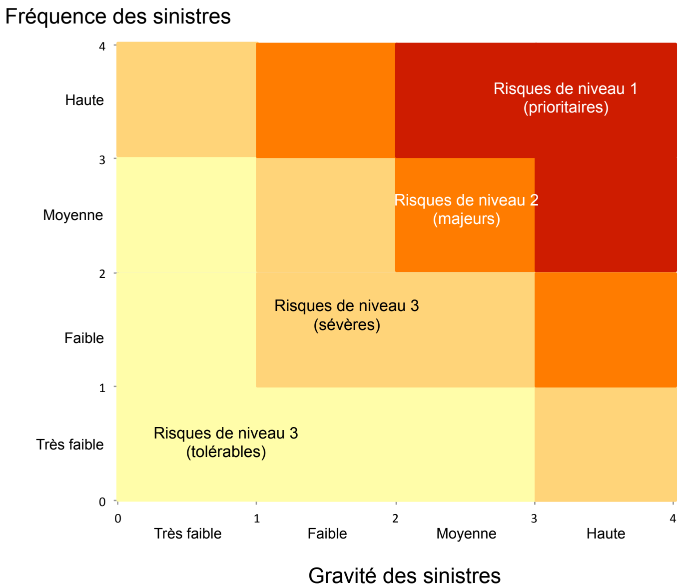

FIGURE 1.2 – Hiérarchisation des risques selon leurs sévérité et leurs occurrences

Cette matrice relève des dires d'expert. Des méthodes présentées dans la première partie de ce mémoire peuvent être utilisées pour appréhender la gravité des sinistres relatifs aux risques considérés. Seulement, la sévérité d'un risque n'est pas forcément calculable.

Remarque II.3. D'autres types de matrice de criticité peuvent être mises en place. Celle présentée ci-dessus donne un exemple.

1.3 Appétence au risque

1.3.1 Définition

La mise en place de stratégies opérationnelles nécessite de la part de l'assureur de définir son **appétit pour le risque** ou ***Risk Appetit***. Kamiya et al. (2007) définissent de la manière suivante cette notion :

Définition II.2. L'**appétit pour le risque** représente le degré de risque que la compagnie accepte de supporter et gérer avec succès afin de mener à bien ses objectifs. Il représente alors la nature et la quantité de risques que la compagnie est prête à supporter tout en prenant en compte les attentes de toutes les parties prenantes.

C'est du ressort de l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle (AMSB) de définir les stratégies en termes de prise de risque. Celles-ci doivent être en accord avec les objectifs en termes de création de valeur, de rentabilité ou encore de développement de l'activité. L'appétit pour le risque peut être évalué de manière quantitative mais également de manière qualitative. Il permet de définir le niveau de prise de risque au niveau agrégé de l'entreprise d'assurance. Pour ce faire, l'assureur doit prendre en compte son niveau limite de prise de risque, également appelé **Capacité de prise de risque** (ou *Risk Capacity*). La capacité de prise de risque peut être déterminée par le montant de capital disponible ou la capacité maximale à générer de la valeur par exemple.

1.3.2 Dimensions du risque

Après avoir identifié tous ses risques et les priorités des parties prenantes, la définition de l'appétit pour le risque passe par le choix des dimensions couvertes par celui-ci. L'assureur peut avoir des perspectives en termes :

- de résultat,
- de capital,
- de solvabilité,
- de *rating*,
- ou encore d'image ou de réputation par exemple.

Les trois premiers points sont les perspectives les plus communes pour les assureurs.

1.3.3 Mesures comptables et économiques du risque

Pour chaque dimension, l'assureur doit définir le **cadre de valorisation**. Par exemple, l'écriture comptable du bilan en vision économique, globalement en valeur de marché, sous la Directive Solvabilité 2 est complètement différente de celle utilisée encore maintenant sous la Directive Solvabilité 1 où les postes du bilan sont comptabilisés en valeur historique. La communication financière est également primordiale pour toute société. Le choix d'une mesure comptable permet de prendre en compte les normes de comptabilité (local GAAP, IFRS, etc.). Nous nous focaliserons un peu plus sur les différentes mesures comptables dans la section (3.1). Comme on l'a vu dans la première partie de ce mémoire, le choix d'une mesure de risques (*Value-at-Risk*, *Tail Value-at-Risk*,...) peut s'avérer modifier fortement la vision que l'assureur peut avoir du risque. Certaines mesures prennent en compte les notions de ruine de l'entreprise alors que d'autres ne mesurent que la volatilité du risque.

1.3.4 Niveau de probabilité du risque

Le niveau de probabilité du risque est particulièrement important. Et on peut donner à ce paramètre, suivant la mesure de risque utilisé, une interprétation économique. Par exemple, la *Value-at-Risk* à un niveau 99,5% représente le niveau de fonds propres que doit disposer une compagnie d'assurance pour éviter une faillite avec une probabilité 1/200 (soit une toutes les 200 ans). Le choix de ce paramètre dépend grandement de l'importance de chaque partie prenante. Par exemple, les actionnaires sont plus intéressés par l'espérance des résultats, alors que le régulateur comme les assurés se focalisent plutôt sur la queue de distribution du résultat (c'est-à-dire les risques extrêmes).

1.3.5 Horizon du risque

Le Pilier 1 prévoit un horizon d'un an pour l'évaluation des exigences de solvabilité. Les assureurs à travers le processus ORSA doivent avoir une vision plus prospective sur leurs risques. L'ACPR propose un horizon d'étude au moins supérieur ou égal à celui du plan stratégique de l'entreprise. Un horizon de temps de ce type paraît plus adapté pour une gestion optimale des risques de l'entreprise.

1.3.6 Déclinaison en tolérances au risque et limites de risque

Les assureurs sont amenés à décliner leur appétence au risque selon une maille plus fine : tolérances au risque. Ils doivent traduire la vision globale qu'apporte l'appétence au risque en catégories de risque, Pour un bon pilotage du risque, la compagnie doit définir des limites de tolérance au risque sur les principales dimensions du risque (résultat, solvabilité, etc.). Cela se formalise par la définition de seuils d'alerte et tolérance sur les différents indicateurs choisis. Ainsi, l'assureur pourra contrôler ces différentes quantités tout au long de son activité. Ayant une vision globale des objectifs des parties prenantes, c'est du ressort du comité d'administration de définir ces seuils. Ceux-ci peuvent être définis comme des mesures de risque avec des niveaux de probabilité différents.

Formellement, ces seuils peuvent être de plusieurs niveaux :
- une zone d'alerte
- une zone de tolérance au risque
- une zone de prise de risque cible

Alors que le risque est difficilement contrôlable de manière agrégée, la déclinaison de la notion de tolérance au risque sur des catégories distinctes de risque peut être réalisable et permet un pilotage plus adapté des activités assurantielles. La définition des catégories reste libre à l'assureur, c'est pourquoi il est important de choisir une segmentation pertinente des risques en fonction des objectifs stratégiques de l'entreprise.

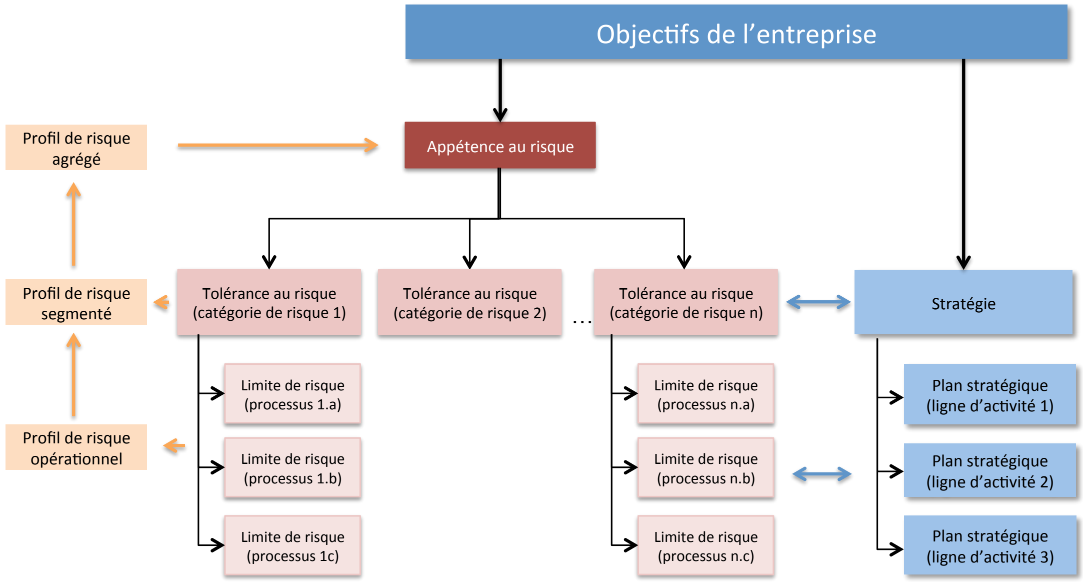

FIGURE 1.3 – Déclinaison de l'appétence au risque en tolérances

1.4 Allocation du capital

1.4.1 Motivations

Dans cette partie, nous nous concentrons sur la dimension capital. L'allocation de capital se présente alors comme un réel instrument de gestion pour une compagnie d'assurance. Les méthodes induites permettent par exemple la mise en œuvre d'une tarification juste, la gestion optimale de ses risques et l'évaluation des performances de chaque segment.

Définition II.3. Une **allocation de capital** définit le montant de capital (évalué en fonction des risques pris par l'assureur) à assigner à chaque segment de risques.

Remarque II.4. En général, une allocation de capital se fait par ligne d'activité.

Un des principaux enjeux de l'allocation de capital est de prendre en compte les effets de diversification et de savoir comment segmenter et allouer ces effets aux différents segments. Ces effets proviennent des dépendances entre les différents risques.

Dans sa thèse, Kim (2007) présente les différents points repérés dans la littérature qui motivent l'établissement d'une allocation de capital.

- **Comparaison absolue** : Détenir du capital est coûteux, une allocation de capital permet de distribuer le coût du capital global à travers les différents segments. Une allocation de capital permet alors de définir la contribution au risque de chaque segment par rapport au risque global.
- **Comparaison relative** : La comparaison d'un segment par rapport à un autre peut être menée après allocation du capital global. Lorsque les segments définissent des lignes d'activité, cela permet de repérer les activités les plus dangereuses.
- **Etude de la diversification** : L'allocation de capital est un bon outil pour l'analyse des effets de diversification. Tout changement de structure d'activité impacte l'ensemble de la compagnie. L'ajout ou la suppression d'une ligne d'activité par exemple impactera tous les segments de risques. Les méthodes d'allocation permettent alors de capter la direction et la magnitude de ces changements.
- **Tarification** : L'allocation de capital peut impacter les politiques de tarification bien que celles-ci dépendent également de la loi de l'offre et de la demande sur les marchés concurrentiels.

L'établissement d'une allocation de capital permet alors de définir des stratégies de développement et/ou de rentabilité.

1.4.2 Notion de capital

Le capital peut désigner de nombreuses quantités. La première question à se poser dans un exercice d'allocation de capital est la suivante : « Quel capital souhaite-t-on allouer ? ».

Capital disponible Le capital disponible est le capital que détient la compagnie d'assurance à une date donnée. Il est défini comme la différence entre les actifs détenus et les engagements de l'entreprise.

Capitaux économiques réglementaires Le Pilier de la Directive Solvabilité 2, a introduit deux niveaux de capital que l'assureur doit détenir pour faire face à un événement bicentenaire de haute gravité :

- Le **capital de solvabilité requis**, ou (SCR), « correspond à la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance $de 99,5\%$ à l'horizon d'un an » (Directive Solvabilité 2). Ce capital couvre un nombre restreint de risques jugés par les autorités comme les plus importants et communs mais également les plus facilement quantifiables.
- et le **minimum de capital requis**, ou **MCR** « correspond à un montant de fonds propres de base éligibles en-deçà duquel les preneurs et les bénéficiaires seraient exposés à un niveau de risque inacceptable si l'entreprise d'assurance ou de réassurance était autorisée à poursuivre son activité » (Directive Solvabilité 2).

Ces niveaux de capital donnent une vision de la situation de la compagnie d'assurance à une date donnée. Ils répondent à la question : « combien l'assureur doit-il mettre de côté pour absorber un choc de sinistralité exceptionnel dans sa situation actuelle ? ». L'évaluation de ces exigences réglementaires sont normalisée. Toutes les compagnies d'assurance, hormis celles qui utilisent un modèle interne, utilisent les mêmes techniques pour évaluer sa solidité financière face à un sinistre important. Elles présentent également des seuils en dessous desquels les autorités de contrôle peuvent sanctionner les assureurs ne respectant pas ces exigences.

Besoin Global de Solvabilité (BGS) Le **Besoin Global de Solvabilité**, également appelé le capital ORSA, d'une compagnie d'assurance à une date donnée est le niveau de fonds propres nécessaires pour pérenniser ses activités en tenant compte de son propre profil de risque. Dans le cadre du processus ORSA, les assureurs doivent évaluer leur BGS en fonction de leurs risques spécifiques dont ils sont exposés et de leurs stratégies commerciales en termes de développement, de performance et de rentabilité. Ce capital apporte une vision prospective et spécifique de la couverture du risque. Les autorités de contrôle laissent une grande liberté quant à la méthode d'évaluation de ce capital.

1.4.3 Quelle méthode d'allocation de capital pour quelle segmentation ?

1.4.3.1 Choix d'une segmentation

Comme nous l'avons vu précédemment, la déclinaison en tolérances au risque de l'appétence au risque doit supposer une agrégation des risques adéquate aux stratégies de l'entreprise. Différents regroupements des risques sont possibles : par zone géographique, par ligne d'activité ou par propriétaire de risque, par exemple. En général, les assureurs cherchent à agréger les risques de telle sorte qu'ils puissent piloter leurs risques selon cette segmentation.

Les assureurs choisissent fréquemment une segmentation par ligne d'activité (*Line of Business* en anglais ou LoB), permettant un pilotage mesurée pour chaque type de risque. Lorsqu'il s'agit d'un groupe, une allocation du capital par filiale peut être pertinente : la diversification des risques parmi les filiales se révèle alors être une propriété intéressante. Pour de petites structures, l'allocation par produit ou par preneur de risque peut être intéressante, notamment du fait qu'il n'existe donc pas de filiales et que leurs activités se réduisent à quelques produits.

Par ailleurs, il est plus pertinent de choisir une segmentation par ligne d'activité lorsqu'il s'agit d'un assureur de type Non-Vie. En effet, les segments de risque définis de la sorte sont ainsi peu corrélés entre eux. Par exemple l'activité d'assurance automobile d'un assureur non-Vie impacte peu ses activités d'assurance habitation, sauf en cas de catastrophe naturelle. Les assureurs de type Vie, quant à eux, choisiront plutôt une agrégation par produit ou par preneur de risque. En effet, ils sont principalement exposés à des risques financiers. Une agrégation par ligne d'activité semble alors peu appropriée. Dans ce cas là, une approche par preneur de risque peut sembler adéquate. Nous prenons alors pour exemple une compagnie d'assurance Vie commercialisant des contrats de type épargne pour montrer la pertinence d'une telle agrégation des risques.

1.4.3.2 Choix d'une approche d'allocation

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, toutes les méthodes d'allocation de capital ne sont pas adaptées à n'importe quelle agrégation des risques. Dans certains cas, comme nous l'avons abordé, une segmentation des risques semble peu appropriée à telle ou telle méthode d'allocation. Par exemple, lorsque l'assureur a considéré une segmentation par preneur de risque, une approche « *First-In* » ou « *Last-In* peut sembler théoriquement inadéquate. Un preneur de risque, défini comme un maillon dans la chaîne de production, n'assure pas l'activité assurantielle à lui tout seul. Forcément une corrélation existe entre les différents preneurs de risque. Il semble alors conceptuellement parlant inapproprié de parler de « premier entrant » ou de « dernier entrant ». Cependant, les concepts de théorie des jeux restent théoriques et les calculs restent valables même si il semble irréaliste de considérer un segment de risques sans un autre. Un assureur doit d'abord prendre en compte toutes les objectifs stratégiques de son entreprise, les risques encourus, les mesures de risque utilisées et la segmentation des risques envisagée avant de choisir une méthode d'allocation des risques plutôt qu'une autre.

1.5 Optimisation des stratégies de développement et de réassurance

En allouant un montant de capital à chaque segment de risques, les dirigeants de l'entreprise d'assurance peuvent ainsi appréhender les performances/difficultés de chacun de ces segments. L'exercice d'allocation de capital permet ainsi de mettre en place des plans stratégiques de réassurance et de développement mesurées aux limites de chaque segment de risques.

Développement Selon la segmentation utilisée, l'assureur peut décider à l'aide d'indicateurs de performance et de pilotage, les axes à développer ou dans le cas contraire les axes en péril. Lorsqu'une allocation de capital par ligne d'activité est effectuée, le lancement d'un nouveau produit peut être envisagé par exemple. Dans le cas contraire, lorsque les indicateurs montrent qu'une ligne d'activité est trop gourmande en capital alors l'assureur peut envisager une refonte de la gestion de cette ligne. Dans le même esprit, l'allocation de capital par zone géogaphique permet la mise en place de stratégies de développement géographique.

Réassurance La réassurance constitue un des outils majeurs de gestion du capital. Elle permet :
- de limiter la charge annuelle des pertes et ainsi de diminuer la volatilité du résultat ;
- une meilleure mutualisation des risques encourus par l'assureur ;
- augmenter les montants maximums de cotisations que l'entreprise peut gérer ;
- profiter d'une expertise sur des risques peu communs ;
- diminuer les coûts du capital (taxes, impôts, dividendes, etc.) ;
- diminuer la probabilité de ruine.

L'optimisation des stratégies de réassurance a fait l'objet d'une littérature conséquente, notamment dans son utilisation pour la diminution du coûts du capital. Le lecteur intéressé pourra se référer, par exemple, à l'article de Krvavych et Sherris (2004), « *Enhancing insurer value through reinsurance optimization* ».

La définition d'une allocation de capital peut alors déterminer le type de contrat de réassurance à mettre en place selon les objectifs de l'assureur et de la consommation en capital de chaque segment de risques. Par exemple, en segmentant les risques par ligne d'activité, l'assureur peut appréhender les risques les plus consommateurs de capital et ainsi en déduire une stratégie de réassurance adéquate.

2 Indicateurs de pilotage

La solvabilité mesure la capacité de l'assureur à respecter de façon permanente ses engagements envers ses assurés. La rentabilité évalue, quant à elle, la faculté à faire du profit. Mesurer la rentabilité de l'entreprise est importante du fait de la pression des actionnaires sur les bénéfices et de la volatilité des marchés financiers. Par ailleurs, de leur position d'investisseurs institutionnels mais également dans le respect permanent des engagements envers leurs assurés, les assureurs restent soucieux de leur solvabilité. Cependant, ces deux objectifs semblent peu compatibles. L'immobilisation du capital nuit à la rentabilité, alors qu'un niveau trop faible de capital détériore la solvabilité de la compagnie. Il est alors nécessaire d'établir un arbitrage entre rentabilité et solvabilité. L'appétit pour le risque de la compagnie d'assurance devra définir à la fois un niveau minimum de rentabilité et de solvabilité tout en fixant des tolérances aux risques en terme de volatilité du capital.

Les assureurs utilisent donc des indicateurs basés sur ces notions pour piloter leurs activités et ainsi pour définir les seuils de tolérance face au risque. Dans cette partie, nous proposons un certain nombre d'indicateurs sur le bilan global d'une compagnie d'assurance de façon agrégée. Ces indicateurs peuvent être transposés au niveau des risques pris en *stand-alone*. Dans le jargon actuariel, ils sont nommés **indicateurs clés**. Ils en existent de deux types : les indicateurs de performance à proprement parler, *Key Performance Indicators* (KPI) et les indicateurs de risque, *Key Risk Indicators* (KRI).

Avant toute chose, définissons les notations. Pour un exercice donnée, nous noterons :

- R : le résultat de l'exercice
- CA : le chiffre d'affaire
- FP : les capitaux propres
- AE : l'actif économique
- D : les dividendes

2.1 Indicateurs clés de performance (KPI)

Les indicateurs clés de performance permet une gestion globale de l'entreprise, prenant ainsi en compte les risques de façon agrégée.

2.1.1 Indicateurs sur le résultat de l'entreprise

La rentabilité de l'entreprise est particulièrement intéressante pour les investisseurs d'une compagnie d'assurance. Le cours de bourse d'une compagnie d'assurance cotée est établi sur la base des résultats anticipés. De bons résultats sur un long terme attirent les investisseurs permettant ainsi de renforcer l'image de l'entreprise.

Cependant l'analyse seule de la variable « résultat » peut s'avérer peu concluante pour mesurer la réelle rentabilité d'une compagnie d'assurance. L'évaluation de la rentabilité nécessite des éléments comparatifs, par le choix d'un référentiel comptable, à la fois subjectifs (le passé et la maturité de l'entreprise) et objectifs (environnement financier, etc.). La littérature mais également les techniques d'évaluation d'entreprise ont permis de définir de nombreux indicateurs pour l'évaluation de la rentabilité d'une compagnie d'assurance.

Nous proposons quelques indicateurs pouvant être intéressants dans l'étude de la rentabilité. Pour les indicateurs suivants, nous raisonnons en probabilité pour capter la dimension prospective de l'ORSA.

- La probabilité d'obtenir des résultats négatifs ou nuls :

$$\mathbb{P}(R < 0);$$

- Le montant minimum des résultats, $\bar{R}$, que l'entreprise souhaite atteindre à un horizon de n années :

$$\mathbb{P}(R_n \geq \bar{R});$$

- Le taux de baisse de $t\%$ des résultats par rapport au résultat attendu :

$$\mathbb{P}\left(\frac{R}{\mathbb{E}(R)} \leq t\%\right);$$

- La probabilité de suspension des dividendes :

$$\mathbb{P}(D \leq 0).$$

Tous les indicateurs présentés précédemment peuvent être utilisés pour définir des seuils de tolérance au risque en fixant un horizon de temps et un niveau de probabilité.

Définition II.4. On appelle ***Earnings-at-Risk*** la diminution probable des résultats comptables par rapport aux résultats attendus sur un horizon de temps donné.

Toutes ces mesures nécessitent l'obtention d'une distribution des résultats sur des horizons de temps plus ou moins longs. Celle-ci peut s'obtenir par des méthodes stochastiques et par des méthodes apportées par des notions de séries temporelles et d'économétrie (méthode par *proxies*).

D'autres mesures inspirées de notions de finance d'entreprise peuvent également être considérées comme le *Return On Assets* (ROA) ou le taux de rentabilité interne (TRI). Dans ce cas là, on considère des indicateurs sur les résultats passés de l'entreprise. On pourra comme précédemment raisonner en probabilité dans le cas de projection.

Définition II.5. Également appelé « rentabilité des actifs », le ***Return On Assets*** (ROA) représente le rapport entre le résultat et l'actif immobilisé.

$$ROA = \frac{R}{A} = ROS \times AT,$$

où
- ROS la marge opérationnelle (ou *Return On Sales*) donnée par $ROS = \frac{R}{CA}$,
- AT : le ratio de rotation de l'actif économique donné $AT = \frac{CA}{A}$.

Cette mesure a souvent été critiquée bien que très souvent utilisée, notamment du fait qu'elle ne prend pas en compte les éventuels effets de leviers.

Plutôt considéré comme un indicateur de décision, le **Taux de Rentabilité Interne** (TRI) se présente comme un taux d'actualisation et permet en le comparant au taux bancaire de mesurer la rentabilité des nouveaux projets. Il se présente comme le taux qui annule la valeur actuelle nette d'une série de flux financiers.

Définition II.6. Le TRI vérifie l'équation suivante :

$$V_{Actuelle\ Nette} = \sum_{p=1}^{N} \frac{FT_p}{(1+TRI)^p} - I = 0,$$

où
- FT_p, le montant du pième flux de trésorerie ;
- N, le nombre de flux ;
- et I, l'investissement initial à la date 0.

Une dernière mesure de performance peut être intéressante. Introduite par Ruhm (2011), le **Ratio de Couverture de Risque**, ou *Risk Coverage Ratio* (RCR) est proche du ratio de Sharpe car de forme « Rendement sur Risque ». Il est cependant basé sur le risque. Il nécessite l'obtention d'une distribution de rentabilité, du type ROE, sur une période donnée et modélise le risque comme les résultats défavorables, c'est à dire dans le cas où la rentabilité est inférieure au taux d'intérêt sans risque.

Définition II.7. De manière générale, le Ratio de Couverture de Risque s'écrit :

$$RCR = \frac{R - r}{X},$$

où

- X une mesure de risque,
- r le taux d'intérêt sans risque ou peut définir également un seuil minimum à ne pas dépasser,
- et R la rentabilité de l'entreprise.

Cette formulation donne une grande liberté sur les quantités d'étude. Dans le cas de l'étude du ROE, ce ratio peut se réécrire :

$$RCR_{ROE} = \frac{\mathbb{E}(ROE) - r}{\mathbb{E}\left(max(0, r - ROE)\right)}.$$

Comme pour une mesure de risque de type *Value-at-Risk*, le RCR ne tient pas compte des risques extrêmes : il se présente comme un indicateur de gestion courante de l'entreprise et qui pourrait intéresser les actionnaires.

2.1.2 Indicateurs basés sur la valeur de l'entreprise

La valeur de l'entreprise peut être mesurée par le capital dont dispose celle-ci. Comme nous le verrons dans la partie (3), selon la valorisation comptable utilisée, ce capital peut avoir plusieurs valeurs et donc différentes interprétations. Dans un bilan comptable, ce capital est représenté par la différence entre les actifs de l'assureur et ses engagements, et ce peu importe le cadre comptable de son évaluation. Ce capital est également appelé **Actif Net**. La valeur de l'entreprise est principalement intéressante pour les actionnaires.

Des indicateurs sur le capital futur peuvent être envisagés. Ces indicateurs peuvent faire l'objet de seuils de tolérance au risque.

- La probabilité que la rentabilité du capital (type ROE) soit supérieure ou égale à $x\%$ dans $\alpha\%$ des cas dans un horizon de n années.
- La probabilité qu'une baisse de valeurs de l'Actif Net (surplus économique) soit inférieure à $x\%$ du capital total disponible dans un horizon de n années ;
- La probabilité d'une baisse de la MCEV ;
- La probabilité d'augmentation du besoin en capital à l'horizon n années ;
- La diminution potentielle de la valeur de l'Actif Net par rapport à sa valeur attendue sur un horizon de temps donné ;

Remarque II.5.
- On appelle « Actif Net » la différence entre l'actif et le passif d'une entreprise évalué en valeur de marché (ou juste valeur)
- La dernière mesure est également appelée ***Capital-at-Risk***. Elle est en général utilisée pour un horizon de temps fixé à un an et avec un niveau de confiance égal à 90%. Cette mesure permet une bonne comparabilité entre les différents segments de risques.

Comme pour la rentabilité, de nombreux indicateurs sont calculés à partir de la valeur de l'entreprise. C'est notamment le cas du très célèbre *Return On Equity* (ROE).

Définition II.8. La ***rentabilité des capitaux propres***, ou ***Return On Equity*** (ROE) représente le taux de retour sur capitaux propres. Elle mesure la capacité qu'a une entreprise à faire du profit en mobilisant uniquement ses fonds propres. Elle est donnée par :

$$ROE = \frac{R}{FP}.$$

Cette mesure est largement contestée du fait de sa non comparabilité entre différentes entités mais reste cependant fréquemment utilisée. Par ailleurs, elle ne fait aucune distinction entre les différentes classes de risques.

D'autres indicateurs basés sur le risque ont été développés, notamment par la banque *Bankers Trust*. Ces mesures sont connues sous le nom de *Risk Adjusted Performance Metric*. De nombreuses définitions ont été proposées dans la littérature. Nous retiendrons celles proposées par Holton (2011).

Définition II.9. Le ***Risk Adjusted Return On Capital*** (RAROC) représente le ratio du profit économique ajusté au risque sur les fonds propres.

$$RAROC = \frac{R_{juste\ valeur}}{FP}.$$

Définition II.10. Le ***Return On Risk Adjusted Capital*** (RORAC) représente le ratio des profits sur le capital économique ajusté au risque.

$$RORAC = \frac{R}{FP_{\text{économique}}}.$$

Les deux indicateurs précédents intéressent particulièrement les actionnaires car ils capturent le retour sur le capital global de l'entreprise.

Définition II.11. Le ***Risk Adjusted Return On Risk Adjusted Capital*** (RARORAC) représente le ratio des profits ajusté au risque sur le capital économique requis.

$$\begin{aligned} RARORAC &= \frac{R_{fair\ value}}{FP_{requis}} \\ &= \frac{R - \text{Coûts} - \text{Pertes Espérées}}{FP_{requis}}. \end{aligned}$$

Cette mesure intéresse plus particulièrement la Direction car elle ne prend pas en compte le capital additionnel disponible mais seulement le capital requis, contrairement au RAROC. L'indicateur RARORAC permet la comparabilité de performances entre les différents segments de risques. Il constitue donc une bonne mesure de performance notamment pour vérifier si le capital alloué à une ligne d'activité ou un produit est bien en adéquation avec ses profits.

Remarque II.6.

– La notion d'ajustement au risque est liée à la valorisation en juste valeur, ou en vision marché, des différentes quantités.
– La différence entre le RORAC et le RARORAC réside dans le dénominateur. Cette différence peut avoir des interprétations techniques comme stratégiques, notamment dans le cas où le capital n'a pas été complètement alloué aux segments de risque.

Exemple d'utilisation du RARORAC Supposons qu'une compagnie d'assurance détienne 100 €[1] d'actifs répartis en deux classes : 30% en actifs A et 70% en actifs B. Par ailleurs, son capital requis est égal à 20€ en prenant en compte les effets de diversification. Compte tenu de la dépendance des deux classes d'actifs, elle décide d'allouer son capital selon une méthode par pro-rata :

1. Cet exemple n'est évidemment pas réaliste en termes d'ordres de grandeur des différentes quantités, mais constitue un cadre simple.

– 40% revient à la classe A, soit 8€
– et 60% à la classe B, soit 12€.

L'assureur face à ses actifs peut faire correspondre son passif, le bilan de l'entreprise à la date initiale est alors donné par :

	Classe A	Classe B	Total
Actifs	30 €	70 €	100 €
Passifs	22 €	58 €	80 €
Capital Requis	8 €	12 €	20 €

Table 2.1 – Exemple d'utilisation du RARORAC : Bilan initiale

Le bilan espéré en fin de période est donné par :

	Classe A	Classe B	Total
Actifs	36 €	71 €	107 €
Passifs	27 €	57 €	84 €
Capital Requis	9 €	14 €	23 €

Table 2.2 – Exemple d'utilisation du RARORAC : Bilan espéré en fin de période

Ce bilan prend en compte les rendements espérés des différents actifs, l'actualisation du passif et les pertes espérées.

Les RARORAC pour chaque classe d'actif, A et B, peuvent alors être calculés.

$$RARORAC(A) = \frac{9}{8} - 1 = 12,5\%,$$
$$RARORAC(B) = \frac{14}{12} - 1 = 17\%.$$

La classe d'actifs B est alors plus intéressant que la classe A qui demande une proportion plus importante de capital.

Remarque II.7.
– Les classes d'actifs dans cette exemple peuvent être remplacées par des catégories de risque.
– Notons également que les capitaux requis calculés pour chaque classe de risque correspond à la contribution de chaque classe sur le capital global. L'évaluation en *stand-alone* a peu d'intérêt.

2.1.3 Indicateurs de solvabilité

Les contraintes réglementaires doivent nécessairement être prises en compte dans l'établissement de l'ensemble des indicateurs de pilotage.

Sous la Directive Solvabilité 2, la réglementation contraint les assureurs à disposer d'un capital au moins égal au montant de capital nécessaire pour rester solvable à un niveau de probabilité égal à $99,5\%$ et à un horizon de temps fixé à 1 an. En général, les compagnies d'assurance disposent d'un capital plus important que le capital requis. Le surplus peut être vu comme une marge de prudence pour les risques non couverts par la Formule Standard par exemple.

Les exigences du Pilier 1 de la Directive Solvabilité 2 peuvent constituer des indicateurs de solvabilité.
– La probabilité de rester au dessus des exigences réglementaires (MCR et SCR)
– La probabilité de disposer d'un capital x fois supérieur au capital requis.

La dernière probabilité met en jeu un ratio qu'on appelle le **Ratio de Solvabilité Economique**. Il est ainsi donné par le ratio entre le capital disponible et le capital économique. Celui-ci permet de maîtriser la marge de prudence donnée par le surplus. Cet indicateur est particulièrement utilisé dans les évaluations de type ORSA, c'est-à-dire pluriannuelles.

Par ailleurs, le **Test suisse de Solvabilité** permet de mesurer la gravité des risques encourus par la compagnie d'assurance et d'évaluer la solidité financière de l'entreprise. Le lecteur intéressé pourra se référer au document technique[2] mis à disposition par la Confédération suisse.

2.2 Indicateurs clés de risque (KRI)

Les indicateurs clés de risque (KRI) permettent de définir des limites et des seuils d'alerte pour chaque risque, pris un à un. Sur la base des tolérances de risque par catégorie, les assureurs peuvent établir des limites de risque. Cet exercice de déclinaison est difficile. Il est alors pour cela nécessaire de définir un certain nombre d'**indicateurs clés de risque** (KRI), dont leur utilisation est indispensable. Ils permettent alors d'identifier les risques mal gérés et les stratégies à mettre en place. Cet exercice permet de comprendre les origines des défaillances de certains segments de risque (zone géographique, produit, ligne d'activité, équipe opérationnelle, etc.).

Agenos (2006) a présenté plusieurs exemples d'indicateurs clés de risque pour chaque risque que l'assureur peut rencontrer.

Catégories de risque	Exemple de KRIs
Actions	Value at Risk
	Earnings at Risk
	Volatilité implicite
	Richesses latentes : ratio VM/VNC
Taux d'intérêt	Ecart de duration Actif-Passif
	Ecart de convexité
	Value at Risk
	Earnings at Risk
	Richesses latentes : ratio VM/VNC
Immobilier	Value at Risk
	Earnings at Risk
Change	Exposition nette par devise
	Value at Risk
Crédit	Exposition par ratings pour les investissements et les réassureurs
	Credit VaR
	Volatilité des spreads
Concentration	Value at Risk
	Exposition par contrepartie/émetteur
	Exposition par secteur économique
Provisionnement Non-Vie	Probabilité d'adéquation des provisions
	S/P in fine par année de survenance
	Sinsitres réglés observés comparés aux projections prévues par année de survenance et au global
Tarification Non-Vie	Prime moyenne
	Coût moyen de sinistre
	Fréquence de sinistre
	Value at Risk
	Taux de réduction commerciale
	Ratio de Frais
Catastrophe	Cartographie géographique de l'exposition du portefeuille
	Mesure de l'exposition (valeurs estimées) par garantie et par département
Opérationnel	Pertes opérationnelles comptabilisées
	Nombre d'événements
Liquidité	Liquidité/Total Actifs
	Actifs Mobilisables/Total Actifs
	Projection des cash-flows actifs-passifs

FIGURE 2.1 – Exemples d'indicateurs clés de risque (*Key Risk Indicators*)[3]

2. `http://www.finma.ch/archiv/bpv/download/f/SST_techDok_20070425_F_wo_Li.pdf`
3. Source : Mémoire de Agenos (2006) - Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie.

3 Cadre comptable

La performance d'une entreprise peut être mesurée de différentes façons. Comme on l'a vu précédemment, toutes les parties prenantes n'ont pas les mêmes attentes quant à la performance d'une entreprise d'assurance. Alors qu'une *Embedded-Value* donnera une vision prospective de la valeur de l'entreprise, le bilan de la compagnie, quant à lui, présente une photographie de la situation de celle-ci à une date donnée. Aussi, une écriture comptable d'un bilan donne une information totalement différente par rapport à une écriture économique. Par ailleurs, les nouvelles normes IFRS représentent une tout autre image de la valeur de l'entreprise.

3.1 Bilan d'une compagnie d'assurance

Le bilan comptable ou économique d'une entreprise représente la photographie de la situation de celle-ci à une date donnée (à la fin de l'exercice comptable en général). L'écriture des postes peut varier d'un pays à un autre ou sous deux normes comptables différentes.

Du fait de l'inversion du cycle de production, la compagnie d'assurance doit disposer de provisions techniques pour régler les sinistres ou engagements futurs. Ces provisions constituent la plus grande composante du passif de l'entreprise. Le bilan d'une compagnie d'assurance se présente peu importe l'écriture adoptée, de la façon suivante :

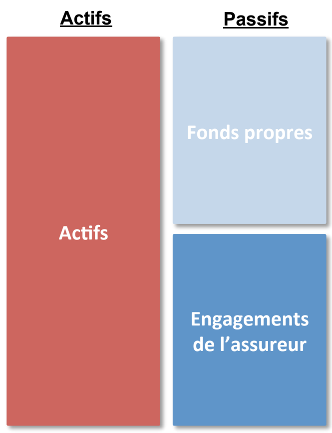

FIGURE 3.1 – Bilan d'une entreprise d'assurance

La nouvelle Directive Solvabilité 2 préconise une vision économique du bilan de l'assureur (voir figure 3.2), contrairement à une écriture au coût historique sous Solvabilité 1. L'actif est inscrit suivant sa valeur de réalisation, i.e. la valeur que l'on trouve sur les marchés financiers. Le passif est composé de deux éléments : de fonds propres et de provisions techniques. Les provisions techniques représentent les dettes que les assureurs ont auprès de leurs assurés et sont inscrits en vision ***Best Estimate***, vision la plus proche d'une valeur d'échange sur les marchés. La notion de *Best Estimate* est définie par l'EIOPA [1] comme « la moyenne pondérée des flux futurs de trésorerie en fonction de leur probabilité compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente ». La vision *Best Estimate* des provisions représente

1. Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles

alors une approximation raisonnable des valeurs de marché des engagements assurantiels et est soumise à une modification de la courbe des taux sans risque.

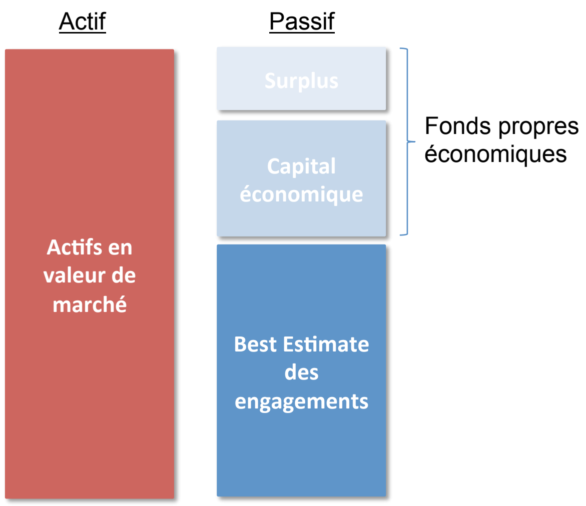

FIGURE 3.2 – Bilan simplifié en vision économique sous Solvabilité 2

La différence entre les actifs et le *Best Estimate* des engagements donne alors les fonds propres de la compagnie d'assurance.

$$Fonds\ propres\ \text{économiques} = Valeur\ des\ actifs - Valeur\ des\ passifs.$$

Parmi ces fonds propres, l'assureur doit disposer d'un capital réglementaire appelé **capital économique ou *Solvency Capital Requirement (SCR)*** lui permettant de faire face à un sinistre grave et bicentenaire. Le reste des fonds propres constitue le surplus qui pourra être mis en réserve ou distribué aux actionnaires. Les actifs doivent permettre aux assureurs d'obtenir un rendement variable servant ainsi dans le futur à couvrir les sinistres de leurs assurés. Les compagnies d'assurance sont alors confrontées, en plus des risques liés à la souscription de contrats d'assurance, à des risques de marché. La forte interaction entre l'actif et le passif implique une dépendance entre les différents risques de la compagnie d'assurance.

3.2 Les nouvelles normes IFRS

Les normes internationales d'information financière, ou *Inernational Financial Reporting Standards* (IFRS) élaborées par l'**International Accounting Standards Board** (IASB) ont été introduites pour harmoniser l'information financière à travers le monde. Elles ont pour objectif de transmettre une information transparente, cohérente entre les pays et donc facilement comparables. Les normes IFRS ont été mises en application en 2005. Cependant, du fait de la crise des crédits structurés, de nouvelles normes IFRS, révisant les anciennes, voient le jour. Certaines d'entre elles sont toujours en cours d'élaboration.

Les compagnies d'assurance sont particulièrement concernées par les normes, concernant les actifs financiers, IFRS 9, destinée à compter de 2018 à remplacer l'actuelle IAS 39, et les contrats d'assurance, IFRS 4.

Dans le cadre de la norme IFRS 4 phase 2, les flux de trésorerie futurs doivent être actualisés en utilisant des taux d'actualisation reflétant la valeur temps donnée à la date d'évaluation et augmenté d'une prime de liquidité. Cette norme est très proche de ce qui a été défini par la Directive Solvabilité dans la notion de « *Best Estimate* ».

La valorisation des actifs financiers, sous la norme IFRS 9, diverge par rapport à celle définie par la Directive Solvabilité 2. Les actifs sont alors valorisés selon une segmentation fonction de leurs objectifs de détention dans le portefeuille. Par ailleurs, la réalisation d'un actif peut impacter différemment le bilan toujours selon cette segmentation.

3.3 Embedded Value

3.3.1 Principes généraux

La notion d'***Embedded Value*** a été développée à la fin des années 80 pour permettre aux actionnaires, principaux apporteurs de capital d'une compagnie d'assurance, d'obtenir des informations sur sa performance financière. Elle est définie comme « la valeur des intérêts des actionnaires dans les revenus distribuables issus ds actifs alloués au business couvert après prise en compte de l'ensemble des risques liés au business couvert » (Principe 3, CFO Forum). Contrairement, aux résultats constatés par le bilan, cette valeur prend en compte les résultats futurs de l'entreprise : elle en donne alors une vision prospective. Elle constitue alors un outil de pilotage de la performance.

Elle se compose :
- de l'**actif net**, c'est-à-dire la part de l'actif à la date de l'évaluation, revenant aux actionnaires. Cet actif net est réévalué et représente les capitaux propres (le capital libre et le capital requis) de la compagnie corrigés des potentiels plus ou moins values latentes des actifs financiers, des surcotes ou décotes des actifs obligataires et des charges d'impôts.
- et de l'***In Force***, donnant la valeur actuelle des profits futurs des contrats d'assurance, qui revient aux actionnaires. Cette valeur, également appelée VIF, représente la valeur de l'activité de la compagnie.

Suivant la méthode de valorisation, il existe trois types d'*Embedded Value* :
- *Traditionnal Embedded Value*
- *European Embedded Value*
- *Market Consistent Embedded Value*

Le calcul de la ***Traditionnal Embedded Value*** est basé sur des projections déterministes de l'actif et du passif pour le calcul de la VIF et intégre les coûts des risques financiers et non financiers *via* une marge de risque. Il a l'avantage d'être simple et facile d'exécution. Cependant, cette valeur ne reflète que la valeur intrinsèque des risques qui est valorisée de façon explicite avec un taux d'actualisation unique. La valorisation de la valeur temps des risques n'est qu'implicite et est effectuée grâce à l'utilisation du taux d'actualisation margé.

Les faiblesses de la *Traditionnal Embedded Value* (TEV) ont conduit le CFO Forum à introduire une nouvelle méthode de valorisation pour le calcul de la valeur de l'entreprise : c'est ce qu'on appelle ***European Embedded Value*** (EEV). Cette méthodologie est basée sur une valorisation stochastique de l'actif en intégrant alors explicitement le coût des options et des garanties pour les contrats d'assurance vie grâce à des modèles stochastiques. La grande différence entre les deux démarches est donc la valorisation de la valeur temps de ce type de contrat. Le taux d'actualisation peut être réalisé au taux sans risque ou avec un taux incluant une prime de risque. Même si l'EEV facilite la comparabilité des **Embedded Value**, les compagnies ont une grande liberté sur les méthodes à utiliser.

En juin 2008, le CFO Forum établit les principes de calcul pour harmoniser les méthodes de calcul de l'*Embedded Value* en publiant les ***MCEV Principles***. Le groupe de travail introduit alors la ***Market Consistent Embedded Value***.

3.3.2 Market Consistent Embedded Value

L'objectif principal de la mise en place des principes de calcul de la ***Market Consistent Embedded Value*** est de faciliter la comparaison entre différentes entreprises d'assurance en limitant les libertés que peuvent prendre celles-ci dans leurs méthodes de calcul. Le CFO Forum veut faire de cette valeur un indicateur fiable et pouvant être utilisée facilement.

Tous les postes doivent être évalués en valeur de marché. Ayant conscience que la plupart des passifs d'une compagnie d'assurance ne peuvent pas être directement évalués sur les marchés financiers, le CFO Forum propose une méthode d'évaluation à l'aide d'actifs échangés sur les marché se rapprochant le plus des *cash flows* des passifs. De plus, les taux de référence à utiliser comme taux sans risque sont les taux swap auxquels aucune prime de liquidité ne doit être ajoutée. Les modèles stochastiques utilisés doivent être basés sur des volatilités implicites et non historiques. Par ailleurs, la *Market Consistent Embedded Value* ne prend pas en compte la probabilité de défaut de la compagnie d'assurance.

L'un des avantages les plus importants de la *Market Consistent Embedded Value* est qu'elle reflète une vision objective car valorisée en valeur de marché et est peu affectée par les vues de la Direction de la compagnie. A l'inverse, cela peut constituer un désavantage. En effet, lorsque les marchés sont très volatils et complètement déconnectés des réalités, il en sera de même pour la MCEV.

Une méthode de valorisation des produits non réplicables sur les marchés n'a pas été trouvé. Les risques de type opérationnel (d'image, de réputation, de fraude, de modèle) sont difficilement modélisables. Le CFO Forum n'a pas donné ses préconisations quant aux calculs de cette valeur.

Remarque II.8. La projection de bilans et de comptes de résultat sous les normes IFRS ou de l'*Embedded Value* peut être particulièrement ardue d'un point de vue opérationnelle, rendant l'aspect pilotage prospectif des activités de l'assureur difficile.

Troisième partie

Méthodologie d'allocation de capital par preneur de risque

1 Prise de risque par preneur de risque

L'exercice d'allocation de capital par les assureurs est souvent établi par ligne d'activité. Cette segmentation des risques permet de définir les activités les plus rentables mais également celles qui dégradent soit la solvabilité soit le résultat de la compagnie. Dans ce mémoire, nous proposons une tout autre approche : une allocation de capital par preneur de risque.

1.1 Motivations

De nombreuses raisons font qu'il est particulièrement intéressant d'établir une allocation du capital par preneur de risque.

1.1.1 Activité assurantielle

L'activité assurantielle pour n'importe quel type d'assureur (Vie, non-Vie, Prévoyance, Santé) s'exerce par étape :

- Tarification du produit d'assurance,
- Vente du produit,
- Gestion du contrat,
- Survenance du sinistre,
- Indemnisation de l'assuré.

Du fait de l'inversion du cycle de production dans l'activité d'assurance, chaque étape présentée ici est importante et doit prendre en compte le caractère prospectif et pérenne de l'exercice. De chacune de ces étapes, un ou plusieurs risques principaux y sont sous-jacents. Par ailleurs, chaque équipe opérationnelle est en général responsable d'une étape précise. C'est pourquoi, il semble particulièrement intuitif de procéder à une telle segmentation. Une allocation par preneur de risque permettra d'identifier les segments à consolider ou dans le cas contraire les segments les plus performants. Bien entendu, toutes les étapes sont liées les unes aux autres. Une mauvaise tarification tout comme un mauvais provisionnement se fait sentir lors de l'indemnisation de l'assuré. L'exercice d'allocation de capital devra donc prendre en compte les différentes problématiques de dépendance entre les risques.

1.1.2 Système de gouvernance sous Solvabilité 2

La Directive Solvabilité 2 préconise la mise en place d'un système de gouvernance plus structuré dont la notion de « risque » en est le coeur. Les rôles et les responsabilités de chaque équipe technique et administrative doivent être établis de manière transparente et appropriée. Des mécanismes de transmission et de formalisation de l'information (*reportings*, rédaction de politiques, chartes, etc.) sont à prévoir, pour éviter le plus possible les conflits d'intérêts entre les différentes fonctions mises en place. La Directive prévoit un système de gouvernance centré autour de deux systèmes, le système de gestion des risques dont le dispositif ORSA fait partie, et le système de contrôle interne et de quatre fonctions clés : la fonction actuarielle, la fonction de gestion des risques, la fonction de vérification de la conformité et la fonction d'audit interne. D'autres fonctions aussi importantes peuvent s'ajouter à ces quatre fonctions clés définies par la Réforme. Par ailleurs, une déclinaison en équipes opérationnelles de chaque fonction clé doit être envisagée. Après l'entrée en vigueur de la Directive Solvabilité 2, tous les acteurs du marché vont converger vers une organisation structurelle de ce type.

Fonction gestion des risques Cette fonction, en collaboration avec l'ensemble des lignes de métiers de l'entreprise, est chargée du système de gestion des risques qui a pour but d'identifier, de mesurer, de contrôler et de gérer les risques. Cela se traduit par le pilotage du processus ORSA par exemple. La fonction de gestion des risques doit fournir une vision claire, exhaustive et globale des risques encourus par l'entreprise aux preneurs de décision (l'AMSB).

Fonction actuarielle La fonction actuarielle doit coordonner l'évaluation des provisions techniques, de valider les méthodes et les hypothèses utilisées pour ce calcul. Elle est également chargée d'émettre son avis quant l'adéquation des politiques de souscription et de réassurance. Elle est également amenée à identifier les déficiences pour chacun de ces points. La fonction actuarielle contribue également en grande partie à la mise en oeuvre effective du système de gestion des risques.

Fonction de vérification de la conformité La fonction de vérification de la conformité a pour rôle de vérifier le respect des dispositions législatives, réglementaires et administratives. Elle s'assure par exemple de la conformité d'un produit avant son lancement. Elle a un rôle de conseil auprès des preneurs de décision sur les aspects législatifs. Par ailleurs, elle doit également veiller aux risques de fraude, de blanchiment d'argent, etc. Pour ce faire, elle doit établir une cartographie des risques de non-conformité (fraude, droit du travail, etc.).

Fonction d'audit interne La fonction d'audit interne a un rôle de contrôle. Indépendante des fonctions opérationnelles, elle doit évaluer la fiabilité du système de conformité mis en place par la fonction de conformité et de tous les autres aspects de la gouvernance.

AMSB L'organe d'administration, de gestion ou de contrôle, ou AMSB (pour *Administrative, Management or Supervisory Body*), a un rôle de décision mais également une responsabilité quant au respect des dispositions législatives et administratives. Dans le cadre du dispositif ORSA, il a pour rôle d'approuver la cartographie et les techniques mises en place d'évaluation des risques et doit s'assurer que les stratégies commerciales et opérationnelles en termes de réassurance ou d'investissements par exemple ont bien été prises en compte dans le processus. L'ORSA donne lieu à des échanges fréquentes entre l'organe de décision et les équipes opérationnelles. *In fine*, l'AMSB a pour rôle de valider le processus et la documentation s'y afférant.

Via une allocation de capital par preneur de risque, le dispositif ORSA est en phase avec les exigences de la Directive en termes de système de gouvernance. Les rôles et les responsabilités de chaque fonction étant clairement définis, les risques sous jacents sont alors perceptibles.

1.1.3 ORSA au coeur de la gouvernance

L'ORSA se présente comme une réelle opportunité pour les assureurs leur permettant d'avoir une vision claire de leurs risques et d'intégrer la dimension « risque » dans leur gestion. Ce dispositif s'inscrit complétement dans le système de gouvernance préconisé par la Directive. Une allocation du capital par propriétaire de risque permet alors aux équipes opérationnelles de mieux comprendre et analyser les risques dont elles sont en charge. Cela les amène donc à se responsabiliser face aux risques qui leur sont attribués. L'intégration du « risque » dans la gestion des activités, comme préconisée par la Directive Solvabilité 2, se fait alors depuis la déclinaison la plus fine dans la hiérarchie de l'entreprise pour ainsi remonter jusqu'aux preneurs de décision (approche *Bottom Up*).

1.1.3.1 Cartographie des risques

Par ailleurs, la cartographie des risques dans le cadre du dispositif ORSA s'établit, dans la pratique, par différents échanges entre les équipes opérationnelles et la fonction gestion des risques en charge du projet. Chaque équipe identifie les risques dont elle a la charge. Souvent, il existe un risque dont elle est le principal propriétaire. Par exemple, la fonction de Souscription est propriétaire des risques de Souscription comme la fonction de gestion Actif/Passif est propriétaire du risque de rachat en assurance Vie, par exemple. De ce fait, il est intéressant d'agréger les risques selon cette segmentation. Pour chaque équipe opérationnelle, un risque prédominera.

1.1.3.2 Déclinaison de l'appétence au risque en tolérances au risque

La phase de déclinaison de l'appétence au risque de l'entreprise en tolérance nécessite une agrégation des risques selon la manière dont l'assureur veut piloter ses activités. Dans le cas où il s'agit d'un groupe, la segmentation des risques peut être établie selon les filiales ou par zone géographique d'implantation. Lorsqu'il s'agit d'une grande compagnie d'assurance, le pilotage peut être envisagé selon les différents produits commercialisés. Cependant, une petite compagnie d'assurance ou une mutuelle, qui ne commercialise qu'un type de contrat, ne peut pas être amenée à faire une telle agrégation. De ce fait, l'alternative peut résider sur une allocation de capital par preneur de risque.

1.2 Détermination des preneurs de risque

Pour mettre en place une telle démarche d'allocation du capital, il faut tout d'abord définir le capital, les différents risques et preneurs de risque. Le passage d'une allocation du Besoin Global de Solvabilité à une allocation du capital disponible est aisée. Le Besoin Global de Solvabilité capte les risques auxquels est exposé l'assureur. Ainsi, en allouant au pro-rata le capital disponible, une nouvelle allocation peut être établie sur cette base. Ici, on s'intéresse particulièrement au Besoin Global de Solvabilité.

Dans la partie précédente, nous avons présenté les principaux risques encourus par une compagnie d'assurance. Chacun de ces risques peut être rapproché à une fonction ou à une équipe opérationnelle ou administrative spécifique.

Bien que les exigences en termes de système de gouvernance définies par la Directive amènent les assureurs à une structure organisationnelle commune, le niveau des responsabilités peut varier d'une entreprise à une autre. Par ailleurs, selon le type d'activité exercée (Vie, Non-Vie, Prévoyance, Santé) et les risques encourus, l'organisation de l'entreprise peut différer. Nous proposons cependant les principales équipes pouvant exister dans une compagnie d'assurance :

- l'organe d'Administration, de Gestion et de Contrôle (AMSB), dont le rôle est la supervision de l'organisation de la gestion des risques et la validation des stratégies de l'entreprise ;
- le comité de direction, faisant appliquer la politique de risque,
- les fonctions clés : actuarielle, de gestion des risques, de vérification de la conformité et d'audit interne,
- la fonction souscription, ou « produits » dont le rôle est de construire les produits, d'en définir leurs tarifs et d'en suivre leurs commercialisations,
- le comité des risques,
- la fonction d'investissement,
- le gestionnaire Actif/Passif (ALM),
- la direction des Ressources Humaines,
- le service informatique,
- etc.

Une cartographie peut alors être effectuée selon une telle segmentation. La figure (1.1) donne un exemple d'attribution de différents risques à chaque équipe.

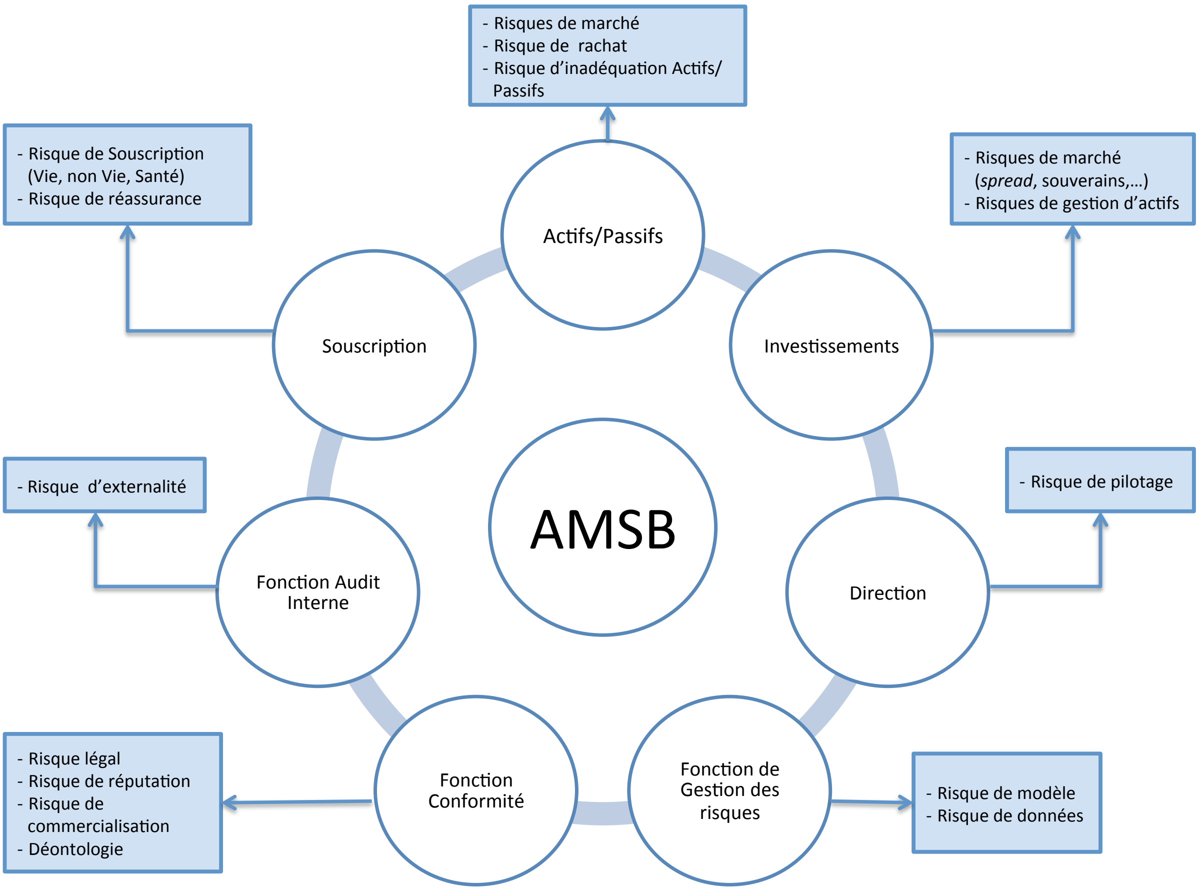

FIGURE 1.1 – Exemple d'une cartographie des risques par preneur de risque

1.3 Problématiques liées à une telle segmentation

De nombreuses problématiques concernant une telle allocation peuvent être soulevées.

Tout d'abord, la convergence prévue par la Directive Solvabilité 2 des systèmes de gouvernance des compagnies d'assurance peut être contestable. Bien que le principe de proportionnalité est applicable selon la taille et le type de la compagnie, il n'est pas rare de voir une seule équipe opérationnelle occuper plusieurs fonctions. Dans ce cas là, une allocation de capital par preneur de risque peut alors être risquée. La défaillance d'une fonction, dont le capital attribué est très élevé, peut alors avoir des conséquences lourdes sur la gestion et les activités de l'entreprise. Le principe même de répartition des risques au sein de l'entreprise, que permet une allocation de capital, sera donc violé. Il est dans ce cas là préférable d'opter pour une allocation par produit.

L'exercice d'allocation de capital est géré par la fonction de gestion des risques. Cette fonction peut également être en charge de d'autres travaux, comme définis précédemment. Cela peut donc créer des situations de conflits d'intérêt. L'allocateur de capital pourra s'attribuer un capital particulièrement important pour absorber ses propres pertes et masquer ses défaillances. Il est d'abord important que les processus d'établissement des budgets de risque soit revue par la fonction d'audit interne par exemple et validée par les preneurs de décision. Cette exercice d'allocation doit être établie par une équipe indépendante ou une source d'externalisation.

Par ailleurs, les coûts d'implémentation de tels modèles d'allocation de capital peuvent être limités pour certains assureurs. Bien que fournissant une aide précieuse pour le pilotage mesurée de l'entreprise, l'exercice d'allocation peut avoir un coût beaucoup trop important. L'exercice d'allocation de capital nécessite également des connaissances techniques et des échanges avec les différentes équipes opérationnelles et les preneurs de décision concernant leurs objectifs et leurs stratégies. Il n'est alors pas question que de coûts monétaires, mais également de coûts en terme de temps de mise en place.

Delà, une autre problématique peut être soulevée. Bien que l'organisation d'une compagnie d'assurance est souvent portée par les différentes étapes de ses activités assurantielles, des réorganisations fréquentes des équipes peuvent être envisagées. Dans ce cas là, les capitaux alloués à chaque équipe doivent être recalculés. Comme précédemment, cela exige un coût non négligeable à ajouter en plus des coûts liés à la réorganisation.

2 Application : Présentation de la compagnie d'assurance Vie

Pour montrer la pertinence de la méthode proposée, nous prenons l'exemple d'une compagnie d'assurance Vie qu'on appellera XYZ commercialisant des contrats d'épargne. Nous présentons dans cette partie son organisation et son fonctionnement.

2.1 Modélisation d'une compagnie d'assurance fictive

On se propose d'évaluer le **Besoin Global de Solvabilité** (BGS), ou capital ORSA, de cette entreprise en $t = 0$ (au 31/12/2013) et en $t = 1$ (31/12/2014) et d'allouer le capital calculé suivant les différents preneurs de risques. Dans notre exemple, nous ne prendrons pas en compte les deux autres composantes du dispositif ORSA définies par la Directive Solvabilité 2.

2.1.1 Présentation et organisation de l'entreprise

La compagnie ne propose qu'un seul type de contrat d'épargne. Elle dispose d'un capital mis à disposition par des investisseurs. Ces actionnaires parient sur la rentabilité de la compagnie sur le long terme, ils souhaitent un versement de dividendes constants tout au long de la durée de vie de l'entreprise et restent conscients des éventuelles difficultés qu'implique la création d'une entreprise. L'assureur a investi ce capital en actions et en obligations.

En termes d'organisation, en plus d'un comité administratif, l'AMSB, l'entreprise XYZ se compose principalement d'équipes opérationnelles (actuariat, gestionnaire d'actifs, etc.) chargées de la bonne gestion des activités de la compagnie.

2.1.2 Objectifs de l'entreprise

Du fait de la création récente de l'entreprise, les objectifs de celle-ci reposent principalement sur la dimension « **capital** ». Par ailleurs, les actionnaires n'espèrent pas des rendements très élevés durant ses premières périodes d'activité.

L'objectif principal est alors pour l'entreprise d'assurance XYZ de garantir la continuité de ses activités avec le seul contrat qu'elle propose actuellement. Du fait des taux d'intérêt particulièrement faibles durant les années 2012 et 2013, la compagnie d'assurance XYZ craint ne pas pouvoir respecter ses engagements en termes de garanties à ses assurés. Elle cherche alors à disposer de fonds propres suffisants en cas d'éventuelles difficultés futures.

Par ailleurs, en plus de vouloir à tout prix pérenniser ses activités, l'entreprise XYZ envisage commercialiser un nouveau produit. L'objectif de ce nouveau produit est d'attirer des nouveaux assurés et de créer une meilleure mutualisation des risques que dans la situation actuelle. Ce nouveau contrat pourrait, s'il est bien conçu, compenser les mauvais effets de la courbe des taux, en permettant la quasi annulation de ce risque.

Le dispositif ORSA est alors une excellente opportunité pour la compagnie d'appréhender au mieux ses risques. Notre méthode d'allocation du capital peut alors permettre de challenger les différentes équipes et notamment d'indiquer si le capital dont dispose la compagnie d'assurance XYZ est suffisant pour le lancement de ce nouveau produit.

2.1.3 Présentation des contrats commercialisés

Présentement, la compagnie XYZ ne commercialise qu'un contrat d'épargne. Nous présentons le déroulement de ce contrat pour un seul assuré :

1) L'assuré verse une prime unique à la souscription de son contrat.
2) L'assureur revalorise chaque année l'épargne de l'assuré à un taux minimum garanti (TMG), ou taux technique, défini à la signature du contrat.
3) Une clause de participation aux bénéfices est incluse dans le contrat de l'assuré, lui permettant de revaloriser en plus du taux technique, son épargne. Cette revalorisation supplémentaire dépend des résultats financiers de la compagnie d'assurance.
4) Au terme du contrat, l'assureur reverse alors à l'assuré la totalité de son épargne revalorisée.

Les assurés peuvent sortir de leurs contrats à tout moment. Dans le cas d'un rachat, l'assuré ne reçoit qu'une partie de l'épargne constituée. Et en cas de décès de l'assuré, l'intégralité de l'épargne est versée à un tiers fixé dans le contrat à sa signature.

On suppose que la souscription d'un nouveau contrat se fait en fin d'année, ainsi les primes sont versées au 31/12. Par ailleurs, toute sortie de contrat (arrivée à terme, rachat ou décès) a également lieu en fin d'année.

2.2 Notations

2.2.1 Notations générales

Dans toute cette partie, nous notons :
- $TxPB$: le taux de Participation aux Bénéfices distribuer ;
- $PPE(t)$ le stock de Provisions pour Participations aux Excédents (PPE) ;
- $DotPPE(t)$ la dotation de PPE à l'instant t ;
- RS : le taux de rachat structurel ;
- $RC(t)$: le taux de rachat conjoncturel ;
- $RT(t)$: le taux de rachat total ;
- TxD : le taux de dividendes ;
- $TxValR(t,T)$: la part de l'épargne qu'un assuré peut récupérer en cas de rachat de son contrat d'échéance T à la date t.

2.2.2 Passif

Pour optimiser la modélisation des activités de l'assurance, nous regroupons les assurés en *Model Points*. Dans notre exemple, nous prenons, comme variable de segmentation, l'année de souscription au contrat. Nous posons alors les notations suivantes pour le *Model Point* j dont les assurés ont souscrit au contrat à la date t_j :
- T_j : la date de fin des contrats du *Model Point* j ;
- P : la prime unique ;
- TMG_j : le taux technique du *Model Point* j ;
- $TxRevalo_j(t)$: le taux de revalorisation, au-delà du taux technique, pour le *Model Point* j à la date t ;
- $PM_j(t)$: les provisions mathématiques pour le *Model Point* j à la date t ;
- $VP_j(t)$: la valeur des prestations pour le *Model Point* j à la date t ;
- $BE_j(t)$: le *Best Estimate* des prestations pour le *Model Point* j à date t.

Remarque III.1. L'espérance de vie des assurés ne peut cependant pas être réévaluée en *Model Point*. Ainsi les probabilités de rachat et de décès sont alors évaluées pour chaque assuré.

2.2.3 Actif

Concernant l'actif, nous proposons les notations suivantes :
- $B(t,T)$: le prix d'une obligation Zéro-Coupon à la date t et m T ;
- $ZC(t,T)$: le taux Zéro-Coupon à la date t et de date d'échéance T ;
- $VM_{o,i}(t,T)$: la valeur de marché de l'obligation i à la date t et de date d'échéance T ;
- $VA_{o,i}$: la valeur d'achat de l'obligation i à la date t et de date d'échéance T ;
- $VNC_{o,i}(t)$: la valeur nette comptable de l'obligation i à la date t ;
- $VNC_o(t)$: la somme des valeurs nettes comptables des obligations à la date t ;
- $c_i(t_i)$: le taux de coupon de l'obligation i achetée en t_0 ;
- $C(t)$: la somme des coupons perçus à la date t ;
- $D(t)$: la somme des dividendes perçus à la date t ;
- $R(t)$: la somme des remboursements obligataires perçus à la date t ;
- N_i : le nominal (ou la valeur de remboursement) de l'obligation i ;
- $RA(t)$: le taux de rendement des actifs à l'instant t ;
- $VA_{a,i}$: la valeur d'achat de l'action i ;
- $VM_{a,i}(t)$: la valeur de marché de l'action i à la date t ;
- $PDD_{a,i}(t)$: la provision pour dépréciation durable pour l'action i à la date t ;
- $PDD_a(t)$: la somme des provisions pour dépréciation durable des actions à la date t ;
- $VNC_{a,i}(t)$: la valeur nette comptable de l'action i à la date t ;
- $VNC_a(t)$: la somme des valeurs nettes comptables des actions à la date t ;
- $TxDR$: le taux de dividendes appliqué aux actions du portefeuille de l'assureur, fixe pour l'ensemble du portefeuille d'actions.

2.3 Hypothèses

2.3.1 Hypothèses générales

Nous retenons les hypothèses suivantes :
- la prime : $P = 10\ 000$€,
- le taux de participation aux bénéfices : $TxPB = 85\%$,
- le taux de rachat structurel $RS = 4\%$,
- la durée du contrat $T_j - t_j = 10$ ans pour les *Model Points* j,
- le taux de dividendes versés aux actionnaires $TxD = 10\%$;
- le taux de dividendes perçues par l'assureur $TxDR = 1,5\%$;
- la valeur d'achat d'une obligation i est fixée à $VA_{o,i} = 1\ 000$ € ;
- et la valeur d'achat d'une action i est fixée à $VA_{a,i} = 100$ € ;
- il y a inscription d'une dépréciation durable pour les actions lorsque la valeur de marché de celles-ci est inférieure à 80% de leur valeur d'achat. L'évaluation de la PDD est faite ligne à ligne.

2.3.2 Taux technique par *Model Point*

Depuis le 31/12/2004, un certain nombre de nouveaux assurés ont souscrit au contrat proposé par la compagnie XYZ. On suppose que le nombre de souscriptions augmente de 5% chaque année. Le nombre d'assurés est résumé dans le tableau (2.1). Il y a donc 9 *Model Points*. On suppose, dans notre exemple, que les assurés signent leurs contrats au 31 Décembre de leur année de souscription et qu'ils versent une prime unique à l'entrée.

Le taux minimum garanti (TMG), ou taux technique, fixé par le contrat pour un assuré dépend de sa date de souscription et du taux moyen d'emprunt d'État (TME) à cette date. La réglementation définit le taux minimum garanti maximal que peuvent proposer les assureurs de type Vie à 60% du TME moyen des 6 derniers mois précédents la date de souscription de cet assuré. Pour attirer des clients, l'assureur XYZ propose de revaloriser chaque année l'épargne de ses assurés au TMG maximal réglementaire. Ce taux est fixe tout au long de la durée de vie du contrat. Le tableau (2.1) présente également le taux minimum garanti des assurés selon leur année de souscription.

Année de souscription	Nombre de nouveaux assurés	Moyenne du TME 6 mois	Taux technique
2004	230	4,05%	2,50%
2005	242	3,35%	2,00%
2006	253	3,91%	2,25%
2007	266	4,45%	2,50%
2008	280	4,27%	2,50%
2009	293	3,62%	2,25%
2010	309	2,97%	1,75%
2011	323	3,16%	1,75%
2012	422	2,21%	1,25%

TABLE 2.1 – Nombre de nouveaux assurés par année d'exercice

2.3.3 Frais

Nous supposons que l'entreprise d'assurance ne supporte aucun frais de gestion (administration, de gestion des sinistres ou de placement). Cette hypothèse permet de simplifier les calculs mais dans la réalité, une compagnie d'assurance fait toujours face à des frais. Cependant, cette hypothèse forte peut être relâchée. On peut seulement supposer que l'assureur applique un taux de chargement aux assurés à chaque versement de prime permettant de compenser tous ses frais. Dans ce cas-là, on suppose une compensation totale des frais de fonctionnement de l'entreprise grâce à ce chargement.

2.3.4 Mortalité

Nous utilisons la table TF 00-02, pour estimer les probabilités de décès instantanés. Le détail de la table est donné en annexe (2.3).

2.3.5 Rachat

Les prestations versées à la fin du contrat ou bien lors de la survenance d'un décès ou d'un rachat sont calculées en fonction de l'âge de l'assuré au moment de la souscription du contrat. Par ailleurs, lors d'un rachat, l'assureur ne reverse pas l'intégralité de l'épargne mais seulement une partie de celle-ci et est définie de la manière suivante, pour toute date $t = 1, ..., T$:

$$TxValR(t) = 1 - 0,006 \times (T - t)^2.$$

où $T = 10$, date de fin du contrat.

Ce taux est appliqué aux probabilités de rachat des assurés. Plus l'assuré rachète tard son contrat, plus il peut récupérer une plus grande partie de son épargne. La mise en place d'un tel taux incite les assurés à ne pas racheter leur contrat trop tôt.

La compagnie d'assurance XYZ n'a rencontré aucun cas de rachat conjoncturel durant les huit dernières années d'exercice. Seuls des rachats structurels et des décès ont été enregistrés.

2.4 Déroulement des activités de la compagnie XYZ

Du fait des clauses de participation aux bénéfices incluses dans les contrats commercialisés, l'évaluation des postes du bilan en Solvabilité 2 et la projection des bilans et des comptes de résultat nécessitent la mise en place d'une procédure d'interaction Actif/Passif. Le taux de revalorisation de l'épargne des assurés dépend du résultat financier de l'entreprise et des stratégies d'investissement et de désinvestissement de ses actifs financiers.

2.4.1 Présentation du modèle de gestion Actif/Passif (ALM)

Le graphe (2.1) présente la dynamique pour une année d'exercice t pour un scénario.

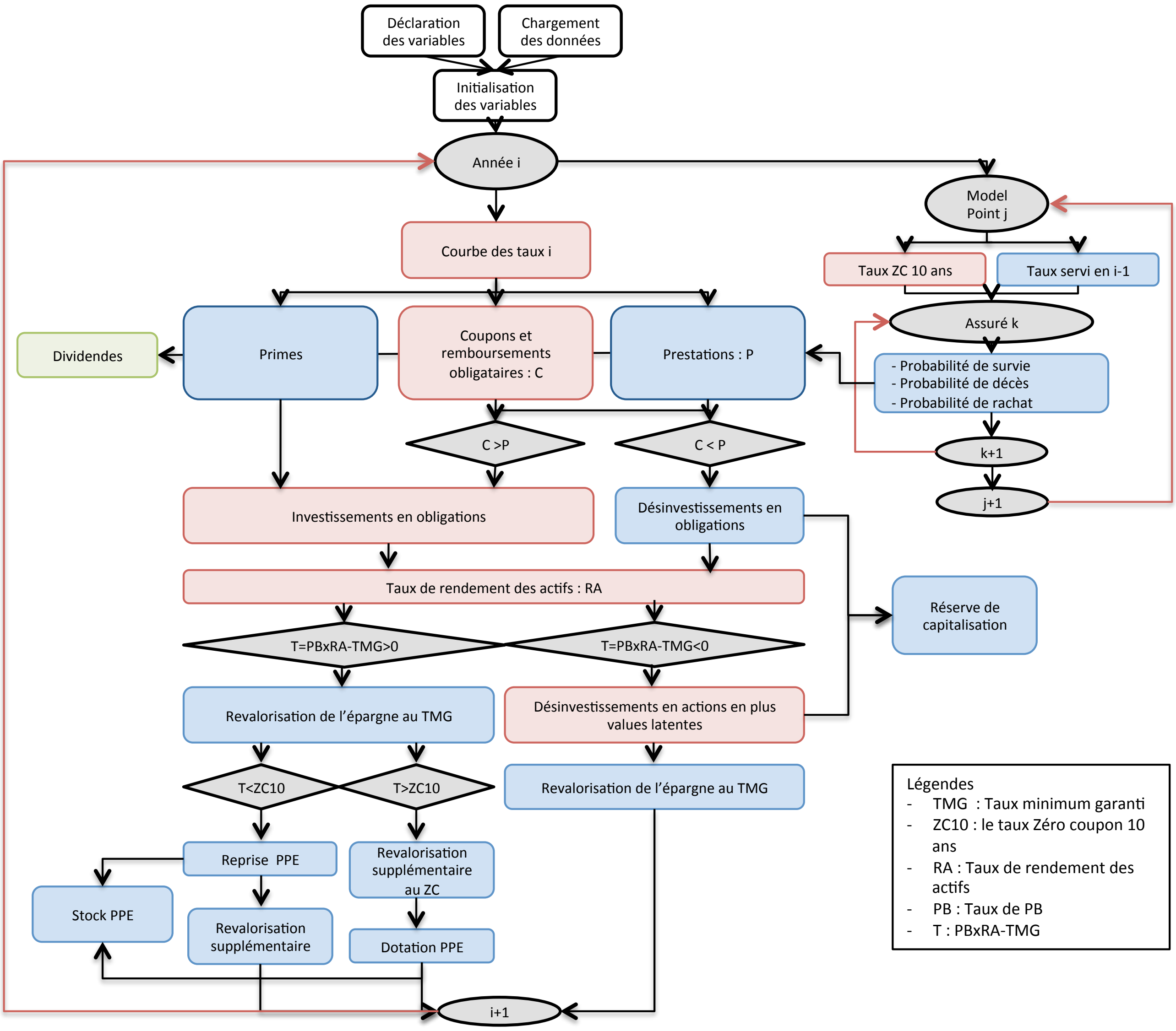

FIGURE 2.1 – Déroulement d'une année : interaction entre l'actif et le passif

Au 31/12/t – 1

– Les assurés entrant dans le contrat versent une prime unique fixée à 10 000€.

– L'assureur investit les primes perçues dans des obligations au pair de maturité 10 ans. Les maturités et le taux de coupons de ces obligations dépendent de la date de fin de contrat des assurés. Nous expliciterons ce point dans la section suivante.

– En cas d'arrivée à terme du contrat, l'assureur verse aux sortants l'intégralité de leur épargne constituée.

Au 31/12/t

– L'assureur reçoit les coupons et les remboursements obligataires, ainsi que les dividendes, fruits de son portefeuille d'actifs.
– Avec ces recettes, l'assureur verse les prestations dues à l'arrivée au terme des contrats, aux assurés décédés ou ayant racheté leurs contrats. Ainsi, deux cas se présentent :
  – Soit les recettes de son portefeuille d'actifs sont suffisantes pour couvrir les prestations à régler. Dans ce cas, l'assureur investit le surplus dans des nouvelles obligations au pair de maturité 10 ans.
  – Soit ces recettes ne sont pas suffisantes, alors l'assureur est contraint de vendre des obligations pour couvrir les prestations à régler.
– L'assureur verse une partie de ces recettes aux actionnaires à la hauteur de 10% de ce résultat.
– Le portefeuille d'actifs de l'assureur permet d'obtenir le taux de rendement de ses actifs $RA(t)$. Ainsi, deux cas se présentent :
  – soit le rendement financier permet la revalorisation de l'épargne aux taux techniques, alors l'assureur peut revaloriser l'épargne à un taux supérieur aux taux techniques des assurés. Nous discuterons de la détermination de ce taux par la suite.
  – soit le rendement financier du portefeuille d'obligations ne permet pas d'assurer la revalorisation de l'épargne des assurés, alors l'assureur est dans l'incapacité de servir le taux technique. Il est alors contraint de vendre des actions en plus-value latentes pour servir le taux technique. L'épargne des assurés est, dans ce cas-là, uniquement revalorisée au taux technique.
– Ainsi, l'assureur peut établir son compte de résultat et son bilan de fin de période.

Remarque III.2.
– En cas de cession d'obligations, les plus ou moins values des obligations réalisées sont inscrites dans une réserve, appelée **Réserve de capitalisation**. Cette réserve, incluse dans les capitaux propres de l'entreprise, permet de lisser les résultats des plus ou moins values du fait des mouvements des taux.
– La **Provision pour Participation aux Excédents** est constituée pour lisser le versement de la participation aux bénéfices. Les clauses de participation aux bénéfices sont réglementées par le code des assurances : les assureurs doivent distribuer 85% de son résultat financier.
– Une **Provision pour Dépréciation Durable** est également inscrite au bilan lorsque le cours des actions est inférieur à un certain pourcentage, fixé ici à 80% de leur valeur d'achat. Cependant, le caractère durable n'est pas modélisé ici.

2.4.2 Passif : Provisions Mathématiques

Les **Provisions Mathématiques** sont définies comme la différence entre la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et la valeur actuelle probable des engagements de l'assuré. A la date de souscription du contrat, les provisions mathématiques d'un assuré d'âge x à la date de souscription, sont égales à 0, quelque soit le *Model Point* j :

$$PM_j(0) = 0.$$

Les provisions mathématiques, pour le *Model Point* j, s'écrivent donc à la date $t > t_j + 1$ de la façon suivante :

$$PM_j(t) = PM_j(t-1) \times (1 + max[TMG, TxPB \times RA(t)]) - VP_j(t).$$

Remarque III.3. On suppose que les rachats et les décès ont lieu au 31/12 de chaque année. L'épargne versée, dans ces cas-ci, est uniquement revalorisée au taux technique, et non à la revalorisation due aux clauses de participation aux bénéfices.

2.4.3 Taux de rendement des actifs

Le taux de rendement des actifs se calcule par :

$$RA(t) = \frac{C(t) + D(t) + \Delta PDD_a(t)}{VNC_o(t) + VNC_a(t)}$$

où $\Delta PDD_a(t)$ est la variation des provisions pour dépréciation durable des actions entre $t-1$ et t.

Remarque III.4. Les obligations sont achetées au pair, il n'y a donc pas de surcote décote à inscrire dans le bilan de la compagnie.

2.4.4 Solde de trésorerie

Le solde de trésorerie de l'assureur à chaque date t est donné par la différence entre les primes, les coupons, les dividendes et les remboursements perçus et les prestations à payer. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$ST(t) = P(t) + C(t) + D(t) + R(t) - VP_j(t)$$

2.4.5 Stratégies d'investissement en obligations

Lorsque l'entreprise a à faire à des *cash flows* entrants, celle-ci les investit en actifs. Cette partie présente les stratégies d'investissement de l'entreprise XYZ.

2.4.5.1 Lors d'un versement de primes par les assurés

Pour servir le taux technique et un taux de participation aux bénéfices compétitif chaque année à ses assurés, l'entreprise XYZ fait le pari d'investir uniquement en obligations au pair à chaque versement de primes par les assurés. Les taux de coupon et les maturités de ces obligations achetées dépendent du montant, de la date des primes perçues et de la fin des contrats considérés. Les taux techniques étant indexés au Taux Moyen d'Emprunt d'État (TME), il existe une corrélation forte entre la courbe des taux et le taux technique servi par la compagnie. C'est pourquoi, les obligations achetées devraient donner un rendement suffisant pour respecter ses engagements. Cependant, de cette stratégie, la compagnie d'assurance se trouve alors exposée fortement au risque de taux et de défaut des émetteurs des obligations de son portefeuille.

Pour des assurés de date d'entrée dans le contrat, t_j, l'assureur investit à cette date t_j, un montant égal aux primes perçues, dans des obligations au pair dont la maturité est fixée à 10 ans. Le taux de coupon de ces obligations est donné par le **taux de coupon forward**, calculé à partir de la courbe des taux à la date d'achat. Ainsi, le taux de coupon des obligations achetées en t_j s'exprime de la façon suivante :

$$c_j(t_j) = \frac{1 - \frac{1}{(1+ZC(t_j,T))^{(T-t_j)}}}{\sum_{k=1}^{T-t_j} \frac{1}{(1+ZC(t_j,k))^{(k-t_j)}}},$$

où $ZC(t_j, T)$ est le taux Zéro-Coupon à la date t_j et de date d'échéance T.

2.4.5.2 Dans le cas d'un surplus de trésorerie

Lorsque le solde de trésorerie est positif à une date t, l'assureur investit ce surplus en obligations au pair de maturité 10 ans. La nature de cette obligation est alors identique à celle des obligations achetées lors d'un versement de prime.

2.4.6 Stratégies de désinvestissement

Lorsque les performances de l'entreprise ne sont pas assez bonnes pour respecter les engagements qu'elle a pris auprès de ses assurés, la compagnie XYZ se voit contrainte à désinvestir des actifs financiers.

2.4.6.1 Une solde de trésorerie négatif

Dans le cas où la somme des primes, des coupons, des dividendes et des remboursements obligataires est inférieure à la valeur totale des prestations à couvrir alors l'assureur vend des obligations, il vend une partie de toutes les obligations présentes suivant leur poid dans le portefeuille d'actif. Les obligations constituant la plus grande partie du portefeuille de l'assureur, celui-ci ne désinvestit jamais en actions lorsque le solde de trésorerie est négatif.

2.4.6.2 Pour servir les taux techniques

Lorsque l'assureur se trouve dans l'incapacité de servir le taux technique, c'est-à-dire lorsque le taux de rendement de ses actifs est plus faible que les taux techniques à servir, alors il est contraint à vendre des actifs en plus-values latentes. Dans ce cas-là, l'assureur pioche dans la poche « action » de son portefeuille.

Les intérêts techniques pour la revalorisation garantie sont donnés par :

$$IT(t) = \sum_{j=1}^{9} TMG_j * PM_j$$

et les produits financiers sont alors donnés par :

$$PF(t) = TxPB \times RA(t) \times \sum_{j=1}^{9} PM_j.$$

Ainsi, si $IT(t) > PF(t)$, alors l'assureur doit vendre un certain nombre d'actions de telle sorte que les plus-values réalisées de ces ventes, $PV(t)$, permettent de rétablir l'équilibre donné par :

$$\begin{aligned} IT(t) &= PF(t) \\ IT(t) &= TxPB \times \frac{C(t) + D(t) + \Delta PDD_a(t) + PV(t)}{VNC_o(t) + VNC_a(t)} \times \sum_{j=1}^{9} PM_j. \end{aligned}$$

Dans le cas où $IT(t) < PF(t)$, alors le surplus revient aux assurés sous forme de participation aux bénéfices. Cette participation aux bénéfices est alors écrite :

$$PB(t) = PF(t) - IT(t).$$

Remarque III.5. Dans le cas où l'assureur ne peut pas vendre des actions en plus-values latentes alors il enregistre une perte permettant ainsi de servir les assurés de leurs taux techniques.

2.4.7 Taux de revalorisation et Dotation/Reprise de la PPE

Lorsque les produits financiers sont supérieurs aux intérêts techniques, alors l'assureur peut revaloriser l'épargne des assurés au titre de la participation aux bénéfices. Les assurés souhaitent avoir un taux de revalorisation global égal au taux Zéro-Coupon de maturité 10 ans. Le taux de revalorisation au titre de la participation aux bénéfices dépend donc de ce taux. Chaque année et pour le *Model Point* j, le taux de revalorisation, $TxRevalo_j$, est donc déterminé par :

$$TxRevalo_j(t) = ZC(t, t+10) - TMG_j.$$

Ainsi, la participation aux bénéfices cible est donnée par :

$$PBCible(t) = \sum_{j=1}^{9} TxRevalo_j(t) \times PM_j(t).$$

Or si $0 < PB(t) < PBCible(t)$, alors l'assureur reprendra sa provision pour participation aux excédents (PPE) pour atteindre au maximum la participation aux bénéfices cible.

Dans le cas contraire et étant donné qu'il n'est pas dans l'obligation de verser le surplus, $PB(t)$, immédiatement, il pourra doter sa provision pour participation aux excédents (PPE) du surplus.

2.5 Situation de l'entreprise d'assurance XYZ au 31/12/2013

2.5.1 Bilan et compte de résultat

Ayant ainsi évalué l'Actif et le Passif de l'entreprise, on peut alors établir le bilan comptable de l'entreprise. Le tableau ci-dessus présente la situation de l'entreprise XYZ entre le 31/12/2005 et le 31/12/2013. Les comptes de résultat pour ces années sont présentés en annexe (2.4).

Bilan	31/12/2005	31/12/2006	31/12/2007	31/12/2008	31/12/2009	31/12/2010	31/12/2011	31/12/2012	31/12/2013
					Actifs				
Obligations	3 547 317 €	6 117 269 €	8 844 668 €	11 751 807 €	14 802 335 €	17 947 663 €	21 182 742 €	24 434 796 €	28 458 108 €
Actions	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €	375 000 €
Total Actif	**3 922 317 €**	**6 492 269 €**	**9 219 668 €**	**12 126 807 €**	**15 177 335 €**	**18 322 663 €**	**21 557 742 €**	**24 809 796 €**	**28 833 108 €**
					Passifs				
Capital	1 500 000 €	1 571 212 €	1 648 449 €	1 740 597 €	1 851 965 €	1 979 342 €	2 124 266 €	2 288 226 €	2 472 147 €
Réserve de capitalisation	- €	- €	- €	- €	- €	- €	- €	- €	7 482 €
Résultat	71 212 €	77 237 €	92 148 €	111 368 €	127 377 €	144 925 €	163 959 €	183 922 €	182 234 €
Provisions techniques	2 346 105 €	4 838 820 €	7 474 071 €	10 269 843 €	13 192 993 €	16 193 397 €	19 264 517 €	22 332 649 €	26 166 245 €
- PM	2 342 921 €	4 832 827 €	7 474 071 €	10 269 843 €	13 192 993 €	16 193 397 €	19 264 517 €	22 241 560 €	25 973 119 €
- PPE	3 184 €	5 993 €	- €	- €	- €	- €	- €	91 089 €	193 125 €
Total Passif	**3 917 317 €**	**6 487 269 €**	**9 214 668 €**	**12 121 807 €**	**15 172 335 €**	**18 317 663 €**	**21 552 742 €**	**24 804 796 €**	**28 828 108 €**

TABLE 2.2 – Bilans comptables Solvabilité 1 de l'entreprise d'assurance XYZ entre le 31/12/2004 et le 31/12/2013

Nous calculons également quelques indicateurs de pilotage sur ces huit années. Sont présentées ci-dessous les évolutions de la rentabilité des capitaux propres (ROE), du capital global, du taux total servi aux assurés et du retour sur investissement cumulé pour les actionnaires.

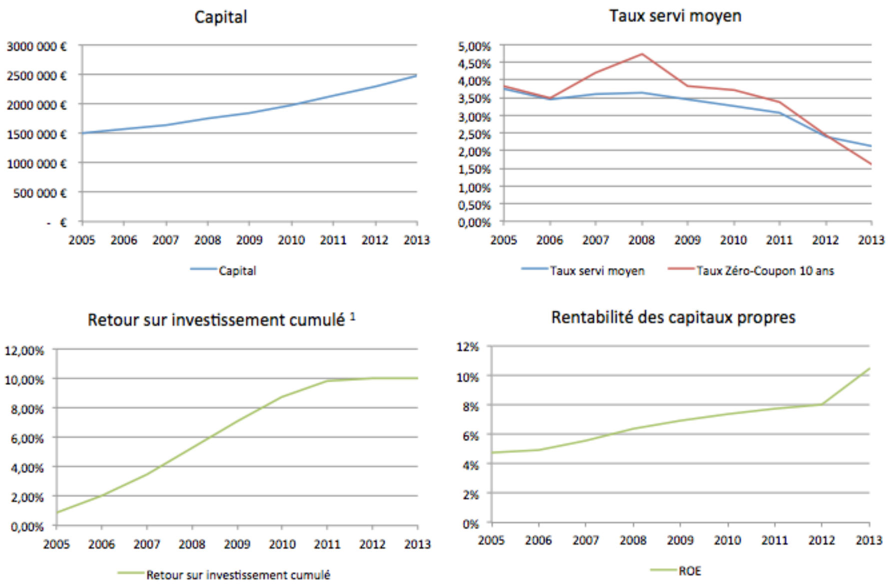

FIGURE 2.2 – Indicateurs de performance pour les périodes 2004 -2013

On remarque, de ces résultats, la diminution du taux servi aux assurés, notamment du fait de la non nécessité de revalorisation de l'épargne des assurés à cause de taux bas. Une stagnation du retour sur investissement cumulé est également constatée pour les dernières années considérées : en effet, la compagnie XYZ n'a pas distribué de dividende en 2013. Le capital n'a fait qu'augmenter durant ces huit derniers exercices bien que la rentabilité des capitaux propres baisse légèrement pour l'année 2013.

2.5.2 Portefeuille d'actifs

Durant les années considérées, l'assureur n'a pas eu besoin de céder des actions pour atteindre les taux techniques des assurés. Par contre, l'entreprise a dû vendre des obligations pour obtenir un solde de trésorerie positif seulement durant l'exercice 2013. Cette année-ci, l'assureur n'a donc pas versé de dividende. Pendant les autres années, un solde de trésorerie positif a permis à l'assureur d'investir en obligations au pair. Les deux tableaux suivants résument le portefeuille d'actifs de l'assureur au 31/12/2013.

Pour ce qui concerne les obligations du portefeuille d'actifs, l'assureur dispose :

	Quantité	Nominal	Taux de coupon	Date d'achat	Date de remboursement	Valeur d'achat	Valeur de remboursement	Surcote Décote	VNC	Valeur de marché
1	1 117	1 000	4,38%	31/12/2004	31/12/2034	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 266 €
2	2 284	1 000	3,75%	31/12/2004	31/12/2014	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 036 €
3	2 520	1 000	3,40%	31/12/2005	31/12/2015	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 057 €
4	2 662	1 000	4,16%	31/12/2006	31/12/2016	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 099 €
5	2 838	1 000	4,61%	31/12/2007	31/12/2017	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 137 €
6	3 026	1 000	3,35%	31/12/2008	31/12/2018	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 098 €
7	3 159	1 000	2,80%	31/12/2009	31/12/2019	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 072 €
8	3 283	1 000	2,21%	31/12/2010	31/12/2020	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	1 031 €
9	3 352	1 000	1,38%	31/12/2011	31/12/2021	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	961 €
10	4 213	1 000	0,35%	31/12/2012	31/12/2022	1 000 €	1 000 €	- €	1 000 €	860 €

TABLE 2.3 – Portefeuille obligataire de l'assureur XYZ au 31/12/2013

L'assureur possède également des actions dans son portefeuille d'actifs.

	Quantité	Valeur d'achat	Valeur de marché	VNC	PDD
1	375	100,00 €	122,82 €	100,00 €	- €
2	375	100,00 €	98,61 €	100,00 €	- €
3	375	100,00 €	89,29 €	100,00 €	- €
4	375	100,00 €	111,46 €	100,00 €	- €
5	375	100,00 €	92,44 €	100,00 €	- €
6	375	100,00 €	133,41 €	100,00 €	- €
7	375	100,00 €	98,05 €	100,00 €	- €
8	375	100,00 €	120,69 €	100,00 €	- €
9	375	100,00 €	85,96 €	100,00 €	- €
10	375	100,00 €	140,54 €	100,00 €	- €

TABLE 2.4 – Portefeuille d'actions de l'assureur XYZ au 31/12/2013

2.6 Modélisation des risques

Les évaluations du bilan sous Solvabilité 2, du capital réglementaire mais également du Besoin Global de Solvabilité nécessitent la modélisation des risques sous sous-jacents aux activités de l'assureur XYZ.

1. Le retour sur investissement correspond au ratio « Dividendes versés / Capital apporté »

2.6.1 Identification des risques encourus par l'entreprise

La cartographie des risques est la première étape pour une mise en place effective d'un processus ORSA. Dans le cas de cette compagnie, on peut définir les principaux risques suivants :

- risque de taux,
- risque action,
- risque de défaut,
- risque de rachat,
- risque de mortalité,
- risque de modèle,
- risque de législation,
- risque de modèle,
- risque lié aux affaires nouvelles,
- risque de réputation.

D'autres risques peuvent être identifiés par les autres équipes de l'entreprise : le risque informatique, le risque de fraude ou le risque d'image par exemple.

Il est utile à présent d'identifier les risques les plus importants en termes de sévérité et d'occurrence à l'aide d'une matrice de criticité.

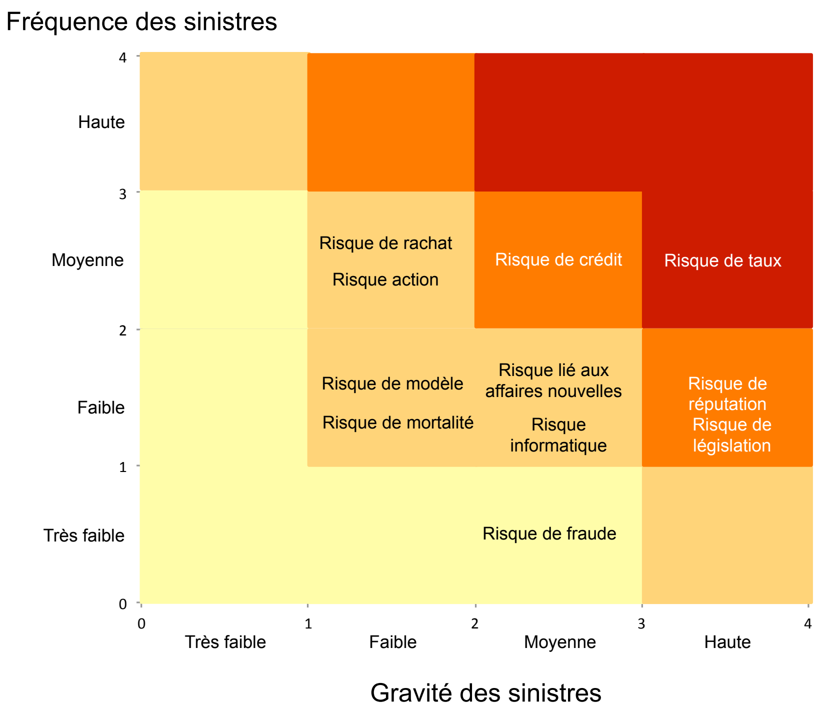

FIGURE 2.3 – Matrice de criticité pour la compagnie d'assurance XYZ

Il ressort de la matrice que les risques les plus importants et nécessitant une modélisation précise sont : **le risque de taux, le risque action, le risque de crédit, le risque de mortalité, le risque de rachat et le risque lié aux affaires nouvelles**. Les risques de réputation, informatique et de législation peuvent paraître importants, cependant ils sont difficilement quantifiables. C'est pourquoi, nous ne les considérons pas dans notre modélisation.

Nous présentons maintenant la modélisation des risques retenue par la compagnie XYZ. Cette modélisation permet la représentation des risques principaux dans différents scénarios économiques.

2.6.2 Risque de taux

2.6.2.1 Description du modèle G2++

Nous utilisons le modèle G2++, proposé par Brigo and Mercurio (2006) pour modéliser le taux court instantané. Il sera alors au coeur du générateur de scénarios économiques (GSE), permettant la projection de bilans et de comptes de résultats.

Le modèle G2++ est un modèle bi-factoriel dont la dynamique de taux est donnée sous la probabilité **risque neutre** par :

$$r_t = x_t + y_t + \varphi_t,$$

avec $r_0 = r0$ et où

$$\begin{aligned} dx_t &= -ax_t dt + \sigma dW_x(t) \\ dy_t &= -by_t dt + \eta dW_y(t), \end{aligned}$$

et

- a et b sont les coefficients de retour à la moyenne des processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$,
- σ et η sont les écart-types des différents processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$,
- W_x et W_y sont deux mouvements browniens associés aux processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$,
- x_0 et y_0 représentent les valeurs initiales des processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$ et sont fixés à 0.

Par ailleurs, φ est une fonction déterministe, définie sur l'intervalle $[0,50]$ et en particulier, $\varphi(0) = r0$. Et elle est définie par :

$$\varphi_T = f^M(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}(1-e^{-bT})^2 + \frac{\rho_{x,y}\sigma\eta}{ab}(1-e^{-aT})(1-e^{-bT}), \tag{2.1}$$

où $f^M(0,T)$ est le taux *forward* vu à la date $t=0$ et de date d'échéance T et $\rho_{x,y}$ représente la corrélation entre les mouvements browniens W_x et W_y :

$$dW_x(t)dW_y(t) = \rho_{x,y}dt.$$

En résolvant les équations des dynamiques de $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$, nous avons pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$r_t = x_s e^{-a(t-s)} + y_s e^{-b(t-s)} + \varphi(t) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_x(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_y(u).$$

Étant donné que $x_0 = y_0 = 0$ et en posant $s = 0$, on obtient :

$$r_t = \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_x(u) + \eta \int_0^t e^{-b(t-u)} dW_y(u) + \varphi(t).$$

2.6.2.2 Paramétrage du modèle

Le calibrage des modèles utilisés n'étant pas le sujet de ce mémoire, nous prenons des paramètres arbitraires. En annexe (2.5.1.3) est proposée une méthode de calibrage du modèle G2++. Dans notre exemple, nous prenons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ a &= 1, \\ \sigma &= 0,005, \\ y_0 &= 0, \\ b &= 1, \\ \eta &= 0.005 \\ \rho_{x,y} &= -0.2. \end{aligned}$$

2.6.2.3 Prix d'une obligation Zéro-Coupon

Le modèle G2++ donne une formule fermée pour le prix d'une obligation Zéro-Coupon. Ainsi, pour une obligation Zéro-Coupon observée à la date t et de date d'exercice T, son prix est donné par :

$$B(t,T) = \frac{B^M(0,T)}{B^M(0,t)} exp(A(t,T)), \tag{2.2}$$

où

- $B^M(0,T)$ est le prix d'une obligation Zéro-Coupon observé sur le marché à la date $t=0$ de date d'exercice t,
- $$A(t,T) = \frac{1}{2}\left[V(t,T) - V(0,T) + V(0,t)\right] - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}x_t - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}y_t,$$
- et,

$$\begin{aligned} V(t,T) = \frac{\sigma^2}{a^2}&\left(T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right) \\ &+ \frac{\eta^2}{a^2}\left(T - t + \frac{2}{b}e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b}e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b}\right) \\ &+ \frac{2\sigma\rho_{x,y}\eta}{ab}\left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)}-1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)}-1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)}-1}{a+b}\right). \end{aligned}$$

Delà, on peut en déduire le taux Zéro-Coupon à la date t et de date d'exercice T :

$$ZC(t,T) = \left(\frac{1}{B(t,T)}\right)^{1/(T-t)} - 1. \tag{2.3}$$

2.6.2.4 Prix d'une obligation

Le prix d'une obligation i est défini par les paramètres suivants :

- son nominal N ;
- sa date d'achat t_a ;
- sa date d'échéance T ;
- son prix de remboursement $V_{m,i}$;
- le taux sans risque donné par le modèle G2++ ;
- la périodicité des versements des coupons $c \times N$, ici annuelle ;

La valeur de marché d'une obligation à la date t et de maturité T est la somme des valeurs actuelles de chacun des flux que génère la possession de l'obligation. Mathématiquement parlant, nous avons alors :

$$VM_{o,i}(t,T) = \sum_{u=t+1}^{T} F_i(u) \times B(t,u),$$

où

$$F_i(u) = \begin{cases} c \times N & \text{si } u \in \{1,...,T-1\} \\ c \times +V_m & \text{si } u = m. \end{cases}$$

Le modèle G2++ donne une formule fermée pour le calcul d'une obligation Zéro-Coupon, $B(t,i)$, définie par l'équation (2.2). On peut donc déterminer le prix d'une obligation à la date t et de date d'échéance i. Formellement, nous obtenons :

$$V(t,T) = \sum_{i=t+1}^{T} F(i)B(t,i) = \sum_{i=t+1}^{T} F(i)\frac{B^M(0,i)}{B^M(0,t)}exp\left(A(t,i)\right).$$

2.6.3 Risque de crédit

Le portefeuille de l'assureur se compose principalement d'obligations, qui représentent près de 98% du portefeuille. Ces obligations sont exposées au défaut de leur émetteur et l'illiquidité sur les marchés financiers. Il est alors nécessaire de modéliser le risque de crédit. Il se décompose principalement en univers monde réel de trois composantes :

- le risque de défaut correspondant au risque de faillite de l'émetteur de l'obligation (évènement de défaut et recouvrement en cas de défaut),
- l'écartement du *spread* représentant le risque de dégradation de la valeur d'un actif suite à l'augmentation des *spreads* de crédit (rendement supplémentaire demandé par le marché pour rémunérer la prise de risque de crédit),
- et au changement de notation correspondant au risque de dégradation de la valeur d'un actif suite à un changement de notation.

Formellement, en reprenant les notations précédentes et en notant les $\tilde{F}$ les flux intégrant le risque de crédit, on a :

$$\tilde{F} = \begin{cases} \mathbb{P}(\tau > i) \times F(i) & \text{si pas de défaut à la date } i \\ \mathbb{P}(\tau = i) \times (1 - w) \times N & \text{si défaut à la date } i, \end{cases}$$

où

- w est le taux de recouvrement, et fixé à 80% dans notre exemple,
- τ la date de défaut.

On suppose que le remboursement a lieu au moment du défaut. En général, ce n'est pas le cas.

Remarque III.6. La modélisation du risque de crédit n'est utilisée que pour l'évaluation des prix des obligations durant la projection des bilans et des comptes de résultat pour l'évaluation du *Best Estimate*.

2.6.3.1 Présentation du modèle LMN

Il existe deux types de modèles permettant de prendre en compte le risque de crédit : les modèles structurels et à intensité. Dans notre cas, nous utilisons le **modèle à intensité, LMN,** proposé par Longstaff et al. (2005) permettant d'intégrer le risque de crédit dans les prix des obligations. Dans ce modèle, le taux d'intérêt d'une obligation *corporate* rc_t est défini de la façon suivante :

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t,$$

où r_t le taux sans risque, λ_t le *spread* de crédit et γ_t le *spread* de liquidité.

Le taux sans risque

Le modèle LMN a le grand avantage de ne pas imposer un modèle de taux sans risque précis : nous utilisons alors le taux ZC issu du modèle G2++, donné par l'équation (2.3).

L'intensité de défaut

L'intensité du défaut est alors modélisée par un **processus CIR** dont la dynamique est donnée :

$$d\lambda_t = (\alpha_\lambda - \beta_\lambda \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_\lambda(t)$$

où α_λ, β_λ et ω_λ sont des constantes telles que $\alpha_\lambda < \sigma_\lambda^2 \leq 2\alpha_\lambda$, $\lambda_0 > 0$ et W_λ un mouvement brownien standard.

Le *spread* de liquidité

La prime de liquidité est donnée par le processus, γ dont la dynamique est décrite par un **simple mouvement brownien** tel que :

$$d\gamma_t = \eta_\gamma dW_\gamma(t).$$

On suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre les différents processus.

Finalement, nous avons l'expression suivante pour les prix des obligations :

$$\begin{aligned} CB(t,T,w) = c \times N \sum_{i=t+1}^{T} A(i) exp\left(B(i)\lambda_i\right) C(i) B(t,i) e^{-\gamma_i i} \\ + N \times A(T) exp(B(T)\lambda_T) C(T) B(t,T) e^{-\gamma_T T} \\ + (1-w) \times N \sum_{i=t+1}^{T} exp(B(i)\lambda_i) C(i) B(t,i) \left(G(i) + H(i)\lambda_i\right) e^{-\gamma_i i} \end{aligned} \tag{2.4}$$

avec,

$$\begin{cases} A(t) = exp\left(\frac{\alpha_\lambda(\beta_\lambda+\psi)}{\sigma_\lambda^2} t\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma_\lambda^2}} \\ B(t) = \frac{\beta_\lambda - \psi}{\sigma_\lambda^2} + \frac{2\psi}{\sigma_\lambda^2(1-\kappa e^{\psi t})} \\ C(t) = exp\left(\frac{\eta_\gamma^2 t^3}{6}\right) \\ G(t) = \frac{\alpha_\lambda}{\psi}(e^{\psi t} - 1) exp\left(\frac{\alpha(\beta_\lambda+\psi)}{\sigma_\lambda^2} t\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma_\lambda^2}+1} \\ H(t) = exp\left(\frac{\alpha(\beta_\lambda+\psi)+\psi\sigma_\lambda^2}{\sigma_\lambda^2} t\right) \left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma_\lambda^2}+2} \\ \psi = \sqrt{2\sigma_\lambda^2 + \beta^2} \\ \kappa = \frac{\beta_\lambda+\psi}{\beta_\lambda-\psi}. \end{cases}$$

2.6.3.2 Paramétrage du modèle

Comme pour le modèle G2++, le paramétrage du modèle est fait arbitrairement. Le calibrage du modèle doit être normalement fait à partir de données obtenues sur les marchés. Il sera présenté en annexe 2.5.2.

Nous choisissons le paramétrage suivant pour le modèle LMN :

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= 0{,}002, \\ \beta_\lambda &= 0{,}1, \\ \sigma_\lambda &= 0{,}01732, \\ \eta_\gamma &= 0{,}004, \\ \lambda_0 &= 0{,}000001. \end{aligned}$$

Ces paramètres donnent alors des obligations de bonne qualité.

Remarque III.7. Ainsi, ces paramètres vérifient bien les conditions de mise en œuvre du modèle telles que $\alpha_\lambda < \sigma_\lambda^2 \leq 2\alpha_\lambda$, $\lambda_0 > 0$.

2.6.4 Risque action

2.6.4.1 Présentation du modèle de Black & Scholes avec dividendes

La projection des actions est modélisée par un modèle de **Black, Scholes et Merton avec dividendes**. La dynamique du cours de l'action, $(S_t)_t$, sous la probabilité historique $\mathbb{P}$, est donnée :

$$dS_t = S_t\left((\mu_S - TxDR)dt + \sigma_S dW_S(t)\right),$$

Où μ_S est la tendance du processus, σ_S la volatilité du processus et W_S un mouvement brownien et $TxDR$ le taux de dividende. On suppose également que $dW_S(t)W_x(t) = \rho_{x,S}dt$ et $dW_S(t)W_y(t) = \rho_{S,y}dt$.

La solution explicite de l'équation différentielle stochastique (EDS) nous donne :

$$S_t = S_0 e^{(\mu_S - TxDR - \frac{\sigma_S^2}{2})t + \sigma_S W_S(t)}.$$

En discrétisant l'EDS, nous obtenons :

$$S_{t+1} = S_t e^{\mu_S - TxDR - \sigma_S(W_S(t+1) - W_S(t))}.$$

Où $W_S(t+1) - W_S(t)$ suit une loi normale centrée et réduite.

Le théorème de Girsanov montre qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\lambda W_S(t) - \lambda^2/2T}.$$

La probabilité $\mathbb{Q}$ est appelée probabilité risque neutre et $\lambda = \frac{(\mu_S - ZC(t,t+1))}{\sigma_S}$ est appelé la prime de risque. Il s'agit de la probabilité sous laquelle tout actif est martingale Sous cette probabilité, la dynamique de l'action est donnée par :

$$dS_t = S_t \Big((ZC(t,t+1) - TxDR)dt + \sigma_S dW_S^{\mathbb{Q}}(t) \Big),$$

tel que $W_S^{\mathbb{Q}}(t) = W_S(t) + \lambda t$.

La solution explicite de l'équation différentielle stochastique est alors :

$$S_{t+1} = S_t e^{ZC(t,t+1) - TxDR - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S \left(W_S^{\mathbb{Q}}(t+1) - W_S^{\mathbb{Q}}(t) \right)},$$

Où $W_S^{\mathbb{Q}}(t+1) - W_S^{\mathbb{Q}}(t) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.6.4.2 Paramètrage

Dans l'univers risque neutre, seule la volatilité est à fixer. Le modèle doit être calibré en adéquation avec l'environnement financier à la date d'évaluation. Dans le cadre de cette application, nous ne calibrons pas le modèle de Black & Scholes avec dividendes. Nous prenons une volatilité pour le cours de l'action égale à $0,05$.

2.6.5 Corrélation des risques de taux et action

Nous supposons que les mouvements browniens des actifs risqués sont corrélés.
Les hypothèses de corrélation sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \varepsilon_Y dt &= \rho_{X,Y} dt, \\ \varepsilon_X \varepsilon_S dt &= \rho_{X,S} dt, \\ \varepsilon_Y \varepsilon_S dt &= \rho_{Y,S} dt \end{aligned}$$

Autrement dit, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{S,t} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_3(0,\Sigma)$ de matrice de variance covariance Σ de la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{x,y} & \rho_{x,S} \\ \rho_{x,y} & 1 & \rho_{y,S} \\ \rho_{x,S} & \rho_{y,S} & 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Cholesky permet de corréler des variables gaussiennes indépendantes. Le lecteur intéressé pourra se réferer à l'annexe (2.5.4).

2.6.6 Risque de mortalité

Du fait de sa création récente, la compagnie d'assurance ne peut pas construire de table d'expérience pour estimer la mortalité de son portefeuille d'assurés. On utilise alors la table de mortalité TF 00-02. Elle a été établie par l'INSEE à partir d'observations réalisées entre 2000 et 2002 sur une population féminine française. Comme son homologue TH 00-02, c'est une table générationnelle et qui nécessite un décalage pour prendre en compte les écarts entre les générations. Une notice d'utilisation a été proposé par l'Institut des Actuaires. On présente donc en annexes la table TF 00-02 à laquelle on a appliqué le décalage indiqué.

2.6.7 Risque de rachat

Les assurés de la compagnie d'assurance XYZ ont la possibilité de racheter leurs contrats, c'est-à-dire de récupérer leurs épargnes, à tout moment. Seulement, dans le cas d'un rachat, l'assureur a prévu une pénalité, que l'on a exposé dans la partie (2.4.2) et qui est définie par un taux appliqué à la valeur de l'épargne à la sortie de l'assuré, $t \in \{1, ..., T\}$:

$$TxValR(t) = 1 - 0,006 \times (T - t)^2.$$

Cette pénalité a été établie pour inciter les assurés à ne pas racheter leurs contrats.

Un assuré est incité à racheter son contrat pour deux raisons. Tout d'abord, l'assuré, pour des raisons qui lui sont propres, peut avoir un besoin de capitaux immédiat et est alors contraint de faire appel à toutes les sources de financement qui lui sont offertes. C'est ce qu'on appelle un **rachat structurel**. La seconde explication possible à un rachat dépend de l'environnement économique. Si le taux de revalorisation (taux technique et taux de participation aux bénéfices) de l'assuré est plus faible que le taux attendu, alors il est plus avantageux de racheter son contrat et d'investir dans un compte d'épargne bancaire type Livret A. Ce type de rachat est qualifié de **conjoncturel**, car il dépend de l'environnement économique et plus particulièrement de l'évolution de la courbe des taux. Il est tout de même bon dans tous les cas de prendre en compte la pénalité appliquée.

La modélisation des rachats structurels dépend des caractéristiques des assurés comme l'âge et également des observations passées. La réputation de l'assureur peut également avoir des effets tant bien positifs que négatifs sur le comportement des assurés.

Dans notre exemple, par simplification, nous fixons le taux de rachat structurel constant à 4%.

Concernant les rachats conjoncturels, ils sont souvent modélisés par une fonction dépendant de l'écart entre le taux servi par l'assureur, noté R et un taux dépendant de l'environnement économique, appelé **taux de rendement espéré** par l'assuré et noté RE. L'EIOPA a préconisé dans ses spécifications techniques pour la collecte LTGA 2013, deux lois de rachat, correspondant à des plafonds maximum et minimum de rachats, dépendant tous deux à l'écart entre les taux. Cette fonction est égale à :

$$RC(R(t)) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } R(t) - RE(t) < \alpha, \\ RC_{max} \frac{(R(t) - RE(t) - \beta)}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < R(t) - RE(t) < \beta, \\ 0 & \text{si } \beta < R(t) - RE(t) < \gamma, \\ RC_{min} \frac{(R(t) - RE(t) - \gamma)}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < R(t) - RE(t) < \delta, \\ RC_{min} & \text{si } \delta < R(t) - RE(t). \end{cases}$$

L'EIOPA a donné les plafonds suivants pour les différents coefficients :
où :

- α et δ représentent des seuils limites en dessous et au dessus desquels ce n'est plus l'écart entre les taux qui conduit à un rachat ;
- β et γ sont les seuils d'indifférence et déterminent un intervalle dans lequel l'écart entre les taux n'a pas d'incidence sur le comportement des assurés.

	α	β	γ	δ	RC_{min}	RC_{max}
Plafond max	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Plafond min	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

TABLE 2.5 – Paramètres définis par l'EIOPA pour modéliser les rachats conjoncturels

Les autorités donnent alors une formule globale pour le taux de rachat, exprimé comme :

$$RT(t) = min\left[1, max\left(0, RS + RC(R(t), RE(t))\right)\right].$$

Dans notre exemple, nous prendrons les paramètres donnés comme les moyennes des plafonds maximum et minimum :

$$\begin{aligned} \alpha &= -5\%, \\ \beta &= -1\%, \\ \gamma &= 1\%, \\ \delta &= 3\%, \\ RC_{min} &= -5\%, \\ RC_{max} &= 30\%. \end{aligned}$$

Et nous estimerons le taux attendu par les assurés, RE, par le taux Zéro-Coupon de maturité 10 ans.

Finalement, on a donc la formule suivante pour les rachats conjoncturels :

$$RC(R(t)) = \begin{cases} 30\% & \text{si } R(t) - ZC(t, t+10) < -5\% \\ 30\% \frac{(R(t) - ZC(t,t+10) + 1\%)}{-4\%} & \text{si } -5\% \leq R(t) - ZC(t,t+10) < -1\% \\ 0 & \text{si } -1\% \leq R(t) - ZC(t,t+10) < 1\% \\ -5\% \frac{(R(t) - ZC(t,t+10)) - 1\%)}{2\%} & \text{si } 1\% \leq R(t) - ZC(t,t+10) < 3\% \\ -5\% & \text{si } 3\% \leq R(t) - ZC(t,t+10). \end{cases}$$

Par ailleurs, on peut réécrire la formule globale du taux de rachat total comme :

$$RT(t) = RS + min\left[1 - RS, max\left[RC(R(t), ZC(t,t+10)) - RS\right]\right].$$

2.6.8 Affaires nouvelles

Chaque année depuis 2004, le nombre de nouvelles souscriptions a augmenté de 5% chaque année. L'assureur peut donc faire face à une diminution ou une hausse de ce taux mais également à une diminution du nombre de nouvelles souscriptions pour les années futures.

2.7 Bilan sous Solvabilité 2

La modélisation de tous ces risques permet l'évaluation en vision « marché » du bilan de l'entreprise. Nous posons $t = 0$ la date d'évaluation.

2.7.1 Génération de scénarios économiques

Pour évaluer les prestations aux titres des clauses de participation aux bénéfices à verser, il est nécessaire d'envisager un certain nombre de situations économiques. Pour chaque scénario, nous pouvons alors en calculer un résultat financier permettant ainsi d'en déduire le taux de participations aux bénéfices à servir. Les différentes situations économiques, également appelées **scénarios économiques**, mentionnées ici peuvent être captées par différentes courbes de taux Zéro-Coupon. La modélisation de ces courbes doit être cohérente avec celle connue à la date d'évaluation. Nous utilisons alors le modèle de taux G2++, cœur du GSE, pour les estimer.

2.7.2 Hypothèses de simulation

Pour être en cohérence avec la notion de ***Market Consistency*** de la vision économique du bilan Solvabilité 2, nous nous plaçons en univers **risque neutre**. Le modèle G2++ prend en compte les hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés.

Par ailleurs, les projections de scénarios économiques sont établies sur une durée de **9 ans** pour le calcul du bilan économique de la compagnie d'assurance. Nous ne considérons aucune nouvelle souscription de contrat dans le cas de l'évaluation du *Best Estimate* des prestations à couvrir. Au bout de la dixième année, les assurés initialement présents dans le portefeuille de passif de l'assureur auront tous quitté le contrat.

Pour notre exemple simple et pour des contraintes techniques, nous choisissons de projeter uniquement **5 000 scénarios économiques**.

2.7.3 Retraitements des données

La réforme Solvabilité 2 préconise une approche « *Market Consistent* » pour l'évaluation du bilan d'une compagnie d'assurance. Les postes de celui-ci doivent être en cohérence avec les données du marché. Il est alors nécessaire de retraiter les prix des obligations. Pour ce faire, nous choisissons de retraiter les taux de coupon des obligations du portefeuille. Ces taux sont alors recalculés de telle sorte que la valeur estimée des obligations par la formule précédente (2.4) soit égale à la valeur de marché observée de ces mêmes obligations.

Les nouveaux taux de coupon, pour les obligations i, sont alors donnés par :

$$c_i = \frac{\big(VM_{obs,o,i}(0,T,w) - N \times I(T) - (1-w) \times N \times J(T)\big)}{N\sum_{i=1}^{T} A(i)exp\,(B(i)\lambda_i)\,C(i)B(0,i)e^{-\gamma_i i}} \tag{2.5}$$

avec :

$$I(T) = A(T)exp(B(T)\lambda_T)C(T)B(0,T)e^{-\gamma_T T}$$
$$J(T) = \sum_{i=1}^{T} exp(B(i)\lambda_i)C(i)B(0,i)\,(G(i) + H(i)\lambda_i)\,e^{-\gamma_i i}$$

et $VM_{obs,o,i}(0,T,w)$ représente le prix observé sur les marchés de l'obligation i à la date 0 et de date d'échéance T.

2.7.4 Le *Best Estimate* des prestations

A partir de la procédure de gestion Actif/Passif, nous pouvons en déduire les prestations (en cas de décès ou de rachat et aux titres des clauses de participation aux bénéfices) et les primes pour chaque situation économique. La version « marché » des provisions techniques est ce qu'on appelle le *Best Estimate* des prestations futures. Il est défini par l'EIOPA dans les Spécifications Techniques comme « la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente ». C'est la valeur qui s'apparente le plus à une valeur d'échange du portefeuille de passifs. Le *Best Estimate* nécessite la projection des bilans dans différents états du monde pour approcher au mieux de cette valeur d'échange. Ces projections doivent être effectuées en **univers risque neutre**, pour mettre la valorisation des prestations. Formellement, cela revient à calculer :

$$BE(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t\geq 1} \delta_t VP(t)\right]$$

où $VP(t)$ est la variable aléatoire représentant les prestations à la date t et δ_t le facteur d'actualisation à l'instant t.

La variable aléatoire $VP(t)$ correspond aux prestations globales à provisionner, c'est-à-dire les prestations en cas de rachats, de décès ou lors d'arrivées à terme des contrat.

Le calcul du *Best Estimate* se fait *via* la projection des bilans et comptes de résultat dans les différents scénarios économiques et en laissant « *mourir* » le portefeuille de passif de la compagnie. On dit que les projections se font en *run-off*.

2.7.5 Bilan Solvabilité 2 au 31/12/2013

Comme nous l'avons vu précédemment, le bilan Solvabilité 2 nécessite une inscription en vision de marché des différents postes. Ainsi grâce à la projection des différents scénarios économiques par un générateur de scénarios économique et la mise en place d'une procédure d'interaction Actif/Passif, nous pouvons ainsi évaluer le bilan sous la Réforme Solvabilité 2 au 31/12/2013 :

Actif		Passif	
Obligations	29 535 498 €	Capital	3 562 836 €
Actions	409 979 €		
		Best Estimate des prestations	26 382 641 €
Total	**29 945 477 €**	**Total**	**29 945 477 €**

TABLE 2.6 – Bilan économique au 31/12/2013

Remarque III.8. – La Provision pour Participation aux Excédent, étant une provision destinée à être versée aux assurés doit être incluse dans le *Best Estimate*. Dans le bilan décrit présenté ci-dessus, elle est intégrée au *Best Estimate* de la participation aux bénéfices.
– Par souci de simplicité de l'exemple, nous ne prenons pas en compte la marge pour risque. Celle-ci nécessite la projection des SCR.

2.7.6 Calcul du capital économique réglementaire (SCR)

Avant l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité, ou capital ORSA, il est intéressant de calculer le capital réglementaire requis, ou SCR, selon la Formule Standard. Nous rappelons que le capital réglementaire requis est donné par :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{Op}$$

où :
- $BSCR$ couvre les risques assurantiels et financiers
- Adj constitue un ajustement pour capacité d'absorption des pertes ;
- SCR_{Op} le capital requis pour les risques opérationnels.

Dans notre exemple, nous ne prenons pas en compte l'ajustement pour capacité d'absorption.

2.7.6.1 SCR élémentaires

Nous calculons les différents SCR élementaires suivant les règles de calcul données par la Formule Standard définies dans les Spécifications Techniques de l'EIOPA parues en Mai 2014 (*Technical Specifications for Preparatory Phase*). On rappelle que le SCR au titre d'un risque X est donné par :

$$C_X = FP_{central} - FP_X$$

où FP_X est le niveau de fonds propres après avoir établi un choc sur le risque X. L'implémentation de la procédure de gestion Actif/Passif (ALM) permet l'obtention d'une distribution de FP_X au titre du risque X.

Chocs Les différents chocs définis par l'EIOPA sont présentés dans le tableau suivant.

Dans le cas où il y a plusieurs chocs à réaliser pour un même risque, le SCR est défini comme le maximum des capitaux propres nécessaires pour couvrir ce risque.

Risque	Choc Hausse	Choc Baisse	Driver
Mortalité	+15%		Table de mortalité
Rachat	+50%	-20%	Taux de rachat total
Taux	selon la maturité des taux (1)		Courbe des taux
Spread	Expliciter dans la partie suivante		Valeur de marché des obligations
Action		-46,5%	Valeur de marché des actions

(1) : voir annexes

TABLE 2.7 – Chocs de la Formule Standard

Risque de *spread* La Formule Standard propose le calcul du SCR de *spread* de la façon suivante :

$$SCR_{spread} = \sum_i VM_{o,i} \times D_{m,i} \times F(Rating_i),$$

où

- $VM_{o,i}$ la valeur de marché de l'obligation i ;
- $D_{m,i}$, la duration modifiée de l'obligation i, calculée par :

$$D_{m,i} = \frac{D_i}{1+r_i} \text{ où } r_i \text{ est le taux actuariel de l'obligation } i \text{ et } D_i \text{la duration de l'obligation.}$$

- $F(Rating_i)$, la fonction de classe de notation de l'exposition de crédit relative à l'obligation i, donnée par l'EIOPA, qui est calibrée pour donner un choc de spread à la hausse de probabilité d'occurrence de 0.5% permettant d'obtenir à une VaR à 99.5%.

Remarque III.9. La duration modifiée est l'opposé de la sensibilité de l'obligation. On note cette quantité, S_i.

Les Spécifications Techniques de la Phase Préparatoire de l'EIOPA ont proposé les valeurs de F suivantes :

credit quality step / duration (years)	0	1	2	3	4	5	6
up to 5	0.9 %. $duration_i$	1.1 %. $duration_i$	1.4 %. $duration_i$	2.5 %. $duration_i$	4.5 %. $duration_i$	7.5 %. $duration_i$	7.5 %. $duration_i$
More than 5 and up to 10	4.5% + 0.5 %.($duration_i$ - 5)	5.5% + 0.6%.($duration_i$ - 5)	7.0% + 0.7%.($duration_i$ - 5)	12.5% + 1.5%.($duration_i$ -5)	22.5% + 2.5%.($duration_i$ -5)	37.5% + 4.2%.($duration_i$ -5)	37.5% + 4.2%.($duration_i$ -5)
More than 10 and up to 15	7.2% + 0.5 %.($duration_i$ - 10)	8.4% + 0.5 %.($duration_i$ - 10)	10.5% + 0.5 %.($duration_i$ - 10)	20.0% + 1.0 %.($duration_i$ -10)	35.% + 1.8 %.($duration_i$ -10)	58.5% + 0.5 %.($duration_i$ -10)	58.5% + 0.5 %.($duration_i$ -10)
More than 15 and up to 20	9.7% + 0.5 %.($duration_i$ - 15)	10.9% + 0.5 %.($duration_i$ - 15)	13.0% + 0.5 %.($duration_i$ - 15)	25.0% + 1.0 %.($duration_i$ -15)	44.0% + 0.5 %.($duration_i$ -15)	61.0% + 0.5 %.($duration_i$ -15)	61.0% + 0.5 %.($duration_i$ -15)
More than 20	12.2% + 0.5 %.($duration_i$ - 20)	13.4% + 0.5 %.($duration_i$ - 20)	15.5% + 0.5 %.($duration_i$ - 20)	30.0% + 0.5 %.($duration_i$ -20)	46.6% + 0.5 %.($duration_i$ -20)	63.5% + 0.5 %.($duration_i$ -20)	63.5% + 0.5 %.($duration_i$ -20)

TABLE 2.8 – Fonction de classe de notation de l'exposition de crédit en fonction de la duration et du qualité de crédit de l'obligation

On suppose que les obligations achetées sont de bonne qualité. Ainsi, nous prenons comme une qualité de crédit égale à $1,4\%$.

Nous rappelons que la duration de l'obligation i est calculée :

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{T} j \times \frac{F_{i,j}}{(1+r_i)^j}}{\sum_{j=1}^{T} \frac{F_{i,j}}{(1+r_i)^j}}$$

et le taux actuariel, r_i, de l'obligation vérifie :

$$VM_i = \sum_{j=1}^{T} \frac{F_{i,j}}{(1+r_i)^j}$$

où $F_{i,j}$ représentent les flux générés (coupons et/ou remboursement) par l'obligation i à l'instant j.

SCR élémentaires Nous obtenons ainsi les SCR élémentaires suivants :

Risque	Choc Hausse	Choc Baisse	SCR
Spread			1 378 705 €
Action		487 788 €	487 788 €
Taux	-273 993 €	1 677 742 €	1 677 742 €
Rachat	596 079 €	605 349 €	605 349 €
Mortalité	596 183 €		596 183 €
Total			**4 745 767 €**

TABLE 2.9 – Capitaux économiques élémentaires selon la Formule Standard

2.7.6.2 Agrégation et effets de diversification

Les Spécifications Techniques de la Phase Préparatoire donnent également les corrélations entre les SCR élémentaires de chaque sous module de risque.

Ainsi, pour le module de marché, les corrélations sont définies par la matrice suivante :

Marché	Spread	Action	Taux
Spread	1	0,75	0
Action	0,75	1	0,5
Taux	0	0,5	1

TABLE 2.10 – Corrélations entre les SCR élémentaires du module « Marché »

Et pour le module de souscription, nous avons :

Souscription	Mortalité	Rachat
Mortalité	1	0
Rachat	0	1

FIGURE 2.4 – Corrélations entre les SCR élémentaires du module « Souscription »

Ces différentes corrélations sont la traduction des effets de diversification qui peuvent exister entre les risques.

Une dernière matrice de corrélation entre les différents sous-modules de risque donne une corrélation linéaire entre le module de Souscription et de Marché égale à $0,25$.

2.7.6.3 Risques opérationnels

Le capital requis au titre des risques opérationnels est donné par :

$$SCR_{op} = min\left[0,3 \times BSCR; Op\right],$$

où OP est le chargement en capital du risque opérationnel.

Ce chargement est donné par :

$$OP = max\left[OP_{Primes}; OP_{PT}\right].$$

où :

- le risque opérationnel basique pour les primes est donné par $OP_{Primes} = 0,04 \times PrimesVie(2013) + 4\% \times \max\left(0, PrimesVie(2013) - 1.2 \times PrimesVie(2012)\right)$,
- le risque opérationnel basique pour les provisions techniques est donné par : $OP_{PT} = 0,0045 \times max\left(0, PTVie(2013)\right)$.

2.7.6.4 Capital économique global

Les SCR élémentaires et les corrélations entre ceux-ci permettent d'obtenir un capital économique global égal à 3 116 643 €. La diversification a permis de faire baisser le capital requis réglementaire de 38%. Le surplus est de 446 194 €. Par ailleurs, le ratio de solvabilité est de l'ordre de 114%. Ce ratio est cohérent avec ceux du marché. Les assureurs de type Vie ont en général un ratio de solvabilité variant entre 105% et 120%.

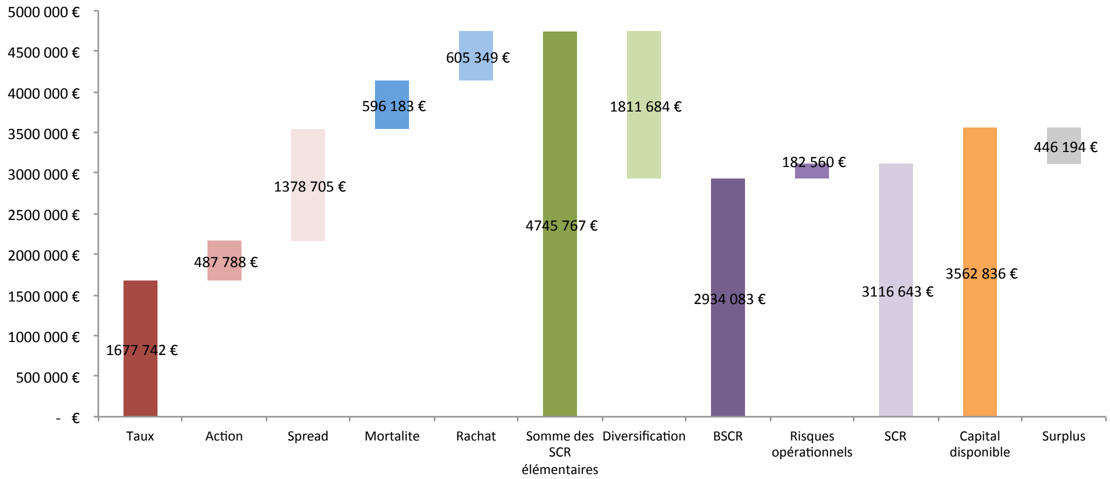

Figure 2.5 – Capital Économique global évalué par la Formule Standard au 31/12/2013

3 Application : Mise en oeuvre de la méthode d'allocation par preneur de risque

Dans le cadre de l'ORSA, l'assureur XYZ souhaite calculer son **Besoin Global de Solvabilité**. La Directive laisse une grande liberté aux assureurs dans l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité leur permettant ainsi de mieux se rendre compte de leurs risques spécifiques et d'intégrer ces risques dans leurs gestions. Ce capital pourra alors être alloué suivant les différents preneurs de risque.

3.1 Besoin Global de Solvabilité (BGS)

L'assureur XYZ décide de calculer son Besoin Global de Solvabilité en utilisant une méthode de type Formule Standard par l'application de chocs sur les différents risques. L'évaluation par risque donne alors une approche prudente à l'évaluation de ce capital.

3.1.1 Hypothèses d'évaluation

Contrairement à un calcul de SCR, l'assureur doit prendre en compte les risques spécifiques qu'il supporte mais également les stratégies opérationnelles qu'il prévoit dans le futur.

L'assureur évalue son Besoin Global de Solvabilité en utilisant les mêmes techniques que la Formule Standard, c'est-à-dire par des chocs instantanés sur le bilan à la date d'évaluation. Il modifie cependant les chocs établis sur les différents risques et les corrélations entre eux. Il rajoute également le risque lié aux affaires nouvelles dans le module de Souscription.

Choix de la métrique La métrique choisie dans le cadre de cette évaluation reste la *Value-at-Risk* à $99,5\%$.

Rajout du risque lié aux affaires nouvelles L'assureur a remarqué une augmentation de 5% tous les ans du nombres de nouvelles souscriptions durant les huit dernières périodes d'exercice. Dans un environnement de taux faibles, une augmentation de nouveaux entrants peut jouer relativement négativement sur la situation de la compagnie d'assurance. Pour considérer ce facteur, nous suppose dans sa modélisation que le nombre d'entrants augmente de 3% par an durant les trois prochaines années. Nous considérons un taux plus faible que les années précédentes pour deux raisons. D'abord, le contrat semble avoir atteint une certaine maturité, il est alors normal de considérer une augmentation plus faible. Par ailleurs, les taux sont particulièrement faibles au 31/12/2013 ainsi les taux techniques proposés et les éventuelles revalorisations de l'épargne des assurés n'attirent pas un nombre important de nouvelles souscriptions.

Le calcul des capitaux choqués doit alors prendre en compte les primes futures. Les provisions techniques notamment se voient amputer de ces primes. Cependant, l'évaluation du capital doit prendre en compte les profits générés par ces nouveaux contrats.

Chocs L'assureur reprend les méthodes de la Formule Standard en évaluant les risques par des chocs sur les différents drivers. Les chocs relatifs aux risque de taux, mortalité, rachat et action ont été modifiés pour être en concordance avec les risques réels auxquels l'assureur est exposé. Seule la méthode pour la mesure du risque de *spread* reste identique à celle de la Formule Standard. Pour le risque lié aux affaires nouvelles, l'assureur procède de la même façon en appliquant un choc à la hausse et à la baisse sur le taux des nouvelles souscriptions. Nous résumons les différents chocs utilisés pour le calcul du Besoin Global de Solvabilité :

Risque	Choc Hausse	Choc Baisse	Driver
Mortalité	10%		Table de mortalité
Rachat	20%	-20%	Taux de rachat total
Taux	+ 0 bp	+ 1000bp	Chocs FS
Spread	Comme la Formule Standard		Valeur de marché des obligations
Action		-30%	Valeur de marché des actions
Affaires nouvelles	+5%	+1%	Nombre de nouvelles souscriptions

(1) : voir annexes

TABLE 3.1 – Chocs pour l'évaluation du Besoin Global de Sovlabilité

Corrélations entre les risques L'entreprise envisage différentes corrélations que celles proposées par la Formule Standard. Le risque des affaires nouvelles est traité comme un risque corrélé au risque de rachat.

Pour le module de marché, l'assureur prendre les corrélations données par la matrice suivante :

Marché	Spread	Action	Taux
Spread	1	0,5	0
Action	0,5	1	0,2
Taux	0	0,2	1

TABLE 3.2 – Corrélation pour le module de Marché pour le calcul du Besoin Global de Solvabilité

et pour le module de Souscription, nous avons :

Souscription	Mortalité	Rachat	Affaires nouvelles
Mortalité	1	0	0
Rachat	0	1	0,5
Affaires nouvelles	0	0,5	1

TABLE 3.3 – Corrélation pour le module de Souscription pour le calcul du Besoin Global de Solvabilité

Une dernière corrélation est définie pour les deux modules et est fixée à $0,25$.

3.1.2 Capitaux élémentaires

La projection de différents scénarios économiques et les mécanismes d'interaction entre l'actif et le passif permettent d'obtenir des capitaux nécessaires aux titres de chacun des risques. Bien qu'amputant le montant des provisions, les nouvelles affaires génèrent des revalorisations à prévoir pour les épargnes de ces nouveaux assurés. C'est pourquoi, on obtient des montants de cette ordre dans le calcul des besoins de solvabilité élémentaires.

Ainsi, les capitaux en *stand-alone* sont donnés :

Risque	Choc Hausse	Choc Baisse	Capital
Spread			1 378 705 €
Action		696 974 €	696 974 €
Taux	- 198 776 €	1 948 238 €	1 948 238 €
Rachat	807 307 €	793 822 €	807 307 €
Mortalité	796 422 €		796 422 €
Affaires nouvelles	810 974 €	815 445 €	815 445 €
Total			**6 443 091 €**

TABLE 3.4 – Capitaux élémentaires pour l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité

3.1.3 Évaluation du Besoin Global de Solvabilité

Les effets de diversification permettent d'obtenir un Besoin Global de Solvabilité égal à 3 723 010 €. La diversification permet de diminuer de 45% la somme des capitaux en *stand-alone*. Le capital disponible permet tout juste de couvrir les risques considérés. Le surplus représentant la différence entre le capital disponible et le besoin global de solvabilité représente 251 183 €. Le ratio de solvabilité est alors de 107%.

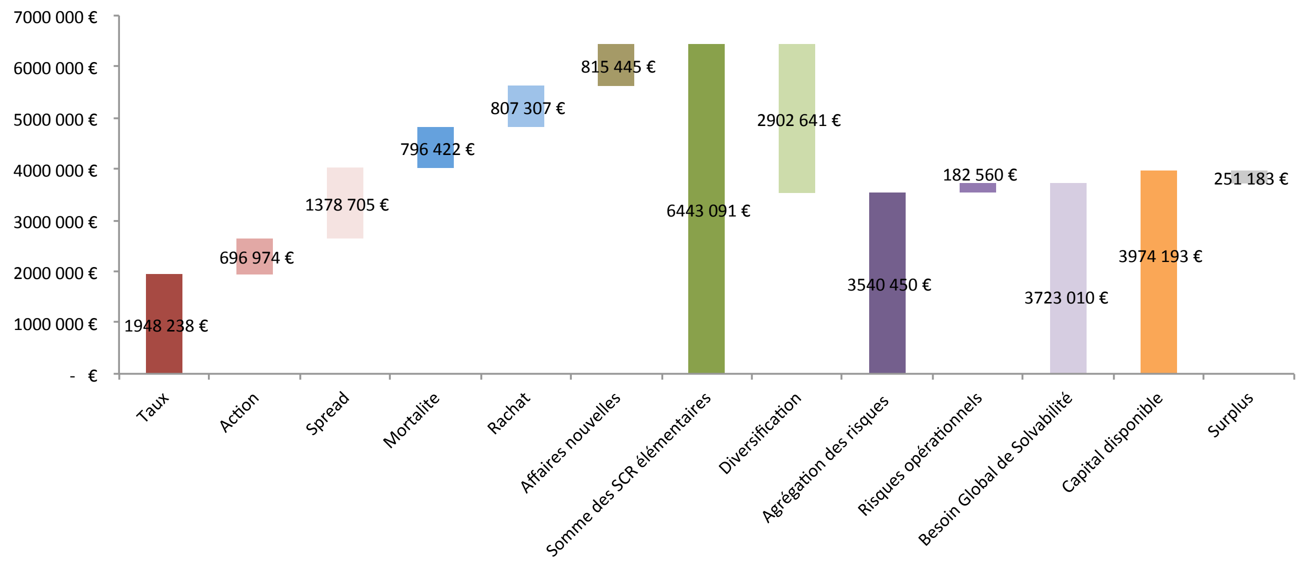

FIGURE 3.1 – Besoin Global de Solvabilité évalué au 31/12/2013

Dans la situation actuelle, l'entreprise d'assurance ne peut pas lancer tout de suite un nouveau contrat. Ce lancement provoquera d'après nos estimations à une insolvabilité de la part de l'entreprise.

3.1.3.1 Analyse du SCR et du Besoin Global de Solvabilité

Le SCR et le Besoin Global de Solvabilité ne sont pas comparables étant donné qu'ils n'ont pas la même dimension. Le SCR apporte une approche normative de la solvabilité de l'entreprise. Il permet aux autorités de contrôle d'appréhender la solidité de l'entreprise. Dans le cas d'un non respect de cette exigence, les autorités de contrôle peuvent sanctionner la compagnie. Par ailleurs, l'évaluation de cette exigence réglementaire donne une vision instantanée de la compagnie d'assurance. Il répond à la question : « quel montant de capital l'assureur doit-il détenir pour faire face à un sinistre provoquant des pertes financiers importants avec le portefeuille d'assurés actuel ? ». Il n'intègre donc pas la vision prospective du Besoin Global de Solvabilité. Ce dernier, quant à lui, inclut les différentes stratégies que l'entreprise souhaite mettre en œuvre dans les années à venir. Il inclut également les risques spécifiques de la compagnie. C'est pourquoi, l'évaluation des besoins globaux de solvabilité élémentaires donne des montants nettement plus importants que les SCR élémentaires. Cela est du à l'intégration d'un nouveau risque et des nouveaux entrants durant les trois années à venir.

3.2 Allocation du Besoin Global de Solvabilité par preneur de risque

Après avoir calculé le Besoin Global de Solvabilité à l'année $t = 0$, nous pouvons alors allouer ce capital mais également le capital disponible en fonction des risques pris par chaque preneur de risque.

3.2.1 Identification des preneurs de risques

A travers l'identification des risques principaux, nous avons défini les différents preneurs de risques.
- **Fonction ALM** : risques de taux, action et de rachat ;

– **Gestionnaire d'actifs** : risque de défaut ;
– **Souscription** : risque de mortalité et risque lié aux affaires nouvelles.

Une allocation en fonction de ces différents propriétaires de risques pourra être établie pour gérer les activités de l'entreprise. En effet, dans le cas comme notre exemple, il est impossible d'allouer le capital en fonction des différentes lignes d'activités ou des différents produits : l'entreprise ne commercialise qu'un seul type de contrat.

Remarque III.10. Il n'y a pas d'enjeux quant à l'allocation de capital pour la fonction Conformité du fait de l'indépendance des risques opérationnels par rapport aux risques financiers et assurantiels. On notera BGS, le Besoin Global de Solvabilité en excluant les risques opérationnels.

Par ailleurs, nous gardons la métrique, *Value-at-Risk* à $99,5\%$, pour l'évaluation des capitaux dans le cadre de l'allocation de capital du Besoin Global de Solvabilité.

3.2.2 Évaluation du capital en *stand-alone* pour chaque preneur de risque

Nous évaluons tout d'abord les capitaux requis pour chaque preneur de risque. Nous procédons donc une évaluation en *stand-alone*. Pour ce faire, nous décidons de mesurer les risques en effectuant des chocs joints sur les différents risques d'un même module (Gestion Actif/Passif, Gestionnaire d'actifs, Souscription). Cette méthode permet alors de capter les corrélations entre les différents risques. Les chocs retenus par preneur de risque sont résumés dans le tableau suivant :

Preneur de risque	Chocs retenus
Gestion Actif/Passif	Taux baisse
	Action baisse
	Rachat hausse
Souscription	Mortalité hausse
	Nouvelles affaires baisse
Gestionnaire d'actifs	Spread

Table 3.5 – Chocs joints retenus pour les différents preneurs de risques

Ainsi, les différents capitaux en *stand-alone* en utilisant la même méthode qu'en Formule Standard :

Preneur de risque	Capitaux en stand-alone
Gestion Actif/Passif	1 905 522 €
Souscription	1 066 738 €
Gestionnaire d'actifs	1 378 705 €
Total	4 350 965 €

Table 3.6 – Capitaux en *stand-alone* pour les différents preneurs de risque

Nous noterons ces capitaux par C_{ALM}, $C_{Souscription}$ et C_{Actifs}.

Cette évaluation permet d'analyser la contribution de chaque segment de risque sur le risque total et d'en définir les différents allocations de capital que l'on peut établir en suivant les méthodes présentées dans la partie 1 de ce mémoire.

3.2.3 Évaluations des capitaux alloués

Nous procédons à quatre méthodes d'allocation de capital présentées dans la partie 1 de ce mémoire :
- la méthode « *First-In* »,
- la méthode « *Last-In* »,
- la méthode d'Euler,
- et la méthode de Shapley.

Ici, on se concentre sur l'allocation du Besoin Global de Solvabilité. Le surplus, défini comme la différence entre le capital disponible et le Besoin Global de Solvabilité, pourra être alloué en proportion en fonction de la prise de risque de chacun des preneurs de risque. L'évaluation de ces capitaux pourra alors définir des limites en termes de capitaux pour chaque preneur de risque.

3.2.3.1 Méthode *First-In*

Nous rappelons que la méthode *First-In*, méthode proportionnelle, considère le poids d'un segment de risque sur le risque global. Elle ne considère que peu les corrélations entre les différents risques.

Ainsi, par exemple, le capital alloué au segment Gestion Actif/Passif est donné par :

$$K_{1rst,ALM} = \frac{C_{ALM}}{C_{ALM} + C_{Souscription} + C_{Actifs}} \times BGS$$

Nous obtenons ainsi les capitaux suivants :

1rst In	Stand alone	Capital à allouer	
Gestion Actif/Passif	1 905 522 €	1 550 554 €	44%
Gestionnaire d'actifs	1 378 705 €	1 121 874 €	32%
Souscription	1 066 738 €	868 022 €	25%
Total	4 350 965 €	3 540 450 €	

TABLE 3.7 – Allocation de capital avec une méthode *First-In* en utilisant la *Value-At-Risk* comme mesure de risque

3.2.3.2 Méthode *Last-In*

La méthode *Last-In* est basée sur l'évaluation de la contribution de chaque segment de risque sur le risque total. Il permet alors de prendre en compte les corrélations entre les différents segments de risque. Par ailleurs, comme son nom l'indique, elle considère chaque segment de risque par son arrivée en dernier dans le portefeuille de risques.

La contribution du segment de risque $j \in \{ALM, Souscription, Actifs\}$ est alors donnée par :

$$K_j = BGS - BGS_{\setminus\{j\}},$$

où $BGS_{\setminus\{j\}}$ est le Besoin Global de Solvabilité en excluant le segment j.

En ramenant ces capitaux calculés au Besoin Global de Solvabilité, nous obtenons alors :

Last In	Capital avec exclusion	Contribution au risque	Capital à allouer	
Gestion Actif/Passif	1 996 452 €	1 543 999 €	2 173 363 €	61%
Gestionnaire d'actifs	3 034 448 €	506 002 €	712 258 €	20%
Souscription	3 075 247 €	465 203 €	654 829 €	18%
Total		2 515 204 €	3 540 450 €	

TABLE 3.8 – Allocation de capital avec une méthode *Last-In* en utilisant *Value-At-Risk* comme mesure de risque

3.2.3.3 Méthode de Shapley

La méthode de Shapley reprend les méthodes de *First-In* et *Last-In* mais en envisageant les entrées intermédiaires comme décrites dans la partie 1 de ce mémoire. La contribution du segment $j \in \{ALM, Souscription, Actifs\}$ sur le risque global par une méthode d'entrées intermédiaires est donnée par le calcul suivant :

$$K_{2nd,j} = \frac{(BGS_{\setminus\{i\}} - C_k) + (BGS_{\setminus\{k\}} - C_i)}{2},$$

avec $i,k \in \{ALM, Souscription, Actifs\}$ tels que $i,k \neq j$ et $BGS_{\setminus\{i\}}$ est le Besoin Global de Solvabilité en excluant le segment i.

En ajustant par le Besoin Global de Solvabilité, nous obtenons les capitaux suivants :

	2nd In		Moyenne ajustée	
Gestion Actif/Passif	1 967 710 €	1 696 542 €	1 727 360 €	49%
Gestionnaire d'actifs	929 714 €	1 169 725 €	989 693 €	28%
Souscription	617 746 €	1 128 926 €	823 397 €	23%
Total			3 540 450 €	

TABLE 3.9 – Allocation de capital avec une méthode *2nd-In* en utilisant *Value-At-Risk* comme mesure de risque

La méthode de Shapley prend alors la moyenne des méthodes *First-In*, *2n-In* et *Last-In*. Ainsi, les capitaux alloués deviennent alors :

Shapley	1rst In	2nd In	Last In	Capital à allouer	
Gestion Actif/Passif	1 550 554 €	1 727 360 €	2 173 363 €	1 817 092 €	51%
Gestionnaire d'actifs	1 121 874 €	989 693 €	712 258 €	941 275 €	27%
Souscription	868 022 €	823 397 €	654 829 €	782 083 €	22%
Total				3 540 450 €	

TABLE 3.10 – Allocation de capital avec une méthode de Shapley en utilisant *Value-At-Risk* comme mesure de risque

3.2.3.4 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler évalue l'évolution du Besoin Global de Solvabilité lorsque le capital requis pour un segment augmente d'un montant infinitésimal. On étudie ici à l'impact d'une augmentation de 1% des capitaux de chaque segment sur le Besoin Global de Solvabilité. Le capital alloué pour le segment j est alors donné par :

$$K_j = C_j \times \frac{\Delta BSG_j}{1\%}$$

où ΔBGS_j représente l'évolution du BGS due à l'augmentation du segment j de 1%.

L'évaluation de l'évolution du BGS par rapport à l'augmentation de 1% nécessite d'établir un rapprochement entre les capitaux en *stand-alone* des différents segments et le BGS. En utilisant l'écriture de la Formule Standard, on souhaite évaluer les paramètres donnés par l'équation :

$$\begin{aligned} BGS(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)^2 &= aC_{ALM}^2 + bC_{Actifs}^2 + cC_{Souscription}^2 \\ &+ 2dC_{ALM}C_{Actifs} + 2eC_{ALM}C_{Souscription} + 2fC_{Actifs}C_{Souscription} + gC_{Actifs}C_{ALM}C_{Souscription} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où :
- X_1, le besoin de capital pour le risque de taux,
- X_2, le besoin de capital pour le risque action,
- X_3, le besoin de capital pour le risque de crédit,
- X_4, le besoin de capital pour le risque de rachat,
- X_5, le besoin de capital pour le risque de mortalité,
- X_6, le besoin de capital pour le risque lié aux affaires nouvelles,
- C_{ALM} est le capital en *stand-alone* destiné à la fonction ALM et dépend donc de X_1, X_2 et X_4,
- C_{Actifs} est le capital en *stand-alone* destiné au gestionnaire d'actifs et dépend donc de X_3,
- $C_{Souscription}$ est le capital en *stand-alone* destiné à la fonction Souscription et dépend donc de X_5 et X_6.

En évaluant le Besoin Global de Solvabilité en ne considérant que les risques de chaque segment ou en excluant les risques d'un segment, nous pouvons alors évaluer les paramètres (a,b,c,d,e,f,g). Par exemple, nous pouvons écrire :

$$BGS(0,0,0,0,X_5,X_6)^2 = cC_{Souscription}^2,$$

ou,

$$BGS(0,0,X_3,0,X_5,X_6)^2 = bC_{Actifs}^2 + cC_{Souscription}^2 + 2fC_{Actifs}C_{Souscription}$$

Ainsi, nous avons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} a &= 1,75238 \\ b &= 1 \\ c &= 1,14176 \\ d &= 0,22713 \\ e &= 0,38022 \\ f &= 0,26713 \\ g &= -0,000000197. \end{aligned}$$

De cette façon, on peut alors calculer les évolutions du BGS par rapport aux différents segments. Et en ajustant les capitaux obtenus au Besoin Global de Solvabilité, nous obtenons alors :

Euler	Stand alone	Evolution du BGS	Capital à allouer	
Gestion Actif/Passif	1 905 522 €	0,0059149	2 442 889 €	69%
Gestionnaire d'actifs	1 378 705 €	0,0022133	661 372 €	19%
Souscription	796 677 €	0,0018866	436 189 €	12%
Total	4 080 904 €		3 540 450 €	

TABLE 3.11 – Allocation de capital avec une méthode d'Euler en utilisant *Value-At-Risk* comme mesure de risque

3.2.4 Comparaison des quatre méthodes

Résumons les capitaux à allouer suivant les quatre méthodes présentées précédemment.

	Méthode First-in		Méthode Last-in		Méthode de Shapley		Méthode d'Euler	
Gestion Actif/Passif	1 550 554 €	44%	2 173 363 €	61%	1 817 092 €	51%	2 442 889 €	69%
Gestionnaire d'actifs	1 121 874 €	32%	712 258 €	20%	941 275 €	27%	661 372 €	19%
Souscription	868 022 €	25%	654 829 €	18%	782 083 €	22%	436 189 €	12%
Total	**3 540 450 €**		**3 540 450 €**		**3 540 450 €**		**3 540 450 €**	

Table 3.12 – Capitaux à allouer suivant les quatre méthodes d'allocation

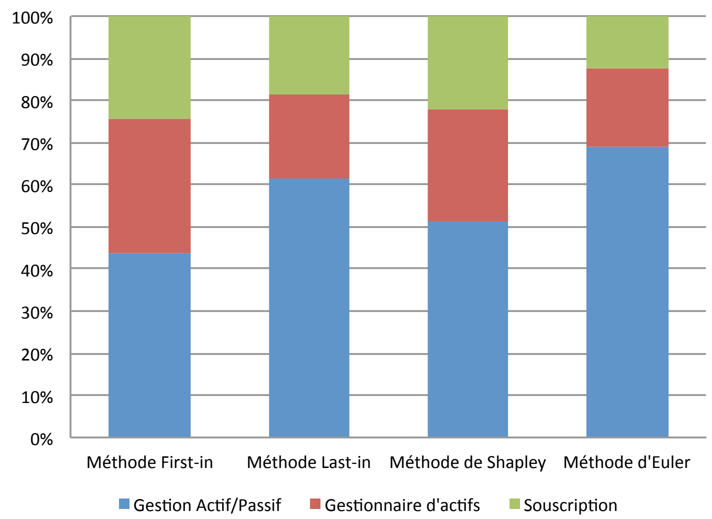

Figure 3.2 – Comparaison des différentes méthodes d'allocation de capital

Étant les risques les plus risqués pour une compagnie d'assurance de type Vie, comme c'est le cas pour l'assureur XYZ, les risques de la fonction Gestion Actif/Passif sont les plus importants et nécessite une immobilisation de capital plus importante que pour les deux autres segments définis par la compagnie. Cette propriété est vérifiée alors dans le cadre des quatre méthodes d'allocation de capital exposées ci-dessus.

Comme nous l'avons vu précédemment, la méthode de Shapley donne une moyenne des méthodes *First-In*, *Second-In* et *Last-In*. Elle est conceptuellement plus rigoureuse dans le sens où chaque segment ne peut pas subsister l'un sans l'autre. Les méthodes de *First-In*, *Second-In* et *Last-In*, quant à eux, supposent la suppression ou l'ajout d'un segment dans un portefeuille de risques pour évaluer sa contribution au risque global.

La méthode d'Euler donne un capital particulièrement faible pour la fonction de Souscription, propriétaire des risques de mortalité et lié aux affaires nouvelles. Ainsi, le capital alloué à ce segment de risques est pratiquement deux fois plus faible avec une méthode d'Euler qu'avec une autre méthode exposée ci-dessus. La modification du capital alloué à la fonction Souscription n'a peu d'impact sur le Besoin Global de Solvabilité. Le BGS évolue peu avec l'augmentation du capital attribué au segment Souscription : le tableau (3.11) donne pour ce segment, le taux d'évolution du BGS le plus faible. On perçoit alors une surestimation du capital alloué à la fonction Gestion Actif/Passif avec cette méthode par rapport aux autres méthodes. Dans l'écriture du BGS par rapport aux différents capitaux en *stand-alone*, les coefficients relatifs à ce segment sont plus élevés que les autres coefficients, d'où l'impact relativement élevé sur le BGS du segment ALM. Cependant, dans tous les cas de figure, l'allocation de capital permet d'attribuer un capital plus important aux segments les plus risqués. Ce qui est en cohérence avec les évaluations du SCR et du BGS.

Pour cet assureur, il serait alors pertinent d'utiliser une **méthode de Shapley** pour évaluer l'allocation de son Besoin Global de Solvabilité.

3.2.5 L'allocation de capital comme indicateur de risque

L'allocation des capitaux donnée par les différentes méthodes considérées donne le niveau de risque pris par chaque preneur de risque. Le capital attribué à chaque segment de risque constitue à lui seul un indicateur d'exposition au risque. L'équipe de Gestion Actif/Passif se voit alors attribué un capital supérieur par rapport aux autres segments. Cette équipe est alors soumis à des risques plus conséquents que les autres segments. La **Gestion Actif/Passif**, propriétaire des risques de taux, d'action et de rachat, représente au moins 44% des risques pris par la compagnie d'assurance. Ensuite, la deuxième équipe la plus exposée aux risques de la compagnie d'assurance est le **Gestionnaire d'actifs**, uniquement propriétaire du risque de *spread* : il supporte à lui seul entre 19% et 32% de l'ensemble des risques. Enfin, la fonction de **Souscription** possède un capital moins important que les autres segments du fait de la possession de risques moins impactant financièrement. L'assureur XYZ est alors moins exposé aux risques comportementaux et biométriques des assurés qu'à l'environnement financier. Par ailleurs, une évolution dans le temps de cette allocation de capital peut être évaluée, permettant ainsi à l'assureur d'apprécier la volatilité des risques pris par chaque segment. Pour ce faire, des projections des bilans sous Solvabilité 2 doivent être effectuées.

3.2.6 Définition de limites de capitaux

Ces allocations de capitaux peuvent permettre de servir de base pour la détermination de limites et de tolérances au niveau du capital que peut consommer chacun des segments. On se rapporte, dans ce cas-là, au capital disponible diminué du capital attribué aux risques opérationnels dont la fonction de Conformité est le propriétaire. Une limite de capital pour un segment peut être définie comme le capital requis calculé par une des méthodes présentées précédemment rapporté au capital disponible. De la même façon, on peut définir un montant de capital maximal attribué à chaque segment en calculant une allocation basée sur l'ensemble du capital disponible de l'entreprise. De cette façon, un segment ne consommera pas le capital attribué à un autre.

Ces seuils sont alors exprimés en pourcentage du capital disponible. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

	Méthode First-in		Méthode Last-in		Méthode de Shapley		Méthode d'Euler	
Borne	Inférieure	Supérieure	Inférieure	Supérieure	Inférieure	Supérieure	Inférieure	Supérieure
Gestion Actif/Passif	40,89%	43,80%	57,32%	61,39%	47,92%	51,32%	64,43%	69,00%
Gestionnaire d'actifs	29,59%	31,69%	18,78%	20,12%	24,83%	26,59%	17,44%	18,68%
Souscription	22,89%	24,52%	17,27%	18,50%	20,63%	22,09%	11,50%	12,32%

Table 3.13 – Seuils de limites de capitaux suivant les différentes méthodes d'allocation

Ces seuils ne permettent pas de définir des limites de capitaux en valeur, ils permettent seulement une bonne répartition des capitaux, pour qu'un segment ne consomme pas le capital d'un autre. Il ne s'agit pas ici de limites de risque.

3.3 Projection en t=1

Pour vérifier la pertinence de l'allocation mise en place, nous cherchons à regarder le comportement de ces allocations en $t = 1$. Pour obtenir un bilan Solvabilité 2 en $t = 1$, il est nécessaire d'effectuer des simulations en

univers historique pour capter le comportement réel des indices financiers. Cela nécessite alors l'intégration de primes de risque dans les modèles de taux et d'action. Il est tout d'abord nécessaire de définir les hypothèses prises pour cette projection.

3.3.1 Hypothèses de projection

Taux Par ailleurs, on y introduit une prime de risque fixée $\lambda_r = 0,5\%$ dans le modèle de taux, *via* le processus $(x_t)_t$. La dynamique du taux court est donnée sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ par :

$$r_t = x_t + y_t + \varphi_t,$$

où,

$$\begin{aligned} x_t &= a\left(\frac{\lambda_r \times \sigma_x}{a} - x_t\right)dt + \sigma_x dW_t^{\mathbb{P}} \\ y_t &= -by_t dt + \sigma_y dW_t \end{aligned}$$

et $(\varphi_t)_t$ vérifie toujours la formule fermée (2.1).

Action Comme pour les taux, la projection en monde réel nécessite l'introduction d'une prime de risque, notée λ_S, fixé à 7%. Comme nous l'avons présenté dans la section (2.6.4), la dynamique du cours de l'action par un modèle de Black & Scholes avec dividendes sous la probabilité historique $\mathbb{P}$ est donnée par :

$$dS_t = S_t\left((\mu_S - TxDR)dt + \sigma_S dW_S(t)\right).$$

où μ_S est la tendance du processus, σ_S la volatilité du processus. Cette tendance peut être écrite en fonction de la prime de risque introduite pour la projection en monde réel. Ainsi, elle est donnée par : $\mu_S = \lambda_S\sigma_S + ZC(0,t)$.

La dynamique s'écrit alors :

$$dS_t = S_t(\lambda_S\sigma_S + ZC(0,t) - TxDR)dt + S_t\sigma_S dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Nouvelles souscriptions Nous supposons par ailleurs qu'entre le 31/12/2013 et le 31/12/2014, le nombre de nouveaux assurés a augmenté de 3% par rapport à l'année passée.

3.3.2 Calcul des fonds propres en $t = 1$

Le calcul des SCR et des BGS élémentaires se font de la même façon qu'en $t = 0$, c'est à dire par la différence entre deux niveaux de fonds propres dans le scénario central et le scénario choqué. Ainsi, le niveau de fonds propres qu'on se situe dans un scénario central ou un scénario choqué est donné par :

$$FP(1) = A(1) - BE(t).$$

où $A(1)$ correspond à la valeur de marché du portefeuille d'actifs de la compagnie et $BE(1)$ est le *Best Estimate* des prestations.

Cependant pour l'évaluation de ces quantités, il faut prendre en compte toute l'information disponible jusqu'en $t = 1$. Il est alors nécessaire d'effectuer des projections de bilans en **univers historique** à partir du bilan central en $t = 0$, permettant alors de capter la réalité des marchés financiers. Ensuite, la valorisation de ces bilans devra donc se faire en **univers risque neutre** à partir de ces scénarios primaires. Notamment, le *Best Estimate* en $t = 1$ s'écrit alors :

$$BE(1) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{u\leq 2}\frac{\delta_u}{\delta_1}\times VP(u)|\mathcal{F}_1^{MR}\right)$$

où,

- $VP(u)$ représente la variable aléatoires des prestations globales à la date u,
- δ_u le facteur d'actualisation à l'instant u,
- et $\mathcal{F}_1^{MR}$ tout l'information disponible en $t = 1$.

3.3.3 Evaluation des bilans en $t = 1$

Les projections en univers historique précédant celles en probabilité risque neutre permettent la valorisation de bilans sous Solvabilité 2 en $t = 1$. Nous présentons ici le bilan en scénario central se présente :

Actifs		Passifs	
Obligations	30 995 530 €	Capital	4 328 636 €
Actions	408 142 €		
		Best Estimate	27 075 036 €
Total	**31 403 672 €**	**Total**	**31 403 672 €**

TABLE 3.14 – Bilan en $t = 1$ sous Solvabilité 2 en scénario central

Les bilans en vision économique projetés en $t = 1$ permettent d'obtenir les résultats Solvabilité 2. Nous présentons alors les quelques résultats Solvabilité 2 suivant les différents états du monde en $t = 1$:

Résultats S2 - Statistiques descriptives	
Moyenne	505 554 €
Volatilité	96 709 €
Quantile à 5%	364 883 €
Quantile à 10%	395 483 €
Quantile à 90%	597 344 €
Quantile à 95%	669 275 €

TABLE 3.15 – Statistiques descriptives sur le résultat sous Solvabilité 2 en $t = 1$.

3.3.4 Evaluation du capital économique et du Besoin Global de Solvabilité

Le SCR ou le BSG en $t = 1$ au titre d'un risque est évalué par la différence entre deux niveaux de fonds propres dans le scénario central et le scénario choqué correspondant. Au lieu de calculer les niveaux de fonds propres pour chacun des scénarios choqués, nous avons recours à des simplifications. Nous générons alors des scénarios en univers risque neutre uniquement pour l'évaluation des postes du bilan dans le scénario central.

Taux Ainsi, le capital (SCR ou BGS) au titre du risque de taux sera donné par :

$$FP_{central}(1) - FP_{Taux,choqué}(1),$$

avec $FP_{Taux,choqué}(1) = \sum_i VM_{o,i}(1) \times (1 - S_i \times ChocTaux) - BE_{Taux,choqué}(1)$ et S_i la sensibilité de l'obligation i.

Action Le capital (SCR ou BGS) au titre du risque action, quant à lui, sera donné par :

$$FP_{central}(1) - FP_{Action,choqué}(1),$$

avec $FP_{Action,choqué}(1) = \sum_i VM_{a,i}(1) \times (1 - ChocAction) - BE_{Action,choqué}(1)$

Rachat, Mortalité et Affaires nouvelles Les capitaux (SCR ou BGS) aux titres des risques de rachat, de mortalité et lié aux affaires nouvelles, sont, tous les trois, calculés de la même façon. Pour chacun d'entre eux, le capital sera donné par :

$$BE_{j,choqué}(1) - BE_{central}(1),$$

pour tout $j \in \{$Rachat, Mortalité, Affaires nouvelles$\}$

Spread Le capital (SCR ou BGS) au titre du risque de *spread* ne nécessite pas de projections en univers risque neutre. Il est calculé à partir des Spécifications Techniques de la Phase Préparatoire données par l'EIOPA.

Calcul des $\mathbf{BE_{choqué}}$ Les $BE_{choqué}(1)$ aux titres de chacun des risques sont calculés en reprenant les calculs des capitaux en $t = 0$. Ainsi, on évalue l'évolution du *Best Estimate* en $t = 0$ après l'application des chocs utilisés pour calculer ces capitaux. Formellement, pour un risque $j \in \{$Taux, Action, Rachat, Mortalité, Affaires nouvelles$\}$, nous avons :

$$BE_{j,choqué}(1) = \left(\frac{BE_{j,choqué}(0)}{BE_{central}(0)}\right) \times BE_{central}(1).$$

Les ratios $\frac{BE_{j,choqué}(0)}{BE_{central}(0)}$ sont alors donnés par :

Risque	SCR	BGS
Taux	6,36%	4,99%
Action	1,85%	1,78%
Rachat	2,29%	2,07%
Mortalité	2,26%	2,04%
Affaires nouvelles		2,09%

TABLE 3.16 – Coefficients de passage du *Best Estimate* central au *Best Estimate* choqué

Remarque III.11. Dans le cadre de calculs de BGS élémentaires, les *Best Estimate* choqués pour les risques de taux et action ne doivent pas prendre en compte les primes futures.

3.3.4.1 Evaluation du SCR en $t = 1$

Par ailleurs, nous pouvons calculer les capitaux économiques en $t = 1$. Nous procédons de la même façon qu'en $t = 0$. Dans le scénario central, nous avons donc un SCR égal à 3 740 107 €. Le ratio de solvabilité s'établit à 115%. Ce ratio a peu évolué entre $t = 0$ et $t = 1$ du moins dans le scénario central. De plus, le capital économique (SCR) a une volatilité de 48 668 € : il est donc peu volatil.

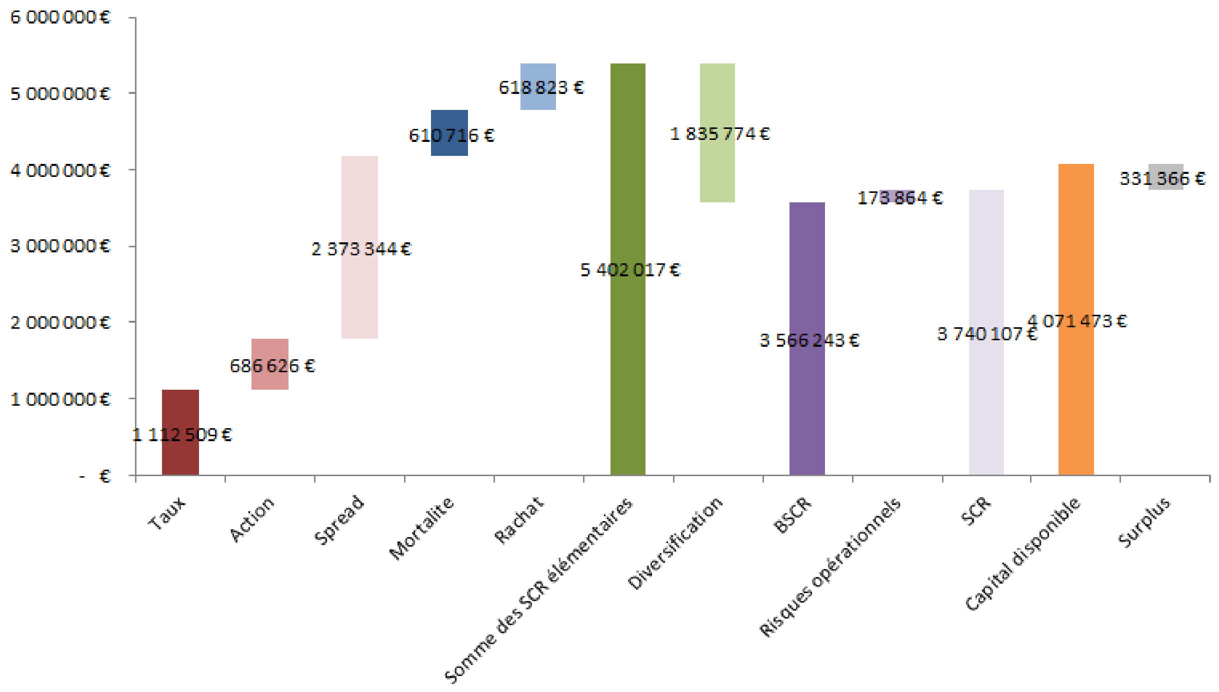

FIGURE 3.3 – Répartition du SCR pour le scénario central en $t = 1$

3.3.4.2 Evaluation du BGS en $t = 1$

Nous pouvons également calculé le Besoin Global de Solvabilité pour chaque scénario en $t = 1$. Dans le scénario central, nous avons les BGS élémentaires suivants :

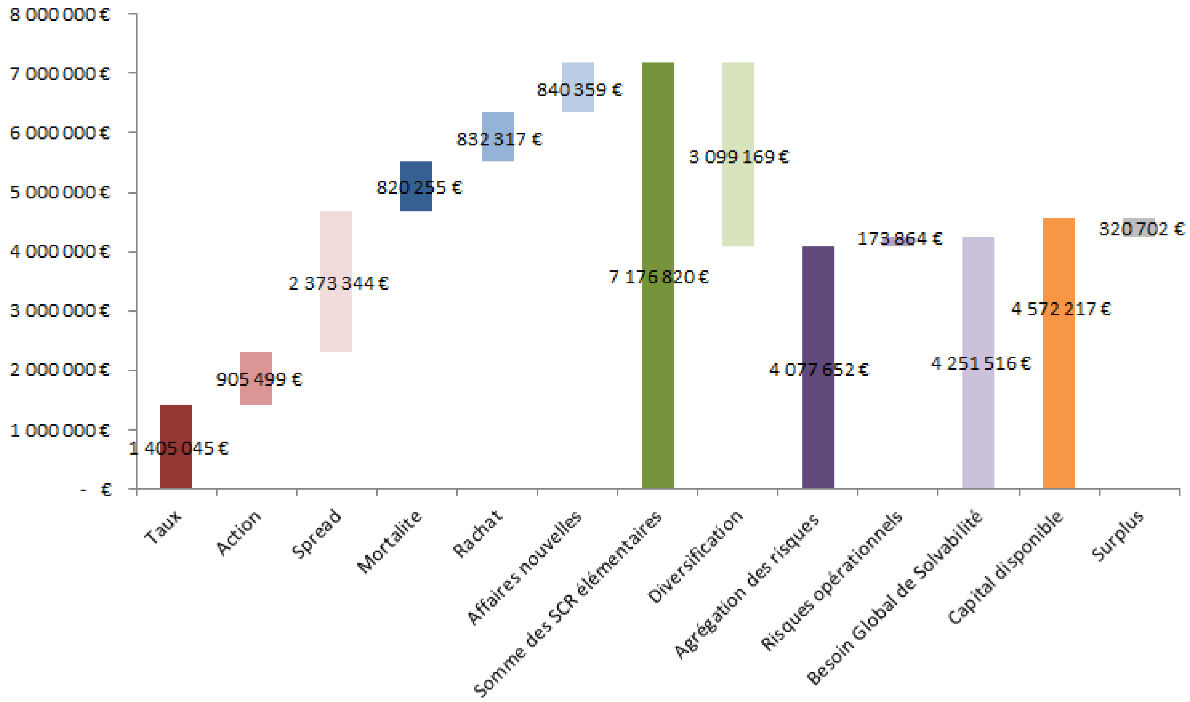

FIGURE 3.4 – Répartition du Besoin Global de Solvailité pour le scénario central en $t = 1$

Le Besoin Global de Solvabilité est alors égal à 4 251 516 €. Ainsi, le ratio de solvabilité a augmenté par rapport à celui calculé en $t = 0$ et est égal à 108%. Il s'établissait à 107% en $t = 0$. Par ailleurs, le quantile du Besoin Global de Solvabilité à 90% est égal à 4 292 692 €. Le Besoin de Solvabilité est peu volatil en $t = 1$: les simulations donnent une volatilité de 46 962 €. Le SCR et le BGS ont à peu près la même volatilité.

3.3.5 Evolution des allocations de capital

A partir du Besoin Global de Solvabilité, nous pouvons allouer les capitaux suivant les mêmes méthodes utilisées précédemment. Nous donnons les allocations de capital pour le scénario central :

	Méthode First-in		Méthode Last-in		Méthode de Shapley		Méthode d'Euler	
Gestion Actif/Passif	1 472 623 €	36%	1 657 882 €	41%	1 560 544 €	38%	1 582 475 €	39%
Souscription	823 824 €	20%	561 988 €	14%	689 928 €	17%	330 607 €	8%
Gestionnaire d'actifs	1 781 205 €	44%	1 857 782 €	46%	1 827 180 €	45%	2 164 570 €	53%
Total	**4 077 652 €**		**4 077 652 €**		**4 077 652 €**		**4 077 652 €**	

TABLE 3.17 – Allocations du Besoin Global de Solvabilité du scénario central en $t = 1$

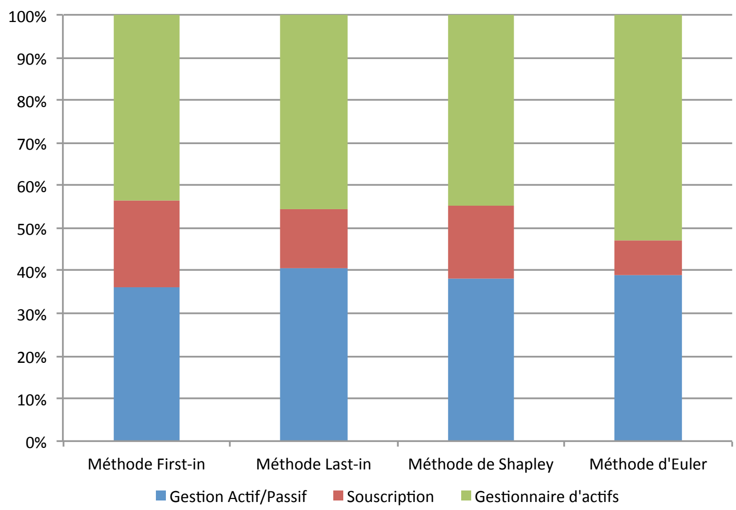

FIGURE 3.5 – Comparaison des allocations du Besoin Global de Solvabilité du scénario central en $t = 1$

Remarque III.12. De la même façon qu'en $t = 0$, nous avons diminué le Besoin Global de Solvabilité du capital destiné aux risques opérationnels.

Nous remarquons tout d'abord qu'il y a une évolution certaine de la distribution du capital entre les différents segments, en utilisant les quatre méthodes *First-In*, *Last-In*, de Shapley et d'Euler. Alors que la fonction Gestion Actif/Passif se voyait attribuer un capital important en $t = 0$, c'est le **Gestionnaire d'Actifs** qui est le plus exposé aux risques en $t = 1$. En effet, entre $t = 0$ et $t = 1$, les primes des nouvelles souscriptions, investies intégralement en obligations, ont augmenté le portefeuille obligataire de l'assureur l'exposant plus encore au risque de *spread*.

3.4 Focus sur la fonction Gestion Actifs/Passifs : modifications de stratégie d'investissement d'actifs

En $t = 0$, la fonction de Gestion Actif/Passif était le propriétaire des risques les plus dangereux pour la compagnie d'assurance XYZ. En $t = 1$, cette équipe est également fortement exposé à ces risques. Nous nous focalisons, dans cette partie, sur ce preneur de risque. Nous étudions l'évolution du capital économique (SCR) et du Besoin Global de Solvabilité ainsi que de l'allocation de capital à la suite d'un changement de stratégie d'investissement d'actifs. Alors que jusqu'au 31/12/2013 ($t = 0$), l'assureur avait uniquement investi en obligations les primes perçues, il décide de changer de stratégie en investissant chaque année les primes perçues :

- à 90% dans des obligations au pair et de maturité 10 ans de valeur d'achat 1 000 €,
- et, à 10% dans des actions de valeur d'achat 100 €.

L'assureur continue à investir chaque année en obligations lorsqu'il obtient un solde de trésorerie positif. Cette modification dans l'allocation du portefeuille d'actifs expose un peu plus l'assureur aux risques de taux et d'action et impacte de façon non négligeable le résultat de l'entreprise, le capital économique mais également le Besoin Global de Solvabilité en $t = 1$. Par ailleurs, les allocations de capital se voient également modifiées.

Nous notons alors les stratégies suivantes par :

A : Investissements uniquement en obligations
B : Investissements des primes perçues : 10% en actions et 90% en obligations.

3.4.1 Impacts sur le résultat

Nous avons vu que le résultat sous Solvabilité 2 était égal en espérance à 505 554 €. En modifiant la stratégie d'investissement, l'espérance du résultat en $t = 1$ se voit augmenter et atteindre alors 860 491 €. Cette espérance augmente alors de 70% par rapport à la situation A. Par ailleurs, nous pouvons présenter quelques statistiques descriptives sur ce résultat Solvabilité 2.

Résultats S2 - Statistiques descriptives	
Moyenne	860 491 €
Volatilité	124 223 €
Quantile à 5%	667 031 €
Quantile à 10%	699 221 €
Quantile à 90%	1 003 557 €
Quantile à 95%	1 061 820 €

Table 3.18 – Résultat sous Solvabilité 2 avec la stratégie B

Le résultat présente une volatilité plus importante (124 223€), notamment due à la volatilité des actions. Le quantile à 5% est nettement inférieure à celui calculé dans la situation initiale, alors que le quantile du résultat S2 à 5% est nettement supérieure à celui calculé précédemment, double presque.

3.4.2 Impacts sur le capital économique

Du fait de ce changement de stratégie, le SCR global est également modifié. En effet, alors qu'il s'établissait à 3 740 107€ en scénario central dans la situation A, le changement de stratégie donne un SCR de 4 322 807€ (soit une augmentation de 15%), donnant un ratio de solvabilité égal à 102%. Le graphe ci-dessous présente la décomposition du SCR dans le scénario central dans la situation B.

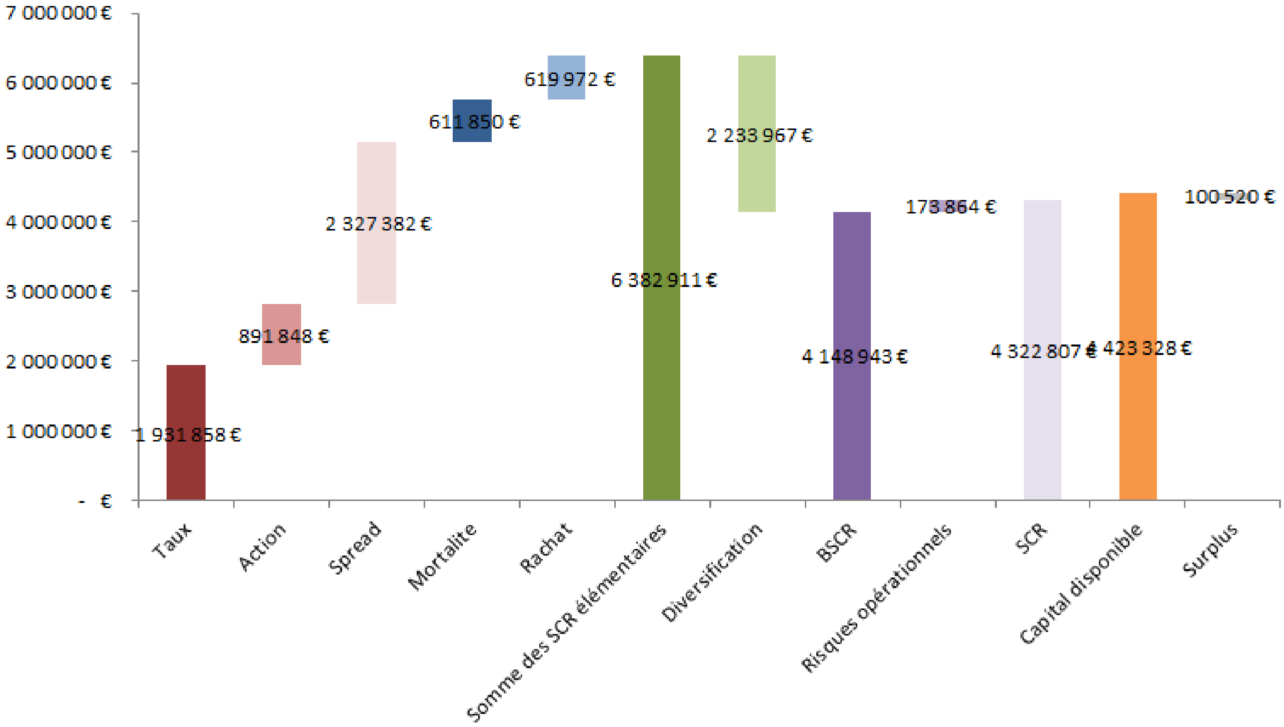

FIGURE 3.6 – Décomposition du SCR dans le scénario central après modification des stratégies d'investissement d'actifs

Nous obtenons alors un ratio de solvabilité moins élévé que dans la situation normale. Ce changement de stratégie a fait diminuer le surplus obtenu par la différence entre le capital disponible et le SCR global, de près de 70%. Nous pouvons supposer que plus la part des actions dans le portefeuille d'actifs est importante plus il est nécessaire d'immobiliser du capital. Cela parait intuitif, car les actions sont des actifs plus risqués que les obligations. L'augmentation de la part d'actions a augmenté le risque action mais également le risque de taux. Nous pouvons également remarquer la diminution du capital à détenir au titre du risque de *spread*. Par ailleurs, l'assureur bénéficie moins des effets de diversificiations notamment dû aux corrélations données par la Formule Standard.

Par ailleurs, nous calculons la probabilité que l'assureur soit en situation d'insolvabilité. De nos scénarios, nous montrons qu'il y a 20% de chance que le ratio de solvabilité soit inférieur à 100% en utilisant la stratégie d'investissement B. Bien que la stratégie B a permis d'obtenir un résultat espéré plus élevé qu'avec la stratégie B, l'assureur se voit exposer à un risque de sanction de la part des autorités de contrôle.

3.4.3 Impacts sur le Besoin Global de Solvabilité

Des conclusions similaires à celles obtenues pour le SCR peuvent être faites en analysant le Besoin Global de Solvabilité après changement de stratégie d'investissement. Cette modification joue cependant nettement plus sur le BGS que sur le SCR. La diminution du surplus est alors près de 90% à cause de ce changement de stratégie. Par ailleurs, le capital a immobilisé est plus important dans ce cas-là.

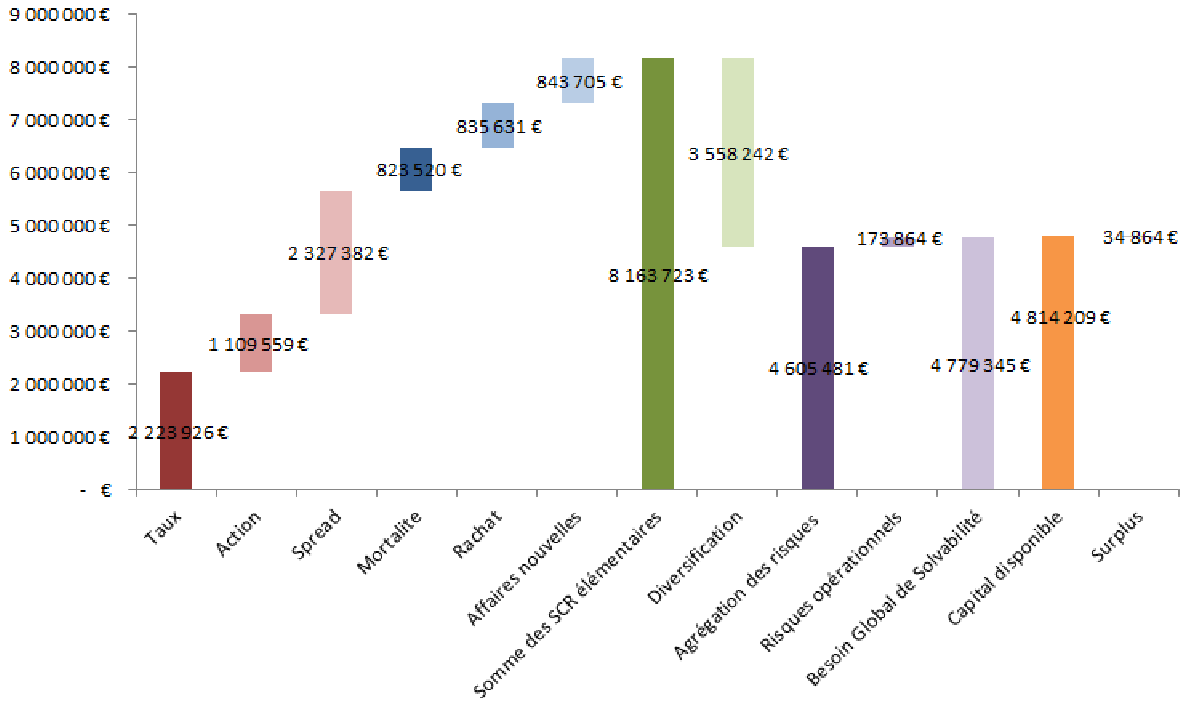

FIGURE 3.7 – Décomposition du BGS dans le scénario central après modification des stratégies d'investissement d'actifs.

Dans le scénario central, la stratégie B donne un ratio de solvabilité très proche de 100,73% (contre 107% dans la situation normale). Dans le cas du calcul du Besoin Global de Solvabilité, il y a 34% de chance pour que le ratio de solvabilité soit inférieur à 100%.

3.4.4 Impacts sur l'allocation de capital

Alors que le Besoin Global de Solvabilité a augmenté, la distribution du capital a été modifiée du fait d'une exposition plus importante face aux risques de marché (taux et action). Le fonction Actif/Passif se voit donc attribuer un capital plus important. C'est maintenant le segment de risque qui consomme le plus en capital et qui est le plus exposé aux risques selon les méthodes *Last-In*, de Shapley et d'Euler. Le Gestion d'actifs reste tout de même un segment très consommateur de capital. La méthode *First-In* lui attribue notamment toujours la part la plus importante en capital.

	Méthode First-in		Méthode Last-in		Méthode de Shapley		Méthode d'Euler	
Gestion Actif/Passif	1 680 314 €	36%	2 449 050 €	53%	2 011 001 €	44%	2 417 474 €	52%
Souscription	940 012 €	20%	594 260 €	13%	818 568 €	18%	314 282 €	7%
Gestionnaire d'actifs	1 985 154 €	43%	1 562 171 €	34%	1 775 912 €	39%	1 873 726 €	41%
Total	**4 605 481 €**		**4 605 481 €**		**4 605 481 €**		**4 605 481 €**	

TABLE 3.19 – Allocations de capital après modification de la stratégie d'investissement d'actifs

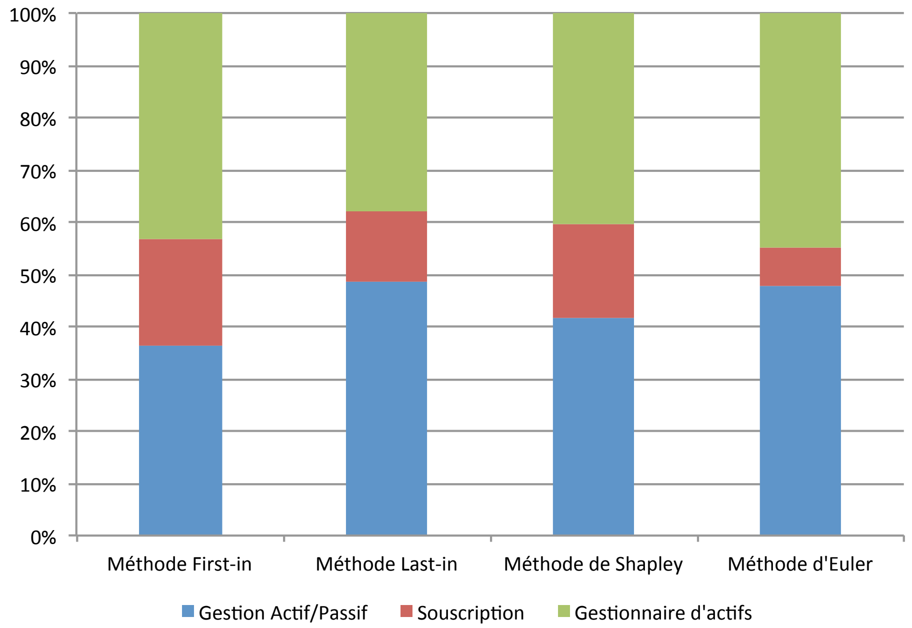

FIGURE 3.8 – Comparaison des allocations de capital après modification de la stratégie d'investissement d'actifs

3.5 Analyse de l'arbitrage entre rentabilité et risque

Reprenons les différents résultats obtenus dans le cadre de notre étude. Le tableau ci-dessous représente les différents capitaux calculés (SCR et BGS) élémentaires et globaux en $t = 0$ et $t = 1$ dans le cas des deux stratégies A et B.

	t=0		t=1			
	SCR	BGS	SCR (A)	SCR (B)	BGS (A)	BGS (B)
Taux	1 677 742 €	1 948 238 €	1 112 509 €	1 931 858 €	1 405 045 €	2 223 926 €
Action	487 788 €	696 974 €	686 626 €	891 848 €	905 499 €	1 109 559 €
Spread	1 378 705 €	1 378 705 €	2 373 344 €	2 327 382 €	2 373 344 €	2 327 382 €
Mortalite	596 183 €	796 422 €	610 716 €	611 850 €	820 255 €	823 520 €
Rachat	605 349 €	807 307 €	618 823 €	619 972 €	832 317 €	835 631 €
Affaires nouvelles		815 445 €			840 359 €	843 705 €
Somme des capitaux élémentaires	4 745 767 €	6 443 091 €	5 402 017 €	6 382 911 €	7 176 820 €	8 163 723 €
Risques opérationnels	182 560 €	182 560 €	173 864 €	173 864 €	173 864 €	173 864 €
Capital agrégé	**3 116 643 €**	**3 723 010 €**	**3 740 107 €**	**4 322 807 €**	**4 251 516 €**	**4 779 345 €**
Capital disponible	**3 562 836 €**	**3 974 193 €**	**4 071 473 €**	**4 423 328 €**	**4 572 217 €**	**4 814 209 €**
Surplus	**446 194 €**	**251 183 €**	**331 366 €**	**100 520 €**	**320 702 €**	**34 864 €**
Ratio de Solvabilité	**114%**	**107%**	**109%**	**102%**	**108%**	**101%**

TABLE 3.20 – Résumé des résultats obtenus dans cette étude

En termes de capitaux, les évaluations des SCR donnent de manière générale des ratios de solvabilité plus importants que dans le cadre des calculs des Besoins Globaux de Solvabilité. Cela est notamment dû au caractère prospectif et à la prise en compte du risque lié aux affaires nouvelles de l'évaluation du BGS. Par ailleurs, en allouant les Besoins Globaux de Solvabilité aux différents preneurs de risque, les risques financiers (taux, action et *spread*) demandent un montant de capital plus important que les risques de souscription. Comme nous l'avons remarqué précédemment, l'arbitrage dans la distribution du capital entre la Gestion Actif/Passif et le

Gestionnaire d'actifs dépend de la composition du portefeuille d'actifs et donc de la stratégie d'investissement et de désinvestissement de l'assureur.

Alors qu'une composition du portefeuille d'actifs principalement en obligations donne des ratios de solvabilité aux alentours de 110% avec des calculs de SCR, l'augmentation de la part des actions dans le portefeuille d'actifs augmente le capital à détenir et le capital disponible mais diminue le ratio de solvabilité. Par ailleurs, le taux d'insolvabilité est plus élevé et se situe aux alentours de 20% avec des calculs de SCR et de 30% en intégrant l'aspect prospectif dans ces calculs (BGS).

Bien que la stratégie B génére plus de risques et donc nécessite la détention d'un capital de solvabilité plus important, elle permet cependant obtenir un rendement plus élevé.

	t=1			
	SCR (A)	SCR (B)	BGS (A)	BGS (B)
Résultat espéré	505 554 €	860 491 €	598 024 €	840 015 €
Capital	3 740 107 €	4 322 807 €	4 251 516 €	4 779 345 €
RORAC	14%	20%	14%	18%

TABLE 3.21 – Rentabilité suivant la stratégie d'investissement en $t = 1$

Le calcul de RORAC dans chacune des situations (A ou B) permet alors d'en conclure la prise de risque génère un rendement plus important.

3.6 Axes d'améliorations

La modélisation proposée dans le cadre de ce mémoire n'est pas sans défaut. Elle a pour ambition d'être simple et ne procure qu'une illustration de la mise en oeuvre d'un processus ORSA et d'un exercice d'allocation de capital pour une compagnie d'assurance Vie. De nombreuses améliorations peuvent être mises en oeuvre.

Risques pris en compte dans l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité Ici, nous ajoutons uniquement un risque par rapport à l'évaluation des exigences réglementaires de solvabilité du Pilier 1 de la Directive : le risque lié aux affaires nouvelles. D'autres risques peuvent alors être intégrés dans la modélisation. Nous pouvons penser aux risques opérationnelles par exemple qui peuvent être particulièrement conséquents pour l'entreprise d'assurance. Par ailleurs, les stratégies opérationnelles comme le lancement d'un nouveau contrat ou la mise en place d'un traité de réassurance peuvent également faire partie de la modélisation. Ces différents points nécessitent des hypothèses fortes sur la modélisation des risques pris par l'entreprise. Dans la pratique, les assureurs doivent arbitrer entre simplicité et réalisme.

Chocs sur les *drivers* de risque Les chocs pris dans le cadre du calcul de Besoin Global de Solvabilité ont été choisis arbitrairement. En pratique, ces chocs doivent refléter les risques réels auxquels l'assureur est exposé. Le choix de ces chocs se fait en général, par dires d'expert, en repliquant une situation extrême déjà rencontrée précédemment ou non.

Dépendance entre les risque Dans le cadre de cet exemple et pour le calcul du Besoin Global de Solvabilité, nous considérons une corrélation linéaire entre les risques à l'aide de la matrice de corrélation de type Formule Standard. Or, les risques financiers sont en général pas corrélés de façon linéaire entre eux. L'utilisation de mesures de dépendance et d'une copule peut être alors envisagée. Une copule est l'instrument le plus adéquat pour modéliser les dépendances réelles entre plusieurs variables aléatoires.

Projection pluriannuelle Une projection pluriannuelle des bilans et des comptes de résultat peut être envisagée pour vérifier la pertinence de l'allocation de capital. Le processus ORSA se veut prospectif, des évaluations pluriannuelles des bilans Solvabilité 2 peuvent s'avérer utiles pour le pilotage des risques. La Directive Solvabilité 2 préconise un horizon de temps de l'ordre de 3 à 5 ans selon le type de risques dont est exposée la compagnie d'assurance. Une projection à un horizon de temps trop long biaisera les calculs et les modélisations seront trop éloignées des réalités économiques.

Calibrage des modèles Tous les modèles proposées ici n'ont pas été calibrées avec les données du marché. L'univers risque neutre nécessite en réalité une adéquation des modèles avec les marchés financiers. En annexes, nous proposons des méthodes de calibrage des différents modèles. En univers historique, les modèles doivent répliquer le comportement des historiques de données. Dans ce cas là, des études statistiques doivent être mises en place (étude du *sknewness*, du *kurtosis*, de l'hétéroscédaticité, etc.) pour valider les modèles.

Conclusion

L'implémentation du processus ORSA, au coeur du Pilier 2 de la Directive Solvabilité, présente une grande nouveauté pour les assureurs leur permettant d'intégrer le risque dans la gestion de leurs activités. Le calcul du Besoin Global de Solvabilité, inclus dans les évaluations à fournir aux autorités de contrôle, donne une vision propective et spécifique à l'entreprise, contrairement aux exigences réglementaires (SCR et MCR) du Pilier 1 de la Directive. Alors que la Réforme ne donne pas d'indication particulière, l'évaluation de ce capital permet aux assureurs d'appréhender eux-mêmes leurs risques. Ceux-ci devront alors identifier l'ensemble de leurs risques, qu'ils soient inclus ou non dans le calcul du SCR ou qu'ils soient quantifiables ou non. A partir de là, ils sont amenés à évaluer les pertes financières que peuvent causer leurs expositions à ces différents risques. Les corrélations entre ceux-ci devront par ailleurs être estimées. Ces évaluations doivent être en accord avec l'appétence au risque de l'assureur, c'est-à-dire le niveau d'exposition au risque souhaitée. Il doit alors ainsi définir une mesure de risque, un niveau de prise de risque et un horizon du risque. Le Besoin Global de Solvabilité, ainsi calculé en prenant en compte toutes ces notions, reflète alors le niveau global de risque que l'assureur souhaite prendre. De manière opérationnelle, le pilotage de cette quantité agrégée peut être ardu. La déclinaison de l'appétence au risque en tolérances au risque, couplée à la définition d'indicateurs de rentabilité, doit être effectué. Cela se traduit par la définition de catégories permettant ainsi de gérer les risques par agrégat. La conséquence de cette déclinaison est alors l'allocation du Besoin Global de Solvabilité entre différents segments de risque.

Différentes méthodes d'allocation de capital ont été discutées dans la littérature. Elles prennent comme fondements des notions de domaines différents. Alors que Myers and Read (2001) utilisent des techniques de valorisation de dérivés financiers pour évaluer l'impact d'un segment de risque sur l'insolvabilité d'une compagnie d'assurance, Tasche (2008) utilise le célèbre théorème d'Euler pour le calcul de la contribution au risque global de chacun des segments de risque. Chacune de ces méthodes présentent des avantages comme des inconvénients. Alors que les méthodes proportionnelles sont simples d'utilisation, elles modélisent mal les dépendances entre les différents agrégats de risque. Les méthodes de contribution au risque, discrètes comme continues, ne semblent pas être particulièrement intuitives aux premiers abords. Par ailleurs, Ruhm and Mango (2003) et Kreps (2005) ont mis en place un algorithme permettant le calcul d'une allocation de capital reprenant alors les techniques présentées précédemment. Bien que simple d'utilisation, cet algorithme nécessite cependant l'obtention de distributions de risques dans différents scénarios économiques. Cette procédure n'est pas à la portée de tous les assureurs.

Avant tout exercice d'allocation de capital, il est nécessaire de définir la segmentation suivant laquelle l'assureur souhaite allouer ses risques. Contrairement à l'agrégation des risques pour le calcul d'un capital à détenir (SCR ou BGS), il doit prendre en compte les stratégies opérationnelles qu'il souhaite mettre en place, et la manière dont il souhaite génèrer ses risques. Alors qu'une agrégation par zone géographique ou par filiale paraît évidente pour un groupe, dans le cas d'une mutuelle commercialisant qu'un seul type de contrat par exemple, la problématique du type de segmentation à adopter peut être soulevée. Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons alors une méthode d'allocation du capital par preneur de risque. Alors que les exigences en termes de système de gouvernance définies par la Directive Solvabilité 2 conduisent à une organisation plus formalisée et structurée des équipes opérationnelles et administratives des compagnies d'assurance, ce type de segmentation peut être pertinent. Par ailleurs, dans une compagnie d'assurance chaque équipe opérationnelle est en général en charge d'un des maillons de la chaîne de production assurantielle, se trouvant alors exposée à un ou plusieurs risque(s) particulier(s).

De nombreuses limites à notre méthode peuvent cependant être soulevées. Il n'est pas rare de voir une seule équipe opérationnelle occuper plusieurs fonctions dans l'entreprise. Alors que l'ambition de la Directive, à travers ses exigences en termes de gouvernance, est d'éviter tout conflit d'intérêt entre les différents comités, fonctions ou équipes opérationnelles, l'attribution d'une grande partie du capital à l'unique équipe en charge peut être dangereux. La déficience de celle-ci peut alors avoir des conséquences lourdes à la fois sur la gestion mais également sur la solvabilité de l'assureur. Par ailleurs, l'exercice d'allocation de capital nécessite d'être établie par une équipe indépendante ou par une source externe, pour éviter tout conflit d'intérêt sur la gestion du capital. Enfin, de manière opérationnelle, l'exercice d'allocation de capital conduit à l'analyse de chaque segment de risque en termes de rentabilité. Dans le cas d'une allocation par preneur de risque, la définition d'indicateurs peut être difficile, notamment du fait de la forte dépendance entre ces segments. La mesure de la rentabilité d'un segment de risque nécessite la décomposition des postes du bilan suivant la segmentation considérée pour l'exercice d'allocation de capital. Cependant, il est difficile de considérer une activité assurantielle sans équipe chargée de la souscription, par exemple.

Nous proposons cependant d'illustrer nos propos avec la modélisation d'une compagnie d'assurance pour laquelle nous calculons un Besoin Global de Solvabilité (BGS) en $t = 0$. Dans le cas de notre exemple, nous avons identifié les trois preneurs de risque principaux :

- la fonction de Gestion Actif/Passif, propriétaire des risques de taux, action et de rachat ;
- l'équipe chargée de la Souscription, propriétaire du risque de mortalité et du risque lié aux affaires nouvelles ;
- et le Gestionnaire d'actifs chargé du risque de crédit des obligations du portefeuille d'actifs de l'entreprise.

L'exercice d'allocation par les quatres méthodes retenues (*First-In*, *Last-In*, de Shapley et d'Euler) donne une distribution du capital en accord avec les risques pris par chacun des preneurs de risque. Ces méthodes attribuent un capital important à la fonction de Gestion Actif/Passif. En effet, les risques financiers sont les risques les plus dangereux en termes de pertes financières. Nous avons souhaité ensuite étudier les modifications en termes d'allocation de capital en $t = 1$. Les quatre méthodes d'allocation donne une allocation de capital différente de celle obtenue en $t = 0$. Elles attribuent un capital particulièrement important au détenteur du risque de *spread*, c'est-à-dire le Gestionnaire d'actifs. Par ailleurs, pour capter les impacts en termes de capitaux à détenir pour mener à bien ses activités (SCR et BGS) dus à un changement de stratégie de la part d'un des preneurs de risque, nous nous concentrons sur la fonction de Gestion Actif/Passif. Nous modifions alors ses stratégies d'investissement d'actif. Alors qu'elle investissait l'intégralité des primes perçues en obligations, nous supposons alors qu'une partie de ces primes est investie en actions. Cette modification conduit à augmentation et du SCR et du BGS. Par ailleurs, la fonction de Gestion Actif/Passif redevient le plus gros consommateur de capital. L'assureur est en effet plus exposé aux risques de taux et action, car il détient plus d'actifs risqués qu'auparavant. Dans cette situation là, le risque d'insolvabilité n'est pas négligeable. En gardant cette stratégie, l'assureur a une chance sur cinq de se faire reprendre par les autorités de contrôle pour non respect de la couverture du SCR. Cependant, l'étude du *Return On Risk Adjusted Capital* (RORAC) montre que la rentabilité est plus élevée dans le cas d'investissement des primes en actions compte tenu des risques pris. Un arbitrage entre « risque » et « rentabilité » doit être envisagé.

De nombreuses axes d'amélioration peuvent être apportés à notre modélisation. Par exemple, l'évaluation du Besoin Global de Solvabilité aurait pu couvrir un nombre plus important de risque et modéliser de manière plus réaliste les dépendances entre les différents risques mais également les différents scénarios économiques générés par le GSE. Par ailleurs, une évaluation sur un horizon de temps plus important aurait permis une étude plus complète de notre exercice d'allocation de capital. En effet, la modélisation d'une compagnie d'assurance sur un an rend difficile l'analyse de la rentabilité des différents segments de risque.

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

Xavier Agenos. Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie - application aux stratégie d'investissements et de réassurance. Master's thesis, Centre d'études actuarielles, Mémoire d'actuariat IA, 2006.

Peter Albrecht. Risk based capital allocation and risk adjusted performance management in property/liability-insurance : A risk theoretical framework. In *Chair for Risk Theory, Portfolio Management and Insurance*, 1997.

Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 1999.

Robert Aumann and Lloyd Shapley. Values of non-atomic games. *Princeton University Press*, 1974.

Peter Blum and Michel Dacorogna. Dfa - dynamic financial analysis. *Encyclopedia of Actuarial Science*, 2004.

Pieter Bouwknegt and Antoon Pelsser. Market value of insurance contracts with profit sharing. *Journal of Risk Finance*, (3) :60–64, 2002.

Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006.

Entreprise Risk Management Committee CAS. Overview of enterprise risk management. Technical report, Casualty Actuarial Society, 2003. URL `http://www.casact.org/area/erm/overview.pdf`.

Jean David Cummins. Allocation of capital in the insurance industry. *Risk Management and Insurance Review*, 3, 2008.

Sophie Decupère. Agrégation des risques et allocation de capital sous solvabilité 2. Master's thesis, ENSAE, Mémoire d'actuariat IA, 2011.

Paul Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. un test non paramétrique d'indépendance. *Bulletin de la Classe des Sciences - Académie Royale de Belgique*, 5, 1979.

Michel Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4(1) :1–34, 2001.

Michel Denuit and Arthur Charpentier. *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome I : Principes fondamentaux de théorie du risque.* Economica, 2004.

Laurent Devineau and Stephane Loisel. Risk aggregation in solvency ii : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula ? 2009.

Jan Dhaene, Andreas Tsanakas, Emiliano A. Valdez, and Steven Vanduffel. Optimal capital allocation pinciples. *The journal of Risk and Insurance*, 79 :1–28, 2012.

Jan L.M. Dhaene, Mark J. Goovaerts, and Rob Kaas. Economic capital allocation derived from risk measures. *North American Actuarial Journal*, 7(2), 2003.

Christian Genest and Jock MacKay. The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40, 1986.

Glyn A. Holton. Economic capital, Juin 2011. URL `http://riskencyclopedia.com/articles/economic_capital/`.

Harry Joe and James J. Xu. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. *Département of Statistics, University of British Columbia*, 1996.

Shinichi Kamiya, Peng Shi, Joan Schmidt, and Marjorie Rosenberg. Risk management terms. *The Actuary Magazine, Casualty Actuarial Society*, 2007.

Roger Kaufmann, Andreas Gadmer, and Ralf Klett. Introduction to dynamic financial analysis. *Astin Bulletin*, 31(1) :213–249.

Paul Kaye. Risk measurement in insurance - a guide to risk measurement, capital allocation and related decision support issues. *Casualty Actuarial Society*, 2005.

Joseph Hyun-Tae Kim. *Estimation and allocation of insurance risk capital*. PhD thesis, University of Waterloo, 2007.

Rodney E. Kreps. Riskiness leverage models. volume 91, pages 31–60, 2005.

Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 1997.

Francis A. Longstaff, Sanjay Mithal, and Eric Neis. Corporate yield spreads : Default risk or liquidity ? new evidence form the credit default swap market. *Journal of Finance*, 60(5), 2005.

Richard C. Merton and André Perold. Theory of risk capital in financial firms. *Continental Bank Journal of Applied Corporate Finance*, 6(3) :16–32, 1993.

Stewart C. Myers and James A. Read. Capital allocation for insurance compagnies. *Journal of Risk and Insurance*, 68, 2001.

Roger Nelson. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2006.

David L. Ruhm. Capital allocation using the ruhm-mango-kreps algorithm. In *Enterprise Risk Management Symposium, Session CS-13 : Risk-Adjusted Capital Allocation*, 2003.

David L. Ruhm. Risk coverage ratio : A leverage-independent methode of pricing based on distribution of return. *Colloque ASTIN - Washington*, 2011.

David L. Ruhm and Donald Mango. A risk charge based on conditional probability. *2003 Thomas P. Bowles Jr. Symposium*, 2003.

Lloyd Shapley. A value for n-person games. *Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press*, 28 :307–317, 1953.

Dirk Tasche. Capital allocation to business units and sub-portfolios : the euler principle. *In Pillar II in the New Basel Accord : The Challenge of Economic Capital*, pages 423–453, 2008.

Pierre Thérond. *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*. PhD thesis, ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1, 2007.

Pierre Thérond and Pierre Valade. Appétence au risque : intégration au pilotage d'une société d'assurance. *Assurances et Gestion des risques*, 78(2) :125–144, 2010.

Nicolas Zec. Use of an internal model in a general insurance compagny : focus on economic capital allocation. Master's thesis, Centre d'études actuarielles, Mémoire d'actuariat IA, 2012.

Nicolas Zec. From game theory to solvency quantile calculation : capital allocation with use in non-life insurance. *Bulletin Français d'Actuariat*, 13(26) :5–46, 2013.

Annexes

1
Méthode de calcul de la *Market Consistent Embedded Value*

Comme pour le calcul de la *Traditionnal Embedded Value* ou de la *European Embedded Value*, la *Market Consistent Embedded Value* est la somme de l'actif net réévalué (Capital requis + *Free Surplus*) et la valeur *In Force*. Cependant, en environnement MCEV, la VIF est donnée par la somme suivante :

+ ***Present Value of Future Profits*** ou PVFP : la valeur actuelle des profits générés par le portefeuille de contrats calculée par un scénario déterministe sans prime de risque.

− ***Time Value of Financial Options and Guarantees*** ou TVFOG : la valeur temps des options et garanties financières.

− ***Cost of Residual Non Hedgeable Risk*** ou CRNHR : le coût des risques résiduels non couvrables. C'est l'équivalent de la TVFOG pour les risques non couvrables.

− ***Cost of Capital*** ou CoC : le coût de friction du capital requis, constitué des impôts (sur les sociétés et sur les plus-values) et des coûts d'investissements liés aux retours sur investissement.

Remarque III.13. – Dans le cas d'une MCEV, le taux d'actualisation est le taux sans risque.
- La valeur du portefeuille correspond à la valeur actuelle des résultats futurs générés par le portefeuille de contrats en stock à la date de valorisation. Les provisions techniques à considérer sont en vision *Best Estimate*.
- En univers Market Consistent, il n'y a pas de différence entre le taux de rendement des actifs de la compagnie et le rendement requis par l'actionnaire.

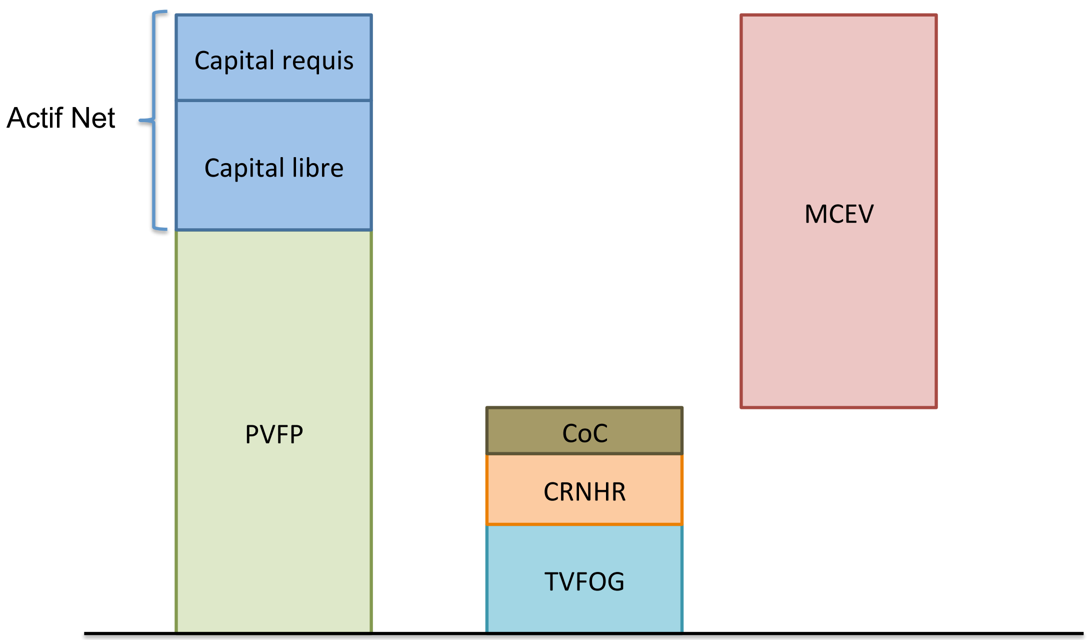

FIGURE 1.1 – Calcul de la *Market Consistent Embedded Value*

2 Application de la méthode sur une compagnie d'assurance Vie

2.1 Interpolation de la courbe des taux Zéro-Coupon au 31/12/2013

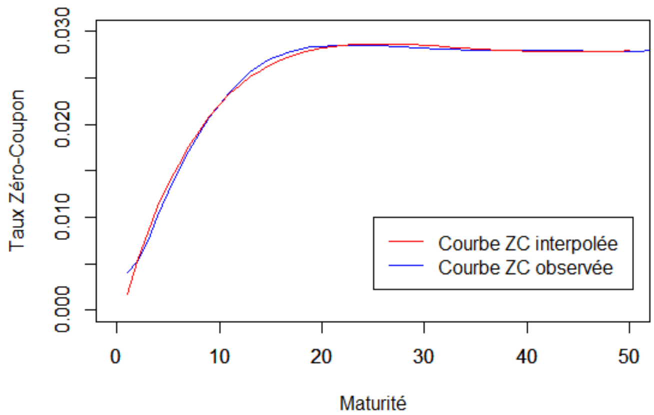

FIGURE 2.1 – Interpolation de la courbe des taux Zéro-Coupon au 31/12/2013 par la méthode de Nelson-Siegel et Svensson

2.2 Simulations de la courbe des taux Zéro-Coupon

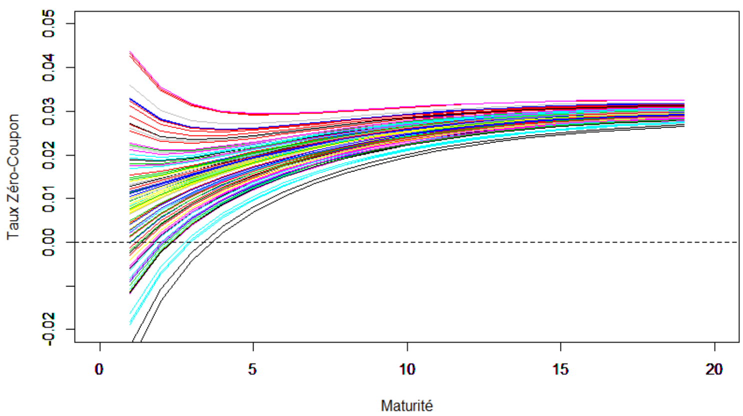

FIGURE 2.2 – 200 simulations de la courbe des taux Zéro-Coupon avec un pas 1 an

2.3 Table de mortalité TF 00-02

TF 00-02											
x	lx decale	qx	x	lx decale	qx	x	lx decale	qx	x	lx decale	qx
0	**100 000**	0,003840	29	**99 206**	0,000332	58	**95 989**	0,003017	87	**56 624**	0,075181
1	**99 616**	0,000331	30	**99 173**	0,000352	59	**95 700**	0,003236	88	**52 367**	0,085670
2	**99 583**	0,000211	31	**99 138**	0,000353	60	**95 390**	0,003457	89	**47 880**	0,096933
3	**99 562**	0,000171	32	**99 103**	0,000343	61	**95 060**	0,003915	90	**43 239**	0,108651
4	**99 545**	0,000141	33	**99 069**	0,000353	62	**94 688**	0,004143	91	**38 541**	0,132598
5	**99 531**	0,000121	34	**99 034**	0,000353	63	**94 296**	0,004395	92	**33 431**	0,145456
6	**99 519**	0,000111	35	**98 999**	0,000394	64	**93 881**	0,004682	93	**28 568**	0,159651
7	**99 508**	0,000100	36	**98 960**	0,000425	65	**93 442**	0,005027	94	**24 007**	0,192289
8	**99 498**	0,000101	37	**98 918**	0,000465	66	**92 972**	0,005431	95	**19 391**	0,210604
9	**99 488**	0,000101	38	**98 872**	0,000516	67	**92 467**	0,005885	96	**15 307**	0,230047
10	**99 478**	0,000111	39	**98 821**	0,000577	68	**91 923**	0,006972	97	**11 786**	0,250453
11	**99 467**	0,000111	40	**98 764**	0,000638	69	**91 282**	0,007631	98	**8 834**	0,272083
12	**99 456**	0,000121	41	**98 701**	0,000699	70	**90 585**	0,008382	99	**6 430**	0,294730
13	**99 444**	0,000131	42	**98 632**	0,000761	71	**89 826**	0,009231	100	**4 535**	0,318367
14	**99 431**	0,000161	43	**98 557**	0,000842	72	**88 997**	0,010204	101	**3 091**	0,343160
15	**99 415**	0,000201	44	**98 474**	0,000935	73	**88 089**	0,011332	102	**2 030**	0,368864
16	**99 395**	0,000121	45	**98 382**	0,001027	74	**87 091**	0,012590	103	**1 282**	0,395556
17	**99 383**	0,000111	46	**98 281**	0,001140	75	**85 994**	0,014010	104	**775**	0,422794
18	**99 372**	0,000100	47	**98 169**	0,001253	76	**84 789**	0,015630	105	**447**	0,452229
19	**99 362**	0,000101	48	**98 046**	0,001377	77	**83 464**	0,017515	106	**245**	0,482558
20	**99 352**	0,000101	49	**97 911**	0,001512	78	**82 002**	0,022279	107	**127**	0,505618
21	**99 342**	0,000111	50	**97 763**	0,001647	79	**80 175**	0,025273	108	**63**	0,545455
22	**99 331**	0,000111	51	**97 602**	0,001951	80	**78 149**	0,028743	109	**28**	0,550000
23	**99 320**	0,000121	52	**97 411**	0,002099	81	**75 903**	0,032764	110	**13**	0,555556
24	**99 308**	0,000131	53	**97 207**	0,002237	82	**73 416**	0,037489	111	**6**	0,555556
25	**99 295**	0,000161	54	**96 990**	0,002377	83	**70 664**	0,043041	112	**3**	0,000000
26	**99 279**	0,000201	55	**96 759**	0,002507	84	**67 622**	0,049559			
27	**99 259**	0,000241	56	**96 517**	0,002648	85	**64 271**	0,057092			
28	**99 235**	0,000292	57	**96 261**	0,002821	86	**60 602**	0,065644			

FIGURE 2.3 – Table de mortalité TF 00-02

2.4 Comptes de résultat de la compagnie XYZ entre le 31/12/2004 et le 31/12/2013

Compte de résultat	31/12/2005	31/12/2006	31/12/2007	31/12/2008	31/12/2009	31/12/2010	31/12/2011	31/12/2012	31/12/2013
Primes	2 300 000 €	2 420 000 €	2 530 000 €	2 660 000 €	2 800 000 €	2 930 000 €	3 090 000 €	3 230 000 €	4 220 000 €
Coupons	135 516 €	221 876 €	333 424 €	465 162 €	567 338 €	656 402 €	729 292 €	775 936 €	790 958 €
Dividendes	38 002 €	38 109 €	39 447 €	40 412 €	40 163 €	38 623 €	39 145 €	39 762 €	38 215 €
Prestations	- 43 166 €	- 93 372 €	- 153 539 €	- 230 975 €	- 329 138 €	- 455 772 €	- 607 238 €	- 791 194 €	- 1 033 343 €
Variation PM	-2 342 921 €	- 2 489 906 €	- 2 641 244 €	- 2 795 772 €	- 2 923 150 €	- 3 000 404 €	- 3 071 120 €	- 2 977 043 €	- 3 731 560 €
Variation PPE	- 3 184 €	- 2 809 €	5 993 €	- €	- €	- €	- €	- 91 089 €	- 102 036 €
Versement de dividendes	- 13 035 €	- 16 661 €	- 21 933 €	- 27 460 €	- 27 836 €	- 23 925 €	- 16 120 €	- 2 450 €	- €
Résultat	**71 212 €**	**77 237 €**	**92 148 €**	**111 368 €**	**127 377 €**	**144 925 €**	**163 959 €**	**183 922 €**	**182 234 €**

FIGURE 2.4 – Comptes de résultats entre le 31/12/2004 et le 31/12/2013

2.5 Mise en oeuvre de la modélisation des risques

2.5.1 Modèle G2++

Nous avons choisi d'utiliser le **modèle G2++** pour modèliser les taux sans risque.

2.5.1.1 Reconstruction de la courbe des taux

Pour projeter des prix d'obligations Zéro-Coupons, il est nécessaire de disposer d'une courbe des taux Zéro-Coupon à la date d'observation. Or étant donné qu'il n'existe pas assez d'obligations Zéro-Coupons cotées sur le marché, la reconstruction de la courbe des taux est alors indispensable. Cela consiste à interpoler les points pour obtenir une courbe continue. Pour cela, nous utilisons la méthode de **Nelson-Siegel et Svensson**.

Dans le modèle de **Nelson-Siegel et Svensson**, le taux spot s'écrit :

$$y_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1-\exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} + \beta_2 \left[\frac{1-\exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right] + \beta_3 \left[\frac{1-\exp(-\frac{\tau}{\lambda_2})}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2}) \right].$$

Les coefficients β ont des significations économiques :
- β_0, le facteur de niveau correspondant au taux long,
- β_1, le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long,
- β_2, le facteur de courbure,
- β_3, donne une influence sur le taux court.

Les coefficients λ sont des paramètres d'échelle.

Ces paramètres sont estimés par une méthode par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de la formule, (2.5.1.1) et des prix de marché.

La comparaison graphique de la vraie courbe des taux Zéro-Coupon et la courbe obtenue par l'interpolation est présentée en annexe (2.1).

2.5.1.2 Discrétisation des processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$

Park(2004) a proposé une discrétisation pour les processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$ du modèle G2++ :

$$x_{t+1} = e^{-a} x_t + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2a}}{2a}} \varepsilon_{x,t},$$
$$y_{t+1} = e^{-b} y_t + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2b}}{2b}} \varepsilon_{y,t}.$$

où $(\varepsilon_{x,t}, \varepsilon_{y,t})$ est un vecteur gaussien de matrice de variance covariance Σ, qui dépend des corrélations avec le modèle « action ». Nous expliciterons plus en détail la construction de cette matrice.

2.5.1.3 Calibrage du modèle G2++

L'estimation des paramètres α,β, σ,η et $\rho_{x,y}$ des processus $(x_t)_t$ et $(y_t)_t$ se fait à l'aide de prix de caps.

Définition III.1. Un cap est un contrat de gré à gré d'échange de taux, à caractère optionnel. Il est défini par les caractéristiques suivantes :
- le nominal, noté N ;
- la référence variable-révisable, telle qu'un Libor ou un Euribor ;
- l'échéancier $T_0, ..., T_N$ des règlements ;

– la durée de la ième projection, $D_i = T_i - T_{i-1}$, exprimé en général dans la base 360.

La fréquence des règlements, donc les durées D_i, sont liées à la maturité de la référence choisie de sorte que les flux sous-jacents soient vanille (par exemple $D_i = 0,5$ pour l'Euribor 6 mois).

La méthode que nous adoptons pour calibrer le modèle G2++ est la suivante :

1) Récupérer les prix observés sur le marché de caps : Cap_{Mkt} ;

2) Estimer, à partir de notre modèle, le prix des caps à l'aide d'une formule fermée : Cap_{G2++} ;

3) Obtenir les paramètres du modèle à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Estimation du prix d'un cap Le modèle G2++ permet d'obtenir une formule fermée pour le prix d'un cap. Soit un cap à la monnaie de strike k, de nominal N avec des temps de paiements $\mathcal{T} = \{T_0, \ldots, T_n\}$. On pose τ_i, la fraction d'année entre T_{i-1} et T_i pour $i = 1, \ldots, n$. On a alors le théorème suivant :

Théorème III.1. *Le prix d'un cap à la date t de strike k, de nominal N et de temps de paiements T et de fraction d'année τ est alors donné par :*

$$Cap(t,\mathcal{T},\tau,N,k) = \sum_{i=1}^{n} -N(1+k\tau_i)B(t,T_i)\Phi\left(\frac{ln\frac{B(t,T_{i-1}}{(1+k\tau_i)B(t,T_i)}}{\Sigma(t,T_{i-1},T_i)} - \frac{1}{2}\Sigma(t,T_{i-1},T_i)\right)$$
$$- B(t,T_{i-1})N\Phi\left(\frac{ln\frac{B(t,T_{i-1}}{(1+k\tau_i)B(t,T_i)}}{\Sigma(t,T_{i-1},T_i)} + \frac{1}{2}\Sigma(t,T_{i-1},T_i)\right).$$

où

– *Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite,*
– *$B(t,T_i)$ est le prix d'une obligation Zéro-Coupon en t et de date d'échéance T_i,*
–

$$\Sigma(t,T,S)^2 = \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-a(S-T)}\right)^2\left(1-e^{-2a(S-T)}\right)$$
$$+ \frac{\eta^2}{2b^2}\left(1-e^{-b(S-T)}\right)^2\left(1-e^{-2b(S-T)}\right)$$
$$+ \frac{2\rho_{x,y}\sigma\eta}{ab(a+b)}\left(1-e^{-a(S-T)}\right)\left(1-e^{-b(S-T)}\right)\left(1-e^{-(a+b)(S-T)}\right).$$

On pose :

$$Cap_{G2++}(\alpha,\beta,\sigma,\eta,\rho_{x,y}) = Cap(t,\mathcal{T},\tau,N,k). \tag{2.1}$$

Méthode des moindres carrés On obtient les paramètres du modèle G2++ en utilisant la formule donnée pour le prix d'un cap, (2.1) par une méthode des moindres carrés :

$$\min_{\alpha,\beta,\sigma,\eta,\rho_{x,y}} \sum_i \left(Cap_{i,G2++}(\alpha,\beta,\sigma,\eta,\rho_{x,y}) - Cap_{i,Mkt}\right)^2.$$

avec $(Cap_{i,Mkt})_i$, les prix des caps observés sur le marché ayant les mêmes caractéristiques correspondants aux caps calculés avec le théorème précédent (nominal, strike, etc.).

2.5.2 Modèle LMN

2.5.2.1 Elements pour le calibrage du modèle LMN

Dans le cadre de la modélisation du risque de *spread*, nous avons utilisé le modèle LMN. Le calibrage du modèle permet donc d'estimer les différents paramètres des trois composantes du modèle : le taux sans risque, l'intensité de défaut et le *spread* de liquidité. Il est également nécessaire de fixer un taux de recouvrement $(1-\omega)$: celui-ci devra être fixé à dires d'expert. Le modèle de taux sans risque est donné par le modèle G2++. Le calibrage de ce modèle de taux est décrite dans la partie précédente (2.5.1.3). Il reste alors à estimer les paramètres du processus CIR (intensité de défaut) et du processus brownien (*spread* de liquidité), soit $4+2=6$ paramètres.

Le calibrage du modèle d'intensité de défaut utilise des prix observés de CDS alors que les paramètres du modèle de *spread* de liquidité sont estimés par des prix d'obligations *corporate*.

2.5.2.2 Discrétisation du processus d'intensité de défaut

Il n'existe pas de discrétisation exacte du processus d'intensité de défaut $(\lambda_t)_t$. Nous utilisons alors une discrétisation par un schéma de Milstein, qui donne alors :

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + a_\lambda(b_\lambda - \lambda_t) + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda}\varepsilon_{\lambda,t} + \frac{\sigma_\lambda^2}{4}(\varepsilon_{\lambda,t}^2 - 1),$$

où $\varepsilon_{\lambda,t}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite.

2.5.3 Calibrage du modèle Black & Scholes avec dividendes

2.5.3.1 Volatilité implicite

Pour le calibrage du modèle de Black& Scholes avec dividendes pour le modèle action, on suppose que les actions ne distribuent pas de dividende. La dynamique du cours des actions est alors donnée :

$$dS_t = S_t\left(ZC(t,t+1)dt + \sigma_S dW_S^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

La formule de Black & Scholes de la valeur d'une option européenne d'achat du sous-jacent défini ci-dessus, de strike K et de maturité T est :

$$Call_B S(S_0, K, r_T, \sigma_S, T) = S_0\phi(d_1) - Ke^{-ZC(0,T)}\phi(d_2)$$

Avec $d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K})+(ZC(0,T)+\frac{\sigma_S^2}{2}}{\sigma_S\sqrt{T}}$et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Les informations descriptives du contrat sont fixées donc connues à l'avance. Après avoir obtenu le taux sans risque G2++, la seule variable inconnue est la volatilité. Théoriquement il n'existe pas de valeur unique car dans les faits, les prix des options ne sont pas calculés avec la formule de Black& Scholes et les actions ne sont pas toutes volatiles de la même façon. Cependant, on peut définir pour des calls observés sur la marché :

$$Call_{Mkt} = Call_{BS}\left(S_0, K, ZC(0,T), \sigma_S, T\right).$$

Il s'agit d'une équation à une inconnue σ_S. De manière équivalente, on cherche le 0 de la fonction $f(\sigma) = Call_{BS}(S_0, K, RZC(0,T), \sigma_S, T) - Call_{Mkt}$. La volatilité σ^* solution de cette équation est appelée **volatilité implicite**. On peut souligner l'unicité de cette solution car la fonction $\sigma \mapsto f(\sigma)$est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ à $]0,S_0[$. En effet, la dérivée de cette fonction est appelé « **véga** » et est strictement positive.

2.5.3.2 Algorithme de Newton-Raphson

Grâce à la formule de Taylor pour une fonction f dérivable au moins une fois :

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times (x_1 - x_0).$$

Et on cherche à résoudre $f(x_1) = 0$, ie $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Graphiquement, x_1 est le point qui est l'intersection entre la tangente de la courbe au point x_0 et l'axe des abscisses. Cette technique permet d'approcher la solution cherchée par itération. On a donc la formule de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dans notre cas, $f'(\sigma) = \frac{\partial Call_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{S_0\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$.

2.5.4 Décomposition de Cholesky

Nous avons :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_3(0, I_4)$$

Soit $C = Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$, un vecteur constant tel que :

$$C^T Z \sim \mathcal{N}_3(0, C^T C)$$

On cherche donc C tel que $C^T C = \Sigma$ dans le cas où $Z = \varepsilon$. Comme Σ est symétrique et définie positive (les valeurs propres de Σ sont strictement positives), alors Σ s'écrit :

$$\Sigma = U^T D U$$

où U est une matrice triangulaire supérieure, et D une matrice diagonale de diagonale positive. On peut alors décomposer Σ telle que :

$$\Sigma = U^T D U = \left(U^T \sqrt{D}\right)\left(\sqrt{D} U\right) = \left(\sqrt{D} U\right)^T \left(\sqrt{D} U\right).$$

En posant $C = \left(\sqrt{D} U\right)$, nous obtenons la décomposition désirée.