

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 28/06/2013

Par : **Charles-Henri CARLIER et Pierre TANKERE**

Titre: **IMPACT DE RISK MARGIN SUR LA TARIFICATION
DE TRAITE DE REASSURANCE LONG TERME**

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☒ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires :

Madame Florence PICARD

Monsieur Jean-Marie NESSI

Membres présents du jury de la
filiale :

Monsieur Donatien HAINAUT

Entreprise :

AXA Global P&C

Directeurs de mémoire en entreprise :

Monsieur Simon BLAQUIERE



Madame Feiyun CHENG



**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :



Signature des candidats

Pierre TANKERE, Charles-Henri CARLIER



Mots clés : SCR, *risk margin*, MVM, coût du capital, forme paramétrique, QIS5, création de valeur, *fair value*, réassurance.

Keywords: SCR, *risk margin*, MVM, cost of capital, parametric specification, QIS5, fair value, reinsurance.

Résumé :

La réforme Solvabilité II repose notamment sur l'exigence de capitaux permettant de faire face à la probabilité de ruine à horizon un an dans 99,5% des scénarios. Par ailleurs, dans l'approche Solvabilité II, les provisions sont constituées du *best estimate* et de la *risk margin* (ou MVM). Ce dernier élément est conçu pour couvrir les coûts des capitaux réglementaires futurs correspondants à la sinistralité jusqu'au terme de son déroulement. Ceci suppose une manière d'estimer à tout instant les capitaux réglementaires futurs c'est-à-dire une fonctionnelle de la sinistralité qui dépend du développement suivi. Une série de simplifications est proposée par le QIS5 pour projeter ces capitaux. Aussi, l'objet de ce mémoire est l'étude attentive de ces simplifications dans un contexte d'évaluation du prix de traités de réassurance.

Ce mémoire propose en particulier une spécification paramétrique permettant une expression exacte de la MVM alternative à celle trouvée dans la littérature. Il montre également que le différentiel de MVM peut occuper une part essentielle dans l'évaluation du prix d'un traité de réassurance.

Abstract :

The Solvency II directive most famous concept is the Solvency Capital Requirement (SCR). It is the capital required to ensure that the insurance company will be able to meet its obligations over the next year with a minimum probability of 99.5%. Besides, in the same framework, provisions are the sum of the best estimate and the risk margin (also named MVM). The risk margin is defined as the present value of costs of the SCR required to support the liabilities until their run-off. This implies to calculate at all time the future capitals required, which are functions of the losses and also to the path of their development. To this end, several approximations are suggested by the QIS5. Those are discussed extensively as a study of reinsurance pricing is carried out.

The central purpose of this document is to define a parametric and analytical framework which leads to an exact formula for the MVM. Although it has been previously carried out in the actuarial literature, we suggest an alternative and diligent framework. It turns out of this investigation that MVM has a significant impact on the price of a reinsurance treaty whatever methodology is used to assess the MVM.

Remerciements

Nous remercions l'ensemble du département réassurance d'AXA Global P&C pour son accueil et son soutien lors de la rédaction du mémoire. Nous remercions particulièrement nos encadrants directs, Monsieur Simon Blaquière et Madame Feiyun Cheng, pour le temps qu'ils nous ont consacré, leurs conseils et leurs relectures attentives de nos calculs.

Nous remercions également l'équipe pédagogique et administrative de l'ENSAE pour son aide précieuse apportée dans les démarches administratives et ses conseils avisés quant à l'intérêt d'opter pour ce sujet.

Note de synthèse

Considérations préliminaires

AXA Global P&C est une filiale du groupe AXA organisée autour de quatre centres de compétences: l'assurance des particuliers, l'assurance des entreprises, la gestion des sinistres et la réassurance. L'équipe de réassurance a pour mission de porter les initiatives essentielles à la rentabilité de la souscription de réassurance, notamment en échangeant avec les entités nationales afin de mutualiser les bonnes pratiques au sein du groupe.

Dans ce contexte, l'étude effectuée dans ce mémoire propose de s'attacher à un aspect central de la réglementation Solvabilité II en lien avec la souscription de réassurance.

La souscription de réassurance est destinée, entre autres, à réduire la volatilité de la sinistralité d'un primo-assureur au prix d'une diminution des primes perçues. Comparer la prime versée à la souscription d'un traité de réassurance à la sinistralité cédée constitue un premier indicateur naïf du coût de la réassurance. La directive Solvabilité II incite à affiner cet indicateur de création de valeur.

Il s'agit notamment dans cette nouvelle réglementation de définir les capitaux propres réglementaires requis en fonction d'une mesure prospective des risques encourus. Pour mesurer ces risques, la réglementation prend en compte à la fois les charges de sinistres attendues mais également la *risk margin*, c'est-à-dire le coût d'opportunité des capitaux requis pour assurer le paiement des sinistres jusqu'à leur extinction. Ce deuxième aspect doit donc lui aussi être pris en compte pour évaluer la pertinence d'un traité de réassurance.

L'objet de ce mémoire est d'explorer les différentes manières de mesurer l'effet de la *risk margin* et d'apprécier s'il est marginal ou substantiel.

Définition de notions d'intérêt

Pour circonscrire le cadre d'analyse, certaines notions sont incontournables et doivent être précisées d'emblée. Les documents de référence de ces concepts sont le *QIS 5 Technical Specifications* et la directive Solvabilité II.

Les notations suivantes sont afférentes à une unique *Line of Business* et une unique année d'origine de la sinistralité.

- Notations génériques :
 - Soit n l'horizon ultime de développement d'une sinistralité pour une souscription en année 0.
 - Soit la filtration $(F_t)_{t \in [0;n]}$ représentant l'information croissante dans le temps.
 - Le taux annuel proportionnel est noté r et CoC désigne le coût de rémunération du capital.
 - ϕ est le quantile 0,995 d'une loi $N(0,1)$ et α_i un vecteur colonne ne comportant que des 1 et de taille i .

- Soit I_t le paiement (incrémental) effectué à l'année t .
- $\forall j \in [1, n]$, $\widetilde{C}_j$ est la somme des paiements cumulés ayant eu lieu sur la période

$$[0; j] \text{ actualisés en } 0, \text{ ainsi } \widetilde{C}_j = \sum_{i=1}^j \frac{I_i}{(1+r)^i}.$$

- Le *best estimate* des engagements de l'assureur est l'espérance du montant des règlements des sinistres futurs actualisés. Le *best estimate* à l'année t est donc :

$$BE_t = E \left(\sum_{i=t+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^{i-t}} \mid F_t \right)$$

- Sous réserve d'une tarification selon le principe de prime pure, le résultat d'un exercice comptable $[i; i+1]$ est donné par :

$$\text{Résultat}_{[i; i+1]} = -I_{i+1} + (1+r) \cdot BE_i - BE_{i+1} \text{ soit après transformation}$$

$$\text{Résultat}_{[i; i+1]} = (1+r)^{i+1} \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_i) - E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \right)$$

- Le capital de solvabilité requis en année i , ou *Solvency Capital Requirement*, noté SCR_i , est défini comme le capital permettant de faire face au risque de ruine dans 99,5% des scénarios. Après développements :

$$SCR_i = (1+r)^i \cdot [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) - (1+r)^i \cdot E(\widetilde{C}_n \mid F_i)$$

Du fait de l'enchevêtrement des conditionnements, il est impossible d'aller plus avant dans la formulation mathématique.

- La *risk margin* ou *MVM* en année t définie ci-dessus a pour expression :

$$MVM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^n E \left(\frac{SCR_i}{(1+r)^{i+1-t}} \mid F_t \right)$$

Calculs de MVM

Après avoir donné une expression littérale de la MVM, le QIS5 propose cinq manières de calculer la MVM. Les cinq méthodes proposées sont les suivantes :

1. Procéder au calcul complet et exact des SCR.
2. Approximer les risques ou sous-risques individuels devant être utilisés dans le calcul futur des SCR.
3. Approximer par une approche proportionnelle.

Cette méthode est alors basée sur l'approximation $\forall t \in [1; n], SCR_t = SCR_0 \cdot \frac{BE_t}{BE_0}$

4. Approximer globalement les SCR futurs. Cette approximation suggère de calculer la MVM à partir d'un temps moyen en lequel les paiements auraient lieu, la *duration* modifiée.
5. Approximer globalement la MVM comme un pourcentage du *best estimate*, fourni par le régulateur en fonction du type d'activité.

Les méthodes 3, 4 et 5 sont approximatives, univoques et ont été implémentées. Leur simplicité de mise en œuvre n'appelle pas plus de développement et reflète des approximations ne reposant pas sur un cadre théorique, même avec des hypothèses fortes.

L'intérêt de la marge d'interprétation laissée par les méthodes 1 et 2 est qu'elle permet de développer des spécifications qui conduisent à une expression exacte de la MVM.

Proposition de formes paramétriques

Dans le corps du mémoire, deux modélisations paramétriques ont été développées. La seconde modélisation étant applicable pour tout type de sinistralité et reposant sur des hypothèses moins restrictives, seule celle-ci est présentée dans cette note.

Le modèle reposant sur une spécification gaussienne permet de lever la difficulté théorique posée par le conditionnement. La propriété clé sous-jacente est la stabilité des lois normales conditionnelles.

La spécification paramétrique proposée est $(X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, \Lambda)$ avec

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, X_{i+1} = \ln \left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{i+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_i)} \right)$$

Cette spécification diffère de celles trouvées dans la littérature actuarielle consultée qui supposent que les coefficients de passage des montants cumulés suivent une loi log-normale. Il en découle une expression plus simple et opérationnelle de la MVM.

Par ailleurs, les notations dérivées des paramètres de la loi normale suivantes sont utilisées:

$$\mu_{i:j} = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{(1i)*(1i)} & \Lambda_{(1i)*(i+1:n)} \\ \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} & \Lambda_{(i+1:n)*(i+1:n)} \end{pmatrix}, \quad \mu_{li} = \mu_{(i+1):n} + \Lambda_{((i+1):n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} - \mu_{1:i},$$

$$\Lambda_{li} = \Lambda_{((i+1):n)*((i+1):n)} - \Lambda_{((i+1):n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \Lambda_{(1i)*((i+1):n)}, \quad \text{et } \lambda_{i,t} = \left(\alpha_{i-t} + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix} \right)$$

Après résolutions successives des conditionnements imbriqués, la formule exacte de la MVM en date t est la suivante :

$$MVM_t = (1+r)^{t-1} \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \exp \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_{li,li}} \phi \\ +\mu_{li} + \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{1:l} \\ - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:l} \\ + \lambda_{i,t} \mu_{li,t} + \frac{1}{2} \lambda_{i,t} \Lambda_{li,li} \lambda_{i,t}' \end{pmatrix}_{1:l} - 1 \right)$$

Soit en date 0 :

$$MVM_0 = \frac{1}{1+r} \cdot E(\widetilde{C}_n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \exp \left(\begin{array}{l} \sqrt{\Lambda_{i,1:1}} \phi \\ + \mu_{i,i} - \left[\Lambda_{(i+1:n) \times (1:i)} \Lambda_{(1:i) \times (1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:1} \\ + \lambda_{i,0} \mu_{1:i} + \frac{1}{2} \lambda_{i,0} \Lambda_{(1:i) \times (1:i)} \lambda_{i,0}' \end{array} \right) - 1$$

Cette formule fermée, derrière son apparente complexité, fournit une expression exacte de la MVM aisément calculable.

En particulier, la MVM en date 0 se différencie par le fait qu'elle n'utilise pas de chemin de développement suivi par les coefficients de passage des $E(\widetilde{C}_n | F_i)_{i \in \llbracket 1:n \rrbracket}$. La formule de la *risk margin* en date t permet quant à elle de calculer cette dernière pour un portefeuille en cours de développement en se basant sur le triangle des ultimes espérés actualisés.

Plusieurs éléments requièrent une attention particulière pour implémenter cette formule :

- L'estimation des paramètres (μ, Λ) nécessite un rééchantillonnage, par exemple *bootstrap*, en raison du faible nombre de données disponibles après agrégation. Cette étape suppose notamment une modélisation permettant d'aboutir à des résidus indépendants, exogènes et homoscedastiques. Dans cette étude, une modélisation GLM a été mise en œuvre.
- La normalité du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ doit être vérifiée. Des analyses graphiques et tests statistiques sur des échantillons issus du rééchantillonnage sont à cet égard pertinents.

Application et résultats

Afin de mesurer l'effet de la *risk margin* lors de la souscription d'un traité de réassurance, la notion de création de valeur a été utilisée sur un portefeuille de données de responsabilité professionnelle médicale. Pour ce dernier, AXA France a prospecté les éventuels traités de réassurance de type excédent de sinistre, ce qui fournit un cadre d'application intéressant.

La création de valeur CV d'un traité de réassurance est la différence entre les gains espérés nets et bruts du point de vue de l'assureur. Elle prend en compte à la fois le différentiel de primes pures et de MVM. Soit PP la prime pure des sinistres pour l'assureur, PR la prime de réassurance et τ le taux d'imposition, il vient :

$$CV \geq 0 \Leftrightarrow (1-\tau) \cdot (PP_{brute} - PP_{nette} - PR) + MVM_{brute} - MVM_{nette} \geq 0$$

Sans considération de l'aversion au risque, un traité de réassurance est avantageux pour l'assureur sous la condition $PR \leq (PP_{brute} - PP_{nette}) + \frac{MVM_{brute} - MVM_{nette}}{1-\tau}$. Cette condition est

en pratique restrictive, aussi une proposition d'intégration de l'aversion au risque de l'assureur est suggérée à la fin du mémoire. C'est précisément une différence d'aversion au risque associée à une diversification différente de leurs portefeuilles respectifs qui rend le contrat de réassurance profitable pour l'assureur et le réassureur.

Pour les deux traités de type excédent de sinistre étudiés, respectivement 2 000 000 XS 3 000 000 et 5 000 000 XS 5 000 000, les résultats suivants sont obtenus :

Part de la MVM dans les primes de réassurance maximales			
Méthode 3		Forme paramétrique	
2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5
39,9%	43,9%	20,3%	20,6%

Comme attendu, la forme paramétrique permet de faire diminuer substantiellement la MVM donc son importance dans la création de valeur. Cependant, l'effet de la MVM reste majeur et explique des primes de réassurance notablement supérieures à celles n'en tenant pas compte.

Pistes de développement

Pour approfondir la démarche proposée, deux éléments principaux paraissent essentiels :

- Concernant la forme paramétrique, l'actualisation des charges de sinistres futures n'a pas pu être effectuée en pratique en raison de l'absence d'information sur les prévisions des déroulés en temps des IBNER et IBNYR. Cette actualisation influencerait uniquement la construction du triangle des montants ultimes espérés initiaux et non les calculs postérieurs.
- La méthodologie utilisée par AXA Global P&C pour prendre en compte l'aversion au risque repose sur l'utilisation de mesures de Wang. Cette distorsion de la mesure de probabilité est cependant opaque et l'utilisation d'une fonction d'utilité pourrait fournir une alternative intéressante et plus univoque dans son interprétation.

Executive summary

Introduction

AXA Global P&C is a subsidiary of AXA which is structured by four fields: retail insurance, corporate insurance, claims management and reinsurance. The reinsurance team's main objective is profitability of all AXA's reinsurance contracts. To this end, the team is in touch with all national subsidiaries of AXA and establishes the good practice.

In this context, the following thesis investigates a major part of the Solvency II regulation which influences reinsurance underwriting.

The main purpose of reinsurance is to reduce volatility and size of the losses at the cost of a reduction in insurance premium. To assess the cost of reinsurance, the comparison of gross and net losses provides a first and simple criterion. This criterion shall however be adjusted so as to take the Solvency II regulation into account.

The Solvency II capital requirement is defined as a prospective measure of the underlying risks. To measure risks the regulation considers both the best estimate of liabilities but also the risk margin (named MVM as well) which is the present value of costs of the SCR required to support the liabilities until their run-off. Thus, the influence of reinsurance on the risk margin has also to be considered in the assessment of reinsurance contracts.

The central purpose of this document is to investigate the different ways to measure the MVM and to assess whether the MVM has a significant impact on the price of reinsurance contracts.

Some definitions

To understand the framework of this study, the following concepts shall be introduced. They correspond to some parts of the QIS5 and of the Solvency II directive. Following definitions hold for a single year and for a single Line of Business.

- General parameters:
 - Let n be the ultimate, that is the number of years the losses develop until they reach their final amount.
 - Let $(F_t)_{t \in [0;n]}$ be the information at time t .
 - r is the annual proportional risk free interest rate and CoC is the cost of capital
 - ϕ is the quantile 0,995 of a $N(0,1)$ distribution and α_i is a column vector of size i which components all equal 1.
 - Let I_t be the payment at time t .
 - $\forall j \in [1;n]$, $\widetilde{C}_j$ is the discounted cumulative claims payments at time t , that is :

$$\widetilde{C}_j = \sum_{i=1}^j \frac{I_i}{(1+r)^i}.$$

- The *best estimate* is the expectation of all future discounted claims payments,

which at time t yields to:

$$BE_t = E\left(\sum_{i=t+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^{i-t}} \mid F_t\right)$$

- Provided the pricing has been carried out under pure premium principle, the accounting result for an year $[i; i+1]$ is given by :

$$\begin{aligned} \text{Result}_{[i,i+1]} &= -I_{i+1} + (1+r).BE_i - BE_{i+1} \quad \text{which gives also} \\ \text{Result}_{[i,i+1]} &= (1+r)^{i+1} \left(E\left(\widetilde{C}_n \mid F_i\right) - E\left(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}\right) \right) \end{aligned}$$

- The regulatory capital required in year i or *Solvency Capital Requirement*, noted SCR_i , is defined as the capital required to ensure that the company will be able to meet its obligations over the next year with a minimum probability of 99.5%, that is:

$$SCR_i = (1+r)^i \cdot [99,5\%] \left(E\left(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}\right) \mid F_i \right) - (1+r)^i \cdot E\left(\widetilde{C}_n \mid F_i\right)$$

Given the overlapping of conditioning, the formula cannot be developed any further.

- The expression of the *risk margin* or *MVM* at year t defined above is :

$$MVM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^n E\left(\frac{SCR_i}{(1+r)^{i+1-t}} \mid F_t\right)$$

Calculation of the MVM

After the descriptive formulation of the MVM, the QIS5 suggests five ways of calculation for it which are the following:

1. "Make a full calculation of all future SCRs without using simplifications."
2. "Approximate the individual risks or sub-risks within some or all modules and sub-modules to be used for the calculation of future SCRs."
3. "Approximate the whole SCR for each future year, e.g. by using a proportional approach."
4. "Estimate all future SCRs "at once", e.g. by using an approximation based on the duration approach."
5. "Approximate the risk margin by calculating it as a percentage of the best estimate."

The methods 3, 4 and 5 are approximations clearly defined and were applied as such. Their simplicity is however the sign of their weaknesses regarding theoretical relevance even under restrictive hypotheses.

On the contrary, the methods 1 and 2 provide the opportunity to develop specific frameworks which lead to the exact calculation of the MVM.

Proposal of parametric models

In this study, two parametric models were built. The second model relies on less restrictive hypotheses and can be applied to any kind of data, so that only this one is detailed hereafter.

The model relies on a normal specification which enables to get around the difficulty of conditioning. The underlying key property is that, conditionally to the observation of some of its components, a gaussian vector remains normally distributed.

The proposed parametric specification is $(X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, \Lambda)$, with

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, X_{i+1} = \ln \left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{i+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_i)} \right)$$

Such a model differs from the actuarial literature we have consulted. The encountered models actually assume that the cumulative claims payments ratios follow a log-normal distribution. Hence, we get a simpler expression of the MVM.

Besides, the following notations for the parameters are chosen :

$$\mu_{i:j} = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{(1i)*(1i)} & \Lambda_{(1i)*(i+1:n)} \\ \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} & \Lambda_{(i+1:n)*(i+1:n)} \end{pmatrix}, \quad \mu_{li} = \mu_{(i+1:n)} + \Lambda_{((i+1:n)*(1i))} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} - \mu_{1i},$$

$$\Lambda_{li} = \Lambda_{((i+1:n)*(i+1:n))} - \Lambda_{((i+1:n)*(1i))} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \Lambda_{((i+1:n)*(i+1:n))} \quad \text{et} \quad \lambda_{i,t} = \left(\alpha_{i-t} + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix} \right)$$

After solving the overlapped conditioning, the obtained formula for the MVM at time t is presented beneath:

$$MVM_t = (1+r)^{t-1} \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \exp \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_{li,1:1}} \phi \\ + \mu_{li} + \begin{bmatrix} \Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{1:l} \\ - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \mu_{1i} \right]_{1:l} \\ + \lambda_{i,t} \mu_{t,1:(i-t)} + \frac{1}{2} \lambda_{i,t} \Lambda_{t,(1i-t)*(1i-t)} \lambda_{i,t}' \end{bmatrix}_{1:l} \end{pmatrix} - 1 \right)$$

And at time 0 :

$$MVM_0 = \frac{1}{1+r} \cdot E(\widetilde{C}_n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \exp \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_{i,1,1}} \phi \\ +\mu_{i,i} - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:1} \\ +\lambda_{i,0} \mu_{1:i} + \frac{1}{2} \lambda_{i,0} \Lambda_{(1:i)*(1:i)} \lambda_{i,0}' \end{pmatrix} - 1 \right)$$

Though it seems complex at first sight, these exact formulas provide easily computable expressions.

In particular, the MVM at time 0 has to be set apart since no development path followed by the ratios of $E(\widetilde{C}_n | F_i)_{i \in [1:n]}$ can be used. Concerning the formula at time t , the expression can be used for calculation of ongoing business.

Several remarks should be made before applying these formulas:

- Because of the little data available, the estimation of the parameters (μ, Λ) requires a resampling, for instance using bootstrap techniques. This step needs to work with independent, exogenous and homoscedastic residuals. In the study, a GLM approach has been adopted.
- The normality of $(X_1, \dots, X_n)$ has to be assessed. Graphical analyses and more formal tests were conducted on samples obtained by bootstrap and turn out to be relevant.

Application and results

In order to measure the risk margin effect on reinsurance pricing, the concept of “value creation” was applied to some medical professional liability data. Several reinsurance XS treaties were considered by AXA France for this portfolio, which is an interesting case study.

The value creation CV of a reinsurance treaty is the difference between net and gross expected profits for the insurer integrating both pure premiums and MVM. Let PC be the commercial premium earned by the insurer, PP the pure premium, PR the reinsurance premium and τ the taxation rate. We can then write:

$$CV \geq 0 \Leftrightarrow (1-\tau) \cdot (PP_{gross} - PP_{net} - PR) + MVM_{gross} - MVM_{net} \geq 0$$

Without any consideration for risk aversion, a reinsurance treaty shall be worthy for an insurer under the constraint $PR \leq (PP_{gross} - PP_{net}) + \frac{MVM_{gross} - MVM_{net}}{1-\tau}$. This condition

proves to be restrictive in practice, so that a proposal for integrating some risk aversion is suggested in the last part of the study. Associated with the difference in diversification, a difference in risk aversion explains why reinsurance contracts are profitable for both insurer and reinsurer.

For the two studied XS treaties, respectively 2,000,000 XS 3,000,000 and 5,000,000 XS 5,000,000, the following results were found:

Percentage of the in maximal reinsurance premiums			
Method 3		Parametric model	
2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5
39.9%	43.9%	20.3%	20.6%

As expected, the parametric model leads to a significant MVM value decrease, and consequently the impact of the MVM in the value creation is lessened as well. Yet, the MVM effect remains major and justifies reinsurance premiums higher than those calculated without attention for the MVM.

Further possible extensions

In order to extend the models we have developed, two main aspects seem essential:

- Concerning the suggested parametric expression, we were not able in practice to discount the future claims cash flows. This is due to lack of information about the way the expected IBNER and IBNYR should develop over time.
- AXA Global P&C's methodology for integrating risk aversion relies on the use of Wang measures. It is however difficult to find a theoretical background for using such probability distortion measures. The expected utility theory could provide an interesting alternative, which would incorporate an economic view of risk aversion.

Sommaire

Introduction.....	21
1) Introduction au cadre Solvabilité II et circonscription de la notion de <i>risk margin</i> (MVM)	23
1.1) Contexte d'application : le cadre réglementaire Solvabilité II	23
1.2) Le bilan sous Solvabilité II.....	28
1.3) Notion de <i>risk margin</i> (MVM)	28
1.4) Formalisation des SCR avec les <i>best estimates</i>	30
1.5) Expression de la MVM en termes de flux actualisés.....	32
1.6) Diversification de la MVM	36
2) Programme de réassurance et rôle de la MVM.....	37
2.1) Aperçu du marché mondial de la réassurance.....	37
2.2) Notions élémentaires de réassurance.....	37
2.3) Création de valeur	41
2.4) Données étudiées.....	42
3) MVM : approximations et calculs empiriques	47
3.1) Méthodes de calcul de la MVM proposées par le QIS5	47
3.2) Application et limites de l'approximation 5	48
3.3) Application de la méthode 4	49
3.4) Intérêt et limites de l'approximation 3	51
4) MVM et Méthode 2 du QIS5 : calcul exact	57
4.1) Méthode 2 : première proposition de spécification dite du chemin moyen sans IBNER	57
4.2) Méthode 2 : une forme paramétrique sur les charges ultimes espérées.....	61
5) Juste prix d'un traité de réassurance <i>Excess of Loss</i>	83
5.1) Traités étudiés	83
5.2) Adaptation des méthodes de calcul de MVM aux portefeuilles réassurés	84
5.3) Encadrement du juste prix, notions d'isovalues	85
5.4) Applications et résultats.....	91
Conclusion	93
BIBLIOGRAPHIE.....	95
Articles scientifiques et thèses de doctorat	95
Mémoires soutenus devant l'Institut des Actuaire	95

Supports d'enseignement et présentations diverses.....	95
Textes règlementaires	96
Ressources informatiques	96
ANNEXES.....	97
ANNEXE 1 : QIS 5 et méthode 3.....	98
ANNEXE 2 : QIS 5 et méthode 2.....	100
ANNEXE 3 : Triangles de sinistralités des données utilisées	101
ANNEXE 4 : Méthode 2, une proposition de forme paramétrique sur les montants cumulés	103
ANNEXE 5 : Estimation par GLM.....	111
Notations	111
La famille des distributions exponentielles	111
Identifiabilité et estimation du modèle.....	112
Cas spécifique du modèle log-Poisson	113
ANNEXE 6 : Exogénéité et homoscedasticité des résidus de Pearson	114
ANNEXE 7 : Preuve de la log-normalité des coefficients de passage des montants ultimes espérés.....	118
ANNEXE 8 : Isovalue max et estimation de l'espérance choquée.....	122
ANNEXE 9 : Déroulé des SCR pour les traités 2 XS 3 et 5 XS 5	123

Introduction

Le contexte de transition réglementaire du cadre européen Solvabilité I vers Solvabilité II amène les assureurs à considérer le rôle croissant de l'aspect *capital management* de la réassurance. L'approche d'AXA Global P&C en la matière comporte une attention particulière pour le calcul de la *risk margin* réglementaire (ou *Market Value Margin i.e. MVM*).

Il apparaît en effet que son expression, de prime abord simple et concrète, recèle une problématique complexe de projection et déroulement des capitaux réglementaires sur toute la durée de développement des sinistres. Le dernier texte réglementaire disponible sur le sujet, le QIS5, traite cette difficulté en proposant cinq méthodes de calcul de la MVM, approchées ou exactes.

L'objet de ce mémoire est de parvenir à appliquer les méthodes univoques proposées par le QIS5 et de proposer des modèles de calcul de la MVM par les méthodes plus évoluées évoquées par ce texte réglementaire. Ces méthodes sont ensuite utilisées pour estimer l'écart de MVM entre des situations brutes et nettes de réassurance. Ceci a pour finalité l'évaluation du juste prix de traités de réassurance intégrant cet écart.

Le questionnement abordé par ce mémoire est donc double :

- Quelles méthodes permettent d'aboutir à une évaluation de la MVM à la fois prudente, théoriquement fondée et dont les hypothèses sont empiriquement vérifiables ?
- Cette évaluation peut-elle être un enjeu majeur dans l'estimation du prix d'un traité de réassurance ou est-elle marginale ?

Pour traiter cette problématique, une première partie introduit le cadre de Solvabilité II et permet de comprendre les fondements de la notion de MVM (1). Une seconde partie présente les données et le cadre d'application des calculs effectués (2). La troisième partie aborde le détail des approximations proposées par le QIS5 et met en œuvre les plus simples (3). La quatrième partie traite des méthodes plus sophistiquées et dont la mise en œuvre requiert un cadre théorique spécifique (4). Enfin, la cinquième partie applique l'ensemble des méthodes étudiées pour calculer les prix de traités dont les cotations des réassureurs sont disponibles (5).

1) Introduction au cadre Solvabilité II et circonscription de la notion de *risk margin* (MVM)

1.1) Contexte d'application : le cadre réglementaire Solvabilité II

1.1.1) Historique : de Solvabilité I à Solvabilité II

Cette section se fonde sur les analyses de Georges (2013), Derien (2010), les directives Solvabilité I, Solvabilité II et le Code des Assurances 2011.

Motivations du cadre prudentiel européen Solvabilité I

Mis en place au début des années 70 par la directive du 27/07/1973, Solvabilité I constitue la réglementation des activités d'assurance dans un cadre européen et restera en vigueur jusqu'en 2014. Les motivations d'un cadre prudentiel international sont le renforcement de la protection des assurés et l'homogénéisation des contraintes pesant sur les assureurs pour établir une concurrence plus juste.

Les directives prévoient notamment :

- Un agrément délivré permettant d'exercer l'activité d'assurance dans tous les Etats membres de l'Union Européenne. L'article L. 310-1-2 du Code des Assurances 2011 (point de vue français) stipule que des entreprises étrangères ayant leur siège social dans un Etat membre de la Communauté européenne ou les entreprises étrangères ayant une succursale établie en France peuvent se porter candidates pour l'agrément pour l'exercice d'activité d'assurance sur le territoire de la République française.
- Des dispositions pour les assureurs en matière d'information à fournir aux souscripteurs des polices.

Les trois piliers de Solvabilité I

La directive Solvabilité I préconise trois axes de règles à mettre en place par les assureurs, dits « piliers ».

- Le premier pilier traite de la mise en place de provisions prudentes en assurance vie et en non-vie. Le juste provisionnement des engagements est le cœur de l'activité d'assurance, aussi ce pilier est très détaillé dans le Code des Assurances pour les assureurs exerçant une activité en France.
- Le second pilier aborde de la possession d'actifs fiables, liquides et rentables. Les actifs des assureurs étant en partie destinés à couvrir les obligations vis-à-vis des assurés ainsi que les capitaux propres requis, une diversification du portefeuille des actifs est notamment requise.
- Le troisième pilier détaille les exigences en matière de capitaux propres minimaux à posséder. Le résultat d'un assureur dépendant de la réalisation ou non d'un risque aléatoire et du fait de l'inversion du cycle de production, le risque de ruine doit être encadré pour garantir la protection des assurés (Le Vallois (2013)). Le paragraphe suivant détaille cette réglementation, dont il est essentiel de comprendre le fonctionnement afin de pouvoir apprécier les évolutions réglementaires en vue (Solvabilité II).

Focus sur le pilier III de Solvabilité I

Des exigences sont mises en place pour limiter le risque de ruine, en particulier la marge de solvabilité : en France, ces exigences sont détaillées dans le Code des Assurances. La marge de solvabilité est une partie des fonds propres que les assureurs doivent détenir afin de faire face à un éventuel résultat adverse. La marge de solvabilité constitue donc une sécurité destinée à réduire la probabilité de ruine d'un assureur. L'analyse qui suit se fonde sur le Code des Assurances 2011, notamment des extraits des articles R. 334-1 à R. 334-52 (Chapitre IV : Solvabilité des entreprises). Son implémentation s'effectue différemment selon que le secteur d'activité est la vie ou la non-vie.

En assurance dommage, l'exigence minimale de marge de solvabilité est définie comme le maximum de deux calculs (article R. 334-5), effectués chaque année.

- La première méthode est fondée sur les primes touchées par l'assureur, qui sont décomposées en deux tranches : la première inférieure à 53 100 000 euros¹ puis la seconde au-delà de ce montant. Sur la première tranche, un coefficient de 18% est appliqué et est sommé à 16% de la deuxième tranche.²
- La seconde méthode est fondée sur la charge annuelle moyenne des sinistres encourus durant les exercices passés, qui est décomposée en deux tranches : la première inférieure à 37 200 000 euros et la seconde au-delà. Les coefficients appliqués sur ces tranches sont alors respectivement 26% et 23%.
- Les extraits suivants de l'article R. 334-5 apportent quelques précisions.

« Le résultat déterminé par application de la première méthode est obtenu en multipliant la somme des deux termes de l'addition prévue à l'alinéa précédent par le rapport existant, pour les trois derniers exercices entre le montant des sinistres demeurant à la charge de l'entreprise après cession en réassurance et le montant des sinistres brut de réassurance, sans que ce rapport puisse être inférieur à 50 %. »

Pour la seconde méthode, la charge moyenne des sinistres est calculée sur les trois derniers exercices comme précisé ci-dessous :

« Au total des sinistres payés pour les affaires directes au cours des trois derniers exercices, sans déduction des sinistres à la charge des cessionnaires et rétrocessionnaires, sont ajoutés, d'une part, les sinistres payés au titre des acceptations en réassurance ou en rétrocession au cours des mêmes exercices, d'autre part, les provisions pour sinistres à payer constituées à la fin du dernier exercice, tant pour les affaires directes que pour les acceptations en réassurance. Pour les branches 11, 12 et 13 énumérées à l'article R. 321-1, les sinistres, provisions et recours sont majorés de 50 %.

De cette somme sont déduits, d'une part, les recours encaissés au cours des trois derniers exercices, d'autre part, les provisions pour sinistres à payer constituées au commencement du deuxième exercice précédant le dernier exercice, tant pour les affaires directes que pour les acceptations en réassurance.

Le tiers du montant ainsi obtenu est réparti en deux tranches, respectivement inférieure et supérieure à 37 200 000 euros. A 26 % de la première tranche sont ajoutés 23 % de la seconde. »

¹ Ces seuils sont révisés annuellement.

² Ceci dénote une reconnaissance de la diversification des risques par la taille du portefeuille, mais le manque de complexité constitue justement un des motifs de révision de Solvabilité I.

En assurance vie, l'article R. 334-13 décrit les conditions du calcul de l'exigence minimale de marge de solvabilité comme un pourcentage des provisions mathématiques additionné d'un « nombre représentant 0,3 % des capitaux sous risque par le rapport existant, pour le dernier exercice, entre le montant des capitaux sous risque après cession et rétrocession en réassurance et le montant des capitaux sous risque brut de réassurance sans que ce rapport puisse être inférieur à 50 % », avec la définition suivante : « Le capital sous risque est égal au risque décès, déduction faite de la provision mathématique du risque principal ». Le pourcentage des provisions mathématiques dépend de la branche d'activité.³

Motifs de révision de Solvabilité I

Le cadre Solvabilité I a été remis en question notamment pour les raisons suivantes :

- L'absence de segmentation réelle des risques : les exigences en capitaux propres minimaux sont fonction du seul chiffre d'affaire et non du risque réellement sous-jacent. Par exemple, en non-vie, une hausse tarifaire entraîne une hausse du besoin en fonds propres sans qu'il y ait accroissement du risque et en assurance vie, plus les provisions mathématiques sont prudentes, plus le besoin en fonds propres est important selon Derien (2010). De façon plus générale, le risque de marché n'est pris en compte que via des exigences de diversification.
- L'absence d'incitation au *risk management* autre que la réassurance. Ainsi, établir les réserves de façon prudente ne permet pas de diminuer le capital économique minimal.
- Les exigences bancaires depuis Bâle II conduisant à une meilleure estimation du risque, les exigences Solvabilité I devraient s'aligner pour assurer une juste concurrence entre les secteurs Banque et Assurance sur des produits financiers proposés parfois très proches.
- Le manque d'harmonisation des pratiques au niveau international avec beaucoup d'exceptions nationales à la réglementation. Ainsi, le Code des Assurances regroupe l'ensemble des articles régissant l'activité d'assurance en France. Solvabilité I a évolué avec des ajouts fondés sur un principe d'apprentissage empirique.
- Selon Derien (2010), le contrôle réglementaire est rétrospectif et se base principalement sur des données comptables en coût historique.

Les objectifs de la procédure de révision Solvabilité II

La directive Solvabilité II du 17.12.2009, prévoit d'instaurer un nouveau cadre prudentiel se substituant à Solvabilité I, permettant notamment une évolution améliorant les problèmes évoqués au paragraphe précédent. Les objectifs qualitatifs suivants sont poursuivis :

- Prendre en compte les évolutions récentes en assurance, gestion des risques, et finance. A ce titre, la réglementation Bâle II a inspiré le principe de calcul des capitaux de solvabilité requis inscrit dans le pilier I (voir paragraphe suivant).

³ 4% pour les contrats en euros et 1% pour les contrats en unité de compte

- Rationaliser la surveillance des groupes d'assurance, avec des normes uniformes dans l'Union Européenne. Améliorer la transparence de l'information fournie par les groupes pour permettre aux autorités de contrôle de mieux appréhender le risque porté.
- Permettre plus de souplesse aux entreprises (avec la possibilité d'un modèle interne alternatif à la formule standard) afin de mieux estimer et gérer leurs risques.

1.1.2) Cadre d'application de Solvabilité II

Solvabilité II est un projet de réforme européenne de la réglementation prudentielle s'appliquant au secteur de l'assurance. Initialement prévue pour entrer en vigueur en Octobre 2012 à l'échelle de l'Union européenne, Solvabilité II permettra à terme une meilleure protection de l'assuré, une rationalisation des obligations de solvabilité reflétant mieux les risques encourus par les compagnies et un système de contrôle similaire dans tous les Etats membres.

Les compagnies d'assurances, mutuelles et instituts de prévoyance exerçant une activité d'assurance sont concernés par sa mise en application. Sous certaines conditions, un organisme peut être exclu de l'application de Solvabilité II, notamment un organisme de santé non-vie substitué ou réassuré totalement. Dans le cas français, environ 440 organismes sont exemptés, dont 390 mutuelles.⁴

Sont concernées les sociétés d'assurance ou les filiales de sociétés d'assurance ayant leur siège social implanté dans des pays de l'Union Européenne, en Norvège, en Islande et au Liechtenstein.

Depuis fin 2005, le CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) travaille avec l'industrie de l'assurance pour tester les impacts de Solvabilité II, via les QIS (Quantitative Impact Study) et fournir des éléments de réponse aux Calls for Advice préalables à l'entrée en vigueur de Solvabilité II.

1.1.3) Les trois piliers de Solvabilité II : focus sur le pilier 1 et le SCR

Le nouveau système Solvabilité II établira à l'instar de Solvabilité I trois piliers thématiques décrits ci-dessous :

- Le pilier 1 est constitué d'exigences quantitatives, notamment concernant le calcul :
 - des provisions techniques,
 - du MCR : *Minimum Capital Requirement*, le niveau de fonds propres en-dessous duquel les autorités de contrôle interviennent systématiquement,
 - et du SCR : *Solvency Capital Requirement*, le niveau de fonds propres nécessaire pour subvenir aux exigences techniques de Solvabilité II.

Le pilier 1 prévoit également la mise en place d'une *risk margin* destinée à couvrir le coût d'immobilisation du SCR.

⁴ Source : La Revue de l'Autorité de contrôle Prudentiel, n°10, Décembre 2012-Janvier 2013

- Le pilier 2 détaille les exigences en matière de gouvernance des organismes et de *risk management* en interne des sociétés d'assurance. Ceci garantit la bonne capitalisation des sociétés et leur maîtrise des risques.
- Le pilier 3 détaille les exigences de transparence en matière de publication d'informations prudentielles. L'application de ce pilier permet aux régulateurs un contrôle des sociétés fondé sur des données fidèles à la réalité.

La mise en œuvre du pilier 1 est détaillée quantitativement dans un document de la Commission Européenne publié le 5 Décembre 2010, le Quantitative Impact Study 5, ou QIS5, Technical Specifications. Les études techniques sous-jacentes à la rédaction de ce document sont réalisées par l'EIOPA.⁵ 500 organismes offrant des services d'assurance en France ont participé à l'implémentation des exigences du QIS5 en 2010.

Un point essentiel détaillé dans le QIS5 est la notion de *Solvency Capital Requirement* ou SCR. Le SCR est une partie des fonds propres de l'assureur destinée à prémunir ce dernier contre le risque de ruine à horizon un an avec une probabilité de 99,5%. La définition proposée par la directive Solvabilité II à l'article 101 est la suivante :

"The Solvency Capital Requirement shall be calibrated so as to ensure that all quantifiable risks to which an insurance or reinsurance undertaking is exposed are taken into account. It shall cover existing business, as well as the new business expected to be written over the following 12 months. With respect to existing business, it shall cover only unexpected losses. It shall correspond to the Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5 % over a one-year period."

En notant R le résultat pour une activité donnée⁶ pour un exercice $[t, t+1]$, le SCR en date t est donc la valeur minimale des fonds propres C à placer en date t au taux sans risque pour laquelle la probabilité de ruine en fin d'exercice est inférieure ou égale à 0,5%, donc :

$$SCR_{[t,t+1]} = \frac{1}{1+r} \inf \{C \in \mathbb{R} / P(R+C < 0) \leq 0,5\% \} = \frac{1}{1+r} \inf \{C \in \mathbb{R} / P(-R \leq C) \geq 99,5\% \}$$

En notant F_{-R}^- la fonction de répartition inverse généralisée de $-R$, il vient

donc $SCR_{[t,t+1]} = \frac{1}{1+r} F_{-R}^-(0,995)$. Si par ailleurs la fonction de répartition F_{-R} est

strictement croissante et continue, il vient $SCR_{[t,t+1]} = \frac{1}{1+r} F_{-R}^-(0,005)$.

En conclusion, sous réserve de continuité et d'injectivité de la fonction de répartition du résultat d'une entité, le SCR tel que défini par la directive Solvabilité II est le quantile 99,5% des pertes à horizon un an auquel l'espérance (supposée systématiquement nulle⁷) est soustraite. De façon équivalente, il s'agit du quantile 0,5% du résultat d'un exercice d'une

⁵Source : site de la Banque de France, document 201103, Analyses et Synthèses, « Solvabilité 2 : principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5) »

⁶ Si l'exercice est celui de souscription des contrats, il est considéré ici que les primes acquises sont les primes pures, de sorte que l'espérance du résultat est nulle.

⁷ Sous l'hypothèse de tarification par la prime pure

durée d'un an, le tout étant actualisé sur un an car l'actif correspondant est placé au taux sans risque.

1.2) Le bilan sous Solvabilité II

En cas de solvabilité, le bilan d'une société exerçant une activité d'assurance doit faire apparaître du capital en excès des capitaux requis. Le capital disponible pour le MCR et le SCR est visible dans les fonds propres⁸, qui sont égaux à la différence entre la valeur de marché des actifs et les provisions.

Eléments d'un bilan sous Solvabilité II

ACTIF		PASSIF	
Disponible pour le SCR et le MCR		Capitaux propres	Capital en excès
			SCR - MCR
			MCR
Valeur de marché des actifs		Provisions	MVM
			Best Estimate des engagements
			Autres provisions

SCR
 Provisions techniques

Solvabilité II stipule que le coût d'immobilisation du SCR doit être pris en compte : il convient de provisionner également la *risk margin* ; montant permettant la rémunération du SCR auprès des fournisseurs de capital. A noter que la *risk margin* (MVM) fait partie des provisions techniques. Une description plus avancée de la MVM est présentée dans la section 1.3).

1.3) Notion de *risk margin* (MVM)

1.3.1) Définition

Le QIS5 propose les éléments suivants :

"Usually, technical provisions consist of the best estimate and the risk margin. The risk margin is a part of technical provisions in order to ensure that the value of technical provisions is equivalent to the amount that insurance and reinsurance undertakings would be expected to require in order to take over and meet the insurance and reinsurance obligations." (TP.5.2.)

"The risk margin should be calculated by determining the cost of providing an amount of eligible own funds equal to the SCR necessary to support the insurance and reinsurance obligations over the lifetime thereof. The rate used in the determination of the cost of providing that amount of eligible own funds is called Cost-of-Capital rate." (TP.5.3.)

⁸ Au sens du capital économique et non des fonds propres comptables

La *Market Value Margin*, ou *risk margin*, est donc un montant additionnel au *best estimate* qui permet de prendre en compte les coûts futurs liés notamment aux capitaux réglementaires.

Historiquement deux méthodes de détermination de la MVM furent envisagées. Ceci est exposé notamment dans la *discussion paper* du *chief risk officer Forum* datant du 17 mars 2006, « *A market cost of capital approach to market value margins* ». La différence fondamentale entre ces deux approches est la manière d'évaluer le montant additionnel au *best estimate*. Alors que l'approche du percentile postule que la MVM peut être calculée à partir d'un quantile de la distribution des pertes, l'approche *cost of capital* envisage quant à elle le *run off* et les obligations qui lui sont associées.

Des critiques sont apparues concernant la première méthode qui suppose de fixer un niveau arbitraire du quantile fixé. En effet, cette méthode consiste à estimer la somme du *best estimate* et de la MVM par un percentile et de déduire, par soustraction du *best estimate*, le montant de la MVM. Cependant, le niveau du quantile est choisi arbitrairement.

Les paragraphes TP.5.4 et TP5.9 postulent clairement l'approche *cost of capital*. Ils exposent que la MVM répond au besoin de capital dans le scénario où un nouvel assureur reprendrait les obligations du primo assureur. Le document précise en outre que le reprenneur des obligations se voit également transférer les contrats de réassurance et contrats liés aux *special purpose vehicles* c'est-à-dire à la titrisation.

Le QIS5 précise en effet (TP.5.9) :

"The transfer of (re)insurance obligations is assumed to take place immediately. Hence, the method for calculating the overall risk margin (CoCM) can in general terms be expressed in the following manner: (TP.5.9)

$$CoCM = CoC \cdot \sum_{i=0}^n \frac{SCR_i}{(1 + r_{i+1})^{i+1}} \quad \text{where}$$

CoCM = the risk margin,
SCR_i = the SCR for year *t* as calculated for the reference undertaking,
r_i = the risk-free rate for maturity *i* and
CoC = the Cost-of-Capital rate."

Dans la formule proposée $CoCM = CoC \cdot \sum_{i=0}^n \frac{SCR_i}{(1 + r_{i+1})^{i+1}}$, *CoCM* est une variable aléatoire mesurable sur la tribu F_0 de l'information disponible en date 0, et chaque SCR_i est une variable aléatoire mesurable sur la tribu de l'information disponible en date *i*, ce qui est *a priori* contradictoire avec l'égalité proposée. Dans la suite du mémoire, il est donc considéré que la formule du QIS5 note SCR_i la variable aléatoire $E(SCR_i | F_0)$. De la sorte, la MVM représente le *best estimate* (en tant que provision technique, c'est un *best estimate*) du coût de l'immobilisation des SCR des dates 0, ... , *n* . (voir 1.4.4))

1.3.2) Circularité de la définition de la MVM

L'idée est la suivante : la MVM est construite à partir des SCR. Or la MVM, en tant que provision, entre ainsi dans le résultat pour un exercice donné et les SCR sont calculés à partir des résultats. Ainsi, la MVM et les SCR sont les objets d'équations simultanées donc de circularité dans leur définition même.

Le QIS5 suggère de prendre les SCR dans la définition de la MVM mais l'inverse n'est pas pris en compte comme le souligne l'extrait ci-dessous. Cette convention est adoptée dans la suite du mémoire.

"Technical provisions in the SCR standard formula calculations

SCR.1.3. For the purposes of the SCR standard formula calculation, technical provisions should be valued in accordance with the specifications laid out in the section on valuation. To avoid circularity in the calculation, any reference to technical provisions within the calculations for the individual SCR modules is to be understood to exclude the risk margin."

La prise en compte de cette circularité est abordée dans Daya Viossat (2008) par une forme paramétrique intégrant ce phénomène. Elle propose de résoudre cet aspect pour une spécification particulière, en résolvant le système d'équations simultanées par récursivité en partant de la date ultime.

1.4) Formalisation des SCR avec les *best estimates*

1.4.1) Notations

Les notations développées concernent une branche d'activité (*business line*) particulière et une année d'occurrence des sinistres fixée. Les développements dans le temps des sinistres et le calcul des provisions techniques requises par Solvabilité II ne sont relatifs qu'à ce cadre.

Dans ce document, il n'est pas tenu compte de l'inflation des prix sur le marché des garanties de la *business line* considérée.

- Soit la filtration $(F_t)_{t \in [0;n]}$ représentant l'information croissante dans le temps.
- Le taux annuel proportionnel est noté r .⁹
- Soient I_t le paiement (incrémental) effectué à l'année t ¹⁰. I_t est une variable aléatoire F_t mesurable.
- Le montant des sinistres cumulés payés à l'année t est $C_t = \sum_{i=1}^t I_i$
- Le *best estimate* à l'année t des *cashflows* à venir est $BE_t = E\left(\sum_{i=t+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^{i-t}} \mid F_t\right)$ ¹¹

⁹ En toute rigueur il faut utiliser les taux *forward* extrapolés par absence d'opportunité d'arbitrage depuis une courbe de taux. En outre, il faut disposer d'un modèle de taux. Cette étape ne correspondant pas à la pratique actuelle d'AXA Global P&C, elle n'est pas réalisée ici.

¹⁰ Les paiements ont lieu en fin d'année pour les montants dus dans l'intervalle $[t-1; t[$.

Dans cette partie il n'est pas tenu compte de la circularité des définitions de la MVM et des SCR, au sens où il est considéré que la MVM n'intervient pas dans la définition des SCR, ainsi que mentionné en 1.3.2).

1.4.2) SCR prime

Le SCR prime est un concept utilisé par AXA Global P&C qui correspond au SCR de la première année de développement en faisant les hypothèses suivantes :

- Les primes sont perçues le 1^{er} janvier
- Les pertes sont réglées le 31 décembre

Calculé uniquement à $t = 0$, le SCR prime est le montant des capitaux propres répondant aux exigences du QIS5, *i.e.* égal au quantile 99,5% de l'opposé du résultat de l'activité considérée à horizon un an.

Le résultat de cet exercice à la date $t = 1$ est donc $primeacquise \cdot (1 + r) - BE_1 - I_1$. Le SCR prime est défini comme le quantile 99,5% conditionnel sachant l'information disponible à $t = 0$ de l'opposé de cette quantité moins l'espérance conditionnelle de cette même quantité (sachant la même information).

$$SCR_{prime} = \frac{1}{1+r} \left([99,5\%] \left(\sum_{i=1}^n \frac{E(I_i | F_1)}{(1+r)^{i-1}} | F_0 \right) - E \left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{(1+r)^{i-1}} | F_0 \right) \right) = [99,5\%] \left(\sum_{i=1}^n \frac{E(I_i | F_1)}{(1+r)^i} \right) - BE_0$$

1.4.3) SCR réserve à la date t

Aux dates $t \geq 1$, fort de l'information additionnelle F_t , l'assureur est en mesure de fournir une estimation plus précise du montant ultime des sinistres. Le SCR réserve est défini à l'instar du SCR prime à la date $t = 0$ dans l'objectif de couvrir la variabilité du résultat de l'exercice à venir $[t; t+1[$ sachant cette information additionnelle. Au cours de cet exercice, l'assureur aura subi la sinistralité I_{t+1} . Il a provisionné de la date t à la date $t+1$ le montant BE_t et provisionnera BE_{t+1} à compter de la date $t+1$.

Le résultat de l'exercice est donc $BE_t(1+r) - BE_{t+1} - I_{t+1}$. Cette variable aléatoire est bien F_{t+1} mesurable. Par construction, $E(BE_t(1+r) - BE_{t+1} - I_{t+1} | F_t) = 0$.

Par suite, comme le SCR est décompté à partir de la date t , il vient :

$$SCR_{réserve,t} = [99,5\%] \left(\frac{-Résultat_{exercice[t,t+1[}}{1+r} | F_t \right)$$

¹¹ D'après le QIS5 : "TP.2.1. The best estimate should correspond to the probability weighted average of future cash-flows taking account of the time value of money."

Cette définition est analogue à la suivante : $SCR_{réserve,t} = [99,5\%] \left(\frac{BE_{t+1} + I_{t+1}}{1+r} - BE_t \mid F_t \right)$.

1.4.4) La MVM à la date t

Avec CoC le coût du capital, la formule suivante est obtenue :

$$MVM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^n E \left(\frac{SCR_i}{(1+r)^{i+1-t}} \mid F_t \right)$$

L'actualisation est liée à la date de rémunération du capital SCR_i qui a lieu en $i+1$ puisque celui-ci est immobilisé sur l'exercice $[i; i+1]$: le SCR_i est traité comme un *cashflow* ayant lieu en date $i+1$.

1.5) Expression de la MVM en termes de flux actualisés

1.5.1) Rappels des notations

Dans la totalité de ce paragraphe, le taux d'intérêt est supposé nul. La sinistralité considérée est celle d'une année d'occurrence donnée : l'année $[0;1]$. Les paiements pour ces sinistres s'étalent sur les années suivantes jusqu'à clôture des sinistres en année n .

Notations :

- $\forall j \in [1, n]$, I_j : paiements incrémentaux ayant eu lieu sur l'exercice $[j-1; j]$ payés à la date j
- $\forall j \in [1, n]$, $\widetilde{C}_j$: paiements cumulés ayant eu lieu sur la période $[0; j]$ actualisés en 0, ainsi $\widetilde{C}_j = \sum_{i=1}^j \frac{I_i}{(1+r)^i}$
- $\forall j \in [0, n]$, F_j : sous-tribu associée à l'information disponible à chaque fin d'exercice comptable
- $(F_j)_{j \in [0, n]}$ forme donc une filtration de l'espace de travail probabilisé
- $\forall j \in [0, n]$, BE_j est le *best estimate* des provisions à placer au passif au début de l'année j

1.5.2) Expression des SCR

Le résultat de l'année $[i; i+1]$ s'écrit :

$$Résultat_{[i; i+1]} = -I_{i+1} + (1+r) \cdot BE_i - BE_{i+1}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{Résultat}_{[i,i+1]} &= (1+r)^{i+1} \left(\widetilde{C}_i - \widetilde{C}_{i+1} \right) + E \left(\sum_{k=i+1}^n \frac{I_k}{(1+r)^{k-(i+1)}} \mid F_i \right) - E \left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^{k-(i+1)}} \mid F_{i+1} \right) \\
 &= (1+r)^{i+1} \left(\widetilde{C}_i - \widetilde{C}_{i+1} + E \left(\sum_{k=i+1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} \mid F_i \right) - E \left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} \mid F_{i+1} \right) \right) \\
 &= (1+r)^{i+1} \left(\widetilde{C}_i - \widetilde{C}_{i+1} + E \left(\widetilde{C}_n - \widetilde{C}_i \mid F_i \right) - E \left(\widetilde{C}_n - \widetilde{C}_{i+1} \mid F_{i+1} \right) \right) \\
 \text{Soit } \boxed{\text{Résultat}_{[i,i+1]} &= (1+r)^{i+1} \left(E \left(\widetilde{C}_n \mid F_i \right) - E \left(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1} \right) \right)}
 \end{aligned}$$

car les $\widetilde{C}_j$ sont F_j mesurables.

Par définition du SCR réserve associé à l'exercice $[i; i+1]$, il est possible de l'écrire comme le quantile 99,5% de l'opposé du résultat de l'exercice $[i; i+1]$ conditionnellement à l'information disponible à la date i , le SCR étant calculé à la date i pour l'exercice $[i; i+1]$, divisé par $1+r$.

$$\begin{aligned}
 SCR_i &= \frac{1}{1+r} \cdot (1+r)^{i+1} \cdot \left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) - E(\widetilde{C}_n \mid F_i) \mid F_i \right) - E \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) - E(\widetilde{C}_n \mid F_i) \mid F_i \right) \right\} \\
 \text{D'où, } \boxed{SCR_i &= (1+r)^i \cdot [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) - (1+r)^i \cdot E(\widetilde{C}_n \mid F_i)}
 \end{aligned}$$

En effet $[99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_i) \mid F_i \right) = E(\widetilde{C}_n \mid F_i)$ et $E \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) = E(\widetilde{C}_n \mid F_i)$ par propriété des projections itérées de l'espérance conditionnelle.

1.5.3) Expression de la MVM

La MVM est calculée à un instant t pour être placée en provisions techniques. Pour mémoire,

$$MVM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{E(SCR_i \mid F_t)}{(1+r)^{i+1-t}}$$

Soit en insérant l'expression plus haut :

$$\begin{aligned}
 MVM_t &= \frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot \sum_{i=t}^{n-1} E \left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) - E(\widetilde{C}_n \mid F_i) \mid F_t \right\} \\
 \Leftrightarrow MVM_t &= \frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \left(E \left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) \mid F_t \right\} - E(\widetilde{C}_n \mid F_t) \right)
 \end{aligned}$$

Donc, par projections itérées :

$$\boxed{MVM_t = -\frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot (n-t) \cdot E(\widetilde{C}_n \mid F_t) + \frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot \sum_{i=t}^{n-1} E \left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) \mid F_t \right\}}$$

Soit par exemple en $t=0$:

$$\boxed{MVM_0 = -\frac{CoC}{1+r} \cdot n \cdot E(\widetilde{C}_n) + \frac{CoC}{1+r} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E \left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n \mid F_{i+1}) \mid F_i \right) \right\}}$$

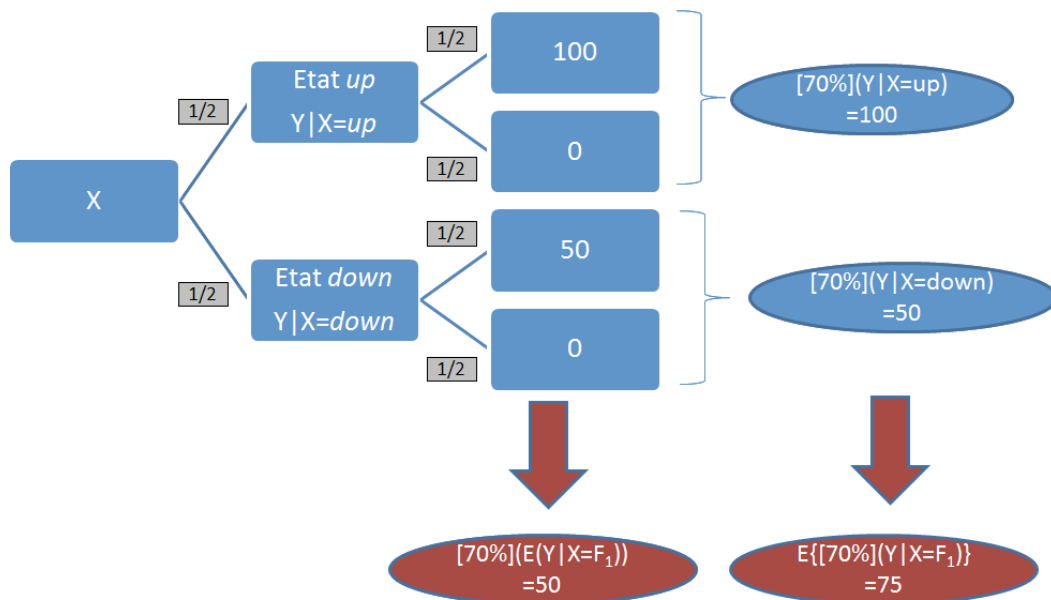
1.5.4) Problématiques formelles et techniques associées à l'expression de la MVM

L'expression

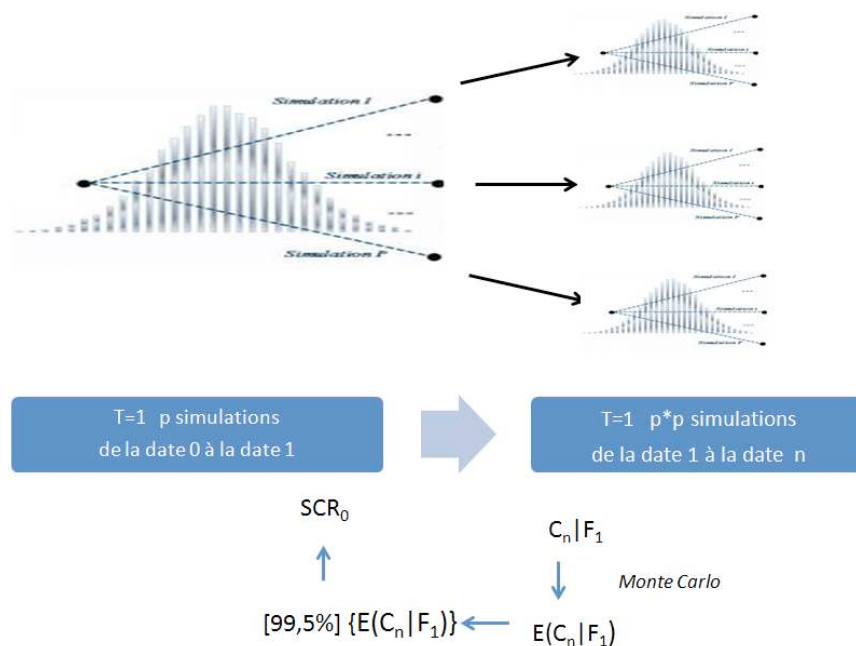
$$MVM_t = -\frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot (n-t) \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) + \frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot \sum_{i=t}^{n-1} E\left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i \right) | F_t \right\}$$

obtenue précédemment recèle deux difficultés.

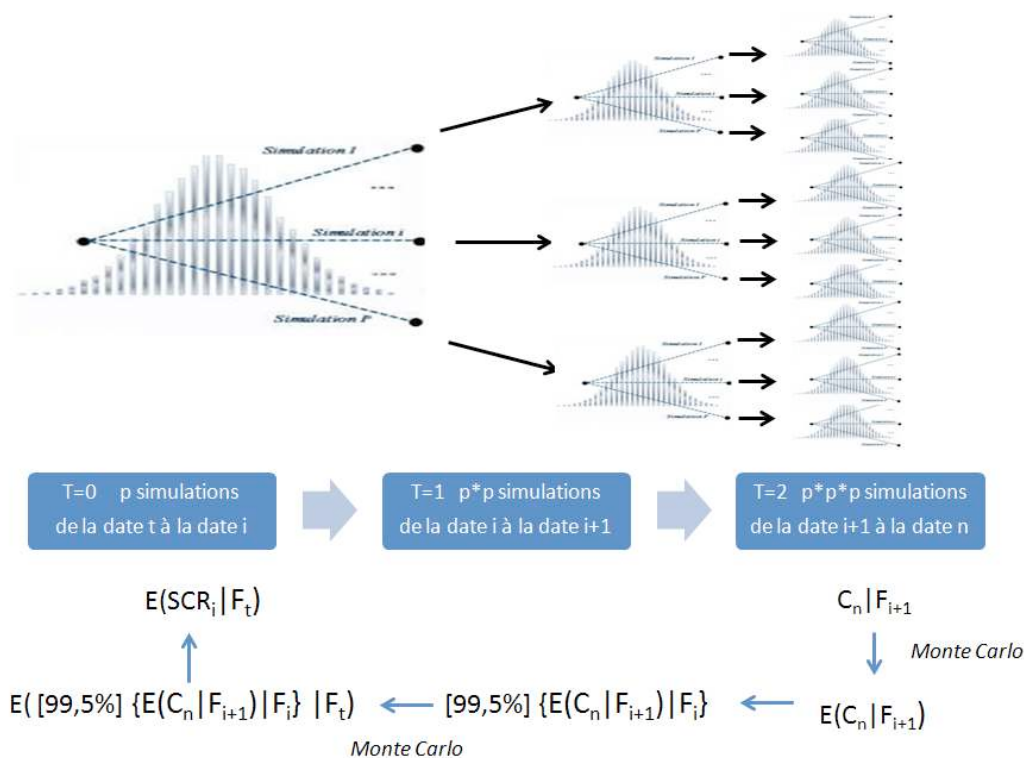
D'une part, l'expression formelle ne peut être développée. Ceci résulte de l'impossibilité de permuter quantile conditionnel et espérance conditionnelle. Un simple contre-exemple permet de se convaincre de ceci aisément :



D'autre part, l'obtention par simulation des espérances des différents SCR est impossible étant donné les capacités de calcul actuelles. En effet, en décomposant les différentes étapes nécessaires, le procédé de calcul fait apparaître la nécessité d'une étape de stochastique dans le stochastique pour le premier SCR et d'au moins deux étapes de stochastique dans le stochastique pour les SCR suivants. Ceci peut être illustré comme suit.



Pour les SCR suivants le schéma précédent devient :



Cette problématique du stochastique dans le stochastique est abondante notamment dans les études afférentes aux modèles ALM (*Asset Liability Management*). Elle fait apparaître la nécessité de trouver des formes alternatives à cette procédure.

Dans le cas de la MVM, ceci justifie la nécessité des approximations proposées par le QIS5.

1.6) Diversification de la MVM

Dans le calcul de la MVM se pose également la question de la granularité du calcul, c'est-à-dire les niveaux auxquels sont calculées et agrégées les MVM. Le QIS5 propose à cet égard des recommandations univoques:

"TP.5.26. The risk margin should be calculated per line of business. [...]"

*TP.5.27. The risk margin per line of business should take the diversification between lines of business into account. [...] **The allocation of the risk margin to the lines of business should be done according to the contribution of the lines of business to the overall SCR during the lifetime of the business.**"*

Il résulte de ceci que les MVM calculées sur un contrat donné peuvent être diversifiées en utilisant les coefficients établis par le modèle interne d'AXA Global P&C. Grâce à un effet de diversification mesuré empiriquement, la somme des SCR calculés individuellement par *Line of Business* (LoB) excède le SCR de l'activité globale¹². L'utilisation d'un modèle interne permet donc de calculer les SCR par LoB, puis de leur appliquer un coefficient (dépendant de la LoB) pour évaluer la part réelle qu'ils représentent dans le SCR de l'activité globale.

La sinistralité étudiée n'entre pas dans la détermination des coefficients de diversification car la valeur des sinistres de la LoB étudiée est marginale par rapport à l'ensemble du portefeuille d'AXA Global P&C. Les coefficients de diversification fournis par AXA Global P&C sont les suivants pour la LoB « Responsabilité professionnelle médicale, sinistralité atypique »¹³:

Diversification du SCR prime	Diversification des SCR réserve
0,339	0,394

Ce modèle interne fait apparaître un coefficient de diversification pour les SCR prime et un coefficient pour les SCR réserve. Ces coefficients de diversification constituent la contrepartie des matrices de corrélation du modèle standard.

Ces coefficients soulignent l'importance que revêt la diversification des activités d'assurance. Un assureur n'ayant aucune autre branche d'activité (*monoliner*) aurait donc de ce point de vue un désavantage compétitif. Dans cette mesure Solvabilité II amène à une plus de concentration du secteur de l'assurance.

¹² Dans le cas d'un vecteur de risques des LoB elliptique, la VaR 99,5% est une mesure de risque sous-additive et l'effet de diversification est garanti par la théorie, voir Francq (2012).

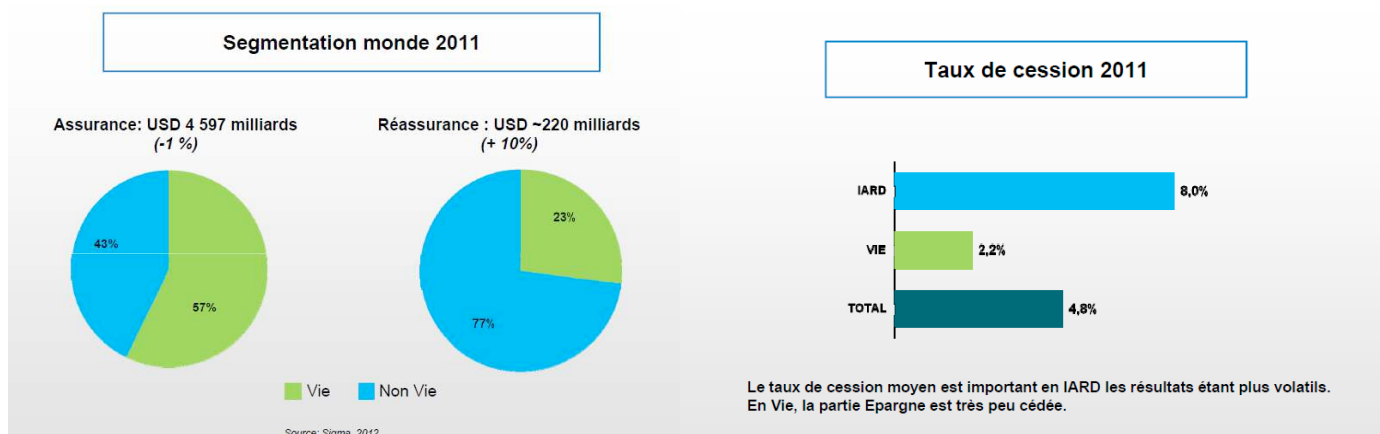
¹³ En admettant que les coefficients de diversification d'AXA France, qui souscrit directement le traité, sont similaires.

2) Programme de réassurance et rôle de la MVM

Afin de saisir le contexte global d'application des calculs de MVM menés dans la suite du mémoire, il est essentiel d'effectuer un panorama du cadre d'étude, celui de la réassurance. Cette partie souligne notamment l'importance du volume de la réassurance et donc l'intérêt de l'étude.

2.1) Aperçu du marché mondial de la réassurance

Le marché mondial de la réassurance représente un volume global de 220 milliards d'euros en 2011 soit à peine 5% du volume du marché de l'assurance. Il se concentre essentiellement sur la réassurance non vie qui représente 3/4 de l'activité. Ceci est confirmé par les taux de cession moyens (source FFSA 2011 – fédération française des sociétés d'assurance) :



L'objet d'étude n'est donc pas marginal et les enjeux financiers sous-jacents sont considérables.

2.2) Notions élémentaires de réassurance

L'objet de ce paragraphe est de rappeler quelques notions élémentaires utilisées dans le secteur de la réassurance. Ceci permettra dans un deuxième temps d'exposer l'influence de la MVM dans le calcul du juste prix d'un traité de réassurance.

2.2.1) Distinction traités et facultatives

Un traité (*treaty*) est un contrat par lequel l'assureur et le réassureur s'engagent pour tous les risques inclus dans un portefeuille. Par exemple, un traité peut concerner l'ensemble des contrats automobiles ou l'ensemble des contrats de responsabilité professionnelle.

Les contrats dits facultatifs (*facultatives*) concernent un risque spécifique c'est-à-dire une unique source potentielle de sinistre (individu, évènement ou objet donné). Ce type de contrat implique des coûts d'expertise et coûts administratifs élevés et de ce fait est destiné aux risques pour lesquels les contrats de type traité sont insuffisants. Par exemple, les

contrats d'assurance souscrits dans l'éventualité d'un dysfonctionnement informatique de grande ampleur lors du passage en l'an 2000 furent de type *facultative*.

2.2.2) Réassurance proportionnelle et non proportionnelle

Les traités de réassurance sont subdivisés en deux catégories : les traités proportionnels et les traités non proportionnels.

Un traité proportionnel - ou prorata - est un contrat par lequel l'assureur et le réassureur partagent proportionnellement toutes les primes et toutes les charges de sinistres suivant un pourcentage prédéfini. Les deux principaux contrats de ce type sont les contrats de type Quote part (*Quota Share*) et les contrats de type excédent de Plein (*Surplus Treaty*).

Un traité non proportionnel est un agrément par lequel le réassureur s'engage à payer toutes les pertes excédant un montant donné nommé rétention. Les deux principaux contrats d'assurance non proportionnelle sont l'excédent de Sinistre (*Excess of Loss*) et l'excédent de Perte (*Stop Loss* ou *Aggregate Excess of Loss*).

2.2.3) Produits de réassurance proportionnelle

Quote Part

Un Quote Part (*Quota Share* (QS)) est un contrat définissant *a priori* un pourcentage (noté p_1 par la suite) qui sera appliqué aux primes et aux sinistres.

Deux autres clauses classiques pour ce type de contrat peuvent être mentionnées :

- D'une part, le contrat stipule généralement un montant maximum (*maximum liability*) par risque. Par exemple, pour un *Quota Share* ayant un pourcentage de 50% et un montant maximum de 5 000 000, si la somme assurée est de 20 000 000, alors le réassureur prendra en charge 25% des charges sinistres et recevra 25% des primes d'assurance.
- D'autre part, un contrat de ce type contient généralement une clause de type *sliding scale*. En effet, étant donné que l'assureur supporte des frais liés à la prospection, la gestion et le renouvellement des contrats d'assurance, il est habituel que le réassureur accepte de ne recevoir qu'une partie des primes qui lui sont théoriquement destinées. Ceci se manifeste en pratique par la spécification d'une *ceding commission* qui n'est autre que le pourcentage noté p_2 appliqué aux primes théoriquement dues par l'assureur. Ainsi, si P désigne le montant des primes reçues par l'assureur, le réassureur aura pour prime $P \cdot p_1 \cdot (1 - p_2)$. Cependant, il est également logique que ce pourcentage p_2 soit une fonction décroissante du montant de pertes cédées par l'assureur.

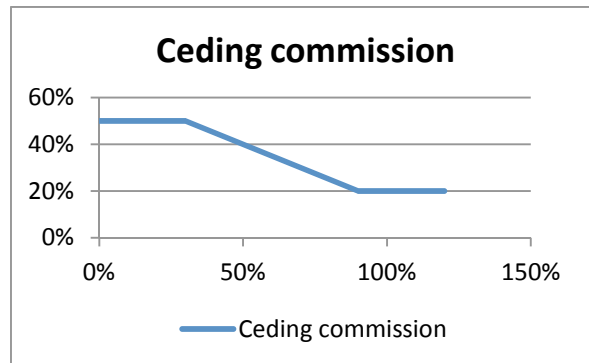
De ce fait, la manière habituelle est de définir une fonction linéaire du *loss ratio* (LR) défini

$$\text{par } LR = \frac{\text{Charge de sinistres}}{\text{primes acquises}}.$$

Généralement, une borne supérieure et une borne inférieure sont également définies de sorte que la *ceding commission* est de la forme suivante :

$$\exists (\text{Max}, \text{Min}, a, b, \text{borne_inf}, \text{borne_sup}) \in \mathbb{R}^6, \forall LR > 0,$$

$$f(LR) = \text{Max} \cdot 1_{LR < \text{borne_inf}} + \text{Min} \cdot 1_{LR > \text{borne_sup}} + 1_{\text{borne_sup} > LR > \text{borne_inf}} [a \cdot LR + b]$$



Excédent Plein (*Surplus Treaty*)

Un traité de type Excédent Plein ne diffère du *Quota Share* que par la manière dont le pourcentage cédé au réassureur est déterminé. Ce type de contrat définit en effet une limite inférieure sur le montant assuré qui est le montant en-dessous duquel le réassureur ne prend aucune part. Cette limite est nommée Plein de Rétention (*retention*). Par exemple, si le contrat stipule une *retention* de 3 000 000 et que la somme assurée est de 2 500 000, le pourcentage pris par le réassureur sera de 0%. Si le montant réassuré est de 4 000 000, le pourcentage du réassureur sur ce contrat sera de 25%.

De façon analogue au *Quota Share*, un montant maximum de participation du réassureur (*maximum liability*) est défini. Ce dernier est défini comme un multiple de la *retention* ou encore nombre de *lines*. Prolongeant l'exemple précédent, si le contrat définit un maximum de 3 *lines* alors le réassureur prendra une part représentant la proportion du montant assuré compris entre 3 000 000 et 12 000 000. Si le montant réassuré est de 15 000 000 alors le réassureur prendra une part de 9/15 des primes et des sinistres.

Comparaison de ces deux types de contrats

Un QS est un contrat qui permet au réassureur de prendre une part dans chacun des contrats du primo assureur. De ce fait, aucun phénomène de type *adverse selection* dû au montant assuré ne le menace. Ce type de contrat est généralement souscrit par des compagnies souhaitant augmenter leur capacité de souscription. Grâce à un contrat de type *Surplus*, l'assureur garantit une homogénéité de son portefeuille quant aux sommes assurées.

2.2.4) Produits de réassurance non proportionnelle

Excédent de Sinistre (*Excess of Loss ou XS*)

Ce type de contrat est un contrat type *per risk*, par lequel le réassureur prend en charge le montant des pertes excédant un certain montant, nommé *retention*, et en-deçà d'une limite supérieure. Par exemple, pour un contrat de type 10 000 000 au-delà de 5 000 000, si l'assureur subit une perte de 12 000 000, le réassureur devra prendre en charge 7 000 000.

Si l'assureur subit une perte de 20 000 000, le réassureur prendra en charge le montant maximum de 10 000 000. Un tel contrat est également noté 10 000 000 XS 5 000 000.

Le pourcentage du réassureur (X) pour une somme assurée de (S) lors d'un contrat définissant une rétention (R) et une borne supérieure (M) est alors :

$$X = \frac{1_{R < S < M}(S - R) + 1_{S > M}(M - R)}{S}$$

Deux autres aspects caractérisant ce type de contrat sont à mentionner :

D'une part, il est habituel pour ce genre de contrat de distinguer les XS de type *working covers* des *catastrophe covers*. Les premiers sont caractérisés par le fait que l'assureur et le réassureur sont conscients que des sinistres auront régulièrement des montants au-delà de la rétention. Dans le deuxième cas, la *retention* est donc généralement définie par un montant supérieur et la tarification est particulièrement ardue. En effet, la loi des grands nombres ne peut pas être appliquée à un nombre de sinistres très faibles. En outre, il est souvent déraisonnable de comparer le coût engendré par une catastrophe naturelle datant de plusieurs décennies et le coût qu'elle engendrerait actuellement.

D'autre part, le contrat peut être défini avec pour référentiel le risque ou alternativement l'événement. Soit par exemple un contrat de type 200 000 XS 100 000 et un feu qui détruit simultanément deux habitations ayant chacune une valeur de 100 000. Dans l'hypothèse où le contrat a pour référentiel l'événement le réassureur devra couvrir 100 000, si le référentiel est le risque alors le réassureur n'aura pas à couvrir ces sinistres.

Excédent de Perte (*Stop Loss or aggregate Excess of Loss*)

Ce type de contrat suit la même logique que l'*Excess of Loss* mais il concerne tous les contrats souscrits dans une branche donnée (*line of business*). Ainsi, il assure l'assureur essentiellement contre le risque de fréquence élevée des sinistres importants dans une branche donnée¹⁴. Ce contrat est aussi marqué par une priorité (ou rétention) et une borne supérieure qui sont généralement exprimées en pourcentage des primes correspondantes. Par exemple, si le cumul des primes d'assurance automobile d'un assureur s'élève à 2M d'euros, un contrat *Stop Loss* 20% XS 110% couvrira 0,4 M d'euros au-delà de 2,2 M d'euros. Ce type de contrat intervient généralement après une couverture par risque de type proportionnelle ou non proportionnelle.

¹⁴ Contrairement à la catastrophe Cover mentionnée ci dessus.

2.3) Création de valeur

2.3.1) Impact d'un traité de réassurance excédent de sinistre

Afin d'évaluer le prix juste d'un traité de réassurance, deux éléments sont à intégrer :

- D'une part, la différence de prime pure entre la sinistralité brute et la sinistralité nette est le fondement même d'un traité de réassurance.
- D'autre part, la *Market Value Margin* doit également être prise en compte. En effet, un traité XS permet de réduire la MVM et donc la quantité de capital à immobiliser. Ceci représente un coût d'opportunité qui constitue lui aussi une création de valeur. Cette différence de MVM doit ensuite être corrigée par le taux de taxation.

Cette prise en compte de la MVM est d'autant plus forte que les sinistres étudiés sont des sinistres de branches longues (*long tail*). En outre, le développement très lent des sinistres (voir 2.4.2) implique que les SCR réserve vont probablement être importants¹⁵ et donc la MVM d'autant plus significative sur l'impact du traité de réassurance.

Un élément supplémentaire à intégrer est le risque de défaut du réassureur. En effet, si l'*underwriting risk* est réduit, le risque de crédit est lui aussi influencé par la souscription des contrats de réassurance. Aussi, le QIS3 suggère par exemple de considérer le coût de remplacement comme mesure du risque de crédit. Cette prise en compte a évolué dans les cadres des QIS 4 et 5 par des mesures plus proches de celles considérées par Bâle II¹⁶. Cependant, il s'agit ici d'un effet de second ordre au même titre que le risque de taux par exemple. Ces derniers ne sont donc pas pris en compte pour les traités étudiés.

2.3.2) Expression formelle

Le gain espéré de l'assureur avant réassurance est :

$(1-\tau).(PC-PP_{brute})-MVM_{brute}$ où PC désigne la prime commerciale, PP la prime pure des sinistres pour l'assureur et τ le taux d'imposition.

Suite à la réassurance la situation nouvelle est :

$(1-\tau).(PC-PP_{nette}-PR)-MVM_{nette}$ où PR désigne la prime de réassurance.

Soit CV la différence entre les gains espérés nets et bruts. La formule suivante est obtenue :

$$CV \geq 0 \Leftrightarrow (1-\tau).(PC-PP_{nette}-PR)-MVM_{nette} - (1-\tau).(PC-PP_{brute})+MVM_{brute} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\tau).(PP_{brute}-PP_{nette}-PR)+MVM_{brute}-MVM_{nette} \geq 0$$

$$\text{Soit, } PR \leq (PP_{brute}-PP_{nette}) + \frac{MVM_{brute}-MVM_{nette}}{1-\tau}$$

¹⁵ En faisant par exemple l'hypothèse que la variance des sinistres payés est une fonction croissante de la proportion réglée en une année de développement donnée

¹⁶ *Loss Given default*Probability of default*

Il en découle que le contrat de réassurance crée de la valeur si et seulement si la prime de réassurance est inférieure à la somme du différentiel de prime pure et du différentiel de MVM corrigé du taux de taxation. Une autre formulation de ce résultat est proposée dans Ray (2012), aux chapitres IV et V. Dans le cadre d'un modèle interne, la MVM intervenant ci-dessus, prend en compte l'effet de diversification exposé en 1.6).

2.4) Données étudiées

2.4.1) Données de sinistralité

Généralités

Les données brutes fournies pour ce mémoire sont des données brutes de réassurance présentant le déroulé de pertes en responsabilité professionnelle médicale. Il s'agit de l'ensemble des sinistres d'un portefeuille dont le coût ultime estimé excède le seuil de 3 000 000 euros. Ces sinistres sont survenus entre 1998 et 2011 et les données présentent le déroulé des paiements et prévisions de paiements pour les sinistres individuels survenus sur cette période, en détaillant la part de suspens et de payés. Ainsi, les IBNER¹⁷ sont présents contrairement aux IBNYR¹⁸.

Des précisions quant aux circonstances médicales et juridiques exactes des sinistres sont présentées. Elles font apparaître que les sinistres sont dans plus d'un tiers des cas relatifs à des accouchements ; les assurés sont des professionnels de santé, médecins, puéricultrices et infirmiers entre autres. Par ailleurs, les procédures sont essentiellement contentieuses et non transactionnelles.

Précédant l'étude effectuée dans ce mémoire, une analyse de la sinistralité par AXA Global P&C a fait apparaître que la sinistralité globale ultime pouvait être décomposée en le produit de deux variables aléatoires indépendantes:

- une fréquence annuelle modélisée par une loi de Poisson de paramètre $\mu = 6,53$,
- une sévérité modélisée par une loi de Pareto généralisée de paramètres :
 $scale = 4\,651\,450$, $shape = 0,351237$, $seuil = 3\,000\,000$. Le support de la loi est donc $[3\,000\,000, +\infty[$

Des contraintes opérationnelles n'ont pas permis l'accès au logiciel permettant d'obtenir ces estimations. Cependant, il a été préconisé d'utiliser cette modélisation lorsqu'elle était compatible avec les méthodes de calculs.

L'utilisation d'une loi de Pareto permet de simuler une sévérité à queue épaisse. Le seuil a été fixé à 3 000 000 comme séparation entre la sévérité atypique et attritionnelle. La

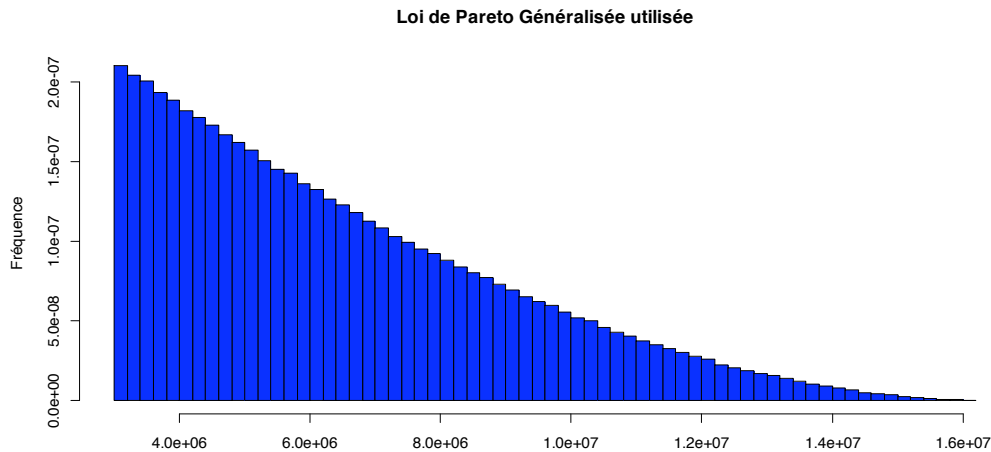
¹⁷ *Incurred but not enough reported* : montant correspondant à des sinistres déjà reportés mais non suffisamment provisionnés

¹⁸ *Incurred but not yet reported* : montant correspondant à des sinistres non reportés

fonction de survie d'une loi Pareto généralisée s'écrit comme suit, avec ξ le paramètre de *shape*, μ le paramètre de seuil et σ le paramètre de *scale* :

$$\forall x \geq \mu, P(X > x) = \left[1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Un histogramme de la loi de Pareto utilisée et les statistiques descriptives issues de simulations sont présentés ci-dessous.



Statistiques descriptives issues de 10^6 simulations					
Minimum	1st Quartile	Median	Mean	3rd Quartile	Maximum
3 000 000	4 278 045	5 866 175	6 444 623	8 108 373	$+\infty$

Commentaire des lois de fréquence et de sévérité retenues :

Même sans avoir accès à la procédure qui a permis cette modélisation, quelques résultats de la théorie des valeurs extrêmes permettent d'avoir une intuition forte du résultat tant au niveau de la fréquence que de la sévérité. Il convient de se remémorer que les sinistres envisagés sont les sinistres dépassant le seuil de 3 000 000.

D'une part, la loi de la fréquence retenue se justifie par la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson comme le soulignent Charpentier et Denuit (2004).

En effet, soient n sinistres individuels i.i.d. $X_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Si N_n désigne le nombre de dépassements du seuil u_n par définition $N_n = \sum_{i=1}^n 1_{X_i > u_n}$, il vient immédiatement $N_n \sim B(n, \overline{F(u_n)})$ où $\overline{F}$ désigne la fonction de survie des sinistres.

Si de plus la condition $\exists \tau \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F(u_n)} = \tau$ est vérifiée, alors comme $\lim_{n \rightarrow \infty} E(N_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F(u_n)} = \tau$, par convergence des lois binomiales vers les lois de Poisson (voir par exemple Christine (2012)), il en résulte que N_n converge vers une loi de Poisson de paramètre τ .

Sur les données étudiées le seuil u_n est fixe et le nombre de données historiques étudié n l'est également. De ce fait, la condition $\exists \tau \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F(u_n)} = \tau$ n'est pas exclue.

D'autre part quelques résultats de la théorie des valeurs extrêmes font apparaître la loi de Pareto généralisée.

- D'après le théorème de Fisher-Tippett, si pour une distribution F , l'échantillon des maxima normalisés¹⁹ converge en loi vers une distribution non dégénérée G , alors cette distribution G est de type GEV ²⁰.
- Dans ce cas, par le théorème de Balkema-de Haan-Pickands, il en découle que la distribution des excès au-dessus d'un seuil élevé converge vers une loi de Pareto Généralisée GPD lorsque le seuil tend vers la limite supérieure du support de F .

Dans le cas étudié, en supposant que la loi des maxima normalisés ne soit pas dégénérée et en admettant que le seuil considéré (3 000 000) soit suffisamment grand, la loi de Pareto généralisée est la loi naturelle pour modéliser la sévérité des sinistres.

2.4.2) Coefficients de développement des sinistres

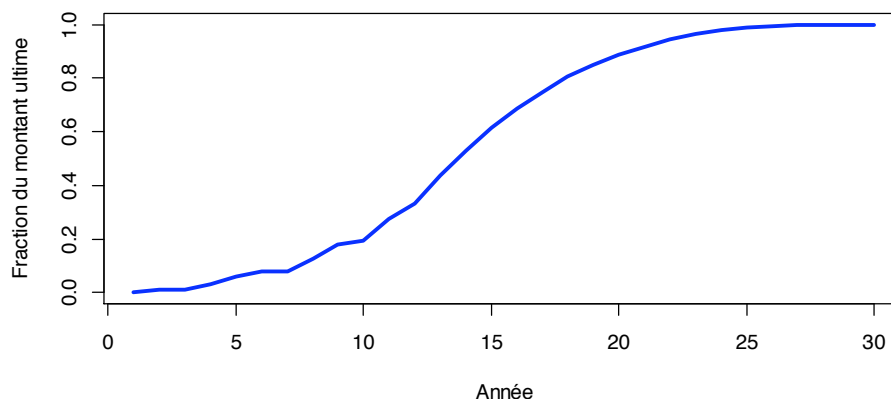
En date 0, les paiements s'étalent dans le temps sur 30 ans (durée estimée par AXA Global P&C). Les coefficients présentés dans le tableau ci-dessous sont les espérances des pourcentages du montant de sinistralité ultime que constituent les paiements cumulés $\frac{E(C_1)}{E(C_n)}, \dots, \frac{E(C_n)}{E(C_n)}$, et ont été estimés par AXA Global P&C.

¹⁹ Par un couple de suites $(a_n) > 0$ et (b_n) , normalisation de la forme $\frac{(M_n - b_n)}{a_n}$ avec

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

²⁰ Ensemble des lois de Fréchet, Gumbel et Weibull

Coefficients de développement des sinistres



Année de développement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ratio de paiement	5,00E-04	0,0102	0,0121	0,0311	0,0609	0,076	0,0789	0,1247	0,1802	0,1929
Année de développement	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ratio de paiement	0,2747	0,3345	0,4353	0,5302	0,6139	0,6869	0,7502	0,8042	0,8499	0,8878
Année de développement	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ratio de paiement	0,9188	0,9434	0,9625	0,9767	0,9868	0,9935	0,9974	0,9993	0,9999	1

Il apparaît clairement sur ce graphique que le développement des sinistres est singulièrement lent. En particulier, au bout de 7 années de développement, seuls 8% des sinistres sont réglés. Le seuil de 50% est n'atteint qu'après 14 années.

Un régime de croissance assez fort suit entre les années 14 et 22. Cette croissance s'infléchit *in fine* sur les dernières années.

2.4.3) Traité étudié

Afin d'illustrer les méthodes proposées dans le document sur un traité type, les applications numériques pour les SCR et MVM dans les parties théoriques 3) et 4) sont effectuées sur le portefeuille brut et sur le portefeuille net d'un traité de réassurance de type excédent de sinistre : $+\infty$ XS 5 000 000.

Il s'agit alors de remarquer que le paiement du réassureur est donné pour chaque sinistre, $Loss_i$, par :

$$\min(\text{maximum liability}, \max[Loss_i - \text{retention}, 0])$$

En partie 5), deux traités de réassurance, plus complexes, sont abordés²¹. Ces deux traités sont envisagés par AXA Global P&C pour transférer une partie du risque du portefeuille « Responsabilité professionnelle médicale, sinistralité typique ». L'application des différentes méthodes de calcul de la MVM associée au concept de création de valeur permettra

²¹ Notamment en intégrant une *maximum liability* et un *Aggregate Annual Limit*. Voir section 5.1).

d'établir une estimation de leur juste prix et pourra être comparée aux cotations de réassureurs ayant fait une offre pour ces traités.

3) MVM : approximations et calculs empiriques

3.1) Méthodes de calcul de la MVM proposées par le QIS5

Après avoir donné une expression littérale de la MVM, le QIS5 propose 5 manières de calculer la MVM. Celles-ci sont regroupées dans les paragraphes TP.5.32 et suivants : «*hierarchy of simplification* ».

Les cinq méthodes proposées sont les suivantes :

1. Procéder au calcul complet et exact des SCR.
2. Approximer les risques ou sous-risques²² individuels devant être utilisés dans le calcul futur des SCR.
3. Approximer par une approche proportionnelle.

Cette méthode est alors basée sur l'approximation $\forall t \in [1; n], SCR_t = SCR_0 \cdot \frac{BE_t}{BE_0}$

Où n désigne l'horizon de développement des sinistres et BE désigne le *best estimate* des passifs.

4. Approximer globalement les SCR futurs.

Cette approximation suggère de calculer la MVM à partir d'un temps moyen en lequel les paiements auraient lieu, la *duration* modifiée.

Ceci correspond au paragraphe TP.5.49. du QIS5.

5. Approximer globalement la MVM comme pourcentage du *best estimate*.

$MVM_0 = \alpha_{lob} \cdot BE_0$ où α_{lob} est fourni par le régulateur en fonction du type d'activité assurée.

Les pourcentages à utiliser pour la méthode 5 sont spécifiés dans le QIS5 :

Pourcentage du <i>best estimate</i> par secteur d'activité			
Primo assurance et réassurance proportionnelle		Credit and suretyship	9.5 %
Medical expenses	8.5%	Legal expenses	6.0 %
Income protection	12.0%	Assistance	7.5 %
Workers' compensation	10.0 %	Miscellaneous non-life insurance	15.0 %
Motor vehicle liability	8.0 %	Réassurance non proportionnelle	
Motor, other classes	4.0 %	Health business	17.0%
Marine, aviation and transport	7.5 %	Property business	7.0 %
Fire and other damage	5.5 %	Casualty business	17.0 %
General liability – Third party liability	10.0 %	Marine, aviation and transport business	8.5 %

Ces 5 méthodes proposées sont exposées par complexité décroissante. Aussi, dans une optique d'incitation des assureurs, il est attendu que les MVM ainsi calculées soient

²² Ou modules et sous-modules

croissantes. Ceci inciterait les assureurs à gagner en précision dans leur calcul en réduisant les coûts d'opportunité du capital immobilisé.

L'un des objectifs du mémoire est de comprendre les différences de calcul entre les MVM et s'il est possible de calculer et comparer empiriquement leur valeur sur les données étudiées. Ces calculs auront des conséquences majeures sur la création de valeur comme le souligne le paragraphe 2.3).

En effet, si des différences significatives de $MVM_{brute} - MVM_{nette}$ sont observées par exemple à la hausse, alors la condition sur la création de valeur sera moins restrictive et les primes de réassurance pourront être plus fortes en vertu de la formule précédemment montrée :

$$CV \geq 0 \Leftrightarrow PR \leq (PP_{brute} - PP_{nette}) + \frac{MVM_{brute} - MVM_{nette}}{1 - \tau}$$

Dans la suite des parties 3) et 4), afin d'effectuer une première application détaillée et illustrée²³ des méthodes, celles-ci sont appliquées sur les données présentées en 2.4) pour une traité +∞ XS 5. Dans la partie 5) deux autres traités (2 XS 3 et 5 XS 5 avec AAL²⁴) sont mis en œuvre et comparés à des cotations proposées par différents réassureurs.

3.2) Application et limites de l'approximation 5

Cette application découle directement des hypothèses de fréquence et de sévérité proposées par AXA Global P&C, puisqu'il s'agit de calculer un pourcentage du *best estimate* de la sinistralité de la LoB.

Deux étapes sont nécessaires :

- sélectionner le coefficient pertinent, en se référant au tableau de la section 3.1, $\alpha_{lob} = 8,5\%$ est donc pris pour les données étudiées,
- calculer le *best estimate* de la sinistralité de la LoB.

Avec $I_1, \dots, I_n$ les *cashflows* non actualisés auxquels l'assureur est soumis pour la LoB, le *best estimate* de la sinistralité de la LoB BE_0 est :

$$BE_0 = \sum_{i=1}^n \frac{E(I_i)}{(1+r)^i}$$

Pour la méthode 5, en se servant des coefficients introduits en section 2.4.2), notés $\left(\frac{E(C_1)}{E(C_n)}, \dots, \frac{E(C_n)}{E(C_n)} \right) = (c_1, \dots, c_n)$, il vient $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, E(I_i) = (c_i - c_{i-1}) \cdot E(C_n)$, où C_n , la sinistralité ultime, a pour loi le produit d'une loi de Poisson et d'une loi de Pareto indépendantes, comme présenté en section 2.4.1).

²³ En particulier les hypothèses seront vérifiées avec rigueur dans ces parties.

²⁴ *Annual Aggregate Limit*

La méthode 5 semble peu robuste pour les raisons suivantes :

- La proportionnalité au *best estimate* relève d'une approche de type Solvabilité I. Mettre en pratique la méthode 5 ne permettrait pas d'utiliser les concepts de Solvabilité II. En particulier, la MVM est reliée directement à la volatilité des risques via les SCR. Selon les caractéristiques d'un portefeuille, cette volatilité est variable à *best estimate* donné. Appliquer le même coefficient sans contrainte sur la qualité du portefeuille conduirait à des valeurs de SCR donc de MVM incorrectes.
- Les données de sinistralité utilisées dans ce mémoire sont de type atypique ; les montants ultimes sont supérieurs ou égaux à 3 000 000 d'euros. Il semble inadéquat de calculer la MVM en appliquant un coefficient identique dans le cas de données attritionnelles comme atypiques. La problématique de la calibration des pourcentages appliqués se pose ici frontalement. Il est patent que si ces coefficients sont utilisés indifféremment pour des sinistres attritionnels et atypiques, le pourcentage choisi est un barycentre des pourcentages respectifs qui devraient être appliqués pour chacune de ces catégories. Etant donné le faible poids des sinistres atypiques dans les sinistres globaux, le coefficient retenu n'est vraisemblablement pas pertinent pour cette catégorie.

En pratique, lorsque cette méthode 5 est appliquée aux sinistres étudiés, elle conduit à des résultats inférieurs à la moitié du minimum des résultats obtenus par chacune des autres méthodes. Etant donné que cette méthode est clairement supposée surestimer la MVM, ce résultat présente un décalage important qui confirme son inadaptation à la sinistralité étudiée.

3.3) Application de la méthode 4

La *duration* modifiée est définie comme suit, avec les notations précédemment introduites (pour mémoire, $I_1, \dots, I_n$ sont les *cashflows* non actualisés versés par l'assureur) :

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{BE_0} \cdot \frac{\partial BE_0}{\partial r} = \frac{\sum_{i=1}^n i \frac{E(I_i)}{(1+r)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{E(I_i)}{(1+r)^i}}$$

La *duration* modifiée est donc un barycentre des dates auxquelles ont lieu les différents flux financiers dont les poids sont surpondérés d'un facteur $\frac{1}{1+r}$. La surpondération de ces dates est due à l'utilisation de taux linéaires annuels et n'interviendrait pas si le taux utilisé était le taux continu, voir par exemple Koehler (2012).

L'application de la formule proposée dans le QIS5 conduit à poser :

$$MVM_0 = CoC \cdot SCR_0 \cdot D_{\text{mod}}$$

Il suffit donc de calculer le SCR prime SCR_0 pour déterminer la MVM avec la méthode 4, ce qui a déjà été traité plus haut.

Cette méthode est elle aussi applicable aisément en calculant la *duration* modifiée grâce au développement fourni par AXA Global P&C.

La *duration* est calculée comme

$$D_{\text{mod}}(I_1, \dots, I_n) = \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot \frac{E(I_i)}{(1+r)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{E(I_i)}{(1+r)^i}}$$

En l'occurrence, $\forall i \llbracket 1; n \rrbracket$, $E(I_i) = F \cdot \text{Loss} \cdot (c_i - c_{i-1})$ avec F la fréquence des sinistres espérée, Loss la sinistralité individuelle moyenne et c_i le coefficient de développement cumulatif de la sinistralité en i (introduit en 2.4.2). Il en résulte :

$$D_{\text{mod}}(I_1, \dots, I_n) = \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot \frac{F \cdot \text{Loss} \cdot (c_i - c_{i-1})}{(1+r)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F \cdot \text{Loss} \cdot (c_i - c_{i-1})}{(1+r)^i}}$$

D'où

$$D_{\text{mod}}(I_1, \dots, I_n) = \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot \frac{(c_i - c_{i-1})}{(1+r)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{(c_i - c_{i-1})}{(1+r)^i}} = f(c_1, \dots, c_n)$$

Ainsi, il résulte de ceci que la simulation des sinistres n'est pas nécessaire pour calculer la *duration*. En effet, d'après ce qui précède $MVM_0 = CoC \cdot SCR_0 \cdot f(c_1, \dots, c_n)$ et

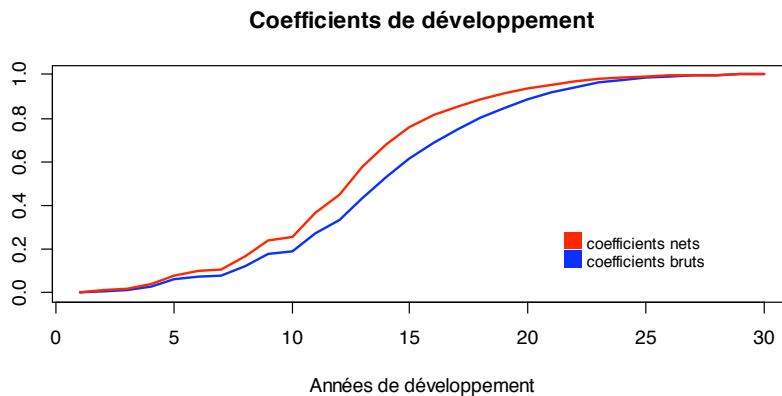
$$MVM = CoC \cdot SCR_0 \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot E(I_k)}{(1+r)^{k+1}}}{\sum_{k=1}^n \frac{E(I_k)}{(1+r)^k}}.$$

Aussi, la méthode 4 ne nécessite que la connaissance des coefficients de développement des sinistres et du premier SCR.

En l'espèce, les coefficients exposés en 2.4.2 conduisent à une *duration* de 13,5 ans.

En appliquant le traité de réassurance $+\infty XS 5$, les coefficients de développement des sinistres nets peuvent être calculés pour ce traité. Il en résulte une *duration* de 11,9 ans. Il est notable que la *duration* diminue, ce qui signifie que les paiements cédés sont situés principalement dans la période située au-delà de la *duration* originelle. Ceci déplace mécaniquement la somme pondérée des flux nets.

Cet effet peut être observé sur le graphique suivant. Il est apparent que les dixième, onzième et douzième années marquent une progression beaucoup plus forte pour les sinistres nets.



Il résulte de cette diminution que dans le cas du $+\infty$ XS 5, la diminution de la MVM liée au contrat de réassurance sera non seulement liée à la diminution du SCR initial SCR_0 mais également au facteur $D_{\text{mod}}(I_1, \dots, I_n) = f(c_1, \dots, c_n)$. Suivant les traités, il est imaginable que ces deux effets soient opposés.

3.4) Intérêt et limites de l'approximation 3

3.4.1) Application de la méthode 3

La méthode 3 consiste à dérouler le premier capital de solvabilité requis SCR_0 dans le temps pour obtenir $E(SCR_1 | F_0), \dots, E(SCR_{n-1} | F_0)$ comme une fraction de SCR_0 reliée aux *best estimates* :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, E(SCR_i | F_0) = SCR_0 \cdot \frac{E(BE_i | F_0)}{BE_0}$$

Comme notifié ci-dessous, cette approximation est contestable et ne trouve pas de fondement théorique, aussi les résultats de cette méthode sont à considérer avec recul. L'expression de la MVM devient donc :

$$MVM = \frac{CoC}{BE_0} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} SCR_0 \cdot \frac{E(BE_i | F_0)}{(1+r)^{i+1}}$$

L'actualisation s'effectue en remarquant que la rémunération du capital de solvabilité immobilisé pour l'exercice $\llbracket i, i+1 \rrbracket$ a lieu en fin d'exercice, d'où la division par $(1+r)^{i+1}$.

En notant toujours $I_1, \dots, I_n$ les *cashflows* non actualisés auxquels l'assureur est soumis, il

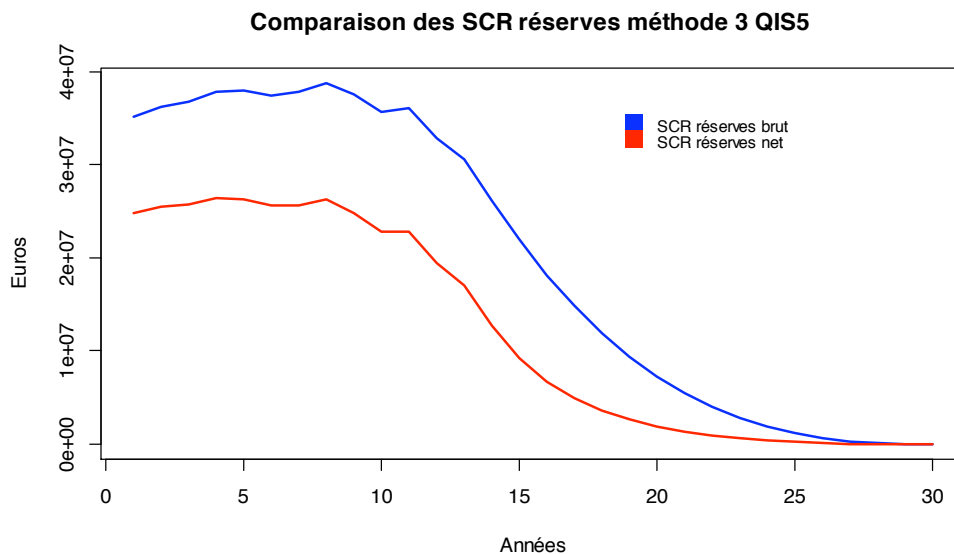
vient : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, E(BE_i | F_0) = \sum_{k=i+1}^n \frac{E(I_k | F_0)}{(1+r)^{k-i}}$, puis :

$$\begin{aligned}
 MVM &= \frac{CoC}{BE_0} \cdot SCR_0 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \frac{E(I_k | F_0)}{(1+r)^{k+1}} \\
 &= \frac{CoC}{BE_0} \cdot SCR_0 \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{E(I_k | F_0)}{(1+r)^{k+1}} \\
 &= \frac{CoC}{BE_0} \cdot SCR_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot E(I_k | F_0)}{(1+r)^{k+1}}
 \end{aligned}$$

D'où,
$$MVM = CoC \cdot SCR_0 \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot E(I_k | F_0)}{(1+r)^{k+1}}}{\sum_{k=1}^n \frac{E(I_k | F_0)}{(1+r)^k}}$$

soit exactement la même formule que celle de la méthode 4 avec la *duration* modifiée.

Seule l'une des méthodes 3 et 4 sera donc appliquée dans la suite du document. En pratique, la méthode 3 sera appliquée puisque elle est plus explicite. De plus, le chemin des sinistres nets de réassurance est déduit empiriquement à partir des sinistres simulés écrêtés, donc les BE_i sont disponibles et les SCR_i de la méthode 3 calculables.



Ainsi, il apparaît que :

- Les SCR sont globalement décroissants par construction même.
- Cependant, une légère croissance peut être observée en début de développement.

Cette dernière tient à la définition des *best estimates* $BE_t = E(\sum_{i=t+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^{i-t}} | F_t)$ et à l'effet de l'actualisation. En effet, certes la somme des flux non actualisés restant à payer est plus importante en année 6 qu'en année 7 par exemple. Cependant, si le montant I_7 est suffisamment faible, comme l'ensemble des montants restant est divisé par un facteur $(1+r)$ supplémentaire, il est possible que $BE_6 < BE_7$.

- Les SCR bruts sont toujours supérieurs au SCR nets. Ceci résulte du calcul des SCR_0 puisque celui relatif aux sinistres nets est inférieur à celui relatif aux sinistres bruts. Par ailleurs, cet effet n'est pas inversé par les différences de cadences de développement entre sinistralité brute et nette.

3.4.2) Intérêt des méthodes 3 et 4

L'intérêt principal de ces méthodes est de tenter d'intégrer une mesure du développement temporel du SCR par le proxy du développement temporel des sinistres. En effet, si le déroulement du SCR suivait exactement le déroulement des sinistres, cette méthodologie serait une mesure exacte de la MVM.

L'intuition sous-jacente est de considérer que lorsque les sinistres se développent de manière importante, il est probable que la variance de ce développement, et donc du résultat de l'exercice associé, soit proportionnelle à cette vitesse de développement.

Ceci n'est cependant pas évident et des contre-exemples peuvent être imaginés. Par exemple, si les pertes sont estimées la première année à un montant forfaitaire puis réévaluées la seconde en fonction des caractéristiques réelles du sinistre, il est patent que la variance de la première année sera nulle. *A contrario*, la seconde année sera marquée par une variabilité du résultat importante même si le développement du sinistre sera *a priori* plus faible qu'en première année si le montant forfaitaire est pertinent. Il en résulte que le SCR de l'année 2 sera plus important que celui de l'année 1 alors même que la vitesse de développement est plus importante en année 1.

L'intérêt de la méthode 3 est qu'elle fait apparaître clairement l'hypothèse de développement des SCR sous-jacents alors que la méthode 4 paraît de prime abord plus opaque en donnant directement l'expression de la MVM sans passer par l'expression du déroulé des SCR.

L'objet de la suite de la partie 3.4) est de montrer la limite de la méthode dite méthode 3 du QIS5 et sa non exactitude même sous hypothèses fortes de distributions indépendantes des montants incrémentaux ou des coefficients de développement.

3.4.3) Hypothèse de montants incrémentaux indépendants

A.1) Hypothèse

Soit $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ le vecteur des montants payés incrémentaux non actualisés. L'hypothèse sur laquelle reposent les développements contenus dans les sections 3.4.3) de A.2) à A.4) est l'indépendance mutuelle de $I_1, \dots, I_n$ ²⁵.

²⁵ Par définition, soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace probabilisé sur lequel sont considérés $I_1, \dots, I_n$,

$$\forall E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}, P\left(\bigcap_{i=1}^n \{I_i \in E_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\{I_i \in E_i\})$$

En particulier, $\forall k > i, E(I_k | F_i) = E(I_k)$.

A.2) Expression du SCR

Par définition, $SCR_i = (1+r)^i \cdot [99,5\%] (E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) - (1+r)^i \cdot E(\widetilde{C}_n | F_i)$.

En notant $\widetilde{C}_i = \sum_{j=1}^i \frac{I_j}{(1+r)^j}$ le montant cumulé en date i actualisé en date 0 et I_i le montant des paiements incrémentaux en cette même date (ce sont ces montants qui sont supposés indépendants), il vient :

$$\begin{aligned} SCR_i &= (1+r)^i \cdot [99,5\%] \left[E\left(\sum_{k=1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} | F_{i+1}\right) | F_i \right] - (1+r)^i \cdot E\left(\sum_{k=1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} | F_i\right) \\ (1+r)^{-i} \cdot SCR_i &= [99,5\%] \left[\sum_{k=1}^{i+1} \frac{I_k}{(1+r)^k} + E\left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} | F_{i+1}\right) | F_i \right] - \sum_{k=1}^i \frac{I_k}{(1+r)^k} - E\left(\sum_{k=i+1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} | F_i\right) \\ &= [99,5\%] \left[\sum_{k=1}^{i+1} \frac{I_k}{(1+r)^k} + E\left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k} | F_i\right) \right] - \sum_{k=1}^i \frac{I_k}{(1+r)^k} - E\left(\sum_{k=i+1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k}\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse d'indépendance,

$$\begin{aligned} SCR_i \cdot (1+r)^{-i} &= [99,5\%] \left[\frac{I_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} + \sum_{k=1}^i \frac{I_k}{(1+r)^k} + E\left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k}\right) \right] - \sum_{k=1}^i \frac{I_k}{(1+r)^k} - E\left(\sum_{k=i+1}^n \frac{I_k}{(1+r)^k}\right) \\ &= [99,5\%] \left[\frac{I_{i+1}}{(1+r)^{i+1}} + E\left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k}\right) \right] - E\left(\frac{I_{i+1}}{(1+r)^{i+1}}\right) - E\left(\sum_{k=i+2}^n \frac{I_k}{(1+r)^k}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Soit, } \boxed{SCR_i = [99,5\%] \left[\frac{I_{i+1}}{1+r} \right] - E\left(\frac{I_{i+1}}{1+r}\right)}$$

Finalement, le SCR correspond à un aléa porté sur une seule date.

A.3) Expression du SCR sous la méthode 3

$$\begin{aligned} E(SCR_k | F_0) &= SCR_0 \cdot \frac{E(BE_k | F_0)}{BE_0} \\ &= SCR_0 \cdot \frac{E\left(E\left(\sum_{i=k+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^i} | F_k\right) | F_0\right)}{E\left(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{(1+r)^i}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } E(SCR_k | F_0) = SCR_0 \cdot \frac{E(\sum_{i=k+1}^n \frac{I_i}{(1+r)^i})}{E(\sum_{i=1}^n \frac{I_i}{(1+r)^i})}$$

A.4) Contradiction

Soit $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ un vecteur de montants incrémentaux indépendants.

Soit $(I'_1, I'_2, \dots, I'_n)$ un autre vecteur de montants incrémentaux indépendants.

En outre, les hypothèses additionnelles suivantes sont faites :

- $\exists k \geq 2 / E(I_k) = E(I'_k) \text{ et } [99,5\%](I_k) \neq [99,5\%](I'_k)$
- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}, I_i \sim I \text{ et } I'_i \sim I \text{ où } I \text{ désigne une distribution quelconque}$

Ceci implique : $(1+r).SCR_0 = [99,5\%](I_1) - E(I_1) = [99,5\%](I'_1) - E(I'_1) = (1+r).SCR'_0$

Or d'après A.1),

$$(SCR_{k-1} - SCR'_{k-1}).(1+r)^{-(k-1)} = [99,5\%]\left[\frac{I_k}{(1+r)^k}\right] - [99,5\%]\left[\frac{I'_k}{(1+r)^k}\right]$$

D'où $E(SCR_{k-1} - SCR'_{k-1} | F_0) = SCR_{k-1} - SCR'_{k-1} \neq 0$ par hypothèse sur les quantiles des montants incrémentaux I_k et I'_k . Or avec l'expression développée en A.2),

$$E(SCR_{k-1} | F_0) = SCR_0 \cdot \frac{E(BE_{k-1} | F_0)}{BE_0} \text{ et } E(SCR'_{k-1} | F_0) = SCR'_0 \cdot \frac{E(BE'_{k-1} | F_0)}{BE'_0}.$$

Puis, par définition des *best estimates* et par hypothèse de distribution il vient:

$BE'_0 = BE_0$ et $E(BE'_{k-1} | F_0) = E(BE_{k-1} | F_0)$ et ayant $SCR'_0 = SCR_0$, il en découle :

$$E(SCR'_{k-1} | F_0) = E(SCR_{k-1} | F_0), \text{ ce qui est contradictoire avec :}$$

$$E(SCR_{k-1} - SCR'_{k-1} | F_0) \neq 0.$$

Ceci montre que la méthode 3 propose une expression qui demeure inexacte même sous hypothèse d'indépendance des montants incrémentaux.

3.4.4) Hypothèse de coefficients de développement indépendants

B.1) Hypothèse

Soit $(X_2, X_3, \dots, X_n)$ le vecteur des coefficients de passage des montants payés cumulés actualisés en date 0 dont les composantes sont supposées mutuellement indépendantes et

indépendantes de $\widetilde{C}_1$. Par définition, $X_i = \frac{\widetilde{C}_{i+1}}{\widetilde{C}_i}$.

B.2) Expression du SCR

Par définition, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(1+r)^{-i} \cdot SCR_i = [99,5\%] \left[E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i \right] - E(\widetilde{C}_n | F_i)$

$$\Leftrightarrow (1+r)^{-i} \cdot SCR_i = [99,5\%] \left[\widetilde{C}_{i+1} E(X_{i+2} X_{i+3} \dots X_n | F_{i+1}) | F_i \right] - \widetilde{C}_i E(X_{i+1} X_{i+2} \dots X_n | F_i)$$

par définition des coefficients de passage

$$\Leftrightarrow (1+r)^{-i} \cdot SCR_i = [99,5\%] \left[\widetilde{C}_{i+1} E(X_{i+2}) E(X_{i+3}) \dots E(X_n) | F_i \right] - \widetilde{C}_i E(X_{i+1}) E(X_{i+2}) \dots E(X_n)$$

par hypothèse d'indépendance

$$\Leftrightarrow (1+r)^{-i} \cdot SCR_i = E(X_{i+2}) \dots E(X_n) \cdot \left[\widetilde{C}_1 X_2 X_3 \dots X_i [99,5\%] [X_{i+1} | F_i] - \widetilde{C}_1 X_2 X_3 \dots X_i E(X_{i+1}) \right]$$

par définition des coefficients de passage

$$\Leftrightarrow (1+r)^{-i} \cdot SCR_i = \left(\widetilde{C}_1 X_2 X_3 \dots X_i E(X_{i+2}) \dots E(X_n) \right) \cdot \left[[99,5\%] [X_{i+1}] - E(X_{i+1}) \right]$$

par indépendance, d'où

$$(1+r)^{-i} \cdot E(SCR_i | F_0) = E(\widetilde{C}_1) \cdot \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i+1}}^n E(X_k) \cdot \left[[99,5\%] [X_{i+1}] - E(X_{i+1}) \right]$$

B.3) Expression du SCR sous la méthode 3

En appliquant la formule du déroulement selon le QIS5, il vient :

$$E(SCR_k | F_0) = SCR_0 \cdot \frac{E(BE_k | F_0)}{BE_0} \text{ puis } \frac{E(SCR_k | F_0)}{SCR_0} = \frac{E(BE_k | F_0)}{BE_0} \text{ et}$$

$$\frac{E(SCR_k | F_0)}{SCR_0} = \frac{(1+r)^k \cdot E(\widetilde{C}_k) \left(\prod_{i=k+1}^n E(X_i) \right) - 1}{E(\widetilde{C}_1) \cdot \left[\prod_{i=2}^n E(X_i) \right]}$$

B.4) Contradiction

Soit $\widetilde{C}'_1, \dots, \widetilde{C}'_n$ des montants payés cumulés actualisés en date 0 de mêmes moyennes que $\widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_n$ et $(X'_2, \dots, X'_n)$ le vecteur des coefficients de passage associé. En effectuant les mêmes hypothèses d'indépendance, d'égalité de moyennes et d'équidistribution pour $\widetilde{C}'_1, \dots, \widetilde{C}'_n$ et de $\widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_n$, sauf pour un $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$: $[99,5\%] [X_{k+1}] \neq [99,5\%] [X'_{k+1}]$, de même qu'en 3.4.3) A.4), il en résulte $SCR_0 = SCR'_0$.

Avec B.2), $E((1+r)^{-k} SCR_k | F_0) \neq E((1+r)^{-k} SCR'_k | F_0)$ suite à

$$[99,5\%] [X_{k+1}] \neq [99,5\%] [X'_{k+1}], \text{ et avec B.3), il vient } E(SCR_k | F_0) \neq E(SCR'_k | F_0).$$

4) MVM et Méthode 2 du QIS5 : calcul exact

4.1) Méthode 2 : première proposition de spécification dite du chemin moyen sans IBNER

4.1.1) Fondement de la méthodologie

L'idée de la méthodologie exposée ci-après émane d'un actuaire spécialisé dans le calcul des SCR pour le modèle interne d'AXA. Il suggère de calculer le SCR réserve d'une année i en considérant que le chemin moyen a été suivi jusqu'en cette année et après l'année $i+1$. Après avoir calculé le chemin moyen jusqu'en année i , il convient alors de simuler la distribution des sinistres entre les années i et $i+1$ pour pouvoir calculer le SCR comme différence entre le quantile 99,5% et la moyenne. Cette méthodologie présupposant que le chemin moyen est suivi, elle rompt avec la notion de dépendance et donc d'approche de stochastique dans le stochastique.

4.1.2) Hypothèses

- Dans le cas étudié les sinistres finaux suivent une loi dont la fréquence est une loi de Poisson et la sévérité est une loi de Pareto généralisée. La fréquence et la sévérité sont de plus indépendantes.
- Les années de développement et d'origine sont indépendantes les unes des autres.
- Les sinistres sont évalués et réglés à leur juste coût dès leur année de déclaration (absence donc d'IBNER).

Pour chaque année de développement en considérant les hypothèses ci-dessus, soit $(\theta_t)_{t \in [1,14]}$ le processus cumulatif de déclaration de sinistres moyen, i.e. pour une année d'occurrence de sinistres i , θ_t est l'espérance de la proportion de sinistres ayant eu lieu en i et déclarés avant la date $i+t$ (incluse).

Il découle directement des hypothèses précédentes que les pertes d'une année de développement t donnée suivent une loi de type produit entre :

- une loi de Poisson de paramètre : $(\theta_{t+1} - \theta_t) \cdot \mu$ avec μ paramètre initial de la loi de Poisson
- une loi de Pareto généralisée ayant les paramètres spécifiés pour la sinistralité finale

4.1.3) Formalisation

En reprenant la formalisation précédente dans le cas d'années de développement indépendantes (voir paragraphe 3.4.3) :

$$(1+r)^{-i} \cdot SCR_i = [99,5\%] \left[E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i \right] - E(\widetilde{C}_n | F_i) \Leftrightarrow (1+r) \cdot SCR_i = [99,5\%] [I_{i+1}] - E(I_{i+1})$$

Soit dans ce cas :

$\Leftrightarrow (1+r).SCR_i = [99,5\%][IBNYR_{i+1}] - E(IBNYR_{i+1})$ avec $IBNYR_{i+1}$ les IBNYR déclarés entre i et $i+1$.

Or, d'après les hypothèses d'indépendance faites ci-dessus :

$$IBNYR_{i+1} = \text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \times \text{Pareto_Généralisée}$$

où μ désigne l'espérance de la loi de Poisson suivie par la fréquence.

Pareto_Généralisée et *Poisson* désignent respectivement des réalisations des variables aléatoires poissonnienne et parétienne de paramètres estimés sur le triangle d'origine.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (1+r).SCR_i &= [99,5\%][I_{i+1}] - E(I_{i+1}) \\ \Leftrightarrow (1+r).SCR_i &= [99,5\%][\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}] \\ &\quad - E(\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}) \\ \Leftrightarrow (1+r).SCR_i &= [99,5\%][\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}] \\ &\quad - E(\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu)) \cdot E(\text{Pareto_Généralisée}) \end{aligned}$$

par indépendance de la fréquence et de la sévérité,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (1+r).SCR_i &= [99,5\%][\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}] \\ &\quad - ((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) E(\text{Pareto_Généralisée}) \end{aligned}$$

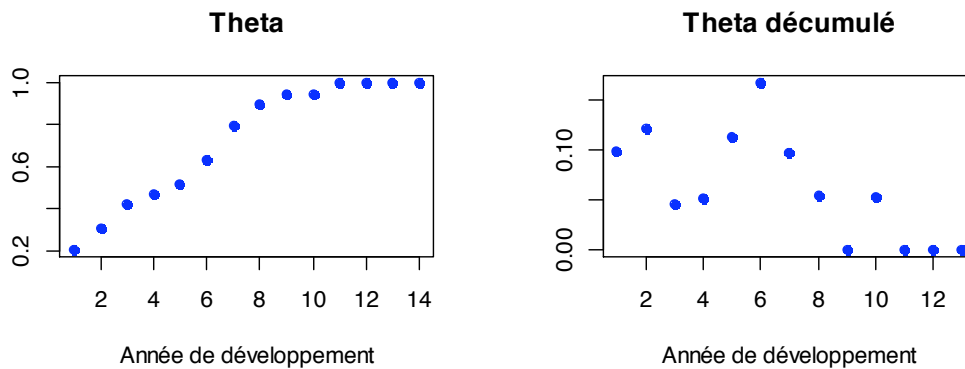
$$\Rightarrow \forall t \geq 0, (1+r).E(SCR_i / F_t) = [99,5\%][\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}] - ((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot E(\text{Pareto_Généralisée})$$

La MVM s'en déduit immédiatement avec $MVM_0 = CoC \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E\left(\frac{SCR_i}{(1+r)^{i+1}} \mid F_0\right)$:

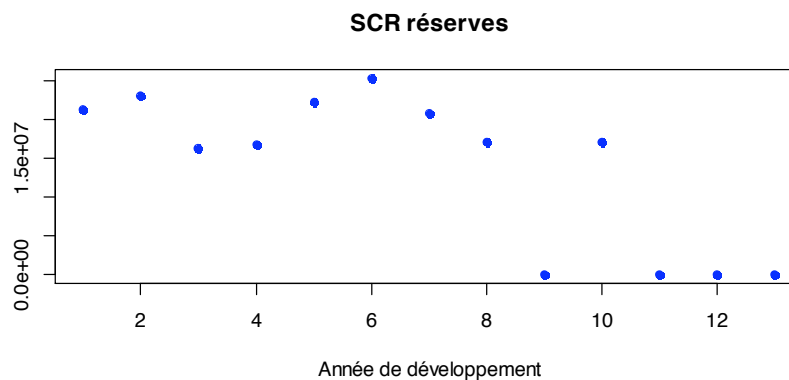
$$MVM_0 = CoC \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^{i+1}} \left([99,5\%][\text{Poisson}((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot \text{Pareto_Généralisée}] - ((\theta_{i+1} - \theta_i), \mu) \cdot E(\text{Pareto_Généralisée}) \right)$$

4.1.4) Première Implémentation

Ce processus $(\theta_t)_{t \in [1,14]}$ est estimé sur le triangle complété du nombre des sinistres déclarés par le quotient de la moyenne du nombre de sinistres déclarés avant l'année t et de la moyenne du nombre de sinistres déclarés à l'ultime.



Après simulation les SCR suivants sont obtenus :



Après concertation avec les experts d'AXA, il semble que cette décroissance erratique ne soit pas raisonnable. Entre autres, l'annulation des SCR est irréaliste et liée à la manière dont ont été estimés les coefficients. Aucun sinistre n'ayant été déclaré pour certaines années (de l'année 8 à l'année 9 par exemple) sur toute la base de données, le nombre de sinistres déclarés pour ces années est nul et le modèle prédit un SCR nul²⁶.

L'explication tient à la forme du développement estimé (ci-dessus θ). Afin de trouver des résultats plus cohérents, le choix a été opéré d'approximer le processus θ par une fonction ne présentant pas ou peu de convexité locale.

4.1.5) Implémentation avec approximation des coefficients associés aux IBNYR

Approximation des coefficients

La classe des fonctions considérée est la classe des fonctions exponentielles inverses

$$\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{a+bx} + 1 \right\}$$

Un tel choix est justifié par une analyse graphique des estimations premières ainsi que par la simplicité de la procédure d'estimation qui en découle.

²⁶ En effet, avec l'hypothèse d'indépendance de déclaration des sinistres d'une année sur l'autre, il a été montré plus haut que le SCR ne dépendait que de la sinistralité de l'année qu'il couvre.

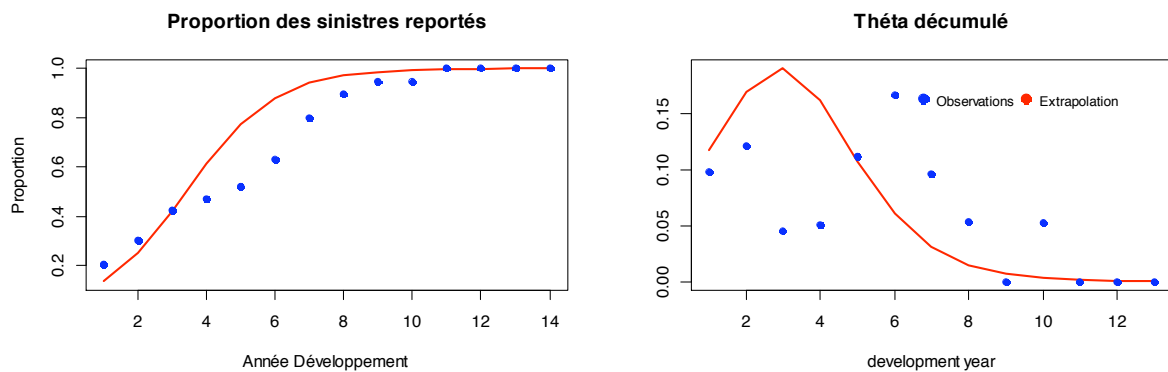
L'estimation des paramètres a et b peut alors être effectuée en remarquant que

$$\forall i \in [1; 14], f_i = e^{a+bi} + 1 \Leftrightarrow \ln(f_i - 1) = a + bi$$

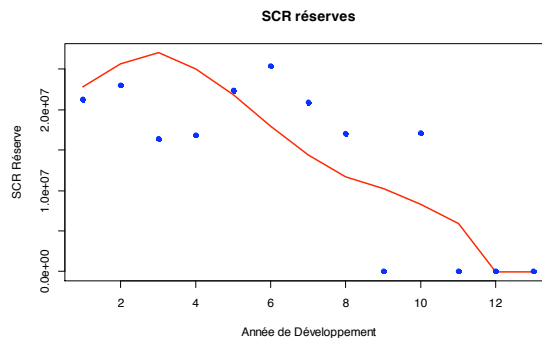
Ce qui permet d'utiliser les moindres carrés ordinaires et $\hat{a}$ et $\hat{b}$ seront estimés de sorte que :

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \underset{(a,b)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{14} [\ln(f_i - 1) - a - bi]^2$$

L'utilisation des équations normales associées permet de déduire les paramètres. En l'espèce, les résultats obtenus sont les suivants :



Les coefficients sont donc bien lissés par une fonction d'allure concave sauf localement au voisinage de 0.



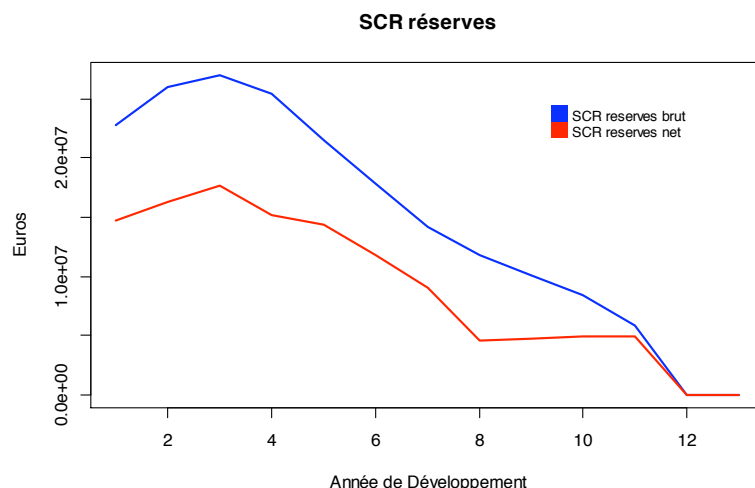
Prise ne compte de la réassurance

L'intégration de la réassurance à cette méthode est immédiate et consiste à appliquer cette dernière à la sévérité des pertes simulées. Il vient alors :

$$\forall t \geq 0, (1+r) \cdot E(SCR_i | F_t) = [99,5\%] [Poisson((\theta_{i+1} - \theta_i) \cdot \mu) \cdot Pareto_Généralisée_nette] - ((\theta_{i+1} - \theta_i) \cdot \mu) \cdot E(Pareto_Généralisée_nette)$$

Résultats du déroulé des SCR

Les déroulés des SCR espérés présentés ci-dessous comparent les situations brutes et nettes de réassurance²⁷, pour une année d'origine des sinistres sans aucune information à la date des calculs.



Il découle de cette implémentation :

- Une décroissance globale des SCR bruts et nets en raison de la forme des coefficients extrapolés. Comme la courbe présentée ci-dessus est légèrement convexe puis concave, les SCR commencent par augmenter légèrement avant de décroître. Il convient de souligner que comme dans la méthode 3 les SCR commencent par croître puis décroissent mais que l'explication est différente. Si auparavant la croissance initiale était due à l'actualisation, elle est due en l'occurrence à la forme des coefficients extrapolés.²⁸
- Les SCR bruts sont toujours supérieurs aux SCR nets. Ceci est structurel et tient à la différence entre sinistralité individuelle brute et nette.

Il est remarquable qu'un palier s'établisse pour les SCR des années 8 à 11. Ce résultat est expliqué en vérifiant sur l'échantillon simulé que, pour chacune des années 8 à 11, la fréquence de la sinistralité correspondante au quantile 99,5% est 1 et que la rétention est atteinte pour cet unique sinistre.

4.2) Méthode 2 : une forme paramétrique sur les charges ultimes espérées

4.2.1) Motivations

Comme présenté ci-dessous, le calcul de la MVM à une date t nécessite en premier lieu de déterminer les espérances conditionnelles des SCR aux dates postérieures à t sachant l'information disponible en date t .

²⁷ contrat $+\infty$ XS 5

²⁸ L'actualisation ne joue pas puisque les sinistres sont supposés entièrement réglés lors de leur survenance.

$$MVM_t = -\frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot (n-t) \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) + \frac{CoC}{(1+r)^{1-t}} \cdot \sum_{i=t}^{n-1} E\left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i \right) | F_t \right\}$$

D'où en particulier :

$$MVM_0 = -\frac{CoC}{1+r} \cdot n \cdot E(\widetilde{C}_n) + \frac{CoC}{1+r} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} E\left\{ [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i \right) \right\}$$

Plusieurs possibilités de mener un calcul exact ont été envisagées, mais aucune n'est pleinement satisfaisante :

- Effectuer des simulations dans les simulations sur les 30 années de développement des sinistres est incompatible avec un nombre de simulations à chaque pas assurant la convergence des estimateurs des espérances conditionnelles des SCR. En effet, N simulations à chaque étape engendreraient en dernière étape N^{30} ou *a minima* N^3 simulations (voir 1.5.4).
- La première proposition de méthode 2 chemin moyen sans IBNER est également problématique car elle n'est pas cohérente avec la réalité du paiement dans le temps des sinistres²⁹.

Daya Viossat (2008) propose une approche originale de calcul de la MVM permettant notamment de résoudre les difficultés mentionnées plus haut. En spécifiant une forme paramétrique pour les montants de sinistres cumulés, elle aboutit à une expression exacte de la MVM. L'Annexe 4 reprend le calcul de la MVM dans le cadre théorique proposé dans son mémoire. Une expression de la MVM différente de celle présentée dans le mémoire originel y est obtenue, et son l'implémentation s'avère peu aisée.

En effet, la spécification log-normale des montants cumulés n'a pas été vérifiée en pratique. Non seulement le triangle des montants payés (voir Annexe 3) cumulés comporte des zéros sur certaines cases des première et deuxième colonnes, ce qui empêche le calcul de certains coefficients de passage, mais le ré-échantillonnage par *bootstrap* conduit aussi à des échantillons contenant des montants payés cumulés négatifs strictement, ce qui n'est pas acceptable. Une raison envisagée de la difficulté à vérifier l'hypothèse de log-normalité des coefficients de passage des montants payés cumulés est l'atypicité des données utilisées.

Les sections suivantes présentent un modèle paramétrique inspiré du précédent mais sous des hypothèses de modèle différentes. Les trois étapes principales de la mise en place de cette méthode sont détaillées dans les différentes sections de cette partie. Des schémas explicatifs sont présentés en section 4.2.8) pour récapituler la totalité des étapes mises en œuvre.

²⁹ Absence d'IBNER et indépendance des années de développement entre autres

4.2.2) Hypothèse de coefficients de passage log-normaux pour les montants ultimes espérés actualisés et notations

En utilisant les notations introduites plus haut, $\widetilde{C}_n$ représente le montant ultime des sinistres actualisés (*cashflow* par *cashflow*, selon les dates de survenance des paiements) en date d'origine des sinistres. Les $E(\widetilde{C}_n | F_i)$, où $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ sont les objets élémentaires intervenant dans l'expression de la MVM rappelée en 4.2.1). La spécification proposée dans cette section repose directement sur les $E(\widetilde{C}_n | F_i)$, ce qui permet d'aboutir à une expression de la MVM plus simple que celle obtenue en Annexe 4.

Soient $\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, X_{i+1} = \ln \left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{i+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_i)} \right)$.

La spécification paramétrique proposée dans cette partie est la normalité du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ spécifiée $(X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, \Lambda)$, avec μ un vecteur colonne de taille n et Λ une matrice de covariance de dimension $n \times n$. Ces paramètres ont été calculés par ailleurs³⁰. Il en découle :

$$\begin{aligned} \forall i \geq t, E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) &= E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp\left(\sum_{k=t}^i \ln\left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{k+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_k)}\right)\right) \\ &= E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp\left(\sum_{k=t}^i X_{k+1}\right) \end{aligned}$$

Les développements effectués par la suite nécessitant des extractions de matrices, les notations suivantes sont adoptées :

$$\mu_{i:j} = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{(1:i)*(1:i)} & \Lambda_{(1:i)*(i+1:n)} \\ \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} & \Lambda_{(i+1:n)*(i+1:n)} \end{pmatrix}$$

en notant la matrice $T_{(ab)*(cd)}$ l'extraction de T des lignes comprises entre a et b inclus et des colonnes entre c et d inclus. Ainsi, les « : » indiquent une extraction et le « * » sépare les indices de ligne des indices de colonne. ($\mu_{i+1:i+1}$ désigne ainsi le terme μ_{i+1}).

Par hypothèse de modèle et en utilisant les propriétés de la loi normale multidimensionnelle, $(X_{i+1}, \dots, X_n) | F_i$ i.e. $(X_{i+1}, \dots, X_n) | (X_1, \dots, X_i) \sim N(\mu_i, \Lambda_i)$ avec :

³⁰ Voir 4.2.4) à 4.2.7).

$$\mu_{li} = \mu_{(i+1):n} + \Lambda_{((i+1):n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} - \mu_{1:i} \right) \text{ et}$$

$$\Lambda_{li} = \Lambda_{((i+1):n)*((i+1):n)} - \Lambda_{((i+1):n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \Lambda_{((i+1):n)*(1:i)}'$$

4.2.3) Calcul des espérances des quantiles sachant l'information en t

Les calculs sont conduits pour une date t . Les SCR_t sont donc calculés pour les valeurs de i postérieures à t ; l'encadrement suivant des variables est donc obtenu : $0 \leq t \leq i \leq n-1$.

Calcul de $[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i)$

$$\begin{aligned} [99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) &= [99,5\%] \left(E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp\left(\sum_{k=t+1}^{i+1} X_k\right) | F_i \right) \\ &= E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp\left(\sum_{k=t+1}^i X_k\right) \cdot [99,5\%](\exp(X_{i+1}) | F_i) \end{aligned}$$

L'expression obtenue est valable y compris dans le cas où $i = t$. L'indexation de la somme $\sum_{k=t+1}^i X_k$ est donc vide. Par convention, les sommes indexées par l'ensemble vide prennent la valeur 0.

Puis, l'exponentielle étant continue et strictement croissante, quantile et exponentielle sont permutables (voir Annexe 4) :

$$\boxed{[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) = E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp\left(\sum_{k=t+1}^i X_k\right) \cdot \exp(\mu_{li,1:1} + \sqrt{\Lambda_{li,1:1}} \phi)}$$

Calcul de $E\{[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t\}$

En prenant l'espérance de l'expression précédente :

$$\begin{aligned} E\{[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t\} &= E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot E\left(\exp\left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \mu_{li,1:1} + \sqrt{\Lambda_{li,1:1}} \phi\right) | F_t\right) \\ &= E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp(\sqrt{\Lambda_{li,1:1}} \phi) \cdot E\left(\exp\left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \mu_{li,1:1}\right) | F_t\right) \end{aligned}$$

car $\Lambda_{li,1:1}$ est non stochastique.

$$\text{Or par définition, } \mu_{li} = \mu_{(i+1):n} + \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} - \mu_{1:i}$$

$$\text{D'où } \mu_{li,1:l} = \left[\mu_{(i+1):n} + \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} - \mu_{1:i} \right]_{1:l}$$

$$\mu_{li,1:l} = \mu_{(i+1):(i+1)} + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{1:l}$$

$$+ \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right]_{1:l} - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:l}$$

D'où, en considérant l'expression précédente,

$$E \left\{ [99,5\%] (E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t \right\} = E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp(\sqrt{\Lambda_{li,1:l}} \phi).$$

$$\exp \left(\mu_{(i+1):(i+1)} + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{1:l} - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:l} \right)$$

$$.E \left(\exp \left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right]_{1:l} \right) | F_t \right)$$

Ainsi, avec α_{i-t} un vecteur colonne ne comportant que des 1 et de taille $i-t$, comme

$\sum_{k=t+1}^i X_k = \alpha_{i-t}' (X_{t+1}, \dots, X_i)$, il vient :

$$\begin{aligned}
 & E \left(\exp \left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right]_{1:l} \right) \middle| F_t \right) \\
 &= E \left(\exp \left(\alpha_{i-t}' \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right) \middle| F_t \right) \\
 &= E \left(\exp \left(\alpha_{i-t}' \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right) \middle| F_t \right)
 \end{aligned}$$

Où $\begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix}$ désigne une matrice bloc avec les conventions habituelles, puis :

$$\begin{aligned}
 & E \left(\exp \left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right]_{1:l} \right) \middle| F_t \right) \\
 &= E \left(\exp \left(\left(\alpha_{i-t}' + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right) \middle| F_t \right) \\
 &= E \left(\exp \left(\lambda_{i,t}' \begin{pmatrix} X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right) \middle| F_t \right)
 \end{aligned}$$

avec $\lambda_{i,t} = \left(\alpha_{i-t}' + (1, 0 \dots 0) \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{t,i-t} \\ I_{i-t} \end{pmatrix} \right)$.

Or $(X_{t+1}, \dots, X_i) | (X_1, \dots, X_t) \sim N(\mu_{t,1:(i-t)}, \Lambda_{t,1:(i-t)*(1i-t)})$, d'où, par transformée de Laplace³¹ :

$$E \left(\exp \left(\sum_{k=t+1}^i X_k + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{t+1} \\ \vdots \\ X_i \end{pmatrix} \right]_{1:1} \right) | F_t \right) = \exp(\lambda_{t,t} \mu_{t,1:(i-t)} + \frac{1}{2} \lambda_{t,t} \Lambda_{t,1:(i-t)*(1i-t)} \lambda_{t,t}')$$

Finalement,

$$E \left\{ [99,5\%] (E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t \right\} = E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp \left(\begin{aligned} & \sqrt{\Lambda_{i,1:1}} \phi \\ & + \mu_{ii} + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{1:1} \\ & - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \mu_{1i} \right]_{1:1} \\ & + \lambda_{t,t} \mu_{t,1:(i-t)} + \frac{1}{2} \lambda_{t,t} \Lambda_{t,1:(i-t)*(1i-t)} \lambda_{t,t}' \end{aligned} \right)$$

d'où l'expression définitive du SCR_i :

$$E(SCR_i | F_t) = (1+r)^i \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \exp \left(\begin{aligned} & \sqrt{\Lambda_{i,1:1}} \phi \\ & + \mu_{ii} + \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{1:1} \\ & - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1i)} \Lambda_{(1i)*(1i)}^{-1} \mu_{1i} \right]_{1:1} \\ & + \lambda_{t,t} \mu_{t,1:(i-t)} + \frac{1}{2} \lambda_{t,t} \Lambda_{t,1:(i-t)*(1i-t)} \lambda_{t,t}' \end{aligned} \right) - 1$$

³¹ $\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(N(\mu, \sigma^2)t)) = \exp(\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2)$

Cette expression est implémentable à n'importe quelle date $t \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. En pratique, dans les sections suivantes, les calculs sont effectués pour un portefeuille de contrats à la date de début de la couverture des assurés.

La formule exacte de la MVM en date t à implémenter est la suivante :

$$MVM_t = (1+r)^{t-1} \cdot E(\widetilde{C}_n | F_t) \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \exp \left(\begin{array}{c} \sqrt{\Lambda_{i,1,1}} \phi \\ + \mu_{i,i} + \Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{1:1} \\ - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:1} \\ + \lambda_{i,t} \mu_{t,1:(i-t)} + \frac{1}{2} \lambda_{i,t} \Lambda_{t,(1-i-t)*(1-i-t)} \lambda_{i,t}' \end{array} \right) - 1$$

Soit en 0 :

$$MVM_0 = \frac{1}{1+r} \cdot E(\widetilde{C}_n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \exp \left(\begin{array}{c} \sqrt{\Lambda_{i,1,1}} \phi \\ + \mu_{i,i} - \left[\Lambda_{(i+1:n)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right]_{1:1} \\ + \lambda_{i,0} \mu_{1:i} + \frac{1}{2} \lambda_{i,0} \Lambda_{(1:i)*(1:i)} \lambda_{i,0}' \end{array} \right) - 1$$

4.2.4) Mise en forme des données brutes utilisées

Les données utilisées consistent en un triangle de montants cumulés pour des sinistres survenus de 1998 à 2011 (voir 2.4)). A chaque date et pour chaque année de survenance, les montants payés et les suspens estimés sont disponibles, ce qui revient à avoir une estimation des sinistres déjà signalés et partiellement réglés et des IBNER pour ces mêmes sinistres.

La forme paramétrique sélectionnée prend en intrants l'espérance de la charge ultime sachant l'information disponible à la date de calcul des SCR réserves. Il est donc indispensable de tenir compte des montants IBNYR. Ces derniers ont été ajoutés en se servant d'un triangle d'historique du nombre de sinistres déclarés. En notant $(\theta_t)_{t \in \llbracket 1,14 \rrbracket}$ le processus de déclaration de sinistres, i.e. pour une année d'occurrence de sinistres

$i \in [1998; 2011]$, θ_i est la proportion de sinistres ayant eu lieu en i et déclarés avant la date $i+t$ (incluse). Les définitions et notations des θ_i sont identiques à celles proposées en 4.1.2).

Sous hypothèse d'indépendance des montants de ces sinistres déclarés tardivement et de l'information disponible via la filtration $(F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, en $i+t$, une estimation prudente de la charge ultime prenant en compte ces IBNYR est donnée par :

$$E(C_n | F_{i+t}) = \text{payé}_{i+t} + \text{suspens}_{i+t} + (\theta_n - \theta_i) \cdot \text{coût moyen}$$

Pour obtenir une expression de la charge ultime actualisée $E(\tilde{C}_n | F_{i+t})$, il serait nécessaire d'avoir le déroulé dans le temps espéré des suspens IBNER. Or les IBNER ont été fournis dans la base de données à chaque date sans avoir accès à la méthode statistique de leur estimation, ni donc à leur répartition dans le temps. Ceci empêche de procéder à une actualisation du terme suspens_{i+t} . Ainsi, n'ayant pas accès au déroulé des IBNER mais seulement à leur montant, une approche prudentielle consiste à ne pas actualiser les montants versés. Les SCR seront donc tous surestimés, ainsi que la MVM.

Les proportions de déclaration tardives de sinistres ont été estimées sur les données disponibles décrites précédemment. Les estimateurs obtenus ne sont donc pas nécessairement proches des valeurs théoriques, aussi un ajustement est nécessaire, comme explicité dans la section 4.1.5).

4.2.5) Estimation des paramètres pour les données brutes de réassurance

Il s'agit ici d'estimer les paramètres (μ, Λ) afin d'implémenter la formule obtenue en 4.2.3) qui repose sur l'hypothèse $(X_{i+1}, \dots, X_n) | (X_1, \dots, X_i) \sim N(\mu_i, \Lambda_i)$. Ces coefficients doivent être estimés à la fois pour le triangle brut mais également pour le triangle net (paragraphe suivant).

Éléments d'introduction au bootstrap

Le *bootstrap* est une technique dite de ré-échantillonnage développée à partir des années 1980 notamment par Efron et Tibshirani (1986). Le principe est de considérer un échantillon donné $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ constitué de réalisations de variables i.i.d suivant une loi donnée. Le but est d'estimer un paramètre θ dont un estimateur $\hat{\theta}_n$ est connu sur les données originelles.

Le *bootstrap* consiste alors à générer B échantillons de taille n en procédant par tirages successifs avec remise dans les données originales : $\forall b \in [1; B], x^b = (x_1^b, x_2^b, \dots, x_n^b)$.

$E_\theta[\varphi(X, \theta)]$ avec φ une fonction quelconque est alors estimé par $\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \varphi(x^{(b)}, \hat{\theta}_n)$.

Par exemple, le biais est estimé par $\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_n(x^{(b)}) - \hat{\theta}_n$

Cette technique qui, au vu de cette explication simplifiée, semble peu rigoureuse possède une justification théorique par les développements d'Edgeworth qui dépassent le cadre de ce rapport.

Méthodologie *bootstrap* utilisée

Le triangle présentant l'historique retravaillé par ajout des IBNYR ne comportant que 14 années de survenance de sinistres, il est exclu d'estimer des moyennes et des covariances par les estimateurs usuels des moments pour des raisons de non-convergence. Une façon de pallier cet inconvénient de générer des données plus vastes par 10 000 tirages *bootstrap*, dont la méthodologie est détaillée ci-après.

Les données contenues dans le triangle ont été *fittées* par un modèle GLM de Poisson avec lien logarithmique³², les variables explicatives étant les indicatrices des lignes et des colonnes du triangle. La différence entre les données prédites et les données estimées, divisée par la racine des données prédites donnent les résidus de Pearson. Tirer les résidus de Pearson avec remise, puis les distribuer sur le triangle initial en inversant la formule qui les définit permet de créer un nouveau triangle dit « *bootstrap* ».

L'emploi des résidus de Pearson résulte des spécifications GLM détaillées en Annexe 5. Plus précisément, en notant $(y_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ les valeurs à estimer, $(x_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ les régresseurs et $(\hat{y}_i)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$

les estimations, les résidus de Pearson sont définis par $\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{y}_i}}, i \in \llbracket 1;n \rrbracket$. Ceci assure

$$\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, E\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{y}_i}} \mid x_i\right) = 0, V\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{\sqrt{\hat{y}_i}} \mid x_i\right) = 1, \text{ c'est-à-dire que les résidus de Pearson}$$

sont centrés et réduits conditionnellement aux régresseurs.

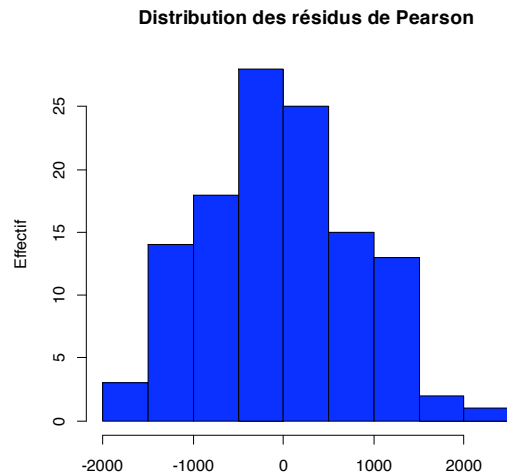
Si le résidu tiré pour une case est noté *res*, la formule d'inversion mène à remplacer la valeur de la case *val* par $val_{prédite} - res \cdot \sqrt{val_{prédite}}$ où *valprédite* est la valeur prédite par GLM.

Résultats obtenus : résidus de Pearson

L'histogramme des résidus est disponible ci-dessous. L'utilisation des résidus de Pearson est l'étape qui permet de générer des données supplémentaires pour estimer les moments (μ, Λ) . La distribution des résidus de Pearson sur le triangle des données initiales est donc responsable de la variabilité au sein des échantillons *bootstrap* générés. Il est donc fondamental pour que les paramètres (μ, Λ) soient correctement estimés que les résidus de

³² Se référer à l'Annexe 5 pour plus de détails sur la méthodologie GLM

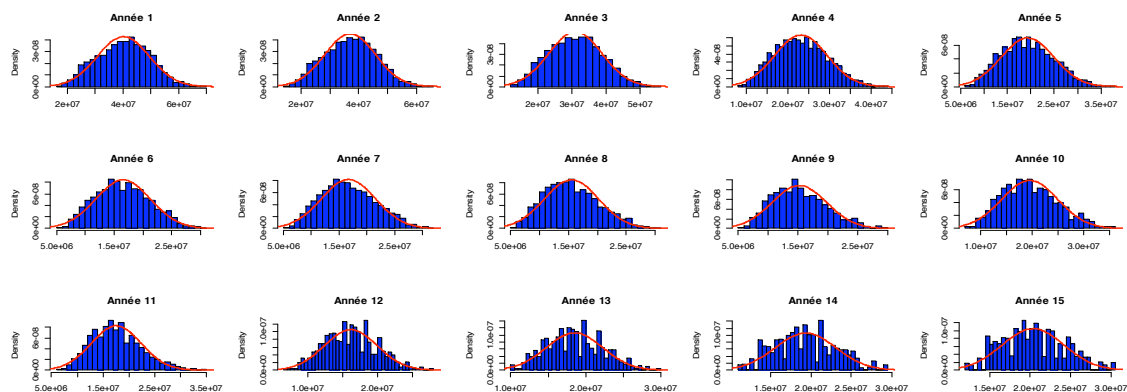
Pearson soient exogènes et homoscedastiques. L'Annexe 6 s'attache à prouver que l'exogénéité et l'homoscedasticité dans la régression par GLM a bien été assurée.



Résultats obtenus : espérances des montants ultimes espérés et coefficients de passage associés

La distribution des montants ultimes espérés après application des 10 000 tirages est disponible ci-dessous, suivie de celle des coefficients de passage³³. La densité de la loi normale *fittant* les deux premiers moments est superposée aux histogrammes en rouge. Un test supplémentaire pour la log-normalité est obtenu en traçant les diagrammes quantile-quantile (ou QQ-plot) pour les distributions empiriques et *fittées* et est présentée en Annexe 5.

Distribution des montants ultimes espérés ré-échantillonnés par bootstrap
Interpolation par des distributions normales

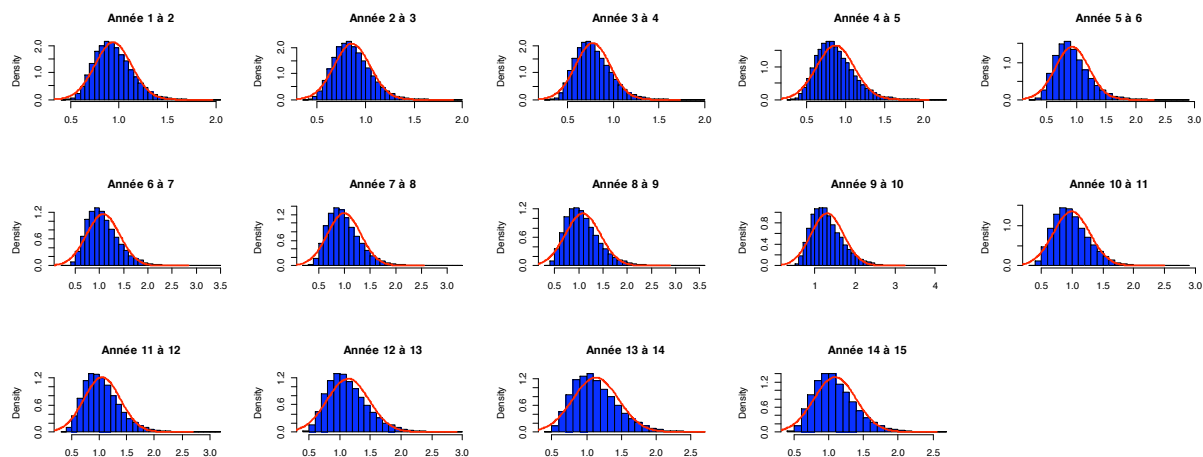


Il est manifeste que les montants ultimes espérés ne sont pas normaux. Ceci est dû à la taille du portefeuille différente à chaque année de souscription qui induit un facteur de

³³ Pour mémoire, le coefficient de passage de l'année t à l'année $t+1$ est défini ici par $\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}$.

proportionnalité se répercutant sur toutes les années de développement. En effet, du fait de l'absence de prise en compte des risques sous-jacents spécifiques à chaque année d'origine³⁴, les charges ultimes espérées ne sont pas identiquement distribuées.

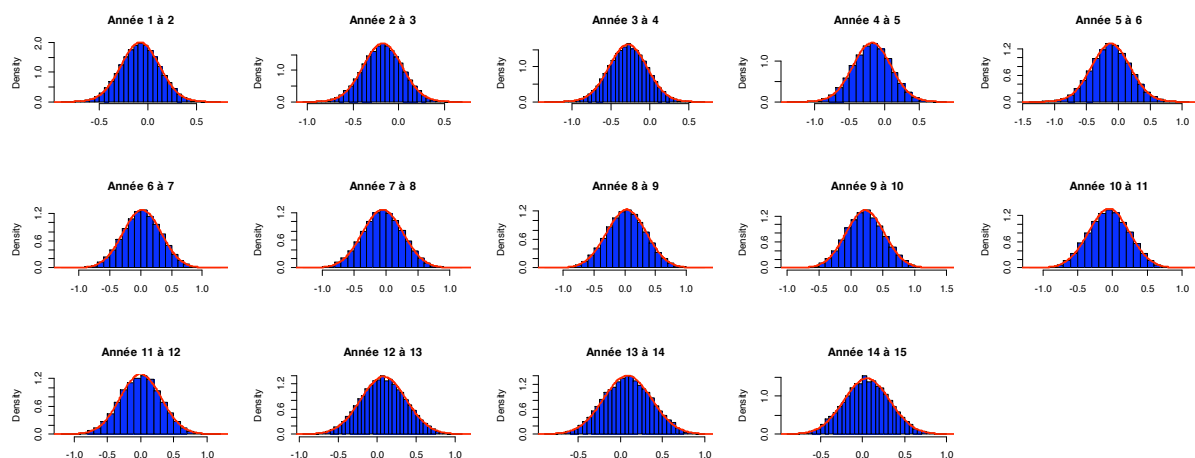
Distribution des coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap Interpolation par des distributions normales



Les coefficients de passages sont eux plus intéressants car la division par l'ultime espéré de l'année précédente permet de supprimer les facteurs de proportionnalité mentionnés ci-dessus. Toutefois l'adéquation avec une loi normale n'est pas encore tout à fait convaincante en raison d'une queue de distribution épaisse à droite.

Le passage au logarithme népérien permet de réduire l'importance de cette dernière, comme le montrent les histogrammes ci-dessous :

Distribution des log-coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap Interpolation par des distributions normales



³⁴ Le nombre de polices du portefeuille peut avoir doublé d'une année sur l'autre par exemple.

Cette approche graphique permet d'étayer l'intuition de la normalité des log-coefficients de passage des montants ultimes espérés. Ces derniers ont donc été sélectionnés pour la spécification normale au détriment des coefficients de passage. Le paragraphe suivant en apporte une preuve plus formelle.

Test de log-normalité des coefficients de passage

A titre de vérification plus formelle de la normalité des log-coefficients de passage, les *p-values* du test de normalité de Shapiro-Wilk, dont le principe est exposé dans Rakotomalala (2011) sont exposées ci-dessous. L'hypothèse nulle est la normalité du jeu de données $x_1, \dots, x_n$ classées par ordre croissant. La statistique de test est :

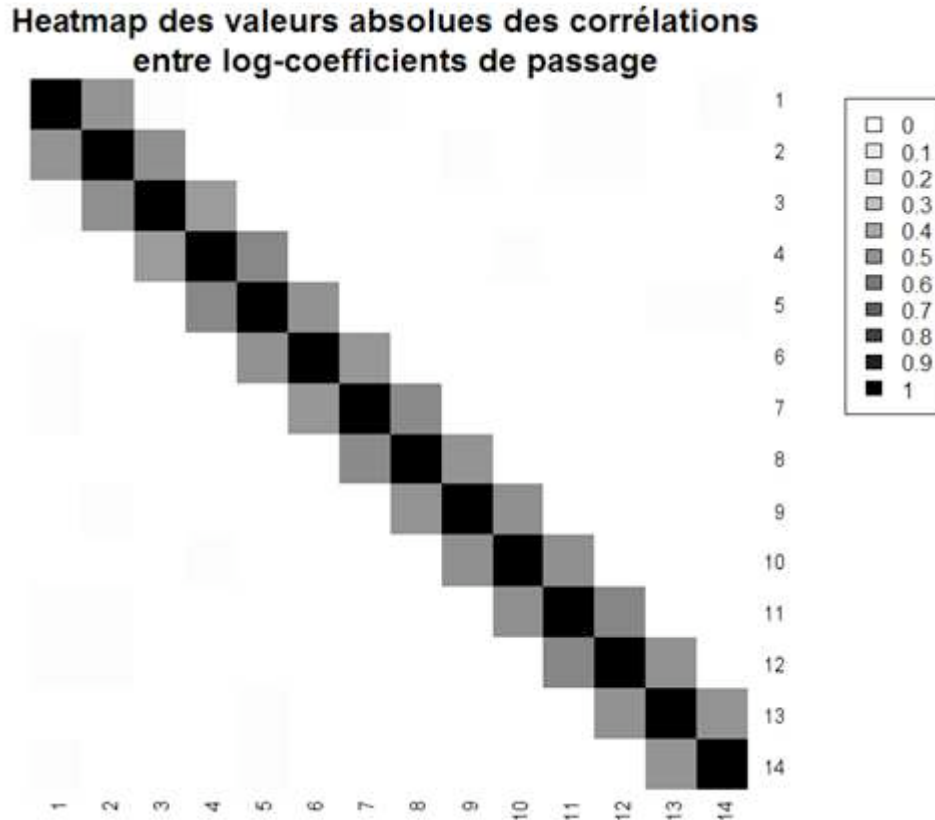
$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} a_i (x_{n-i} - x_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

où les a_i sont des constantes tabulées.

La *p-value* associée à un échantillon correspond à la borne inférieure de l'ensemble des erreurs de première espèce pour lesquelles le test est rejeté. Les *p-values* du test de Shapiro-Wilk sont présentées en Annexe 7. L'acceptation de la normalité se fait pour toutes les erreurs de première espèce strictement inférieures à la *p-value*. La table montre donc que la normalité des log-coefficients de passage est acceptée par le test de Shapiro-Wilk au seuil d'erreur de première espèce de 5% pour chacune des années 1 à 14.

Matrice de corrélation issue de l'échantillon bootstrap

Les corrélations entre les log-coefficients de passage sont globalement faibles, à l'exception de la diagonale principale et des sur et sous-diagonales : il semble n'y avoir un effet d'interaction qu'entre les coefficients contigus seulement. La *heatmap* confirme visuellement cette impression ; la matrice des valeurs numériques est disponible en Annexe 5.



Cette structure particulière de la matrice de corrélation peut être expliquée sous l'approximation heuristique consistant à considérer que les variables aléatoires $E(\tilde{C}_n | F_0), \dots, E(\tilde{C}_n | F_n)$ sont indépendantes identiquement distribuées, ce qui, en notant les

coefficients de passage $X_t = \ln \left(\frac{E(\tilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\tilde{C}_n | F_t)} \right)$, permet d'écrire :

$$Cov(X_s, X_t) = Cov \left(\ln(E(\tilde{C}_n | F_{s+1})) - \ln(E(\tilde{C}_n | F_s)), \ln(E(\tilde{C}_n | F_{t+1})) - \ln(E(\tilde{C}_n | F_t)) \right)$$

Ceci assure des corrélations nulles dès que $|t - s| \geq 2$, égales à $-\frac{1}{2}$ pour $|t - s| = 1$, et égales à 1 pour $s = t$.

4.2.6) Estimation des paramètres pour les données nettes de réassurance avec le traité illimité XS 5 000 000

L'application de la forme paramétrique spécifiée sur les montants ultimes espérés nécessite d'avoir une structure lognormale comme vérifié ci-dessus sur les données brutes.

Cependant, il n'est pas évident que la normalité reste valable dans le cas des données nettes³⁵, car la loi de coût des sinistres pour l'assureur n'est plus une loi de Pareto généralisée, mais le minimum entre cette loi de Pareto et la rétention de 5 000 000. Une

³⁵ réassurance $+\infty$ XS 5 000 000

discontinuité dans la fonction de répartition des coûts de sinistres nets de réassurance est introduite *de facto*.

La construction du triangle des montants ultimes espérés s'effectue de la même manière que celle du triangle des montants ultimes espérés bruts de réassurance.

L'objectif est toujours de constituer des données de la forme :

$$E(C_n | F_{i+t}) = \text{payé}_{i+t} + \text{suspens}_{i+t} + (\theta_n - \theta_t) \cdot \text{coût moyen}$$

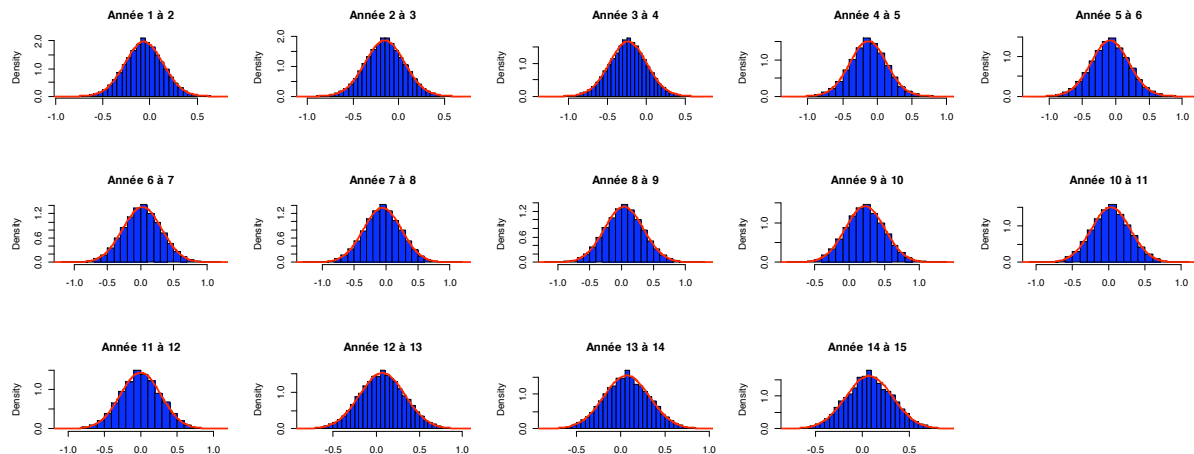
En partant des sinistres individuels, les sinistres IBNYR espérés sont ajoutés à chaque date aux montants payés et aux suspens IBNER.

Il est à noter que :

- les montants IBNYR sont calculés avec la même loi de fréquence que dans le cas d'absence de réassurance,
- le coût moyen en revanche est écrêté.

La log-normalité des quotients $\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}$ est montrée de même qu'en absence de réassurance avec le tracé des distributions, des QQ-plots et des tests de Shapiro-Wilk.

Distribution des log-coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap
Interpolation par des distributions normales



La structure de la matrice des corrélations observée en 4.2.5) est conservée.

4.2.7) Retour sur les paramètres fittés

La structure même des variables de passage log-normale $\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}$ impose une contrainte sur les paramètres de loi log-normale. En effet,

$$E\left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}\right) = E\left(E\left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)} \middle| F_t\right)\right) = E\left(\frac{E(E(\widetilde{C}_n | F_{t+1}) | F_t)}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}\right) = E\left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_t)}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}\right) = 1,$$

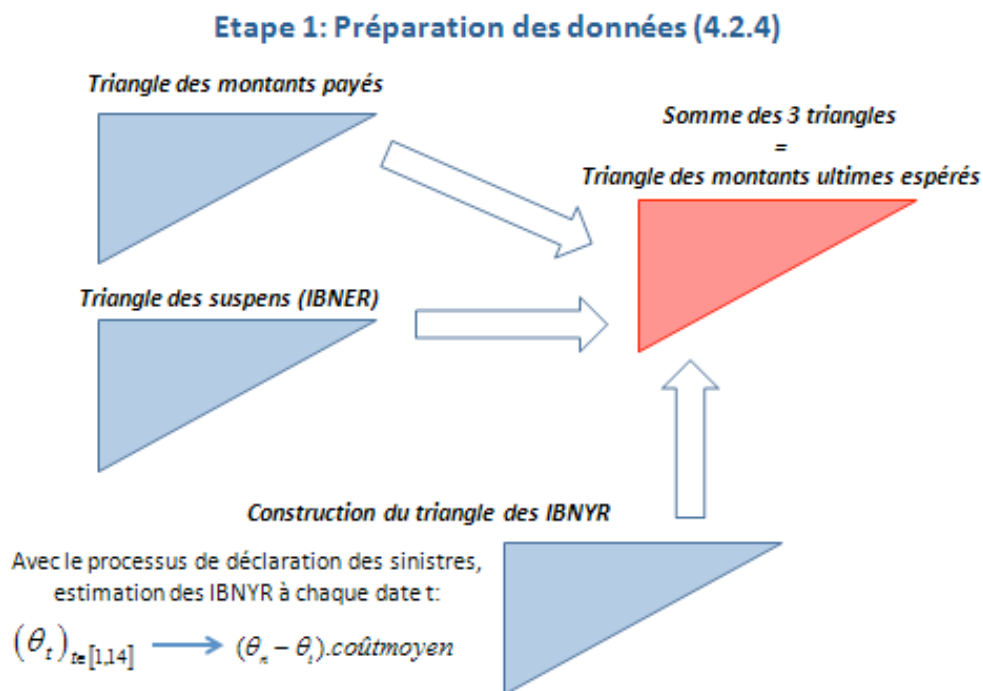
donc sous l'hypothèse $\log\left(\frac{E(\widetilde{C}_n | F_{t+1})}{E(\widetilde{C}_n | F_t)}\right) \sim N(m_t, \sigma_t^2)$, il vient $m_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = 1$.

Le chemin moyen correspond à des multiplications par des coefficients de passage égaux à 1.

En pratique, après *fit* des paramètres m_t et σ_t , la relation $m_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = 1$ n'est pas vérifiée, vraisemblablement en raison de la méthode d'évaluation des IBNER par les gestionnaires de sinistres, qui ne tient pas compte de cette contrainte. Les moyennes m_t ont donc été ajustées à partir des valeurs *fittées* de σ_t : $\widehat{m}_t = 1 - \frac{1}{2}\widehat{\sigma}_t^2$. Par la suite, un tel ajustement sera dénoté « moyennes ajustées » et sera appliqué par défaut.

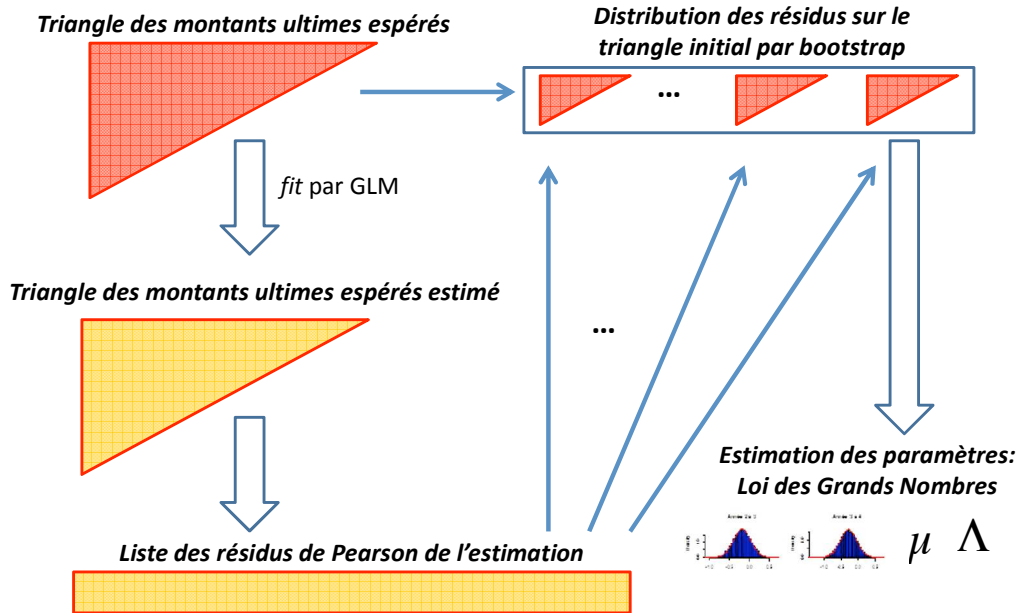
Une explication opérationnelle possible peut être formulée comme ci-après. La méconnaissance éventuelle du fait qu'un sinistre soit de montant ultime supérieur ou égal à 3 000 000 € conduit à le traiter comme s'il s'agissait d'un sinistre attritionnel. La constatation que les moyennes des lois log-normales ne sont pas égales à 1 comme attendu en est la conséquence : la sélection tardive des sinistres atypiques, sous-provisionnés au début de leur développement, introduit un biais dans le triangle des suspens utilisés. Ajuster les moyennes permet de corriger cette mauvaise estimation.

4.2.8) Résumé des 3 étapes de l'implémentation de la forme paramétrique



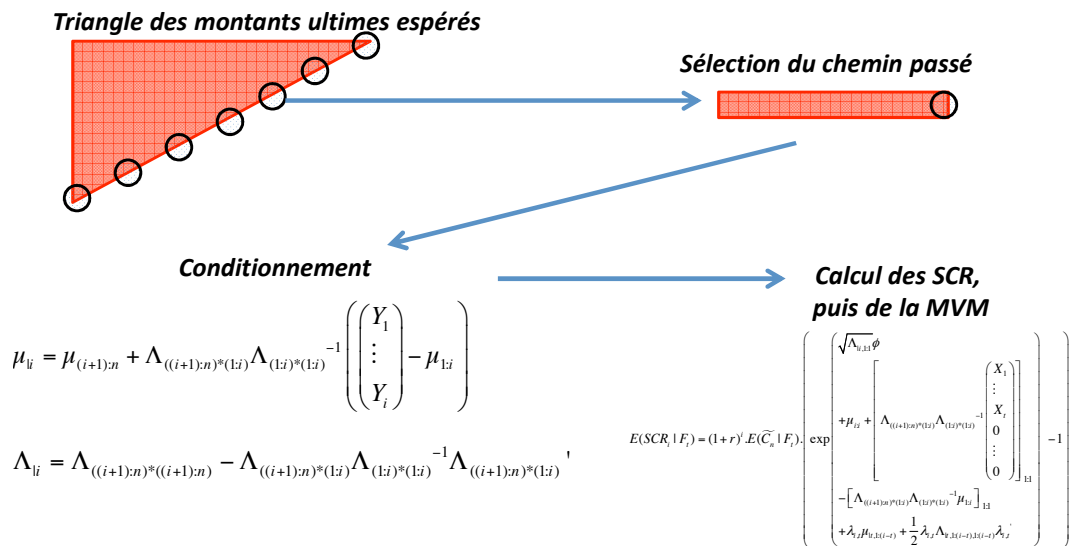
Remarque : les données mentionnées ci-dessus peuvent être brutes ou nettes. Ceci implique alors un calcul préalable des triangles nets et des coûts moyens nets.

Etape 2: Estimation des paramètres (4.2.5 et 4.2.6)



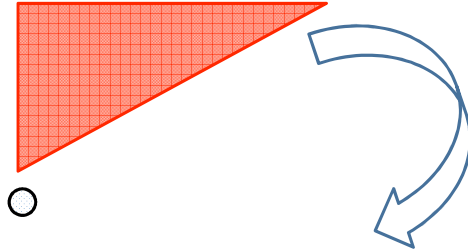
Etape 3: Application de la formule paramétrique (4.2.2 et 4.2.9)

1^{er} cas: Année de souscription passée (4.2.2)



2^{ème} cas: Nouvelle année d'origine (4.2.8)

Triangle des montants ultimes espérés



Aucune information
i.e. pas de conditionnement

$$MVM_0 = \frac{1}{1+r} \cdot E(\widetilde{C}_n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \exp \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\Lambda_{i,i}} \phi \\ +\mu_{i,i} - \left[\Lambda_{(i+1:n)^*(i)} \Lambda_{(i,i)^*(i)}^{-1} \mu_{1,i} \right]_{1:1} \\ +\lambda_{i,0} \mu_{1,i} + \frac{1}{2} \lambda_{i,0} \Lambda_{(i,i)^*(i)} \lambda_{i,0}' \end{pmatrix} - 1 \right)$$

4.2.9) Résultats obtenus

Les SCR espérés présentés dans ce paragraphe ont été obtenus en utilisant les moyennes ajustées pour les log-coefficients de passage. Pour mettre en exergue l'apport de la prise en compte des corrélations dans le modèle gaussien, les SCR espérés sont également calculés en annulant les corrélations non diagonales (voir graphiques ci-dessous).

Par ailleurs, les codes initialement développés sous R ont été initialement mis en place pour un vecteur $(X_2, \dots, X_n)$ normal (au lieu de $(X_1, \dots, X_n)$) pour que le cadre soit comparable avec celui proposé³⁶ en Annexe 6.

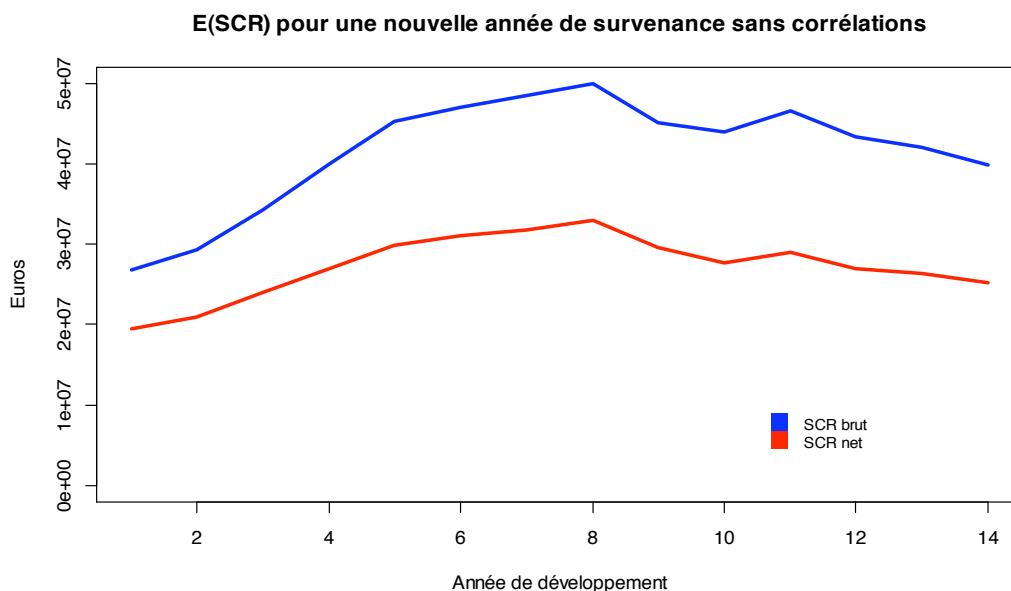
L'hypothèse additionnelle : $E(\widetilde{C}_n | F_1)$ indépendant de $(X_2, \dots, X_n)$ est alors imposée. Cette hypothèse est justifiée par les très faibles montants payés³⁷ en date 1, de sorte que $E(\widetilde{C}_n | F_1)$ est quasiment déterministe. Les formules obtenues en 4.2.3) sont identiques dans le cas $t \geq 1$ et nécessitent une modification mineure pour $t = 0$.

Les déroulés des SCR réserve espérés présentés ci-dessous comparent les situations sans et avec réassurance, pour une année d'origine des sinistres sans aucune information à la date des calculs. Le premier graphique correspond à la situation où les corrélations introduites

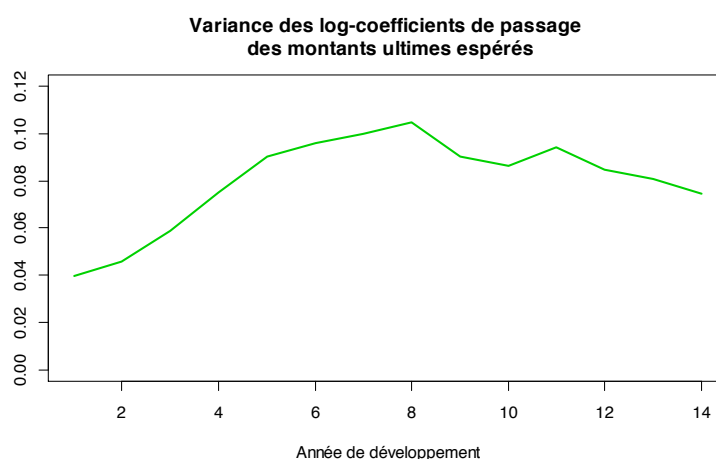
³⁶ Le travail sur les montants payés cumulés impose de travailler avec les coefficients de passage des dates 1 à n. $\frac{C_1}{C_0}$ n'est en effet pas défini car $C_0 = 0$.

³⁷ Le coefficient de développement des montants payés *fitté* par AXA Global P&C est 0,5%.

dans le modèle paramétrique via la matrice de covariance Λ sont annulées, ce qui correspond à l'hypothèse que les coefficients de passage des montants ultimes espérés sont indépendants.

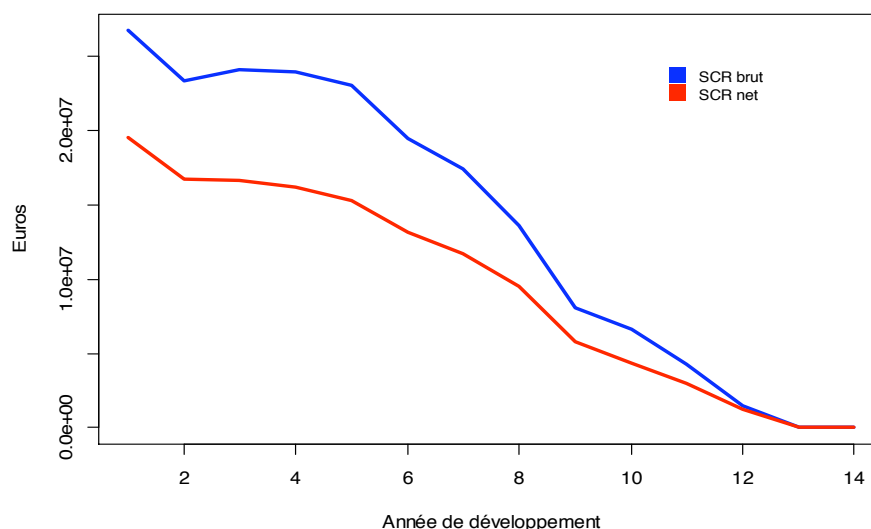


Ne pas annuler les corrélations conduit à des SCR réserve espérés relativement stationnaires, ce qui n'est pas cohérent avec les résultats des autres méthodes, et ne correspond pas à l'intuition d'un déroulé à tendance décroissante. Malgré une expression complexe des SCR espérés (voir 4.2.3), il est remarquable que ce déroulé comporte des similitudes avec l'évolution de la variance estimée du logarithme des coefficients de passage des montants ultimes espérés, comme le montre le graphique ci-dessous :

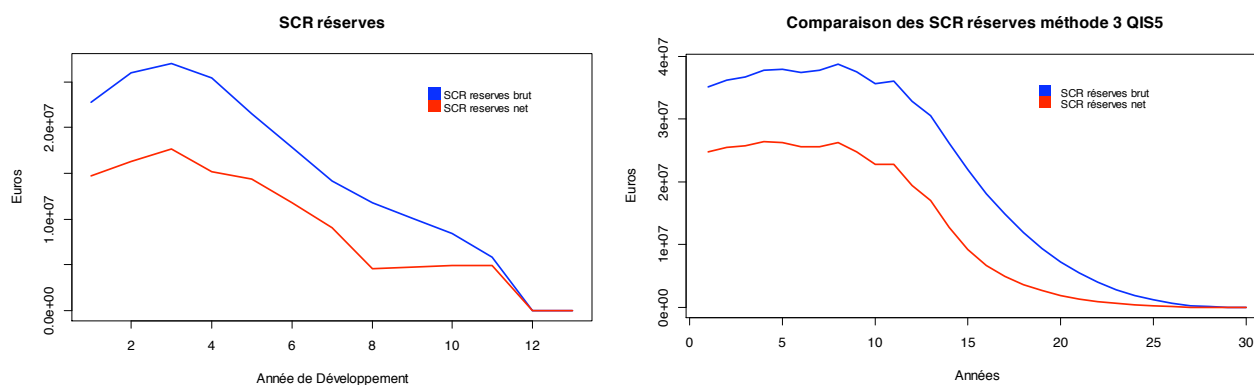


Le graphique suivant présente les mêmes SCR réserve espérés en tenant compte des corrélations estimées en sections 4.2.5) à 4.2.7).

E(SCR) pour une nouvelle année de survenance avec corrélations



Le déroulé des SCR réserve espérés est à tendance décroissante, presque affine. La décroissance observée est donc due à la présence des corrélations égales à $-\frac{1}{2}$ sur les sur et sous-diagonales de la matrice des corrélations entre log-coefficients de passage de l'ultime espéré. Pour mémoire, les SCR réserve espérés obtenus pour les méthodes 2 (spécification chemin moyen sans IBNER) et 3 (ou 4, puisqu'elles sont équivalentes) sont présentés ci-dessous :



Avant tout commentaire, il est fondamental de rappeler que les deux méthodes de type 2 se basent sur des modèles supposant que l'aspect stochastique dans la déclaration de la sinistralité a lieu sur 15 années, d'où la nullité des SCR espérés à partir de l'année 15 de développement. La méthode 3 suppose quand à elle des SCR non nuls jusqu'en 30^{ème} année de développement.

Les SCR les plus importants sont prédits par la méthode 3, avec des valeurs initiales dépassant les 30 000 000 €. Un assureur désireux de réduire les capitaux réglementaires aurait donc intérêt à développer les méthodes de type 2. Les SCR espérés les moins

importants sont ceux prédits par la méthode 2 avec la spécification chemin moyen sans IBNER. Ceci est la conséquence des hypothèses de chemin moyen suivi faites en 4.1.2).

5) Juste prix d'un traité de réassurance *Excess of Loss*

Comme exposé précédemment, AXA Global P&C souhaite céder une partie du risque de la LoB « responsabilité professionnelle médicale » en souscrivant des traités de réassurance pour le portefeuille décrit en 2.4.1). Deux traités ont été envisagés, et pour chacun, plusieurs réassureurs ont proposé une prime de réassurance (cotation). L'objet de cette partie est l'application des méthodes développées dans les parties 1 à 4 du mémoire à ces deux traités, afin de déterminer la prime de réassurance pertinente à la fois au sens du critère de la création de valeur introduit en 2.3) et en tenant compte de l'aversion au risque d'AXA Global P&C. C'est précisément une différence d'aversion au risque associée à une diversification différente de leurs portefeuilles respectifs qui rend le contrat de réassurance profitable pour l'assureur et le réassureur. Les vérifications des hypothèses qui ont fait l'objet d'une étude attentive dans les parties précédentes ne seront qu'évoquées rapidement dans la suite du mémoire.

5.1) Traités étudiés

5.1.1) Annual Aggregate Limit (AAL)

Les deux traités étudiés sont des traités de réassurance proportionnelle classiques (2 000 000 XS 3 000 000 et 5 000 000 XS 5 000 000)³⁸, comportant une clause additionnelle limitant le risque cédé au réassureur. Pour chaque sinistre individuel la garantie 2 000 000 XS 3 000 000 ou 5 000 000 XS 5 000 000 s'applique. La clause additionnelle s'applique sur l'ensemble des sinistres : le montant des sinistres cédé au réassureur ne peut pas excéder un montant fixé, l'AAL, de 25 000 000 € pour chacun des deux traités envisagés.

Les deux traités conduisent les réassureurs à verser des prestations à AXA Global P&C pour les sinistres individuels pour lesquels la sinistralité atteint 3 000 000 € pour le premier traité et 5 000 000 € pour le second traité. Les données de sinistralités atypiques utilisées dans le mémoire sont donc bien compatibles avec ces deux traités, puisqu'elles considèrent comme atypiques les sinistres au-delà de 3 000 000 €.

Il s'agit ici de remarquer que le paiement du réassureur pour une année d'origine donnée est par :

$$\min \left(\sum_{i=1}^{Frequency} \min [maximum\ liability, \max(Loss_i - retention, 0)], AAL \right)$$

5.1.2) Index Clause

L'une des problématiques afférentes aux nouveaux traités fut une éventuelle *index clause*. Celle-ci n'a pas été implémentée pour ne pas avoir à ajouter d'hypothèses supplémentaires

³⁸ Par ailleurs, il est remarquable que l'achat simultané de ces deux traités coïncide avec une cession immédiate de la sinistralité atypique (Le seuil de la loi de Pareto généralisée est de 3 000 000.).

sur les index utilisés et le type de clause. Il s'agit cependant de comprendre l'enjeu sous-jacent puisque la prime pure de réassurance est influencée par ce type de clause.

Le principe de l'*index clause* est de prendre en compte l'inflation pour adapter la rétention et la portée, et garantir de la sorte que la proportion du sinistre escomptée par l'assureur ne soit pas artificiellement influencée par l'inflation.

D'après Ihl (2009), l'une des manières de prendre en compte l'inflation consiste à appliquer une clause de type 10/68. Le principe consiste à adapter chaque année la rétention et la portée selon la formule:

$$\forall t, retention_t = retention_0 \cdot \frac{C_t}{C_0} \text{ avec } \vec{C}_t = \sum_{i=0}^t I_i \cdot \frac{index_0}{index_i} \cdot 1_{\{index_i \geq 110\% \}}, index_i \text{ une mesure de l'inflation et les notations de 1.4.1).}$$

En particulier, dans le cas d'un traité de type $+\infty$ XS *retention*, comme seule la rétention est modifiée, ne pas intégrer l'*index clause* mènera à surestimer la prime pure de réassurance. L'effet est en revanche indéterminé dans le cas où la portée est finie.

5.1.3) Cotations des réassureurs

La table ci-dessous contient les primes de réassurance proposées par cinq réassureurs pour les deux traités 2 XS 3 et 5 XS 5.

Cotations en millions d'€		
Réassureurs	2 XS 3	5 XS 5
HANNOVER RE /DE ®	9,3	5,6
SWISS RE /CH ®	10,4	9,4
TRANSATLANTIC RE /US ®	-	6,75
AMLIN AG /CH ®	11,55	9,7
PARTNER RE /IE ®	11,2	12,7

5.2) Adaptation des méthodes de calcul de MVM aux portefeuilles réassurés

L'introduction d'une clause d'AAL dans les traités nécessite d'adapter les codes développés dans les parties 3 et 4 pour le calcul de la MVM du traité de réassurance $+\infty$ XS 5 000 000.

5.2.1) Forme paramétrique sur les charges ultimes espérées

L'application de la méthode présentée en 4.2) nécessite de construire un triangle net de réassurance contenant les montants ultimes espérés à la charge de l'assureur. Les montants à inscrire dans le triangle doivent tenir compte du fait qu'une partie de l'AAL a déjà été consommée par les paiements du réassureur³⁹ ayant eu lieu aux dates précédentes. La

³⁹ Estimés à partir du triangle des montants payés et des suspens

construction du triangle se fait à partir des données individuelles de sinistralité, année d'origine par année d'origine, et pas à pas en partant de la date de survenance des sinistres.

Soit une année d'origine de sinistres, notée ici 0. Le premier montant à inscrire est obtenu par simulation en appliquant la formule

$$\min \left(\sum_{i=1}^{Frequency} \min [maximum\ liability, \max(Loss_i - retention, 0)], AAL \right) \quad \text{avec} \quad l'AAL \quad \text{de} \\ 25\ 000\ 000.$$

Les montants suivants à inscrire dans le triangle pour cette année d'origine doivent tenir compte du fait qu'une partie de l'AAL a déjà été consommée par les paiements du réassureur⁴⁰ ayant eu lieu précédemment. L'AAL restant disponible doit alors être répartie sur les sinistres IBNYR. 10 000 scénarios sont menés pour simuler les IBNYR nets de réassurance à chaque $t \geq 1$ en tenant compte de l'AAL disponible à la date t , ce qui revient à procéder de même qu'au paragraphe précédent en remplaçant l'AAL originelle de 25 000 000 € par l'AAL disponible.

Une fois construit le triangle des montants ultimes espérés non actualisés nets de réassurance, un rééchantillonnage par *bootstrap* sur le triangle permet de calculer les paramètres des lois log-normales introduites dans la section 4.2), puis d'appliquer la forme paramétrique.

5.2.2) Méthodologie chemin moyen

Dans cette méthodologie, les AAL utilisés sont les AAL disponibles obtenus par simulation. L'AAL disponible est défini comme l'AAL restant en moyenne suite à la déduction d'une partie de l'AAL initial, consommée par la sinistralité des années précédentes⁴¹.

Pour estimer l'AAL consommé par les premières années de développement, il est essentiel de remarquer qu'il ne faut pas calculer l'AAL consommé dans le scénario moyen, mais la moyenne des AAL consommés sur un ensemble de scénarios simulés.

5.3) Encadrement du juste prix, notions d'isovalues

A partir de la notion de création de valeur définie en 2.3), AXA Global P&C a développé les concepts d'isovalues. L'idée consiste à encadrer le prix juste d'un traité de réassurance en déclinant la création de valeur à travers deux indicateurs.

5.3.1) Isovalue Min

Le premier indicateur, l'isovalue min, représente une borne inférieure, une valeur de ce *qu'a minima* apporte un traité de réassurance. Il est défini simplement à partir de la formule

⁴⁰ Estimés à partir du triangle des montants payés et des suspens

⁴¹ Pour mémoire, la méthode 2 chemin moyen sans IBNER suppose que le chemin moyen a été suivi jusqu'à l'année de calcul du SCR.

proposée dans le paragraphe 2.3) par la valeur de la prime de réassurance qui annule la création de valeur. Il est donc donné par :

$$isovaluemin = (PP_{brute} - PP_{nette}) + \frac{MMM_{brute} - MMM_{nette}}{1 - \tau}$$

5.3.2) Mesures de distorsion de Wang

Afin d'aborder le paragraphe suivant sur l'isovalue max, il apparaît nécessaire d'introduire les mesures de distorsion de Wang exposées dans ce paragraphe et originellement développées par Wang (2000).

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{R}_+$ si X est un risque), de fonction de répartition F_X , de densité f_X et appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Soit g une fonction croissante de $[0;1]$ dans $[0;1]$, telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La mesure de Wang⁴² associée à g de la variable aléatoire X est définie par :

$$R_g(X) = \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx$$

Il est notable que si g est l'identité, R_g est l'espérance pour les risques. Par ailleurs, en effectuant une intégration par parties, puis le changement de variable $y = F_X(x)$ ⁴³, il vient :

$$R_g(X) = \left[x \cdot g(1 - F_X(x)) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot g'(x) dx$$

Par ailleurs, calculer $R_g(X)$ suppose que la fonction $x \mapsto g(1 - F_X(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Cette dernière étant décroissante et positive, il vient :

$$\forall x \geq 0, \int_{x/2}^x g(1 - F_X(u)) du \geq \frac{x}{2} \cdot g(1 - F_X(x)) \geq 0$$

Sachant que par définition de l'intégrabilité au sens de Riemann, $\int_{x/2}^x g(1 - F_X(u)) du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des Gendarmes donne $x \cdot g(1 - F_X(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, puis $\left[x \cdot g(1 - F_X(x)) \right]_0^{+\infty} = 0$.

Par suite,

⁴² Charpentier A. (2010), « Mesures de risques », cours dispensé à l'université Rennes 1

⁴³ Pour avoir un C^1 difféomorphisme, f_X ne s'annule pas suffit.

$$\begin{aligned}
 R_g(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot g'(x) dx \\
 &= - \int_0^{+\infty} x d(g(1 - F_X(x))) \\
 &= - \int_0^1 F_X^{-1}(y) d(g(1 - y)) \\
 &= \int_0^1 F_X^{-1}(1 - y) d(g(y)) \\
 &= \int_0^1 VaR_X(y) d(g(y))
 \end{aligned}$$

Ainsi, la mesure de Wang R_g apparaît comme un barycentre de *Values at Risk* pondérées par g .

Cohérence des mesures de Wang pour des fonctions de distorsion concaves

Les mesures de risque de Wang sont cohérentes si g est concave. En effet, elles vérifient alors les quatre conditions requises :

➤ **Monotonie** : si $0 \leq X \leq Y$, alors $\forall u \in \mathbb{R}_+, F_X(u) \geq F_Y(u)$, puis par croissance de g , $\forall u \in \mathbb{R}_+, g(1 - F_X(u)) \leq g(1 - F_Y(u))$, d'où $R_g(X) \leq R_g(Y)$.

➤ **Invariance par translation** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall u \in \mathbb{R}, F_{X+\lambda}(u) = P(X + \lambda \leq u) = F_X(u - \lambda)$ et $\forall \alpha \in (0; 1), VaR_{X+\lambda}(\alpha) = \lambda + VaR_X(\alpha)$.

$$\begin{aligned}
 R_g(X + \lambda) &= \int_0^1 VaR_{X+\lambda}(y) d(g(y)) \\
 &= \int_0^1 VaR_X(y) d(g(y)) + \int_0^1 \lambda d(g(y)) \\
 &= R_g(X) + \lambda \cdot (g(1) - g(0)) \\
 &= R_g(X) + \lambda
 \end{aligned}$$

➤ **Positive homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\forall \alpha \in (0; 1), VaR_{\lambda.X}(\alpha) = \lambda \cdot VaR_X(\alpha)$, d'où $R_g(\lambda.X) = \lambda \cdot R_g(X)$

➤ **Sous-additivité** :

- La démonstration requiert la sous-additivité de la mesure de risque TVaR qui est admise, voir Hainaut (2011).
- La démonstration est faite sous les hypothèses additionnelles que g est concave de classe C^2 et que les risques étudiés sont à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et de fonction de répartition inversible.

En utilisant :

$$\begin{aligned}\int_0^1 VaR_X(u) du &= \int_0^1 F_X^{-1}(1-u) du \\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} v \cdot f_X(v) dv \quad \text{avec } F_X(v) = 1-u \\ &= E(X)\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}R_g(X+Y) &= \int_0^1 VaR_{X+Y}(y) d(g(y)) \\ &= \left[g'(y) \cdot \int_0^y VaR_{X+Y}(u) du \right]_0^1 - \int_0^1 g''(y) \cdot \left(\int_0^y VaR_{X+Y}(u) du \right) dy \\ &= g'(1) \cdot \int_0^1 VaR_{X+Y}(u) du - \int_0^1 g''(y) TVaR_{X+Y}(y) dy \\ &= g'(1) \cdot E(X+Y) - \int_0^1 g''(y) TVaR_{X+Y}(y) dy \\ &\leq g'(1) \cdot E(X) + g'(1) \cdot E(Y) - \int_0^1 g''(y) \cdot (TVaR_X(y) + TVaR_Y(y)) dy \quad \text{car } g'' \leq 0 \\ &\leq g'(1) \cdot E(X) + g'(1) \cdot E(Y) - \int_0^1 g''(y) TVaR_X(y) dy - \int_0^1 g''(y) TVaR_Y(y) dy \\ &\leq R_g(X) + R_g(Y)\end{aligned}$$

Application à la création d'un environnement choqué

Les mesures de Wang exposées ci-dessus vont être utilisées dans la suite du document pour créer un environnement choqué. Après avoir défini une isovalue min qui correspond à la valeur créée par le traité de réassurance pour un assureur non averse au risque⁴⁴, il est possible d'obtenir une borne supérieure de prix acceptable pour l'assureur en intégrant son aversion au risque. Cette dernière est introduite grâce à une mesure de Wang.

En considérant l'expression $R_g(X) = \int_0^{+\infty} g(1-F_X(x)) dx$, l'interprétation suivante en découle : g étant concave est continue, donc $x \mapsto g(1-F_X(x)) = g(1-P(X \leq x))$ est continue à droite. Ayant de plus $g(1-F_X(0)) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(1-F_X(x)) = 0$, il existe une variable aléatoire positive Y dont la fonction de survie est $x \mapsto g(1-F_X(x))$. $R_g(X)$ est alors l'espérance de Y .

En outre, g étant concave, sa courbe entre deux points est au-dessus de la corde reliant les deux points. Ayant notamment $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, il vient $\forall x \in [0;1], g(x) \geq x$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq F_Y(x)$. Si g est choisie strictement concave, l'inégalité précédente devient stricte en les x appartenant à l'intérieur topologique du support de F_X ⁴⁵. Ceci permet de

⁴⁴ i.e. dont la fonction d'utilité est l'identité (voir Picard (2012))

⁴⁵ cet ensemble étant bien non vide car X est une variable à densité par hypothèse

conclure que Y domine stochastiquement X au premier ordre. Y représente donc une vision choquée du risque X .

En pratique, la loi de Pareto généralisée utilisée précédemment (X) pourra donc être remplacée par la loi choquée Y , ce qui donnera une vision choquée du risque. Remplacer la sévérité des sinistres X par Y permet donc d'obtenir des SCR à immobiliser différents⁴⁶ de ceux en état du monde non choqué.

Le choix opéré fut celui de choquer la loi de Pareto généralisée puis d'agréger les sinistres individuels plutôt que de choquer directement le produit Pareto $\times$ Poisson. Ce choix lié à l'implémentation peut être vu comme prudent. En effet, l'agrégation de sévérités choquées pour deux sinistres différents X_1 et X_2 doit être reliée à la cohérence de la mesure de Wang. Avec les notations précédemment introduites, $R_g(X_1 + X_2) \leq R_g(X_1) + R_g(X_2)$. Travailler dans l'état du monde choqué, c'est-à-dire directement avec les équivalents choqués de X_1 et X_2 notés Y_1 et Y_2 , est prudent car l'espérance des risques agrégés choqués, $R_g(X_1 + X_2)$, est surestimée.

Le concept de SCR est introduit dans Solvabilité II pour se prémunir contre les états du monde adverses (sauf les 0,5% les plus sévères), aussi l'idée de choquer la sévérité des sinistres peut sembler redondante avec la notion de SCR. En réalité, les SCR calculés en états du monde choqués n'ont pas vocation à être utilisés pour les immobilisations réelles ni à se substituer aux SCR non choqués, mais seulement à fournir une valeur de MVM choquée fictive pour anticiper une déviation de MVM.

Les SCR permettent de contrôler la déviation des provisions, mais leur propre déviation a des répercussions sur la tarification.

5.3.3) Isovalue Max

Le second indicateur nommé isovalue max consiste à intégrer l'aversion pour le risque de l'assureur grâce à une mesure de Wang comme introduit précédemment. Le prix maximum admissible prenant en compte l'aversion au risque est alors défini comme celui qui caractérise l'indifférence entre la situation avant et après réassurance. Ce principe est utilisé notamment par El Karoui et Barrieu (2005).

En l'espèce la fonction de distorsion choisie est la fonction f_u définie par : $\forall u \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}, f_u(x) = x^{1-u}$. Cette fonction est bien concave, ce qui garantit la cohérence de la mesure ainsi définie.

⁴⁶ empiriquement plus importants, comme constaté dans la section 5.4)

La transformation des SCR par la mesure de Wang se décline en deux aspects: la manière dont se transforme l'espérance et la manière dont se transforme le quantile. Concernant le quantile, en considérant que la fonction de répartition est continue et inversible, le développement ci-dessous l'exprime de façon simple.

En notant F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X et S sa fonction de survie, et en indexant les fonctions choquées par u , il vient, avec $VaR_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$:

De plus $S_u(x) = S(x)^{1-u}$, d'où $1 - F_u(x) = (1 - F(x))^{1-u}$ et $F_u(x) = 1 - (1 - F(x))^{1-u}$. Par ailleurs, $x = F_u^{-1}(y) \Leftrightarrow F_u(x) = y \Leftrightarrow 1 - (1 - F(x))^{1-u} = y \Leftrightarrow x = F^{-1}\left(1 - (1 - y)^{\frac{1}{1-u}}\right)$

Ainsi,

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^u &= F_u^{-1}(1-\alpha) \\ &= F^{-1}\left(1 - (1 - (1-\alpha))^{\frac{1}{1-u}}\right) \\ &= F^{-1}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{1-u}}\right) \\ &= VaR_{\alpha^{\frac{1}{1-u}}} \end{aligned}$$

Il résulte de ceci que le quantile de la variable choquée est un nouveau quantile de la variable initiale. Un travail analogue doit être mené sur le choc de l'espérance. Comme la variable aléatoire est positive⁴⁷, en intégrant simplement la fonction de survie, il vient :

$$E_u(X) = \int_0^{\infty} S(x)^{1-u} dx$$

Cette expression simple formalise le problème, mais ne fournit pas d'élément pour estimer cette intégrale. Cette question est résolue par l'estimation proposée en Annexe 8.

⁴⁷ Pour une variable aléatoire X positive intégrable, $x.(1 - F_X(x)) \leq \int_x^{+\infty} y dP_X(y) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x dP_X(x) = \left[-x(1 - F_X(x))\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx = \int_0^{+\infty} S(x) dx$$

5.4) Applications et résultats

5.4.1) Vérifications des hypothèses de modélisation

Concernant la méthode paramétrique sur les triangles nets :

- Les vérifications relatives à l'exogénéité et à l'homoscédasticité des résidus conduisent à des résultats satisfaisants.
- Les vérifications concernant la log-normalité des coefficients de passage des log-coefficients de passage des montants ultimes espérés sont eux aussi satisfaisants.

L'introduction de contrats plus élaborés et la modification des paramètres de rétention et de portée n'affectent pas, dans ce cas, la pertinence de la modélisation.

5.4.2) Résultats des différentes méthodologies

Ces notions d'isovalues min et max peuvent être calculées avec les méthodes d'estimation de la MVM exposées précédemment. Par ailleurs elles peuvent se décliner de façon indépendante en diversifiant ou non les SCR dans la MVM.

Les résultats obtenus concernant les MVM sont les suivants (en millions d'euros) :

	Méthode 3		Méthode 2: Chemin Moyen		Méthode 2: Forme paramétrique	
	2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5
MVM brute choquée	31,00	30,29	11,09	10,98	11,60	11,60
MVM brute	27,78	27,59	9,99	9,99	10,03	10,03
MVM brute diversifiée choquée	12,09	11,81	4,18	4,09	4,57	4,57
MVM brute diversifiée	10,83	10,76	3,83	3,90	3,95	3,95
MVM nette choquée	23,14	20,95	8,75	7,39	8,29	8,38
MVM nette	20,25	19,24	7,81	6,69	7,19	7,26
MVM nette diversifiée choquée	9,02	8,16	3,39	2,86	3,27	3,30
MVM nette diversifiée	7,89	7,49	3,02	2,59	2,83	2,86
Ecart de MVM						
standard	7,53	8,35	2,18	3,30	2,84	2,77
standard choquée	7,85	9,34	2,35	3,59	3,31	3,22
diversifiée	2,94	3,26	0,81	1,31	1,12	1,09
diversifiée choquée	3,07	3,65	0,80	1,23	1,31	1,27

Les méthodes de type 2 proposées conduisent donc à réduire de manière significative la MVM tout en étant du même ordre de grandeur.

Les résultats obtenus concernant les isovalues sont les suivants :

en millions d'euros		Isovalues min-max	Isovalues min max diversifié
Méthode 3	2 XS 3	[17,9 ; 18,6]	[11 ; 11,5]
	5 XS 5	[18,7 ; 20,5]	[11,1 ; 12]
Méthode 2: Chemin Moyen	2 XS 3	[9,8 ; 10,3]	[7,8 ; 8]
	5 XS 5	[11,5 ; 11,8]	[8,2 ; 8,3]
Méthode 2: Forme paramétrique	2 XS 3	[10,8 ; 11,8]	[8,2 ; 8,8]
	5 XS 5	[10,4 ; 11,3]	[7,9 ; 8,4]
Cotations des réassureurs	2 XS 3		[9,3 ; 11,55]
	5 XS 5		[5,6 ; 12,7]

5.4.3) Commentaire des résultats obtenus

Comme démontré précédemment, les méthodes 3 et 4 proposées par le QIS5 conduisent à des résultats analogues (voir 3.4.1). Aussi, le tableau précédent ne fait pas apparaître la méthode 4 pour cette raison.

Par ailleurs, comme souligné en 3.2), la méthode 5 conduit à des résultats incohérents. Aussi, les résultats afférents à celle-ci ne sont pas exposés à dessein.

Le premier élément à souligner est que chacun des intervalles [isovalue min ; isovalue max] est inclus dans l'intervalle [min cotation réassureur ; max cotation réassureur].

En outre, l'importance de l'évaluation de la MVM peut être appréhendée grâce à la proportion des isovalues min diversifiées due à la prise en compte de la MVM. Le tableau suivant conduit en l'espèce à constater une part comprise entre 15% et 44%. Les méthodes de type 2 proposées conduisent à réduire de manière significative les prix acceptables par l'assureur par rapport à la méthode 3. De surcroît, la prise en compte de la MVM conduit l'assureur à considérer comme acceptables, du point de vue de la création de valeur, des traités plus chers de 15% à 44% que s'ils étaient évalués sans l'effet de la MVM.

Part de la MVM dans l'isovalue min					
Méthode 3		Méthode 2: Chemin Moyen		Méthode 2: Forme paramétrique	
2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5	2 XS 3	5 XS 5
39,9%	43,9%	15,6%	23,8%	20,3%	20,6%

En considérant le volume du marché mondial de la réassurance (220 milliards \$ en 2011), la MVM représente donc, en première approximation, *a minima* un enjeu de 40 milliards de dollars

Conclusion

Au terme de cette démarche, il convient de proposer des éléments conclusifs d'une part sur les méthodes de calcul de la MVM et d'autre part sur leur utilisation dans l'évaluation du prix des traités de réassurance.

Synthèse des méthodes de calcul de la MVM

En considérant les simplifications par ordre de complexité décroissant :

- La méthode 5 semble être exclue pour les données étudiées. Elle amène à une MVM inférieure de plus de 50% à toutes les autres estimations. L'explication proposée souligne que la calibration des pourcentages est probablement inadaptée à la fois à des développements aussi longs que ceux considérés et à une sinistralité atypique.
- La méthode 4 conduit à une MVM identique à la méthode 3. Elle ne fournit cependant pas d'expression des SCR comme la méthode 3.
- La méthode 3 propose une approche intuitive du déroulé des SCR comme proportionnels au SCR initial calculé de manière exact et à la proportion du *best estimate* de chaque année de développement par rapport au *best estimate* initial. Malgré l'apparente cohérence de l'intuition sous-jacente, cette méthode reste une approximation même sous des hypothèses restrictives.
- La méthode 2 n'est pas univoque et deux propositions ont été faites dans ce document :
 - La première, dite du chemin moyen sans IBNER, repose sur des hypothèses restrictives et probablement irréalistes notamment d'absence d'IBNER et de paiement immédiat dès la déclaration. Elle permet de conserver la modélisation de la sinistralité recommandée par AXA Global P&C de la forme Poisson $\times$ Pareto_Généralisée.
 - La deuxième méthode définit une spécification paramétrique plus sophistiquée qui permet un calcul exact des SCR et une implémentation abordable. Les hypothèses sous-jacentes à son implémentation peuvent être partiellement testées et conduire à un ajustement de la spécification GLM permettant d'estimer les paramètres. Cette méthode ne permet pas de conserver la modélisation recommandée par AXA Global P&C. La mise en œuvre souligne l'importance de l'intégration des covariances qui fait converger les résultats de cette méthode avec ceux de la méthode du chemin moyen et de la méthode 3.
- La méthode 1 suppose de connaître l'ensemble du portefeuille d'un assureur et n'a pas pu être implémentée.

Les méthodes de type 2 conduisent aux valeurs de MVM les plus faibles, ce qui constitue une incitation à l'utilisation de méthodes de calcul exact. Cette incitation, contrairement à celle que constitue l'usage de la méthode 5, repose sur des fondements théoriques solides et compatibles avec l'intégration de traités de réassurance.

Implémentation à l'évaluation du juste prix de la réassurance:

Les calculs de MVM ont été intégrés à l'évaluation du prix de traités de réassurance grâce au concept de création de valeur. Les méthodes de type 2 supposent alors une nouvelle vérification des hypothèses sous-jacentes sur les données nettes.

Il apparaît alors que l'effet de la MVM n'est pas marginal. Ce dernier explique des prix acceptables supérieurs de 15% à 44% aux prix estimés sans tenir compte de l'effet de l'écart de MVM à immobiliser.

Pistes de développements et recommandations :

Les contraintes opérationnelles et temporelles ont limité l'étude des points suivants qui pourront être vus comme des développements ou des recommandations possibles :

- Méthode paramétrique proposée :
 - Cette méthode impose une vérification systématique des hypothèses sous-jacentes grâce aux tests notamment sur la pertinence des estimations GLM.
 - L'intégration du déroulé et de l'actualisation des sinistres pourrait être étudiée plus avant lorsque le triangle initial est construit.
- Méthode du chemin moyen :
 - L'intégration de l'incertitude des IBNER semble une étape importante pour rendre plus vraisemblables les hypothèses de modèle.
 - L'intégration de stochastique sur le cadencement des IBNYR est également une piste à exploiter.
 - Il est en outre nécessaire de procéder à une vérification auprès des autorités de contrôle prudentiel sur l'aspect chemin moyen. En effet, il n'est pas mentionné dans la définition du SCR exposée dans le QIS5.
- Création de valeur :

La méthodologie utilisée par AXA Global P&C pour prendre en compte l'aversion au risque repose sur la distorsion par les mesures de Wang. Cette distorsion de la mesure de probabilité est cependant opaque et l'utilisation de fonction d'utilité pourrait fournir une alternative intéressante et plus univoque.

BIBLIOGRAPHIE

Articles scientifiques et thèses de doctorat

- EL KAROUI N., BARRIEU P. (2005) « Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives via Minimization of Risk Measures » (article en révision)
- ROBERT C. (2011), « Market Value Margin calculations under the Cost of Capital approach within a Bayesian chain ladder framework » (article soumis ou en révision)
- DERIEN A. (2010), « Solvabilité 2 : Une réelle avancée ? », thèse préparée au laboratoire Science Actuarielle et Financière de l'Université Lyon 1
- EFRON B. and TIBSHIRANI R (1986), « The Bootstrap Method for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy », Statistical Science Vol.1, N1, 54-77
- WANG S.S. (2000), « A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks », Journal of Risk and Insurance, Mars 2000, Volume: 67 Issue: 1 pp.15-36

Mémoires soutenus devant l'Institut des Actuaire

- DAYA VIOSSAT M. (2008), « MVM for non-life company under Solvency II. Practical calculation under CoC approach »
- DO T. (2008), « Solvency II : calcul du capital de solvabilité requis par un modèle interne pour une compagnie d'assurance non-vie »
- LANG Y. (2010), « Evaluation des programmes de réassurance dans le référentiel Solvabilité II »
- HOFFMAN M. (2007), « Evaluation de la marge de risque dans le cadre de Solvabilité II et du test Suisse de Solvabilité. Comparaison de la méthode coût du capital et de la méthode des quantiles. »
- RAY S. (2012), « Optimalité des structures de réassurance »

Supports d'enseignement et présentations diverses

- CHARPENTIER A. (2010), « Mesures de risques », cours dispensé à l'université Rennes 1
- CHARPENTIER A., DENUIT M. (2005) « Mathématiques de l'Assurance Non-Vie - Tarification et provisionnement », Tome 2, Economica
- CHOPIN N. (2011), « Statistiques », notes de cours ENSAE ParisTech
- CHRISTINE M. (2012), « Théorie des probabilités, Les « incontournables » », cours dispensé à l'ENSAE ParisTech
- FRANCCQ C. (2012), « Mesures de risque », cours ENSAE ParisTech
- GEORGES G. (2013), « Insurance Risk Management and Reinsurance », cours ENSAE ParisTech

- HOFFMAN M. (2011), Cours de Statistique ENSAE ParisTech; Cours n°5: Tests Statistiques
- HAINAUT D. (2011), « Risk Theory », cours ENSAE ParisTech
- HAINAUT D. (2012), « Econometrics of Insurance », cours ENSAE ParisTech
- IHL O. (2009) « Index Clause 10/68 and Severe Inflation Clause », Internal Presentation, Hanover Rückversicherung
- KOEHLER E. (2012), « Fondements de la finance », cours Master 2 MAEF : MMMEF, Université Paris 1
- LE VALLOIS F. (2013), « Réglementation prudentielle en assurance », cours ENSAE ParisTech 3^{ème} année, voie actuariat
- PICARD P. (2012) « Microéconomie de l'assurance », cours ENSAE ParisTech 3^{ème} année, voie actuariat
- RAKOTOMALALA R. (2011), Polycopié « Tests de Normalité, Techniques Empiriques et tests statistiques », Université Lyon 2

Textes réglementaires

- Commission Européenne (2010), « QIS5 Technical Specifications »
- Code des Assurances, édition 2012, 18^{ème} édition, Dalloz

Ressources informatiques

- R Development Core Team (2005), R: A language and environment for statistical computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL: <http://www.R-project.org>.

ANNEXES

Les Annexes rassemblent un ensemble d'éléments non indispensables à la compréhension de ce mémoire, mais qui permettent de justifier, d'approfondir ou d'illustrer les résultats théoriques et numériques obtenus.

Les Annexes 1 et 2 recensent les extraits du QIS5 justifiant l'aspect réglementaire des différentes méthodes de calcul de la MVM envisagées dans le mémoire. L'Annexe 3 présente les triangles de sinistralité sur lesquels les méthodes de calcul de MVM ont été implémentées.

En Annexe 4, un modèle paramétrique fondé sur l'hypothèse de log-normalité des coefficients de passage des montants de sinistralité payés cumulés est développé. La spécification de ce modèle est reprise des propositions de Daya Viossat (2008) mais aboutit à des résultats significativement différents. En Annexe 5, les résultats de tests de bonne spécification d'un modèle alternatif⁴⁸ sont présentés.

Des détails sur le calcul de l'espérance choquée intervenant dans le concept d'isovalue max sont disponibles en Annexe 6.

L'Annexe 7 correspond à la partie 5), dans laquelle deux traités envisagés pour le portefeuille de sinistres « Responsabilité professionnelle médicale, sinistralité atypique » d'AXA Global P&C ont été tarifés. Cette tarification repose notamment sur la différence entre les MVM à immobiliser en états brut et net de réassurance. Aussi, cette annexe contient des détails sur les déroulés de SCR en espérance dans le temps qui ont servi pour le calcul des MVM.

⁴⁸ Introduit en 4.2)

ANNEXE 1 : QIS 5 et méthode 3

Cette annexe présente des extraits de la partie du QIS5 « Technical Provisions » traitant du calcul de la *risk margin* avec la méthode 3 introduite à l'article TP.5.32..

L'article TP.5.41. permet d'effectuer une projection des SCR à partir du premier SCR en le multipliant par des ratios de *best estimates* nets de réassurance. Ceci justifie la prise en compte de réassurance éventuelle effectuée en 3.4) pour l'implémentation de la méthode 3. Dans la formule « $SCR(t) = (SCR(0)/BENet(0)) \cdot BENet(t)$, $t = 1, 2, 3, \dots$ », $BENet(t)$ est à comprendre comme l'espérance en date 0 du *best estimate* à la date t des obligations de l'assureur (comme expliqué en section 1.3.1).

“Simplifications for the overall SCR for each future year (level 3 of the hierarchy)”

TP.5.40. Simplifications classified as belonging to level 3 of the hierarchical structure sketched in these specifications are based on an assumption that the future SCR's are proportional to the best estimate technical provisions for the relevant year – the proportionality factor being the ratio of the present SCR to the present best estimate technical provisions (as calculated by the reference undertaking).

TP.5.41. According to (a representative example of) the proportional method, the reference undertaking's SCR year t is fixed in the following manner:

$$SCR(t) = (SCR(0)/BENet(0)) \cdot BENet(t), t = 1, 2, 3, \dots$$

Where

$SCR(0)$ = the SCR as calculated at time $t = 0$ for the reference undertaking's portfolio of (re)insurance obligations;

$BENet(0)$ = the best estimate technical provisions net of reinsurance as assessed at time $t = 0$ for the undertaking's portfolio of (re)insurance obligations; and

$BENet(t)$ = the best estimate technical provisions net of reinsurance as assessed at time t for the undertaking's portfolio of (re)insurance obligations.

TP.5.42. This simplification takes into account the maturity and the run-off pattern of the obligations net of reinsurance. However, the assumptions on which the risk profile linked to the obligations is considered unchanged over the years, are indicatively the following:

- the composition of the sub-risks in underwriting risk is the same (all underwriting risks),
- the average credit standing of reinsurers and SPVs is the same (counterparty default risk),
- the unavoidable market risk in relation to the net best estimate is the same (market risk),
- the proportion of reinsurers' and SPVs' share of the obligations is the same (operational risk),
- the loss absorbing capacity of the technical provisions in relation to the net best estimate is the same (adjustment).

TP.5.43. An undertaking that intends to use this simplification, should consider to what extent the assumptions referred to above are fulfilled. If some or all of these assumptions do not hold, the undertaking should carry out a qualitative assessment of how material the deviation from the assumptions is. If the impact of the deviation is not material compared to the risk margin as a whole, then the simplification can be used. Otherwise the undertaking is encouraged to use a more sophisticated calculation or method.

TP.5.44. The undertaking may also be able to apply the simplification in a piecewise manner across the years. For instance, if the business can be split into sub-lines having different maturities, then the whole run-off

period of the obligations could be divided into periods of consecutive years where a proportional calculation method could be used.

TP.5.45. When using the simplification described in the previous paragraphs some considerations should be given also regarding the manner in which the best estimate technical provisions net of reinsurance has been calculated. In this context it should be noted that even if the applied gross-to-net techniques may lead to a reasonable figure for the best estimate net of reinsurance ($BENet(t)$) as compared to the best estimate gross of reinsurance ($BEGross(t)$) at time $t = 0$, this does not necessarily mean that all future estimates of the best estimate net of reinsurance will be equally reliable. In such cases the simplified method sketched above may be biased.

TP.5.46. With respect to operational risk it should be noticed that the capital charge for this risk at $t = 0$ is basically a function of the best estimate technical provisions gross of reinsurance and earned premiums gross of reinsurance, as well as annual expenses (for unit-linked business only). As a consequence it should be assessed to what extent the simplification based on the proportional method which assumes that the SCRs for the operational risk develop *pari passu* with the best estimate technical provisions net of reinsurance may introduce a bias in the risk margin calculations.

TP.5.47. A similar comment concerns the scenario-based adjustments for the loss absorbing capacity of technical provisions to be taken into account when projecting the future SCRs, since it is likely to be (very) difficult to develop reliable scenarios to be applied to these projections. Accordingly, it may in practise be difficult to find other workable solutions than allowing also this component to develop in line with the best estimate technical provisions net of reinsurance. The participating undertaking should, however, make some assessments of the potential bias caused by this simplification.

TP.5.48. A simplification as the one sketched in the previous paragraphs may be applied also at a more granular level, i.e. for individual modules and/or sub-modules. However, it should be noted that the number of calculations to be carried out will in general be proportional with the number of modules and/or sub-modules for which this simplification is applied. Moreover, it should be considered whether a more granular calculation as indicated above will lead to a more accurate estimate of the future SCRs to be used in the calculation of the risk margin.”

ANNEXE 2 : QIS 5 et méthode 2

Cette annexe présente des extraits de la partie du QIS5 intitulée « Technical Provisions », traitant du calcul de la *risk margin* avec la méthode 2 introduite à l'article TP.5.32. sous l'intitulé « Approximate the individual risks or sub-risks within some or all modules and sub-modules to be used for the calculation of future SCRs ».

Il est à noter que les problématiques de calcul de la MVM ne sont focalisées que sur une unique LoB dans ce mémoire. L'existence d'autres LoB est prise en compte via des facteurs de diversification internes à AXA Global P&C. (voir 1.6)

Pour la situation théorique d'un assureur n'ayant qu'une unique LoB, les méthodes de type 2 développées en partie 4) seraient en réalité des méthodes de type 1. Les méthodes de la partie 4) sont donc reliées aux méthodes nommées 2 par l'article TP.5.32 lorsque les MVM calculées sont diversifiées, mais prises individuellement constituent des méthodes de type 1.

"Simplifications for individual modules and sub-modules

TP.5.56. A more sophisticated approach to the simplifications would be to focus on the individual modules or sub-modules in order to approximate the individual risks and/or sub-risks covered by the relevant modules.

TP.5.57. In practise, this would require that the participating undertaking look closer at the risks and sub-risks being relevant for the following modules:

- underwriting risk (life, health and non-life, respectively),
- counterparty default risk with respect to ceded reinsurance and SPVs, and
- unavoidable market risk,

in order to investigate to what extent the calculations could be simplified or approximated.

TP.5.58. In the following paragraphs some proposals for such simplifications are put forward and the main aspects of the simplifications are briefly explained."

ANNEXE 3 :Triangles de sinistralités des données utilisées

Les triangles des sinistres ci-dessous correspondent à la LoB étudiée : responsabilité professionnelle médicale, sinistralité atypique, c'est-à-dire les sinistres dont les montants payés en date de clôture de sinistre dépassent 3 000 000 €. Les données de cette LoB sont disponibles depuis l'année 1998 ; les années d'origine des sinistres sont indiquées en ordonnée et l'indexation de l'axe des abscisses indique le nombre d'années après l'année d'origine pour lequel les montants de sinistralité sont constatés. Il est notable que certaines méthodes de calcul de la MVM, notamment celles tenant compte de traités de réassurances complexes avec des clauses d'AAL, nécessitent de revenir aux montants sinistre par sinistre. Ce triangle n'est pas donné ici en raison de sa taille.

- Le triangle des sinistres payés et des suspens contient l'ensemble des montants provisionnés sans tenir compte des IBNYR : les suspens représentent la partie des sinistres déjà déclarés restant à être versée.

Triangle des sinistres payés et des suspens															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1998	0	990496	1680115	2869294	4251034	4272151	7465542	8117300	12296988	16709877	16709880	20343465	20415455	20415453	20415452
1999	18294	18294	2538428	3676804	6502564	6972524	6885223	9812064	9969216	15997996	17016106	18286902	18286902	18305223	
2000	134707	4213124	5501737	7978035	7979046	9547719	11501301	12612836	16718365	16730855	16733490	16586845	16782532		
2001	862601	1960804	1960804	1970402	2048402	2048502	3020402	6546032	9197528	9197528	9197530	9197529			
2002	1729418	5250345	5856846	3502928	10619450	14634754	24530505	24530507	23907919	27888908	27750675				
2003	2822418	6235545	7259291	4905373	11662449	14360754	22770412	22770414	25120684	29106550					
2004	26898	26898	3670516	3670516	3670516	5071450	5071450	6010466	6007922						
2005	5278897	5299181	7799181	11797467	15884382	19946778	24723937	24746995							
2006	2190247	3061084	5814614	11821111	11823161	22393299	22393297								
2007	1422792	5417400	8480978	8489316	16328965	16334165									
2008	15322783	16553148	17041217	17592542	17602539										
2009	7259627	8873228	6284075	3273419											
2010	6488206	11848472	11848471												
2011	7777010	7777010													

- Le triangle des suspens est la différence entre le triangle précédent et le triangle des montants payés cumulés (ce dernier n'est pas donné ici car redondant).

Triangle des suspens															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1998	0	950644	1638281	2688190	3816442	3831930	6265638	6872679	10854883	15004285	14602248	16533651	15102190	14965424	14887184
1999	18294	18294	2537645	3617757	6436128	6888495	6545516	9338675	9494709	13616943	14529647	14794954	13596907	12781761	
2000	133923	4194212	5471755	7846950	7090793	6914943	8369449	8988029	13086000	12327248	12318529	9918048	9916964		
2001	861839	1957883	1955201	1243057	1263983	1261691	2227725	5516415	7797742	7797743	7797744	7797744			
2002	1724834	5240642	5845734	3481567	10576340	13140510	22756889	21926426	21908987	25146769	24754939				
2003	2821880	6224980	7248047	4878579	11611559	13388652	21200740	20400992	22745142	26602161					
2004	26898	26898	3670516	3670516	3670516	4870903	4870903	5640777	5597422						
2005	5278522	5296504	7715769	10973038	14592262	18460040	21917737	21433131							
2006	2186021	3048103	5797764	11591568	11427074	18052981	18028631								
2007	1421596	5395505	8449453	8104513	13964970	13959775									
2008	15314531	16510846	16988051	17296883	17288528										
2009	7256570	8788997	6200203	379024											
2010	6475734	11828566	11796764												
2011	7767613	7767613													

La construction de ces triangles est ambiguë en raison de la question de la sélection des sinistres atypiques. En effet, certains sinistres sous-évalués sont inscrits tardivement, ce qui biaise les montants inscrits pour les années tardives qui n'enregistrent pas encore ces sinistres. Cet inconvénient a été résolu en tenant compte des IBNYR. Il reste alors à corriger les IBNER pour ces sinistres à problème ; la section 4.2.7) propose une solution.

ANNEXE 4 : Méthode 2, une proposition de forme paramétrique sur les montants cumulés

L'idée d'une formulation paramétrique pour effectuer un calcul exact de MVM pour la LoB étudiée trouve sa source dans Daya Viossat (2008). L'objet de cette annexe est de revenir sur les formules obtenues. Les nouvelles formules proposées sont complexes à implémenter, ce qui justifie la spécification paramétrique alternative en 4.2).

Retour sur la forme paramétrique proposée

Daya Viossat (2008) propose une approche originale du calcul de la MVM. En spécifiant une forme paramétrique pour les montants de sinistres cumulés, il est possible de conduire un calcul exact de la MVM. Les paramètres de loi paramétrique des montants de sinistres cumulés peuvent être obtenus de manières diverses, par exemple en travaillant avec des échantillons *bootstrap*. L'approche suivie dans cette section suppose une estimation similaire des paramètres, à l'instar des sections 4.2.5) et 4.2.6). Les notations sont celles présentées dans le corps du mémoire.

Concrètement, la forme proposée pour le vecteur des coefficients de passage des paiements cumulés est la suivante :

En posant $X_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$, il est spécifié : $(X_2, \dots, X_n) \sim \ln N(\mu, \Lambda)$

Ce faisant, il est possible d'obtenir une formulation exacte relativement simple pour les termes à calculer dans la MVM. Les calculs sont détaillés dans le mémoire. La faisabilité du calcul est permise par le cadre gaussien qui est maintenu à chaque niveau des calculs. L'approche peut s'étendre en adoptant une forme paramétrique voisine, en posant :

$\left(\frac{E(C_n | F_2)}{E(C_n | F_1)}, \dots, \frac{E(C_n | F_n)}{E(C_n | F_{n-1})} \right) \sim \ln N(\mu, \Lambda)$. Les composantes sont en effet reliées

immédiatement aux termes intervenant dans l'expression de la MVM et ceci conduit à des calculs allégés.

En définitive, l'idée d'une forme paramétrique pour la structure temporelle des paiements est mise en place sous deux formes : celle proposée dans cette annexe (sans la récursivité, conformément à ce qui est précisé dans le QIS5) et une forme faisant directement référence aux montants ultimes (voir 4.2)). Les calculs ont été reconduits intégralement dans les deux cas. La formule proposée par Daya Viossat (2008) pour le premier cas n'est pas appliquée en raison de la remarque suivante faisant référence à des extraits de son travail.

La formule A.1-13 proposée en Appendix A.1 est la suivante :

– The 1-year loss deterioration:

$$L_t^1 = E(C_n | \mathcal{F}_{t+1}) - E(C_n | \mathcal{F}_t)$$

$$L_t^1 = C_{t+1} \cdot e^{\tilde{M}_{t+2:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+2:n}} - C_t \cdot e^{\tilde{M}_{t+1:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+1:n}}$$

$$L_t^1 = C_t \cdot \left(\text{LnN}(\tilde{\mu}_{t+1}, \tilde{\sigma}_{t+1}^2) \cdot e^{\tilde{M}_{t+2:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+2:n}} - e^{\tilde{M}_{t+1:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+1:n}} \right)$$

(La dernière formule est notée A.1-13.)

Ceci est obtenu comme présenté en conditionnant le vecteur gaussien $\left(\frac{C_2}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_{n-1}} \right)$ par les

informations disponibles aux dates t et $t+1$, ce qui fait de $\tilde{M}_{t+2:n}$ une variable aléatoire F_{t+1} mesurable et *a priori* non F_t mesurable. Or les calculs suivants sont proposés :

– On a 1-year horizon basis, $Cap_t^1 = 99.5\%[L_t^1]$, transposed into:

$$Cap_t^1 = C_t \cdot \left(e^{\tilde{\mu}_{t+1} + \tilde{\sigma}_{t+1}\phi} \cdot e^{\tilde{M}_{t+2:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+2:n}} - e^{\tilde{M}_{t+1:n} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{t+1:n}} \right)$$

$$Cap_t^1 = C_t \cdot e^{\tilde{M}_{t+1:n}} \left(e^{\frac{1}{2}\tilde{S}_{t+2:n} + \tilde{\sigma}_{t+1}\phi} - e^{\frac{1}{2}\tilde{S}_{t+1:n}} \right)$$

(La deuxième formule est notée A.1.13 bis.)

Or dans le calcul du quantile 99,5% des pertes intervenant en formule A.1-13 bis, qui a lieu à la date t , $\tilde{M}_{t+2:n}$ est traitée comme déterministe à cette date (passage de A.1.13 à A.1.13 bis), ce qui n'est pas le cas. En revanche, $\tilde{S}_{t+2:n}$ ne dépend pas du chemin suivi, et est donc bien F_t mesurable. Le quantile $99.5\%[L_t^1]$ fait par ailleurs référence à un quantile conditionnel à la tribu F_t . Des développements additionnels sont donc nécessaires car le calcul du quantile est plus complexe.

Hypothèse de coefficients de passage log-normaux pour les montants cumulés

A l'instar des hypothèses faites par Daya Viossat (2008), les coefficients de passages entre montants cumulatifs actualisés en 0 sont supposés log-normaux, il est possible d'écrire :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, X_{i+1} = \ln \left(\frac{\widetilde{C_{i+1}}}{\widetilde{C_i}} \right) \text{ et de spécifier } (X_2, \dots, X_n) \sim N(\mu, \Lambda).$$

Pour des raisons de simplicité de notation (essentiellement concernant l'indexation de vecteurs), il est posé : $(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = (X_2, \dots, X_n)$. μ est un vecteur colonne de taille $n-1$ et Λ une matrice de covariance de dimension $(n-1) \times (n-1)$.

Avec ces notations et la convention qu'une somme indexée par un ensemble vide vaut 0,

$$\forall j \in [1, n], \widetilde{C}_n = \widetilde{C}_j \exp \left(\sum_{k=j+1}^n \ln \left(\frac{\widetilde{C}_k}{\widetilde{C}_{k-1}} \right) \right) = \widetilde{C}_j \exp \left(\sum_{k=j+1}^n X_k \right) = \widetilde{C}_j \exp \left(\sum_{k=j}^{n-1} Y_k \right)$$

Calcul des espérances des quantiles sachant l'information en t dans le cas i < n-1

Le calcul part de l'expression

$$E(SCR_i | F_t) = (1+r)^i \cdot E \left\{ [99,5\%] (E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) - E(\widetilde{C}_n | F_i) \mid F_t \right\}$$

et du constat qu'il n'existe pas de loi de projection itérée des espérances conditionnelles sur les quantiles conditionnels. Il est donc nécessaire de partir du centre de l'expression.

Calcul de $E(\widetilde{C}_n | F_{i+1})$

Ainsi, $\widetilde{C}_n = \widetilde{C}_{i+1} \cdot \exp \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} Y_k \right)$. Donc $E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) = \widetilde{C}_{i+1} \cdot E \left(\exp \left(\sum_{k=i+1}^{n-1} Y_k \right) \mid F_{i+1} \right)$.

La suite nécessitant des extractions de matrices, les notations suivantes sont adoptées :

$$\mu_{i:j} = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{(1:i)*(1:i)} & \Lambda_{(1:i)*(i+1:n-1)} \\ \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} & \Lambda_{(i+1:n-1)*(i+1:n-1)} \end{pmatrix}$$

en notant la matrice $T_{(ab)*(cd)}$ l'extraction de T des lignes comprises entre a et b inclus et des colonnes entre c et d inclus.

Par hypothèse de modèle et en utilisant les propriétés de la loi normale multidimensionnelle⁴⁹ $(Y_{i+1}, \dots, Y_{n-1}) | F_{i+1}$ i.e. $(Y_{i+1}, \dots, Y_{n-1}) | (Y_1, \dots, Y_i) \sim N(\mu_{li}, \Lambda_{li})$ avec

$$\mu_{li} = \mu_{(i+1):(n-1)} + \Lambda_{((i+1):(n-1))*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \end{pmatrix} - \mu_{1:i} \right) \text{ et}$$

$$\Lambda_{li} = \Lambda_{((i+1):(n-1))*((i+1):(n-1))} - \Lambda_{((i+1):(n-1))*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \Lambda_{((i+1):(n-1))*(1:i)}'$$

Ainsi, avec α_{n-i-1} un vecteur colonne ne comportant que des 1 et de taille $n-i-1$, comme

$$\sum_{k=i+1}^{n-1} Y_k | F_{i+1} = \alpha_{n-i-1}' (Y_{i+1}, \dots, Y_{n-1}) | (Y_1, \dots, Y_i),$$

il découle directement que $\sum_{k=i+1}^{n-1} Y_k | F_{i+1} \sim N(\alpha_{n-i-1}' \mu_{li}, \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1})$.

⁴⁹ Christine (2012), « Théorie des probabilités, Les « incontournables » »

En utilisant le calcul de la transformée de Laplace d'une loi normale⁵⁰ :

$$\begin{aligned} E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) &= \widetilde{C}_{i+1} \cdot E(\exp\left(\sum_{k=i+1}^{n-1} Y_k\right) | F_{i+1}) \\ &= \widetilde{C}_{i+1} \cdot \exp(\alpha_{n-i-1}' \mu_{li} + \frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1}) \end{aligned}$$

Calcul de $[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i)$

En considérant les expressions obtenues plus haut, il est possible de réécrire (avec i supérieur ou égal à 1, il est toujours possible d'effectuer l'opération suivante):

$$\mu_{li} = \mu_{(i+1):(n-1)} + \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_{1:i} + \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} [99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) &= [99,5\%]\left(\widetilde{C}_{i+1} \exp(\alpha_{n-i-1}' \mu_{li} + \frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1}) | F_i\right) \\ &= \widetilde{C}_i [99,5\%]\left(\exp(X_{i+1}) \exp(\alpha_{n-i-1}' \mu_{li} + \frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1}) | F_i\right) \end{aligned}$$

$$\text{Car } \ln\left(\frac{\widetilde{C}_{i+1}}{\widetilde{C}_i}\right) = X_{i+1} \Leftrightarrow \widetilde{C}_{i+1} = \widetilde{C}_i \cdot \exp(X_{i+1}). \text{ Or } X_{i+1} = Y_i, \text{ donc}$$

$$[99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) = \widetilde{C}_i [99,5\%]\left(\exp(\alpha_{n-i-1}' \mu_{li} + \frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1} + Y_i) | F_i\right)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } [99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) &= \\ \widetilde{C}_i \cdot \exp(\frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{li} \alpha_{n-i-1}) \cdot \exp(\alpha_{n-i-1}' \mu_{(i+1):(n-1)} + \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_{1:i}) & \\ [99,5\%]\left(\exp(\alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix} + Y_i) | F_i\right) & \end{aligned}$$

⁵⁰ $\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(N(\mu, \sigma^2)t)) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2\right)$

car $Y_i = X_{i+1}$ est le seul élément non F_i -mesurable.

Il est manifeste que presque tout a pu être extrait du quantile conditionnel grâce à la F_i -mesurabilité à l'exception d'un terme linéaire en Y_i .

➤ Or $Y_i | F_i$ i.e. $Y_i | (Y_1, \dots, Y_{i-1}) \sim N(\mu_{|i-1;1:1}, \Lambda_{|i-1;(1:1)^*(1:1)})$.⁵¹

➤ Et $\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix} = (\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1})_{(1:1)^*(i:i)} Y_i$,

➤ Ainsi,

$$\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix} + Y_i | F_i \sim ((\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1})_{(1:1)^*(i:i)} + 1) \cdot N(\mu_{|i-1;1:1}, \Lambda_{|i-1;(1:1)^*(1:1)})$$

En supposant que $(\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1})_{(1:1)^*(i:i)} + 1$ est positif ou nul⁵², (en effet si ce terme est négatif le quantile 99,5% considéré-ci-dessous devient le quantile 0,5%), il vient donc en prenant le quantile de cette expression :

$$\begin{aligned} & [99,5\%](\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix} + Y_i | F_i) \\ &= ((\alpha_{n-i-1} \Lambda_{(i+1:n-1)^*(1:i)} \Lambda_{(1:i)^*(1:i)}^{-1})_{(1:1)^*(i:i)} + 1)(\mu_{|i-1;1:1} + \Lambda_{|i-1;(1:1)^*(1:1)}^{1/2} \phi) \end{aligned} \quad 53$$

où ϕ est le quantile 99,5% d'une loi $N(0,1)$. Par stricte croissance de l'exponentielle, il est alors obtenu⁵⁴ :

⁵¹ A noter que le cas $i=1$ est bien compatible avec les formules proposées avec le conditionnement trivial par F_1 , i.e. par la seule information du premier paiement.

⁵² Une sortie dans le code est nécessaire afin de vérifier cette hypothèse à chaque fois qu'elle est exigée. Le code prend en compte ce cas avec un test de signe.

⁵³ Car $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \forall X \text{ v.a.}, [99,5\%](aX + b) = a.[99,5\%](X) + b$

⁵⁴ En effet, pour W une variable aléatoire réelle et $\tau \in]0;1[$, par continuité de l'exponentielle (ligne 4 à 5),

$$\begin{aligned}
 & [99,5\%](\exp(\alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Y_i \end{pmatrix} + Y_i) | F_i) \\
 & = \exp\left((\alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:i)*(i:i)} + 1\right) \cdot (\mu_{i-1;1:l} + \Lambda_{i-1;(1:l)*(1:l)}^{1/2} \phi)
 \end{aligned}$$

Puis finalement :

$$\begin{aligned}
 & [99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) \\
 & = \widetilde{C}_i \exp\left(\frac{1}{2} \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{i,i} \alpha_{n-i-1}\right) \exp\left(\alpha_{n-i-1}' \mu_{(i+1):(n-1)} + \alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_{1:i}\right) \\
 & \exp\left(\left[(\alpha_{n-i-1}' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:l)*(i:i)} + 1\right] (\mu_{i-1;1:l} + \Lambda_{i-1;(1:l)*(1:l)}^{1/2} \phi)\right)
 \end{aligned}$$

Calcul de $E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t)$

Un calcul plus explicite est possible mais alourdirait déraisonnablement les notations. Une méthode pour obtenir une valeur consistante est la simulation par Monte Carlo fondée sur la convergence presque sûre garantie par la loi forte des grands nombres.

Sachant F_t avec $n-1 \geq i \geq t \geq 1$ puisqu'il s'agit ici du calcul de SCR réserves, le premier montant réglé $\widetilde{C}_1$ et les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ sont connus.

Il s'agit alors de développer l'expression de la page précédente en sortant de l'espérance conditionnelle la plupart des variables F_t mesurables de l'espérance conditionnelle et en remarquant que $\widetilde{C}_i = \widetilde{C}_t \exp\left(\sum_{k=t+1}^i X_k\right) = \widetilde{C}_t \exp\left(\sum_{k=t}^{i-1} Y_k\right)$ (avec la somme valant 0 dès lors que

$$\begin{aligned}
 [\tau](\exp(W)) &= \inf \{x \in \mathbb{R} / P(\exp(W) \leq x) \geq \tau\} \\
 &= \inf \{x \in \mathbb{R}_+^* / P(\exp(W) \leq x) \geq \tau\} \\
 &= \inf \{x \in \mathbb{R}_+^* / P(W \leq \ln(x)) \geq \tau\} \\
 &= \inf \{\exp(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^* \text{ and } P(W \leq \ln(x)) \geq \tau\} \\
 &= \exp\left(\inf \{\ln(x) / x \in \mathbb{R}_+^* \text{ and } P(W \leq \ln(x)) \geq \tau\}\right) \\
 &= \exp\left(\inf \{y \in \mathbb{R} / P(W \leq y) \geq \tau\}\right) \\
 &= \exp([\tau](W))
 \end{aligned}$$

l'indexation se fait sur un ensemble vide, ce qui est le cas dès que $t+1 > i$, cas qui survient quand $i = t$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t) \\
 &= \widetilde{C}_t \exp \left(\frac{1}{2} \alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)} \alpha_{n-i-1} + \alpha_{n-i-1} ' \mu_{(i+1):(n-1)} - \alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right) \\
 & \exp \left(((\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:1)*(i:i)} + 1) \Lambda_{(i-1):(1:1)*(1:1)}^{1/2} \phi \right) \\
 & E \left(\exp(\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=t+1}^i X_k + ((\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:1)*(i:i)} + 1) \mu_{(i-1):(1:1)} | F_t \right)
 \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}
 & E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t) \\
 &= \widetilde{C}_t \exp \left(\frac{1}{2} \alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)} \alpha_{n-i-1} + \alpha_{n-i-1} ' \mu_{(i+1):(n-1)} - \alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \mu_{1:i} \right) \\
 & \exp \left(((\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:1)*(i:i)} + 1) \Lambda_{(i-1):(1:1)*(1:1)}^{1/2} \phi \right) \\
 & E \left(\exp(\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=t}^{i-1} Y_k + ((\alpha_{n-i-1} ' \Lambda_{(i+1:n-1)*(1:i)} \Lambda_{(1:i)*(1:i)}^{-1})_{(1:1)*(i:i)} + 1) \mu_{(i-1):(1:1)} | Y_1, \dots, Y_{t-1} \right)
 \end{aligned}$$

La partie restant sous l'espérance conditionnelle étant alors aisée à simuler.

L'idée fondamentale est d'utiliser les $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ qui sont connus pour simuler les $Y_t, \dots, Y_{i-1}$ conditionnels. Les $Y_t, \dots, Y_{i-1}$ sont des réalisations de loi normale dont la variance et l'espérance non conditionnelles sont connues (extraites du triangle considéré par *bootstrap*). Ces paramètres sont modifiés avec $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ en utilisant les expressions de $\mu_{(i-1):(1:1)}$ et $\Lambda_{(i-1):(1:1)}$.

Dans le cas particulier $i = t$, aucune simulation n'est nécessaire car sachant F_t , le contenu de l'espérance conditionnelle est déterministe.

Calcul des espérances des quantiles sachant l'information en t dans le cas $i=n-1$

Le dernier SCR ne nécessite pas autant de développements. En effet, les relations suivantes traduisent un aléa porté sur l'unique année d'aléa restante:

$$\begin{aligned}
 & E\left([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{n-1+1}) | F_{n-1}) | F_t\right) \\
 &= E\left([99,5\%](\widetilde{C}_n | F_{n-1}) | F_t\right) \\
 &= E(\widetilde{C}_{n-1} [99,5\%](\exp(Y_{n-1}) | F_{n-1}) | F_t)
 \end{aligned}$$

Or $Y_{n-1} | (Y_1, \dots, Y_{n-2}) \sim N(\mu_{n-2}, \Lambda_{n-2})$, donc

$$E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{n-1+1}) | F_{n-1}) | F_t) = E(\widetilde{C}_{n-1} \exp(\mu_{n-2,1:1} + \Lambda_{n-2,(1:1)*(1:1)} \phi) | F_t)$$

$$E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{n-1+1}) | F_{n-1}) | F_t) = \widetilde{C}_t \exp(\Lambda_{n-2,(1:1)*(1:1)} \phi) E(\exp\left(\sum_{k=t}^{n-2} Y_k + \mu_{n-2,1:1}\right) | F_t)$$

La partie de l'expression restant sous l'espérance conditionnelle est aisée à simuler.

Expression finale de la MVM

Ayant $E(SCR_i | F_t) = E([99,5\%](E(\widetilde{C}_n | F_{i+1}) | F_i) | F_t) - E(\widetilde{C}_n | F_t)$ et

$$MVM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{E(SCR_i | F_t)}{(1+r)^{i+1-t}}, \text{ il ne reste plus qu'à calculer } E(\widetilde{C}_n | F_t) \text{ soit par Monte Carlo}$$

(i.e. en simulant des lois log-normales correspondantes) soit par calcul exact avec la forme paramétrique, et à réintroduire dans l'expression de la MVM les différents termes calculés.

En pratique, ceci nécessite une implémentation lourde qui a été codée, mais qui n'a pas été utilisée en raison de problèmes rencontrés dans l'estimation des paramètres Λ et μ , ainsi qu'expliqué en 4.2.1).

ANNEXE 5 : Estimation par GLM

Cette annexe explicite la théorie sous-jacente à l'utilisation d'un modèle de type GLM en section 4.2.5). Des résultats spécifiques au modèle de Poisson avec fonction de lien logarithmique sont utilisés en Annexe 6. Les développements théoriques effectués dans cette annexe reprennent des résultats de Charpentier, Denuit (2005).

L'estimation par GLM est contraignante car tout modèle linéaire suppose que l'effet de la variation d'un régresseur se traduit par une variation de la grandeur prédite indépendante des valeurs prises par les autres régresseurs. Toutefois, c'est cette hypothèse qui permet de réduire de façon significative le nombre de paramètres à estimer dans le modèle.

Notations

Soit un ensemble d'individus indexé par $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour chacun de ces individus i est observé un ensemble de caractéristiques : Y_i une variable d'intérêt et $X_i = (1, X_{i,1}, \dots, X_{i,k})$ un vecteur de variables explicatives. Les réalisations de ces variables sont notées en minuscules : x_i, y_i .

Dans le cadre d'un modèle GLM, soit une expérience statistique $(\Omega, F, \Theta, \{P_u, u \in \Theta\})$ pour les variables d'intérêt $Y_i | X_i = x_i$, où Ω est l'ensemble des événements, F une tribu sur Ω , Θ un espace de paramètres et $\{P_u, u \in \Theta\}$ un ensemble de lois sur Ω . Ceci signifie qu'il existe $u \in \Theta$ tel que la loi de $Y_i | X_i = x_i$ est P_u pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

La famille des distributions exponentielles

Soit λ une mesure sur $\mathbb{R}$ dominant les mesures images de $\{P_u, u \in \Theta\}$ et telle que les variables $Y_i | X_i = x_i$ soient des variables aléatoires admettant une densité par rapport à λ appartenant à l'ensemble des distributions exponentielles, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (y, u = (\theta, \phi)) \mapsto \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\phi} + c(y, \phi)\right) \end{cases}$$

avec b de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et b' inversible. Le paramètre u_i de la variable $Y_i | X_i = x_i$ est spécifié de la forme (θ_i, ϕ) : le paramètre ϕ , dit de dispersion, est commun à chaque variable aléatoire $Y_i | X_i = x_i$.

Hainaut (2012) montre, en utilisant la fonction génératrice des moments et en supposant que l'espace des paramètres est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, que :

$$\begin{cases} E(Y_i | X_i = x_i) = b'(\theta_i) \\ V(Y_i | X_i = x_i) = b''(\theta_i) \cdot \phi \end{cases}$$

Ceci justifie l'appellation de paramètre de dispersion pour ϕ car il n'intervient que dans la variance. Les distributions exponentielles forment une classe de distributions vaste, contenant par exemple les lois normale, de Poisson, gamma et binomiale.

La fonction de lien et le cadre linéaire

Dans le cadre de l'expérience statistique présentée, si le paramètre de dispersion est commun à toutes les variables $Y_i | X_i = x_i$, les θ_i n'ont été astreints à aucune contrainte. La spécificité d'un GLM est de postuler l'existence d'une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continûment différentiable et strictement monotone, telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g(E(Y_i | X_i = x_i)) = x_i' \beta$$

$$\text{i.e. } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g(b'(\theta_i)) = x_i' \beta$$

g est appelée fonction de lien. Dans le cas où $g = id_{\mathbb{R}}$, la spécification ci-dessus correspond à celle d'un modèle linéaire multiple. Dans le cas où $g = \ln$, elle correspond à un modèle à fonction de lien logarithmique. Les modèles à fonction de lien logarithmique permettent de contraindre les paramètres à avoir un signe donné, ce qui est parfois nécessaire à la spécification de lois paramétriques.

Sachant $(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$, le modèle admet donc une reparamétrisation par (β, ϕ) .

Identifiabilité et estimation du modèle

Au vu de la spécification, si $Y_i | X_i = x_i$ suit la loi de paramètre $u_i = (\theta_i, \phi)$, alors $E(Y_i | X_i = x_i)$ est une fonction de u_i , donc $g(E(Y_i | X_i = x_i))$ est également une fonction de u_i . Par ailleurs, g et b' étant injectives, θ_i est fonction de $x_i' \beta$. Ceci garantit l'identifiabilité du modèle pour le paramètre θ_i .

En supposant de plus que les variables aléatoires (Y_i, X_i) sont indépendantes entre elles, la densité conditionnelle de $(Y_1, \dots, Y_n)$ sachant $(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la mesure produit $\lambda \otimes \dots \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, L(y_1, \dots, y_n; \theta_1, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y, \phi) \right)$$

Soit donc, pour la log-vraisemblance :

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, l(y_1, \dots, y_n; \theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y, \phi) \right)$$

i.e.

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad l(y_1, \dots, y_n; \beta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i b'^{-1}(g^{-1}(x_i' \beta)) - b(b'^{-1}(g^{-1}(x_i' \beta)))}{\phi} + c(y, \phi) \right)$$

L'estimation du paramètre β peut alors s'effectuer par maximum de vraisemblance. Ceci permet notamment de construire des intervalles de confiance pour les paramètres avec la convergence en loi des estimateurs vers une loi normale centrée, de variance l'inverse de l'information de Fisher.

Cas spécifique du modèle log-Poisson

Dans le modèle de log-Poisson, les variables $Y_i | X_i = x_i$ sont spécifiées comme suivant une loi de Poisson. Leur espérance étant de paramètre $g^{-1}(x_i' \beta)$, $i = 1, \dots, n$ avec $g = \ln$, il vient la spécification suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad Y_i | X_i = x_i \sim \text{Poisson}(\exp(x_i' \beta))$$

La vraisemblance conditionnelle du modèle s'écrit alors :

$$L(y_1, \dots, y_n; \beta) = \prod_{i=1}^n \exp(-e^{x_i' \beta}) \frac{e^{x_i' \beta \cdot y_i}}{y_i!}$$

$$\text{puis } l(y_1, \dots, y_n; \beta) = \sum_{i=1}^n -e^{x_i' \beta} + \sum_{i=1}^n x_i' \beta \cdot y_i - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!)$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \beta_0}(y_1, \dots, y_n; \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - e^{x_i' \beta}) = 0 \\ \forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad \frac{\partial l}{\partial \beta_k}(y_1, \dots, y_n; \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - e^{x_i' \beta}) x_{i,j} = 0 \end{cases}$$

Ces conditions du premier ordre sont l'orthogonalité (au sens du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$) des résidus⁵⁵ estimés aux diverses explicatives. La première condition

$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n e^{x_i' \beta}$ est particulièrement intéressante car elle assure que les données prédites sont centrées autour des données à prévoir.

Cette dernière spécification de modèle de Poisson avec fonction de lien logarithmique a été utilisée et a conduit à des résultats satisfaisants (voir Annexe 6). Il est cependant possible d'appliquer d'autres spécifications GLM si les tests effectués ne sont pas concluants.

⁵⁵ Les prévisions pour chaque variable Y_i sont en espérance : Y_i est estimée par $E(Y_i | X_i = x_i)$, soit $e^{x_i' \beta}$ dans le cadre du modèle de log-Poisson. Les résidus d'estimation sont donc les $y_i - e^{x_i' \beta}$.

ANNEXE 6 : Exogénéité et homoscédasticité des résidus de Pearson

L'étude de l'exogénéité et de l'homoscédasticité des résidus de Pearson introduits en 4.2.6) est effectuée dans cette annexe uniquement pour les montants ultimes espérés bruts de réassurance. Par suite, il sera considéré que l'exogénéité et l'homoscédasticité se transmettent à l'application d'un traité de réassurance non-proportionnelle.

Dans le cadre du modèle appliqué, soit $Y_{i,j}$ la variable à estimer (la sinistralité ultime espérée stockée dans un triangle en $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne) et $X_{i,j}$ le vecteur des variables explicatives (les indicatrices des lignes et des colonnes dans le triangle appliquées à la case (i, j)). Les notations X et Y sont employées quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le modèle est spécifié sous la forme :

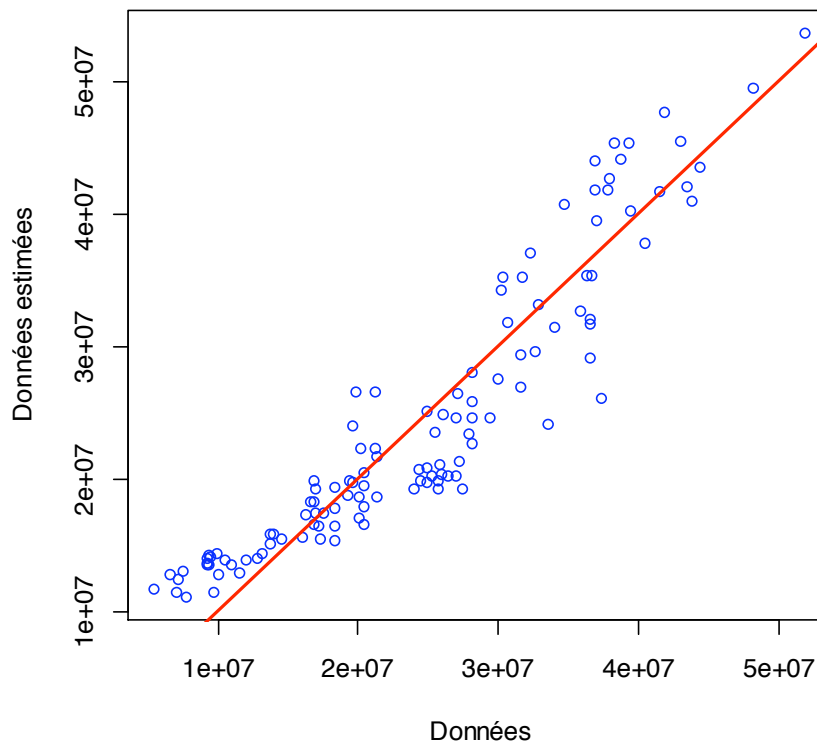
$$Y | X \sim \text{Poisson}(e^{\beta X})$$

Les résultats de l'estimation sont contenus dans la table suivante. La qualité du fit peut s'apprécier sur le graphique ci-dessous : données observées et données prédites sont proches de la première bissectrice.

	Estimation du triangle de sinistralité			
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	17,2808	0,0744	232,2437	0,0000
indic.l2	-0,0085	0,0843	-0,1013	0,9195
indic.l3	0,1005	0,0845	1,1901	0,2371
indic.l4	-0,2043	0,0940	-2,1730	0,0324
indic.l5	0,3473	0,0837	4,1506	0,0001
indic.l6	0,3476	0,0857	4,0570	0,0001
indic.l7	-0,0947	0,0991	-0,9552	0,3420
indic.l8	0,3986	0,0890	4,4775	0,0000
indic.l9	0,3197	0,0932	3,4310	0,0009
indic.l10	0,2880	0,0969	2,9721	0,0038
indic.l11	0,5159	0,0942	5,4760	0,0000
indic.l12	0,2468	0,1063	2,3218	0,0225
indic.l13	0,3511	0,1100	3,1915	0,0019
indic.l14	0,3071	0,1262	2,4331	0,0169
indic.c2	-0,0795	0,0589	-1,3493	0,1806
indic.c3	-0,2529	0,0637	-3,9692	0,0001
indic.c4	-0,5335	0,0719	-7,4175	0,0000
indic.c5	-0,7078	0,0791	-8,9514	0,0000
indic.c6	-0,8283	0,0872	-9,5038	0,0000
indic.c7	-0,8044	0,0908	-8,8631	0,0000
indic.c8	-0,8538	0,0981	-8,7020	0,0000
indic.c9	-0,8270	0,1048	-7,8942	0,0000
indic.c10	-0,6103	0,1016	-6,0094	0,0000
indic.c11	-0,6609	0,1147	-5,7626	0,0000

indic.c12	-0,6607	0,1315	-5,0229	0,0000
indic.c13	-0,5783	0,1412	-4,0947	0,0001
indic.c14	-0,4972	0,1672	-2,9739	0,0038
indic.c15	-0,4490	0,2268	-1,9800	0,0507

Nuage des couples (donnée, donnée estimée)



Les résidus de Pearson sont définis par $res = \frac{Y - e^{\beta X}}{\sqrt{e^{\beta X}}}$. Avec $\hat{\beta}$ l'estimation de β par maximum de vraisemblance, les résidus de Pearson estimés sont donc définis par $\widehat{res} = \frac{Y - e^{\hat{\beta}X}}{\sqrt{e^{\hat{\beta}X}}}$. Ceci implique notamment deux contraintes sur les moments des résidus :

$$\begin{cases} E(res | X) = 0 \\ V(res | X) = 1 \end{cases}$$

Ces deux propriétés sont des conditions nécessaires de la spécification du modèle, mais ne sont pas des conséquences immédiates de l'estimation par maximum de vraisemblance⁵⁶.

⁵⁶ Une condition nécessaire de l'estimation par maximum de vraisemblance est, dans le cadre du modèle de Poisson avec fonction de lien logarithmique : $\sum_{i,j} (Y_{i,j} - e^{\hat{\beta}X_{i,j}}) = 0$. Cependant, il est possible que malgré

cette contrainte, la relation $\sum_{i,j} \widehat{res}_{i,j} = 0$ ne soit pas vérifiée.

Elles sont fondamentales dans le cadre d'un rééchantillonnage par tirage *bootstrap* et redistribution des résidus de Pearson estimés comme pratiqué dans 4.2.4).

- Le non-respect de $E(res | X) = 0$ induirait un biais de μ .
- Le non-respect de $V(res | X) = 1$ induirait une matrice de covariance Λ erronée.

Ainsi, deux tests sont conduits afin de vérifier ces hypothèses :

- D'une part un test afférant à l'exogénéité
- D'autre part, un test afférant à l'homoscédasticité.

Exogénéité

Concernant l'exogénéité, le test de Hausman n'est pas implémentable car aucun instrument n'est disponible. Il a donc été mené une alternative moins puissante : test d'un ensemble de conditions nécessaires à l'exogénéité notamment par la régression des résidus estimés sur des fonctions judicieusement choisies des variables explicatives.

L'écriture des équations de vraisemblance montre que $\sum_{i,j} (Y_{i,j} - e^{\hat{\beta}_{i,j}X}) X_{i,j} = 0$, aussi les résidus estimés sont orthogonaux aux variables explicatives, et régresser ces résidus linéairement sur les explicatives conduirait à observer un effet exactement nul des explicatives. En revanche, ce n'est pas nécessairement le cas pour les résidus de Pearson estimés. Il n'est pas non plus évident que ces résidus soient centrés.

Le tableau ci-dessous présente les statistiques descriptives des résidus de Pearson, et la table suivante les résultats de la régression des résidus de Pearson estimés sur les explicatives.

Statistiques descriptives des résidus de Pearson estimés						
Minimum	1st Quartile	Median	Mean	3rd Quartile	Maximum	Standard Deviation
-1 810.15	-679.17	-35.47	-10.19	551.52	2 213.61	849.85

La faible valeur de la moyenne empirique rapportée à l'écart-type des résidus de Pearson estimés permet d'accepter l'hypothèse de nullité de leur espérance.

	Test de l'exogénéité			
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	29,9627	372,9108	0,0803	0,9361
indic.l2	5,9054	361,4070	0,0163	0,9870
indic.l3	38,4234	371,6860	0,1034	0,9179
indic.l4	-107,2876	382,0538	-0,2808	0,7795
indic.l5	195,4065	393,2217	0,4969	0,6204
indic.l6	183,5721	405,7062	0,4525	0,6520
indic.l7	-98,4071	420,0591	-0,2343	0,8153

indic.l8	219,3439	436,9925	0,5019	0,6169
indic.l9	202,2717	457,5261	0,4421	0,6595
indic.l10	120,8789	483,2371	0,2501	0,8030
indic.l11	42,6761	516,7617	0,0826	0,9344
indic.l12	-57,6927	562,9510	-0,1025	0,9186
indic.l13	-4,8110	632,0247	-0,0076	0,9939
indic.l14	-24,2415	750,7072	-0,0323	0,9743
indic.c2	-16,4165	361,4070	-0,0454	0,9639
indic.c3	-30,7586	371,6860	-0,0828	0,9342
indic.c4	-57,6671	382,0538	-0,1509	0,8804
indic.c5	-120,9586	393,2217	-0,3076	0,7591
indic.c6	-180,5020	405,7062	-0,4449	0,6574
indic.c7	-234,6708	420,0591	-0,5587	0,5778
indic.c8	-198,0579	436,9925	-0,4532	0,6515
indic.c9	-147,3105	457,5261	-0,3220	0,7482
indic.c10	-151,7559	483,2371	-0,3140	0,7542
indic.c11	-110,0941	516,7617	-0,2130	0,8318
indic.c12	-36,6862	562,9510	-0,0652	0,9482
indic.c13	-32,8769	632,0247	-0,0520	0,9586
indic.c14	-33,3872	750,7072	-0,0445	0,9646
indic.c15	-29,9627	1026,3370	-0,0292	0,9768

Pour certains coefficients, la *p-value* de Student est assez faible, mais le R^2 de la régression est très faible (0.02373) et la statistique de nullité jointe de Fisher vaut 0.08194 pour 27 coefficients et 91 degrés de liberté, ce qui correspond à une *p-value* de 1 : l'exogénéité est acceptée.

Homoscédasticité

Le test de Breusch-Pagan a été implémenté pour vérifier l'homoscédasticité. Ce test consiste à régresser linéairement le carré des résidus estimés sur les variables explicatives et à tester la nullité jointe des coefficients des variables explicatives avec le test de Fisher.

La *p-value* du test correspondant à la nullité des coefficients est de 0,2466 ; l'hypothèse d'homoscédasticité est donc acceptée.

Ces deux tests conduisent donc à confirmer la pertinence du modèle retenu.

ANNEXE 7 : Preuve de la log-normalité des coefficients de passage des montants ultimes espérés

Cette annexe vérifie une hypothèse fondamentale de la modélisation qui suppose un rééchantillonnage pertinent acquis grâce à l'Annexe 6, ayant établi la pertinence de la modélisation GLM effectuée.

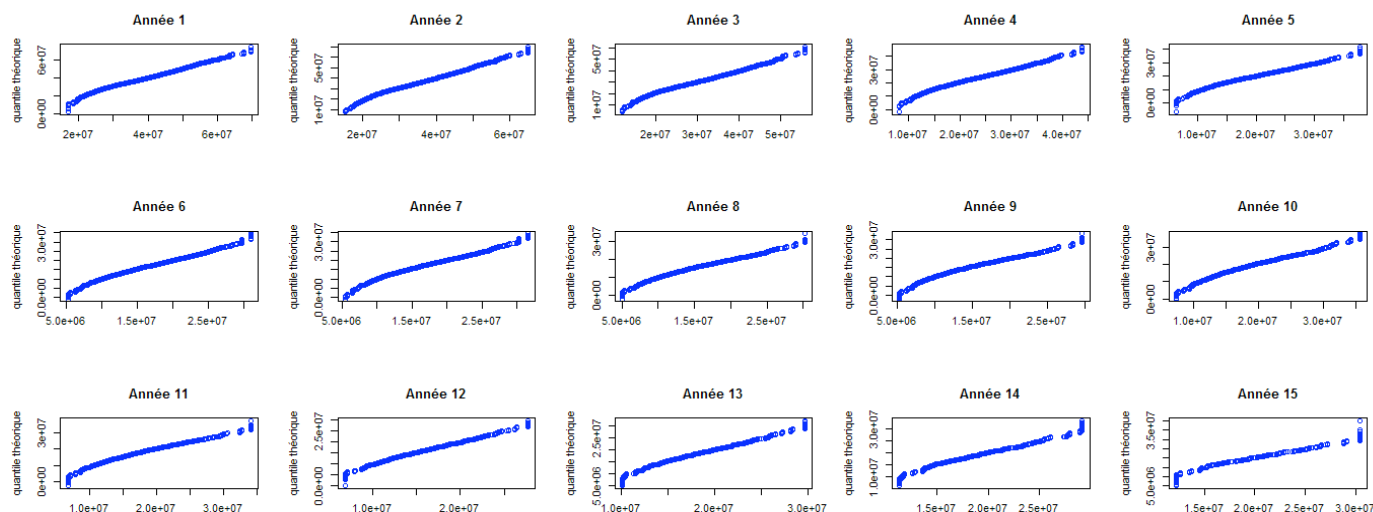
Elle rassemble les résultats des tests de bonne spécification du modèle paramétrique utilisé en section 4.2). Les QQ-plots entre différentes variables et leur *fit* normal sont tracés ci-dessous pour chaque année. Ils permettent de faire une analyse plus fine que les adéquations constatées entre histogrammes et densités empiriques en 4.2.5) et 4.2.6) car ils mettent mieux en évidence les inadéquations éventuelles au niveau des queues de distribution.

Données brutes de sinistralité

Les 3 QQ-plots suivants correspondent dans l'ordre aux montants ultimes espérés, aux coefficients de passage des montants ultimes espérés, puis aux log-coefficients de passage des montants ultimes espérés.

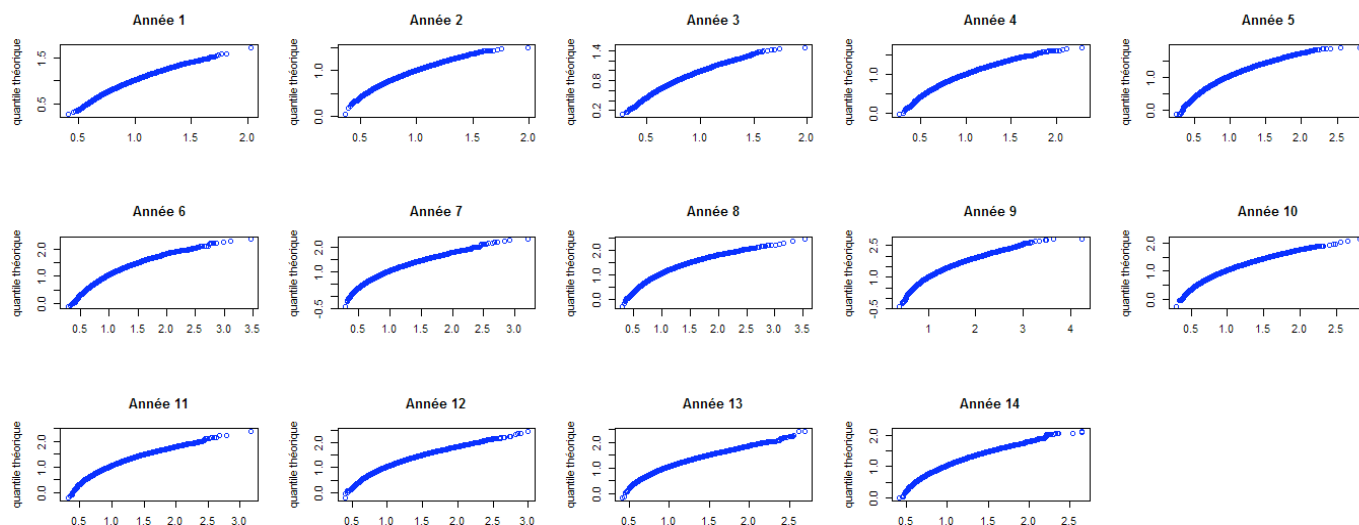
- Le premier QQ-plot (montants ultimes espérés) ne traduit pas la log-normalité. En effet, bien que les courbes soient presque des droites, l'adéquation n'est pas bonne pour les quantiles de bord.

QQ-plot des montants ultimes espérés ré-échantillonnés par bootstrap
Comparaison à des distributions normales



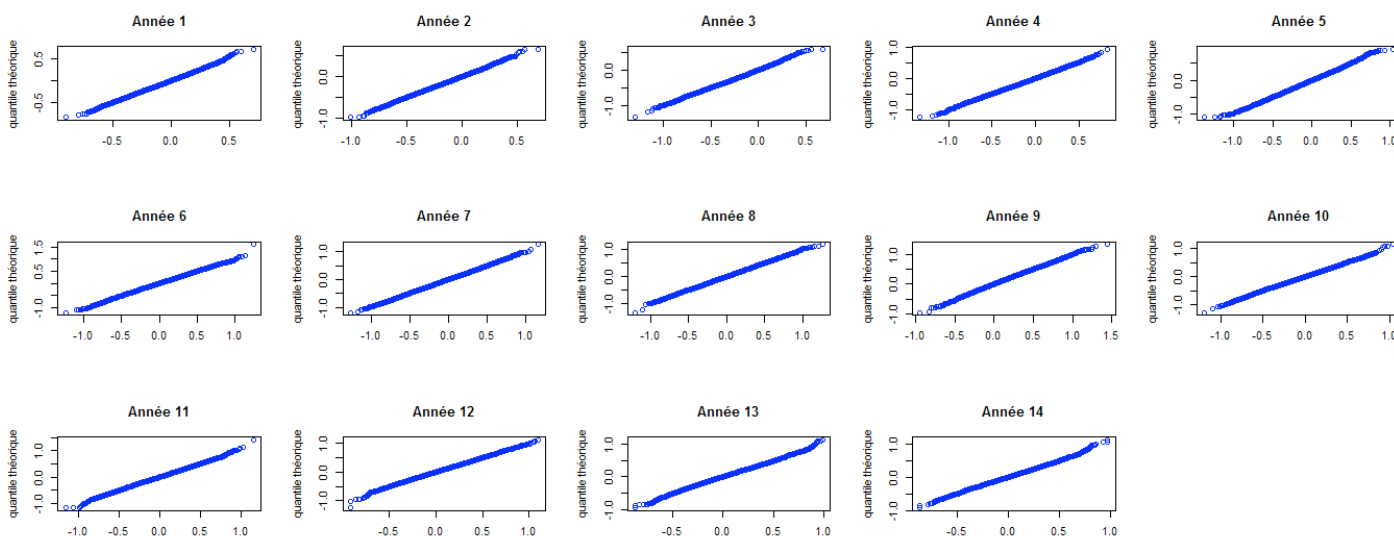
- Le second QQ-plot (coefficients de passage des montants ultimes espérés) conduit à rejeter la normalité car les courbes sont concaves, ce qui est la traduction d'une sous-estimation théorique des premiers et des derniers quantiles.

QQ-plot des coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap Comparaison à des distributions normales



- Le dernier QQ-plot (log des coefficients de passage des montants ultimes espérés) correspond au tracé d'une droite très proche de la première bissectrice, synonyme d'une bonne adéquation.

QQ-plot des log-coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap Comparaison à des distributions normales



Afin de prouver plus formellement la normalité des log-coefficients de passage des montants ultimes espérés, les statistiques de Shapiro-Wilk ont été calculées dans la table ci-dessous. L'analyse en est effectuée en 4.2.5). La fonction de R calculant les statistiques nécessite de travailler avec moins de données (moins de 3 000) que disponible, aussi, seules 3 000 données ont été utilisées (tirage aléatoire uniforme avec remise) pour chaque test.

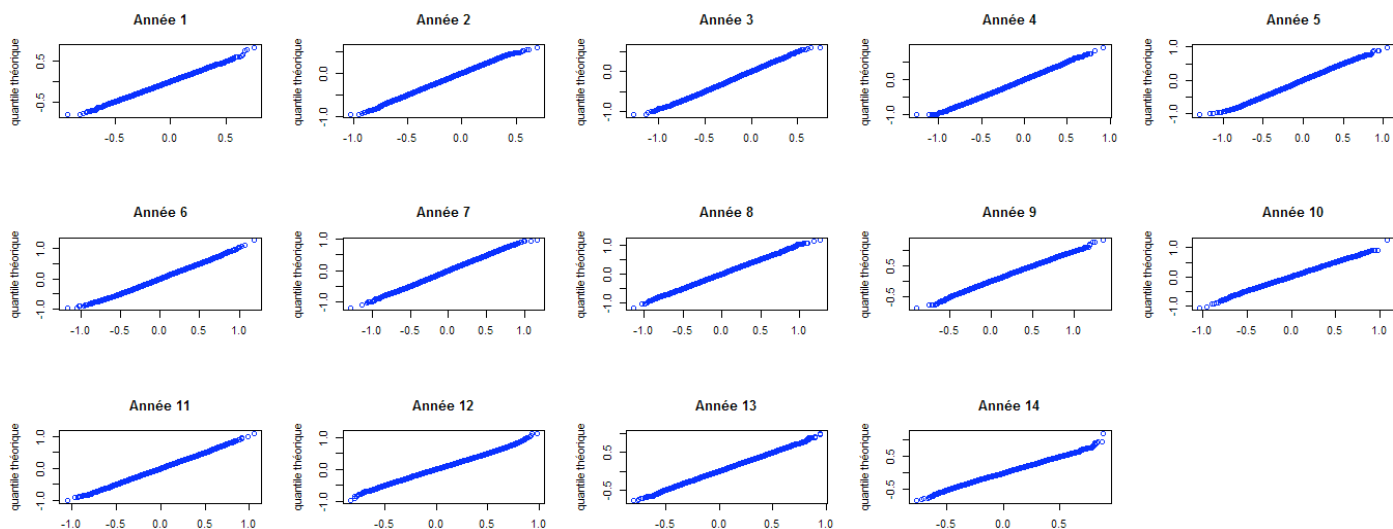
<i>p-values de Shapiro-Wilk</i>								
Année	1	2	3	4	5	6	7	8
Montants ultimes	4,15E-11	2,82E-09	1,78E-10	6,15E-10	1,87E-11	5,06E-10	5,86E-12	8,96E-11
Coefficients de passage	1,82E-18	1,31E-19	2,96E-22	3,91E-23	6,11E-25	1,27E-26	5,81E-24	3,75E-24
Log-coefficients de passage	0,056151	0,976822	0,641646	0,342871	0,908107	0,12085	0,453075	0,095893
Année	9	10	11	12	13	14	15	
Montants ultimes	7,05E-13	3,55E-09	1,56E-08	0,003371	7,26E-05	0,000121	0,127505	
Coefficients de passage	5,03E-19	4,45E-19	3,28E-14	2,23E-15	3,45E-07	1,22E-05	/	
Log-coefficients de passage	0,619199	0,981823	0,461739	0,062663	0,053198	0,938502	/	

Au le seuil usuel de 5% d'erreur de première espèce admissible, les log-coefficients de passage constituent la seule spécification pour laquelle la normalité est acceptée.

Données nettes de sinistralité

Comme expliqué en 4.2.6), il n'est pas évident que la normalité des log-coefficients de passage des montants ultimes espérés se maintienne lorsque des traités de réassurance non-proportionnelle sont appliqués. Les graphiques ci-dessous correspondent aux données auxquelles a été appliqué le traité de réassurance $+\infty$ XS 5 000 000.

QQ-plot des log-coefficients de passage ré-échantillonnés par bootstrap Comparaison à des distributions normales



Les QQ-plots conduisant à des courbes proches de la première bissectrice, la log-normalité est une fois de plus prouvée. Par suite, il a été considéré prouvé que les coefficients de passage des montants ultimes espérés étaient log-normaux, y compris pour les données nettes de réassurance non-proportionnelle, quel que soit le traité appliqué.

Matrice de corrélation du vecteur des coefficients de passage des montants ultimes espérés

La matrice de corrélation obtenue pour les données brutes de réassurance est la suivante (pour les log-coefficients de passage des montants ultimes espérés) :

Corrélations entre log-coefficients de passage													
1,000	-0,490	0,003	-0,001	0,000	0,002	-0,002	0,005	-0,011	0,010	0,006	-0,011	0,001	0,009
-0,490	1,000	-0,486	0,002	-0,004	0,004	0,001	-0,008	0,010	-0,001	-0,003	0,006	-0,006	-0,011
0,003	-0,486	1,000	-0,515	0,001	-0,003	0,008	-0,006	0,006	-0,004	-0,007	0,000	0,004	0,005
-0,001	0,002	-0,515	1,000	-0,513	-0,002	0,000	0,005	-0,008	0,003	0,002	-0,001	-0,003	-0,007
0,000	-0,004	0,001	-0,513	1,000	-0,522	-0,007	0,000	-0,003	0,004	0,002	0,004	0,003	0,002
0,002	0,004	-0,003	-0,002	-0,522	1,000	-0,495	0,003	0,002	-0,003	-0,002	-0,002	-0,003	0,001
-0,002	0,001	0,008	0,000	-0,007	-0,495	1,000	-0,524	0,001	0,004	-0,003	0,001	-0,005	-0,002
0,005	-0,008	-0,006	0,005	0,000	0,003	-0,524	1,000	-0,513	-0,007	0,005	-0,002	0,005	0,003
-0,011	0,010	0,006	-0,008	-0,003	0,002	0,001	-0,513	1,000	-0,475	0,002	0,000	-0,005	-0,002
0,010	-0,001	-0,004	0,003	0,004	-0,003	0,004	-0,007	-0,475	1,000	-0,525	-0,006	0,016	-0,004
0,006	-0,003	-0,007	0,002	0,002	-0,002	-0,003	0,005	0,002	-0,525	1,000	-0,484	-0,009	0,021
-0,011	0,006	0,000	-0,001	0,004	-0,002	0,001	-0,002	0,000	-0,006	-0,484	1,000	-0,508	-0,015
0,001	-0,006	0,004	-0,003	0,003	-0,003	-0,005	0,005	-0,005	0,016	-0,009	-0,508	1,000	-0,499
0,009	-0,011	0,005	-0,007	0,002	0,001	-0,002	0,003	-0,002	-0,004	0,021	-0,015	-0,499	1,000

A l'exception de la diagonale et des sur et sous-diagonales, les corrélations sont proches de 0. Les valeurs négatives proches de $-\frac{1}{2}$ sur ces dernières traduisent un effet de rappel : si un coefficient de passage s'éloigne de sa moyenne, le coefficient suivant tend également à s'éloigner de sa moyenne, mais de l'autre côté. Ce phénomène constitue une stabilité sérielle des coefficients de passage.

ANNEXE 8 : Isovalue max et estimation de l'espérance choquée

Cette annexe détaille le calcul de l'espérance des sinistres lorsque la fonction de survie est choquée dans le calcul de l'isovalue max. Si le calcul du quantile choqué revient à prendre un nouveau quantile à un niveau de prudence plus important comme présenté en 5.3.2), l'espérance de la variable aléatoire choquée nécessite un calcul à part entière, qui est l'objet de cette annexe. Les notations sont celles de la section 5.3).

En notant P_u la mesure de probabilité modifiée, par définition il vient :

$$E_{P_u}(X) = \int_0^{\infty} S(x)^{1-u} dx,$$

$$\text{i.e. } E_{P_u}(X) = \left[S(x)^{1-u} x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(1-u)S(x)^{-u} dS(x)$$

$$\text{i.e. } E_{P_u}(X) = (1-u) \cdot \int_0^{\infty} x \cdot S(x)^{-u} dF(x)$$

car $S(x) = 1 - F(x)$. Finalement, il est possible d'écrire d'après le théorème de transfert :

$$E_{P_u}(X) = (1-u) \cdot E_P \left(X \cdot S(X)^{-u} \right)$$

En générant un échantillon $X_1, \dots, X_N$ de N réalisations indépendantes de X , ordonnées en croissant selon $X_{(1)}, \dots, X_{(N)}$, l'estimateur suivant est proposé :

$$\widehat{E_{P_u}(X)} = \frac{1-u}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{N-i}{N} \right)^{-u} \cdot X_{(i)}$$

ANNEXE 9 : Déroulé des SCR pour les traités 2 XS 3 et 5 XS 5

Cette annexe contient l'ensemble des déroulés en temps des SCR pour les traités 2 000 000 XS 3 000 000 et 5 000 XS 5 000 000 avec AAL de 25 000 000 € introduits en partie 5). Pour chaque méthode de calcul de la MVM employée, les espérances des SCR sont tracées en fonction du temps.

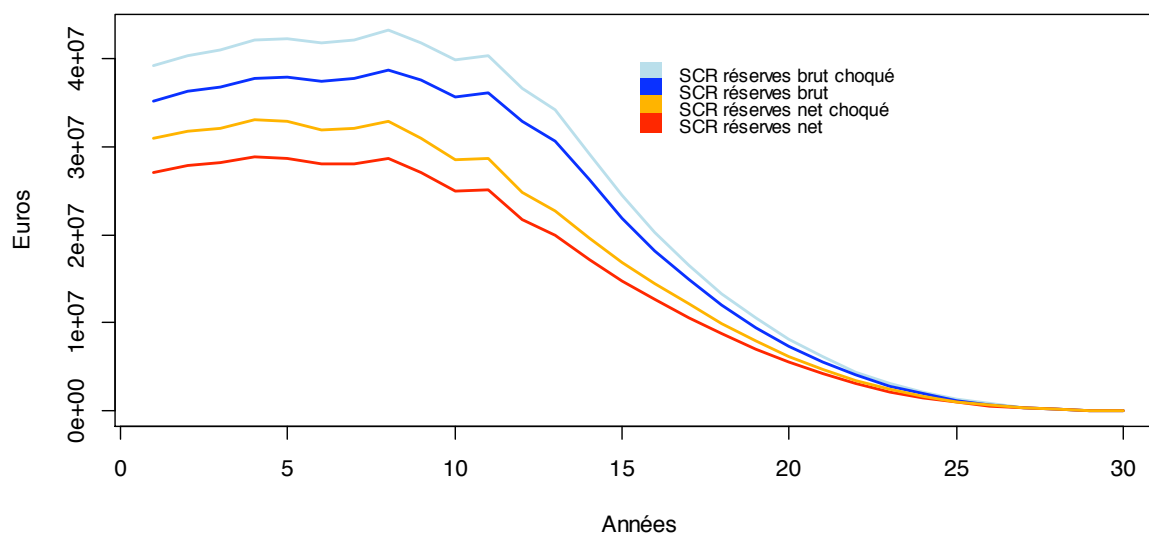
Les déroulés en temps n'ont pas le même horizon selon les méthodes, car les méthodes 2 introduites en partie 4) supposent que toute l'information est disponible dans les triangles. Cette hypothèse revient à supposer que, si au-delà des 15 premières années, le sinistre n'est pas clos alors le déroulement de ce dernier est déterministe, ce qui conduit à des SCR tous nuls au-delà de 15 années de déroulé.

Pour chaque traité et pour chaque méthode, les SCR réserves sont tracés bruts et nets de réassurance, ainsi que choqués ou non par la transformée PH. Ceci permet des comparaisons.

Méthode 3 du QIS5

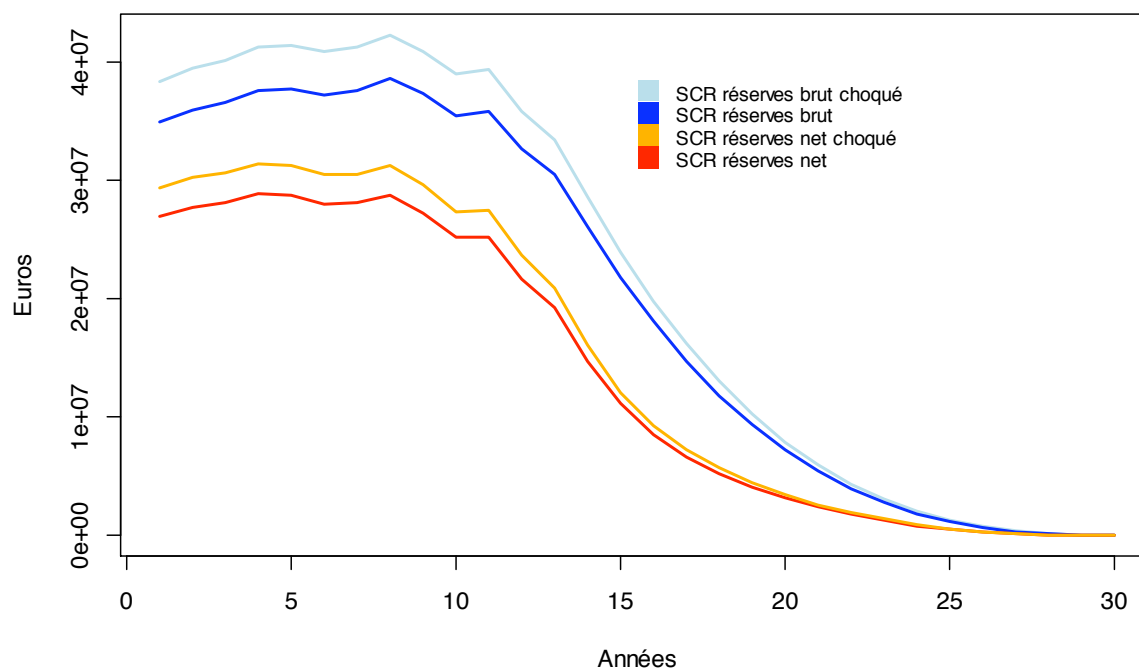
La méthode 3 du QIS5 consistant à calculer les espérances des SCR_t pour tout $n \geq t \geq 1$ comme des fractions du SCR_0 , aussi les courbes conservent l'ordre initial des SCR_0 et ne se croisent jamais. La croissance des $E(SCR_t | F_0)$ au départ est due à un très faible taux de paiement des sinistres⁵⁷ qui conduit l'actualisation de 3% à dominer son effet (voir 3.4.1).

Comparaison des SCR réserves méthode 3 QIS5, traité 2 XS 3



⁵⁷ Voir 2.4.2).

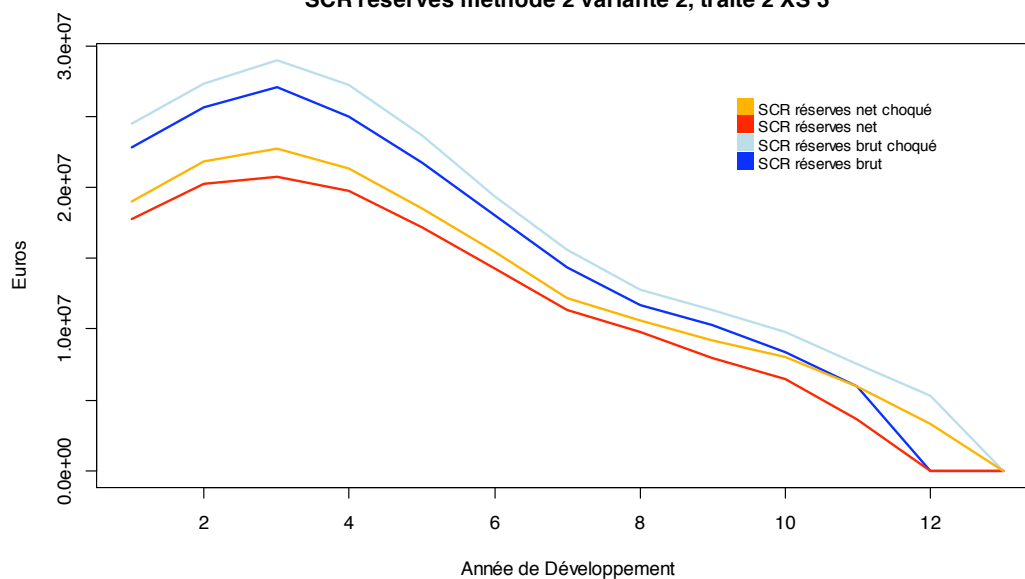
Comparaison des SCR réserves méthode 3 QIS5, traité 5 XS 5



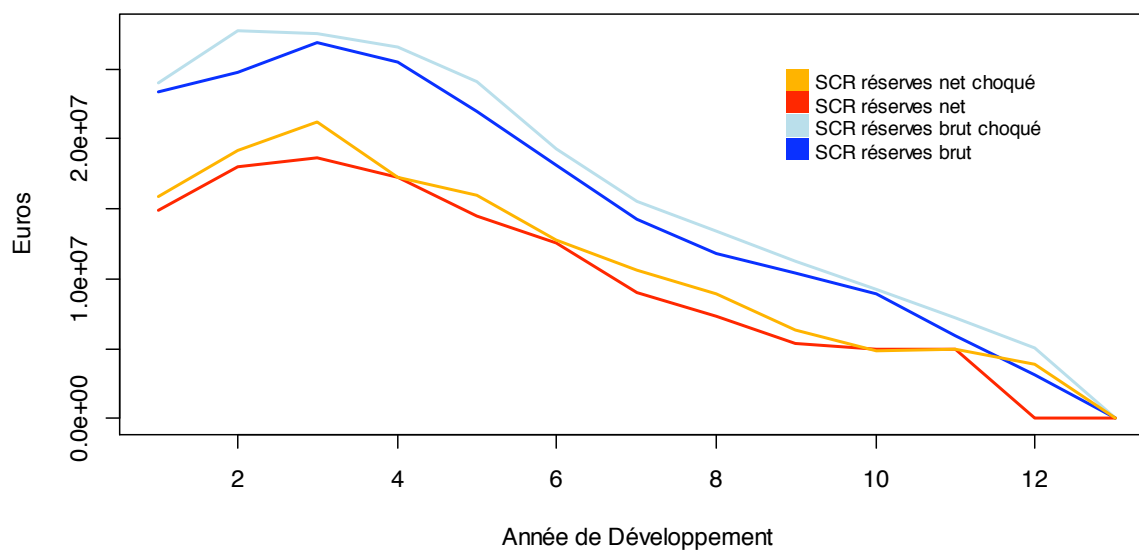
Méthode 2 du QIS5 : spécification sous hypothèse de chemin moyen et d'absence d'IBNER

La méthode ne tenant pas compte des IBNER met également en évidence une croissance des $E(SCR_t | F_0)$ pour les premières années de déroulé. Les valeurs obtenues sont inférieures à celles de la méthode 3. Les courbes net choqué et brut non choqué s'entrecroisent en fin de déroulé. (voir 4.1.5)

SCR réserves méthode 2 variante 2, traité 2 XS 3



SCR réserves méthode 2 variante 2, traité 5 XS 5



Méthode 2 du QIS 5: Forme paramétrique sur les montants ultimes espérés

La méthode de calcul exact par spécification paramétrique présente une forme de déroulé différente des deux précédentes en ce qu'il n'y a pas de croissance des $E(SCR_t | F_0)$ au début du déroulé. En fin de déroulé, les courbes brutes et nettes s'entrecroisent, mettant en évidence le fait que la souscription de réassurance ne réduit pas nécessairement l'aléa.

SCR réserves méthode 2 variante 1, traité 2 XS 3

