

Modèle structurel de crédit dans une optique assurantielle

Mémoire d'actuariat – ENSAE Paristech 2011

VEDANI Julien et VIREPINTE Pierre-Axel

27/05/2011

Revu sur demande de l'Institut des Actuaire, 06/08/2011

Sommaire

Remerciements	3
Introduction: L'épargne en assurance	5
I. Etude théorique : Retour sur les modèles actif/passif <i>Calculs en temps continu</i>	9
A) <i>Cas d'un actif de type Black-Scholes</i>	10
a. <i>Calcul de la probabilité de ruine à un instant t</i>	11
b. <i>Calcul de la probabilité de ruine à horizon t</i>	12
c. <i>Application numérique</i>	13
B) <i>Actif suivant un modèle à sauts</i>	14
a. <i>Calcul de la probabilité de ruine à un instant t</i>	14
b. <i>Probabilité de ruine entre 0 et t</i>	15
c. <i>Application numérique</i>	15
C) <i>Obligation zéro-coupon – Modèle de Vasicek</i>	16
a. <i>Probabilité de ruine à un instant t</i>	17
b. <i>Probabilité de ruine entre 0 et t</i>	18
c. <i>Application numérique</i>	18
D) <i>Limites de l'approche en temps continu</i>	18
II. Etude théorique : Retour sur les modèles actif/passif <i>Approche discrétisée</i>	21
A) <i>Principe et application de notre approximation</i>	21
a. <i>Cas général de processus log-normaux</i>	21
b. <i>Application à un actif de type Black-Scholes</i>	22
c. <i>Application à un actif zéro-coupon, processus de Vasicek</i>	23
B) <i>Cas d'un portefeuille mixte</i>	24
a. <i>Présentation du problème</i>	24
b. <i>Approximation de Fenton-Wilkinson</i>	25
c. <i>Extension à des processus log-normaux</i>	27
d. <i>Ajout de dépendance entre le passif et les différentes parties actif</i>	29
e. <i>Probabilité de ruine en temps discret</i>	31
f. <i>Retour sur l'approximation de Fenton-Wilkinson</i>	32
III. Etude empirique : Implémentation et résultats.....	35
A) <i>Implémentation de notre méthodologie discrète</i>	35
a. <i>Calcul de la probabilité de défaut</i>	35

b.	<i>Présentation d'un algorithme naïf</i>	36
c.	<i>Retour sur la matrice d'auto-covariance</i>	37
d.	<i>Amélioration de l'algorithme précédent</i>	39
B)	<i>Résultats et analyse</i>	39
a.	<i>Résultats dans le cas B&S</i>	39
b.	<i>Résultat dans le cadre de l'actif zéro-coupon – modèle de Vasicek</i>	44
c.	<i>Résultat dans le cadre du portefeuille mixte</i>	47
IV.	<i>Etude empirique : Comparaison avec un « algorithme exact »</i>	53
A)	<i>Cas d'un actif de type Black-Scholes</i>	53
a.	<i>Simulation des différents Browniens</i>	53
b.	<i>Discrétisation des deux processus</i>	56
c.	<i>Evaluation du nombre de cas de ruine et détermination de la valeur de A0 pour que la probabilité de ruine empirique $\frac{\text{Nb cas de ruine}}{\text{Nb simulations}}$ soit égale à 0,5%</i>	57
d.	<i>Résultats et analyse</i>	57
B)	<i>Cas d'un actif zéro-coupon suivant un modèle de Vasicek</i>	63
a.	<i>Simulation du processus zéro-coupon</i>	63
b.	<i>Obtention du A0 pour une base L0 = 1 et une probabilité de ruine de 0,5%</i>	64
c.	<i>Résultats et analyse</i>	64
C)	<i>Cas d'un portefeuille mixte</i>	67
a.	<i>Retour sur la simulation du processus de Vasicek en intégrant de la corrélation</i>	67
b.	<i>Détermination de la valeur du A0</i>	69
c.	<i>Résultats et analyse</i>	69
D)	<i>Conclusion sur nos implémentations et notre approche</i>	72
Conclusion	75
Annexes	77
Annexe 1 :	<i>Code de l'algorithme par formule fermée – cas du portefeuille mixte</i>	77
Annexe 2 :	<i>Comparaison des écarts relatifs obtenus dans les trois cas étudiés pour l'algorithme utilisant Genz-Bretz</i>	83
Annexe 3 :	<i>Graphes associés aux temps de calcul pour l'algorithme utilisant Genz-Bretz - cas du portefeuille mixte, $\alpha = 20\%$</i>	84
Annexe 4 :	<i>Code de l'algorithme Monte-Carlo – cas du portefeuille mixte</i>	85
Bibliographie	89

Remerciements

Nous tenons à remercier

M. **Frédéric PLANCHET**, Directeur scientifique et associé du groupe Winter & Associés,

M. **Marc JUILLARD**, consultant chez Winter & Associés,

pour leur accompagnement et leurs conseils tout au long de la réalisation de ce travail ;

M. **Alexandre RICHARD**, élève doctorant à Paris VI, pour nous avoir aidés à appréhender certains points techniques ;

M. **Donatien HAINAUT**, référent de la voie actuariat à l'ENSAE, pour son suivi.

Introduction: L'épargne en assurance

L'épargne est une des sources principales de financement de l'économie, fournissant aux organismes financiers (banques, assurances) des ressources qu'ils peuvent réinvestir sur les marchés financiers en échange d'un rendement fourni au souscripteur. L'assurance-vie est un des produits qui jouent un rôle clé dans la constitution de cette épargne : l'ensemble des contrats d'assurance-vie constitue en effet 57% de l'épargne longue des ménages, soit environ 1500 milliards d'euros, ce qui représente environ 78% du PIB français (de l'ordre de 1900 milliards d'euros) (source : FFSA¹).

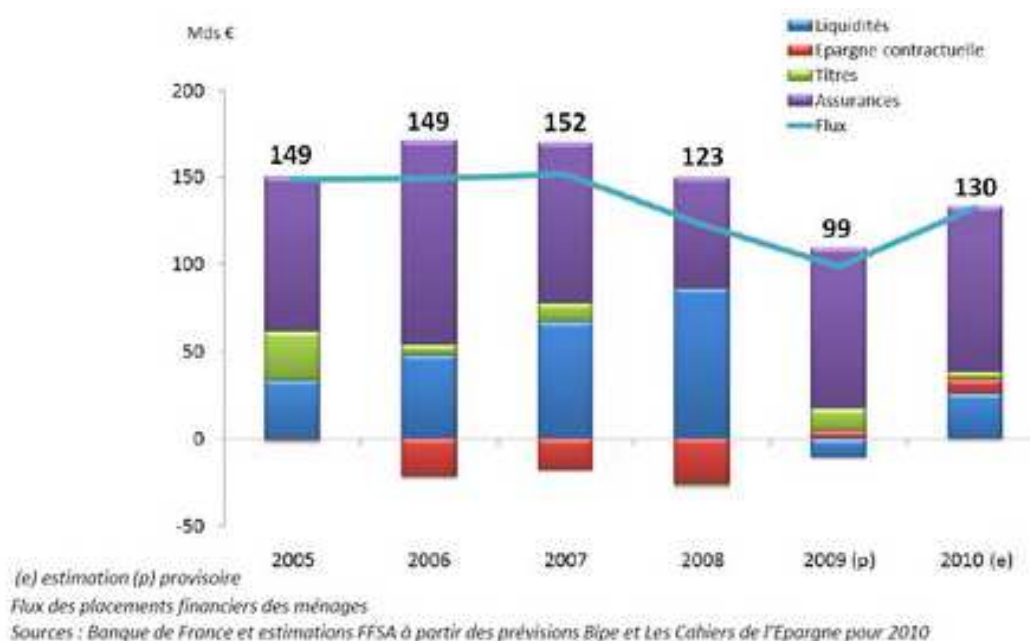


Figure 1 : Répartition de l'épargne au sein des ménages français

Les contrats d'assurance-vie sont partagés entre contrats en Unités de Compte (UC) et contrats en euros ; dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons au cas des contrats en euros, qui sont les seuls comportant un risque pour l'assureur.

Les contrats d'épargne en euros sont des produits complexes, dont la valorisation constitue un enjeu important dans l'optique d'assurer la pérennité de la compagnie d'assurance. En effet, il existe de nombreux types de contrats, avec des clauses spécifiques (Taux Minimum Garanti...) qui font qu'il est extrêmement difficile de définir un cadre d'étude unique. Toutefois, tous ces contrats présentent des caractéristiques communes :

- Les intérêts versés sur l'épargne au moins égaux à 60% du TME², lorsqu'il n'y a pas de taux minimal garanti (TMG) par le contrat ;

¹ FFSA, « L'assurance vie, pilier de l'épargne longue », 27/01/2011

² TME : Taux Moyen des Emprunts d'Etat

- L'assureur est tenu de reverser une partie de ses bénéfices aux assurés, au titre de la Participation aux Bénéfices (PB) ;
- La réversion de la PB peut passer par la constitution d'une Provision pour Participation aux Excédents (PPE), dans laquelle l'assureur place une partie de ses bénéfices financiers et techniques, destinée à lisser les rendements et à pallier d'éventuels mauvais résultats. Cette PPE doit être reversée dans les huit ans suivant sa constitution.

De leur côté, les assurés ont la possibilité de racheter leur épargne à tout moment de la vie du contrat ; le montant d'épargne présent sur le contrat peut également être reversé suite à certains incidents (décès du client assuré, ...). On distingue ainsi deux types de rachat de l'épargne :

- Le Rachat Structurel (RS), lié à la structure du portefeuille et indépendant des conditions économiques ;
- Le Rachat Conjoncturel (RC), lié aux conditions économiques.

Un des enjeux principaux de la valorisation d'un portefeuille d'épargne en assurance-vie est d'évaluer correctement les lois de rachat conjoncturel et structurel, dont dépendent grandement la valeur des flux sortants du contrat d'épargne, et donc, la valorisation du portefeuille au passif.

Dans le cadre de la réglementation Solvabilité II, un assureur est tenu d'évaluer ses engagements en *fair value*. Il s'agit pour cela d'estimer les flux futurs probables actualisés sur le passif ; ce calcul met en œuvre une machinerie relativement lourde, tant en termes d'outils que de données, et est effectué aux dates d'inventaire ; on obtient ainsi une évaluation de la valeur des engagements, appelée *Best Estimate (BE)* dans la suite).

L'assureur utilise l'épargne collectée auprès de sa clientèle pour constituer un portefeuille d'actifs destiné à lui permettre de verser les flux associés à son portefeuille d'épargne. Dans le cadre de Solvabilité II, il doit également associer à ce portefeuille un montant de fonds propres lui permettant d'assurer la pérennité de son activité à un horizon d'un an dans 99,5% des cas (ce qui représente une probabilité de ruine de 0,5%).

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'utilisation d'un modèle structurel de crédit appliqué, dans un cadre assurantiel, au calcul du montant de fonds propres nécessaires pour atteindre une certaine probabilité de ruine, en fonction des caractéristiques de son portefeuille d'engagements et de son portefeuille d'actifs de couverture, que nous choisissons de modéliser par des processus log-normaux. Cette vision assurantielle est aisément inversible pour pouvoir déterminer la probabilité de ruine de la firme.

Dans un premier temps, nous étudions une approche en temps continu dont nous atteignons rapidement les limites : il est impossible d'obtenir une modélisation de la probabilité de ruine par formule fermée pour une modélisation de l'actif plus complexe qu'un modèle de Black-Scholes. Nous proposons alors une discrétisation de ces processus permettant d'obtenir une formule fermée d'estimation de la probabilité de ruine à un an, qu'il est possible d'inverser pour évaluer le montant de fonds propres nécessaire pour l'assureur.

Nous donnons également un exemple d'implémentation utilisant le logiciel R, et étudions les résultats obtenus. Ensuite, nous revenons sur une approche plus classique utilisant des simulations

27 mai 2011

de trajectoire de Browniens, avec les mêmes hypothèses sur le comportement de l'actif et du passif. Nous pouvons ainsi comparer les résultats des deux méthodes, ainsi que leur coût d'implémentation en termes de temps et de mémoire de la machine.

I. Etude théorique : Retour sur les modèles actif/passif

Calculs en temps continu

On a dit que l'approche par modèle interne pour le calcul de la probabilité de ruine permet à une compagnie d'assurance de mieux évaluer son profil de risque, et, à terme, de mieux maîtriser ses risques qu'en utilisant la formule standard. Toutefois, l'approche par simulations, utilisée pour les modèles internes, souffre de limitations qui font qu'il est difficile de l'utiliser afin d'assurer l'évaluation du montant de fonds propres :

- Elle est extrêmement lourde à mettre en œuvre ;
- On s'intéresse à la probabilité d'être en ruine dans un an, et non à la probabilité de ruine à un an, c'est-à-dire qu'on ne considère pas du tout les trajectoires des passifs et des actifs au cours de l'année à venir, pour ne regarder que le point d'arrivée dans un an. Ainsi, il est tout à fait possible que l'assureur se soit trouvé en ruine au cours de l'année, sans que cela ait été pris en compte dans le calcul de fonds propres par le modèle.

Afin de tenter de proposer une méthode plus légère et plus efficace à mettre en œuvre, nous nous sommes intéressés au calcul explicite de la probabilité de ruine à un an, en faisant certaines hypothèses sur les dynamiques suivies par le portefeuille d'actifs et le portefeuille de passifs. Pour toute la suite, nous considérons un portefeuille de passifs suivant une dynamique de Brownien géométrique (idée développée par Janssen et al. dans [1]) dont les variations sont indépendantes de celles du portefeuille d'actifs (le passage au cas général se faisant par l'ajout d'un terme de corrélation). Il est à noter que cette hypothèse forte sur le passif permet cependant de bien reproduire des portefeuilles réels plutôt simples (typiquement pour des assurances de taille moyenne).

Au final le processus passif suivra toujours la dynamique suivante :

$$\frac{dL_t}{L_t} = \mu_L dt + \sigma_L dW_t^S$$

Nous étudions le cadre d'un contrat d'assurance-vie représenté par un passif et un actif couvrant celui-ci. Nous prenons de plus comme hypothèse de nos calculs que tous les sous-jacents sont infiniment divisibles.

Dans la suite du mémoire, nous noterons A_t et L_t les processus décrivant les dynamiques de l'actif et du passif en univers monde réel, et nous nous intéressons à la probabilité de ruine de l'assureur, notée P_{ruine} .

On considèrera que l'assureur est en ruine à l'instant t lorsque ses fonds propres s'annulent, autrement dit que $A_t - L_t \leq 0$, ce qui peut s'écrire de manière équivalente $\frac{A_t}{L_t} \leq 1$, ou encore $\ln\left(\frac{A_t}{L_t}\right) \leq 0$.

Notre objectif est, dans un premier temps, de trouver une formule explicite de la probabilité de ruine dans un an ($\mathbb{P}\left(\frac{A_1}{L_1} \leq 1\right)$), ce qui correspond à la méthodologie utilisée actuellement ; puis, nous cherchons à calculer ou à approcher la probabilité de ruine à un an ($\mathbb{P}\left(\inf_{t \in [0;1]} \left(\frac{A_t}{L_t}\right) \leq 1\right)$), ce qui permettra d'estimer les différences entre les deux démarches.

Nous étudions successivement plusieurs cas, en fournissant des résultats pour chacun :

- Cas d'un portefeuille d'actifs suivant une dynamique de Black-Scholes (Brownien géométrique), ce cas peut représenter des actifs de type action, indice immobiliers, OPCVM... ;
- Cas d'un portefeuille d'actifs suivant une dynamique de Merton (Brownien géométrique avec sauts gaussiens), ce modèle peut représenter, de manière plus efficace, des actifs du même type que dans le cadre Black-Scholes ;
- Cas d'un portefeuille d'actifs composé d'obligations zéro-coupon, avec une seule maturité, avec un taux suivant le modèle de taux de Vasicek ;

Nous allons montrer que seul le cas le plus simple (actifs suivant une dynamique de Black-Scholes) permet d'obtenir une expression exacte, par formule fermée, de la probabilité de ruine à un an ; toutefois, nous proposerons, dans un second temps, une approximation en temps discret de la probabilité de ruine à un an, ne nécessitant pas de simulations de trajectoires.

Dans la suite du mémoire nous exprimerons les résultats que nous obtenons concernant le montant de fonds propres nécessaire à l'origine ($t = 0$), en pourcentage du passif. C'est pourquoi nous assimilerons la notion de valeur (ou montant) des fonds propres avec leur valeur en pourcentage du *BEL*.

Nous présentons dans un premier temps les résultats dont nous disposons en temps continu, avant de présenter notre approximation en temps discret.

A) Cas d'un actif de type Black-Scholes

Dans ce cadre, l'actif suit le processus de dynamique :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t^S$$

$W_{S,t}$ est un Brownien monde réel et μ_S intègre le rendement risque neutre (taux sans risque) augmenté de la prime de risque liée au fait que l'on se place en univers historique (conformément aux hypothèses Solvabilité II).

Par ailleurs, comme annoncé précédemment, le passif est également un Brownien géométrique tel que son Brownien $W_{L,t}$ n'est pas corrélé avec $W_{A,t}$. Cette hypothèse est souvent utilisée en assurance non-vie [2] mais peut être relevée aisément, dans la majeure partie des cas que nous étudions.

On a donc :

$$\begin{cases} A_t = A_0 e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t^S} \\ L_t = L_0 e^{\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t + \sigma_L W_t^L} \end{cases}$$

a. Calcul de la probabilité de ruine à un instant t

$W_{S,t}$ et $W_{L,t}$ étant des mouvements Browniens standard indépendants, on a :

$$\frac{A_t}{L_t} = \frac{A_0}{L_0} e^{\left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t} e^{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t}$$

Dans ce cas, $\frac{A_t}{L_t}$ est également un Brownien géométrique, que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{A_t}{L_t} = \exp(a_t), \text{ avec } a_t = a_0 + \left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t + \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t$$

La probabilité de l'assureur d'être en ruine à l'instant t est la probabilité qu'à cet instant, les actifs en sa possession ne lui permettent pas d'honorer ses engagements envers ses clients, ce qui se traduit par la survenance de l'événement $\frac{A_t}{L_t} \leq 1$, ou encore, de manière équivalente, $a_t \leq 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{ruine,t} &= \mathbb{P}\left(\frac{A_t}{L_t} \leq 1\right) = \mathbb{P}(a_t \leq 0) \\ &= \mathbb{P}\left(a_0 + \left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t + \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t \leq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W_t \leq -\frac{a_0 + \left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}\right) \end{aligned}$$

D'où on déduit :

$$P_{ruine,t} = \Phi\left(-\frac{a_0 + \left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t}{\sqrt{t} \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}\right)$$

On peut appliquer directement ce résultat pour calculer la probabilité de ruine dans un an, connaissant les autres paramètres. De plus, on peut inverser cette formule pour trouver le montant de fonds propres à conserver, en fixant un niveau de probabilité de ruine *ex ante*. L'inversion permet d'obtenir:

$$a_0 = - \left[\left((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{t} \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} * \Phi^{-1}(P_{ruine,t}) \right]$$

Pour rappel, $a_0 = \ln \left(\frac{A_0}{L_0} \right)$ et donc : $FP_0 = L_0(e^{a_0} - 1)$

b. Calcul de la probabilité de ruine à horizon t

Nous nous intéressons maintenant à la probabilité de ruine comme présentée dans la directive Solvabilité II, c'est-à-dire que l'on considère la ruine à un horizon t . On a alors :

$$P_{ruine,[0;t]} = \mathbb{P} \left(\inf_{s \in [0;t]} \left(\frac{A_s}{L_s} \right) \leq 1 \right) = \mathbb{P}(\inf_{s \in [0;t]} a_s \leq 0) = \mathbb{P}(\sup_{s \in [0;t]} (-a_s) \geq 0)$$

La probabilité de ruine à horizon t se conçoit ainsi comme un temps d'atteinte de frontière par un mouvement Brownien avec dérive. On peut utiliser les résultats présentés par Revuz et Yor [3] sur ce type de processus, et on a ainsi :

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} (B_t - \beta t) \geq \alpha) = \begin{cases} 1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta \sqrt{t} \right) + e^{-2\alpha\beta} \Phi \left(\beta \sqrt{t} - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right), & \text{si } \alpha > 0 \\ 0, & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Avec α et β des constantes. Dans notre cas, on a :

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a_0}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}, \frac{(\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \right)$$

D'où on déduit, par application directe du résultat cité :

$$\begin{aligned} P_{ruine,[0;t]} &= \mathbb{P} \left(\inf_{s \in [0;t]} \left(\frac{A_t}{L_t} \right) \leq 1 \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0;t]} (-a_s) \geq 0 \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{a_0}{\sqrt{t} \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} + \frac{(\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \cdot \sqrt{t} \right) \\ &\quad + e^{-2 \frac{a_0((\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2})}{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \Phi \left(\frac{(\mu_S - \mu_L) - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \cdot \sqrt{t} - \frac{a_0}{\sqrt{t} \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}} \right) \end{aligned}$$

Cette formule peut s'inverser numériquement (par exemple, par dichotomie) pour évaluer a_0 en fixant un niveau de risque (de 0,5% dans le cadre de Solvabilité II).

c. Application numérique

L'étude d'un portefeuille de couverture constitué uniquement d'un seul type d'actif, de type actions, n'a pas vraiment de sens économiquement, dans la mesure où les portefeuilles des assurances sont constitués essentiellement d'actifs obligataires. Il nous a cependant paru intéressant d'étudier ce cas, afin d'illustrer l'écart qui peut exister entre le montant de fonds propres nécessaire pour couvrir la probabilité de ruine à un an et la probabilité de ruine dans un an, puisque nous disposons d'une formule fermée exacte pour cette configuration.

Nous reviendrons par la suite sur le cas d'un actif taux, puis sur le cas d'un portefeuille mixte action-taux, bien plus réaliste économiquement.

Nous cherchons à comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, pour les paramètres suivants :

$$\mu_S = 0,08 ; \mu_L = 0,04$$

$$\sigma_S = 20\% ; \sigma_L = 5\%$$

Pour toutes nos implémentations, nous avons choisi des paramètres vraisemblables. L'objectif est, à terme, de pouvoir calibrer ces paramètres sur des valeurs d'un actif et d'un passif d'assurance issus de la pratique. Des méthodes de calibration sont décrites dans [2].

Nous considérons des processus à tendance croissante, ce qui peut sembler, de prime abord, peu réaliste puisque un passif d'assurance, tout comme sa couverture, décroissent au cours de la vie du portefeuille. Cependant les résultats obtenus seraient les mêmes si l'on suivait l'hypothèse que cette décroissance de l'actif et du passif se fait selon une même tendance (linéaire ou exponentielle par exemple), cet ajout dans la modélisation s'annulant lorsque l'on étudie leur quotient. Cette hypothèse simplificatrice pour nos calculs sera maintenue tout au long du rapport.

L'inversion de la formule en temps continu est réalisée en utilisant le solveur fourni par Excel (algorithme dichotomique). On obtient alors les résultats suivants:

- En considérant la probabilité de ruine dans un an, on montre qu'il faut conserver un montant de fonds propres égal à 66,49% du total de la valeur du passif initial (soit 40% du montant total du bilan).
- En considérant la probabilité de ruine à un an, on montre qu'il faut conserver un montant de fonds propres égal à 74,99% de la valeur du passif (soit 43% du total du bilan)
- Il y a donc un écart relatif de 11,3% entre les deux valeurs obtenues.
- On constate qu'avec les mêmes paramètres, le montant de fonds propres obtenu par la première méthode correspond à la couverture d'un risque de ruine à un an au seuil de 1% (et non de 0,5%)...

On constate ainsi que le montant des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque de ruine dans un an est très inférieur au montant des fonds propres nécessaire pour couvrir le risque de ruine à

tout instant dans l'année à venir, pour ce modèle ; cela montre une insuffisance a priori de la discrétisation des processus en pas annuels.

B) Actif suivant un modèle à sauts

L'expérience montre qu'un modèle de type Black-Scholes n'est pas le plus efficace pour décrire le mouvement réel du cours des actions, qui est marqué par des mouvements brusques, survenant de manière aléatoire, introduisant une discontinuité dans la trajectoire du cours. Afin de pallier cet inconvénient, des modèles introduisant des sauts log-normaux dans la dynamique des processus ont été introduits.

Nous nous intéressons particulièrement ici au modèle de Merton, pour lequel la trajectoire de l'actif présente des sauts log-normaux à des instants aléatoires $\tau_1, \tau_2 \dots$ correspondant aux sauts d'un processus de Poisson d'intensité λ . Les processus actif et passif suivent alors les dynamiques :

$$\begin{cases} A_t = A_0 e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t^S + \sum_{i=1}^{N_t} U_i} \\ L_t = L_0 e^{\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t + \sigma_L W_t^L} \end{cases}$$

Où N_t est le nombre de sauts observés à l'instant t , et $U_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

a. Calcul de la probabilité de ruine à un instant t

De même que précédemment, on suppose que les Browniens actif et passif sont indépendants. On a alors :

$$\frac{A_t}{L_t} = \frac{A_0}{L_0} e^{\left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t + \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k}$$

Dans ce cas, $\frac{A_t}{L_t}$ est également un Brownien géométrique avec sauts log-normaux. On peut alors écrire :

$$\frac{A_t}{L_t} = \exp(a_t), \text{ avec } a_t = a_0 + \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t + \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k$$

La probabilité de l'assureur d'être en ruine à l'instant t est la probabilité qu'à cet instant, la valeur de marché des actifs en sa possession ne lui permet pas d'honorer ses engagements envers ses clients, ce qui se traduit par la survenance de l'événement $\frac{A_t}{L_t} \leq 1$, ou encore, de manière équivalente, $a_t \leq 0$. On a :

$$P_{ruine,t} = \mathbb{P}[a_t \leq 0] = \mathbb{P}\left[\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \leq -a_0 - \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t\right]$$

Pour effectuer ce calcul, utilisons le théorème des probabilités totales en conditionnant par le nombre de sauts.

On a alors :

$$P_{ruine,t} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2} W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \leq -a_0 - \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \mid N_t = i \right) * \mathbb{P}(N_t = i)$$

D'où :

$$P_{ruine,t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi \left[-\frac{a_0 + \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t}{\sqrt{(\sigma_S^2 + \sigma_L^2)t + n\sigma_U^2}} \right] e^{-\lambda t} \frac{\lambda t^n}{n!}$$

Il n'est pas possible d'inverser analytiquement cette formule pour obtenir l'expression des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque de ruine en t , avec une probabilité donnée ; toutefois, on obtient une bonne approximation de la probabilité de ruine en calculant numériquement entre 5 et 10 termes de la série, et nous pouvons utiliser des algorithmes d'optimisation numérique afin de calculer le montant de fonds propres nécessaires en 0 en inversant le calcul de probabilité de ruine.

b. Probabilité de ruine entre 0 et t

Contrairement au cas du Brownien Géométrique, il n'existe pas de résultat permettant d'obtenir la probabilité de ruine pour tout instant entre 0 et t . Cependant il est possible d'évaluer la probabilité de ruine par une approche numérique ou par simulations (type méthodes de Monte-Carlo).

c. Application numérique

Nous choisissons de prendre les mêmes paramètres que pour le modèle de Black-Scholes et d'ajouter des paramètres pour les sauts afin d'étudier l'impact de la composante à sauts sur le montant de fonds propres nécessaires. Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\mu_S = 0,08 ; \mu_L = 0,04$$

$$\sigma_S = 20\% ; \sigma_L = 5\%$$

$$\lambda = 1 ; \sigma_U = 7\%$$

L'inversion de la formule en temps discret, après avoir calculé les 20 premiers termes de la somme, est réalisée en utilisant le solveur Excel. On obtient alors que :

- En considérant la probabilité de ruine dans un an, qu'il faut conserver un montant de fonds propres égal à 71,97 % de la valeur du portefeuille de passifs
- Le calcul similaire dans le cadre simple de Black-Scholes donne une valeur des fonds propres à provisionner de 66,49 % de la valeur du portefeuille de passifs ce qui représente un écart relatif de 7,62 %
- La valeur obtenue est cependant inférieure à celle obtenue dans le cadre de la modélisation Black-Scholes en temps continu, ce qui semble montrer que la non-prise en compte d'un éventuel événement de ruine à l'intérieur de l'intervalle étudié a un impact plus grand que la non-prise en compte des sauts.

On constate ainsi, comme nous nous y attendions, que le montant des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque de ruine en utilisant un modèle de type Merton est bien supérieure à celle obtenue sans processus à saut.

C) Obligation zéro-coupon – Modèle de Vasicek

Les contraintes réglementaires poussent les assureurs à se doter d'un portefeuille d'actifs « de bonne qualité, sûrs et liquides » dans le cadre de leur activité. De plus, culturellement, les portefeuilles d'actif des assureurs sont, constitués principalement d'obligations d'Etat de l'OCDE. Afin de nous approcher au maximum de la situation réelle d'une compagnie d'assurance, il nous est donc nécessaire d'étudier un modèle d'obligations.

Dans un souci de simplicité, nous choisissons de modéliser des obligations zéro-coupon, de maturité T , dont les variations de prix sont basées sur un taux court suivant un modèle de Vasicek à un facteur. Dans ce modèle, le taux a pour dynamique :

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \eta dW_t^r$$

θ est le taux de long terme, κ est la vitesse de retour à la moyenne et η la vitesse de diffusion. Dans le cas étudié, θ intègre une prime de risque λ inhérente au passage de l'univers de probabilité risque-neutre au monde-réel. Il est ainsi possible d'obtenir $\theta_{\text{MondeReel}}$ à partir de $\theta_{\text{RisqueNeutre}}$ par la transformation :

$$\theta_{\text{MondeReel}} = \theta_{\text{RisqueNeutre}} + \frac{\eta}{\kappa} \times \lambda$$

Dans notre paramétrage nous utiliserons :

$$\theta = \theta_{\text{MondeReel}} = 4\% \text{ et } \lambda = -3$$

La résolution de cette équation différentielle stochastique nous amène à une expression du taux court sous forme intégrale :

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \eta \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^r$$

Par ailleurs, nous trouvons dans le Brigo-Mercurio [4] une expression du prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T à l'instant t en fonction des paramètres du modèle de Vasicek, à partir de laquelle nous pouvons déduire la trajectoire de l'actif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A_t = \frac{A_0}{PZC(0, T)} * A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \\ L_t = L_0 e^{\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t + \sigma_L W_t^L} \end{array} \right. \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} A(t, T) = e^{\left(\theta - \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\right)[B(t, T) - T + t] - \frac{\eta^2}{4\kappa} B(t, T)^2} \\ B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ PZC(0, T) = A(0, T) e^{-B(0, T)r_0} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Après calcul, nous montrons que :

$$r_t = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \eta \sqrt{\frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})} U_t$$

Où $U_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ est un processus gaussien centré réduit

On a bien A_t et L_t des processus log-normaux, on peut employer le même cadre d'étude que précédemment.

a. Probabilité de ruine à un instant t

$$\frac{A_t}{L_t} = \frac{A_0}{L_0} * \frac{A(t, T)}{PZC(0, T)} * e^{-B(t, T)(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) - B(t, T)\eta \sqrt{\frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})} U_t - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t - \sigma_L W_t^L}$$

Cette expression est de la forme $\frac{A_t}{L_t} = e^{a_0 + \mu(t) + \sigma(t)\tilde{U}_t}$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \ln\left(\frac{A_0}{L_0}\right) \\ \mu(t) = -\ln(PZC(0, T)) - B(t, T)(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t \\ \sigma^2(t) = B(t, T)^2 \eta^2 \frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) + \sigma_L^2 t \\ \tilde{U}_t \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ processus gaussien centré réduit} \end{array} \right.$$

A partir de cette forme, on peut calculer facilement la probabilité d'être en ruine en un instant t ainsi que le montant de fonds propres nécessaire à l'assureur pour se couvrir contre le risque de ruine avec un niveau de confiance donné. On a :

$$P_{ruine,t} = \mathbb{P}(a_0 + \mu(t) + \sigma(t)\tilde{U}_t \leq 0), \text{ d'où}$$

$$P_{ruine,t} = \Phi\left(-\frac{a_0 + \mu(t)}{\sigma(t)}\right), \text{ soit}$$

$$P_{ruine,t} = \Phi\left(-\frac{a_0 - \ln(PZC(0, T)) - B(t, T)(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t}{\sqrt{B(t, T)^2 \eta^2 \frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) + \sigma_L^2 t}}\right)$$

On peut déduire le montant de fonds propres nécessaire pour éviter la ruine avec le niveau de confiance $1 - P_{ruine,t}$:

$$a_0^* = \ln(PZC(0, T)) + B(t, T)(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) + \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t - \sqrt{B(t, T)^2 \eta^2 \frac{1}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) + \sigma_L^2 t} * \Phi^{-1}(P_{ruine,t}^*)$$

Cette expression est exacte, et ne nécessite pas l'utilisation d'algorithmes numériques (hormis pour le calcul de Φ^{-1}).

b. Probabilité de ruine entre 0 et t

Contrairement au cas du Brownien géométrique, il n'existe pas de résultat permettant d'obtenir la probabilité de ruine pour tout instant entre 0 et t . En particulier il n'est pas possible de faire apparaître un mouvement Brownien dans l'expression de a_t et, dans tous les cas, il n'existe pas de résultat similaire au cas analysé par Revuz et Yor [3] lorsque le processus étudié est un Brownien avec dérive non linéaire...

c. Application numérique

Nous choisissons de prendre des paramètres de passif semblables aux cas précédents.

En incluant ceux du modèle de Vasicek, les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\sigma_L = 5\% ; \mu_L = 0,04$$

$$\eta = 1\% ; r_0 = 3\%$$

$$\kappa = 0,031 ; \theta = 4\%$$

$$T = 5 \text{ ans}$$

La détermination des fonds propres à provisionner est réalisée sous Excel. On obtient alors les résultats suivants :

- En considérant la probabilité de ruine dans un an, qu'il faut conserver un montant de fonds propres égal à 18,50% du total de la valeur du portefeuille de passifs (soit 15,6% du total du bilan)
- Ce résultat est plus de trois et demi fois plus faible que dans le cas d'un actif de type Black-Scholes, ce qui est normal puisqu'un actif de type zéro-coupon est beaucoup moins volatil qu'un actif de type action.

Comme attendu, on constate que le montant des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque de ruine en se couvrant à l'actif par des zéro-coupons suivant un modèle de Vasicek est bien plus faible qu'en se couvrant avec des actions (modèle de Black-Scholes). Ce résultat explique en partie la tendance des assureurs à couvrir leurs passifs par un portefeuille composé à majorité d'actifs obligataires, la partie restante, plus risquée et plus coûteuse en capital, permettant d'améliorer la rentabilité globale du portefeuille tout en profitant de potentiels effets de diversification.

D) Limites de l'approche en temps continu

On l'a vu dans le cas de l'actif Black-Scholes, l'approche en temps continu, sous la forme de la recherche de la loi du temps d'atteinte d'une barrière fixée à l'avance, permet d'obtenir des résultats

sensiblement différents de l'approche directe, en observant directement la probabilité d'être en ruine à un instant donné. Les résultats – notamment le montant de fonds propres obtenu, qui est supérieur de 11,3% dans le cas de l'approche en temps continu – nous suggèrent que l'approche visant à simuler directement l'état du portefeuille dans un an conduit à sous-estimer, potentiellement fortement, le montant de fonds propres nécessaire, et donc, à avoir une probabilité réelle de ruine supérieure à celle demandée par la directive Solvabilité II.

Toutefois, le résultat que nous avons pu utiliser dans le cas d'un Brownien géométrique ne s'étend pas lorsqu'on complique le modèle, que ce soit lorsque l'on rajoute des sauts (même log-normaux) ou un paramètre de retour à la moyenne sur la trajectoire du processus. Il est donc difficile de proposer une méthode pour calculer un montant de fonds propres en utilisant cette méthode, dans un cadre plus réaliste que le modèle de Black-Scholes. Cependant, il nous paraît vraisemblable que les résultats obtenus avec le modèle de Black-Scholes – témoignant d'une sous-estimation du montant de fonds propres – seraient également observés dans le cas des autres modèles d'actifs.

Dans la section suivante, nous proposons une méthode visant à approximer la probabilité d'être en ruine sur un intervalle de temps donné, en discrétisant cet intervalle.

II. Etude théorique : Retour sur les modèles actif/passif

Approche discrétisée

Dans la partie précédente nous sommes arrivés à la conclusion qu'une approche purement en temps continu ne permettait pas d'obtenir des résultats satisfaisants et aisément manipulables dès que les modèles proposés pour l'actif se complexifient.

En réalité, les compagnies d'assurance travaillent en pas discret pour déterminer leur besoin en fonds propres (pilier 1). Dans la plupart des cas, les simulations utilisées sont réalisées en pas annuel. Comme on l'a dit précédemment, ces techniques permettent d'obtenir une valeur à provisionner en fonction de la probabilité de ruine en $t=1$ et non pas de la probabilité de ruine entre 0 et 1. La démarche suivie dans cette partie s'inspire fortement de nos calculs en temps continu, et permet d'obtenir une approximation rapide des fonds propres à provisionner à n'importe quel moment. Dans les cas simples que nous étudions (hypothèse forte de log-normalité), il est dès lors possible de mieux surveiller son risque en évaluant l'évolution du capital nécessaire en fonction des changements de paramètres de nos modèles.

Nous décrivons ici une méthode pour obtenir une approximation discrète de la probabilité de ruine à un an. L'idée que nous développons est qu'il est possible d'approximer la borne inférieure d'un processus, sur un intervalle donné, par le minimum sur ses valeurs prises à des dates uniformément réparties sur cet intervalle.

Dans le cas qui nous intéresse, cela revient à étudier l'approximation :

$$P_{ruine,[0;t]} = \mathbb{P}(\inf_{s \in [0;t]} (a_s) \leq 0) \cong \mathbb{P}(\min_{k \in [0;N]} \left(\frac{a_{kt}}{N} \right) \leq 0)$$

Le cas particulier où $N = 1$ correspond à un tir unique à la fin de l'intervalle ; on espère que l'étude de dates intermédiaires nous permettra d'améliorer la précision de l'estimation. Nous nous intéressons au cas des processus log-normaux.

A) Principe et application de notre approximation

a. Cas général de processus log-normaux

Dans la plupart des cas précédents, nous pouvions écrire le processus $a_t = \ln \left(\frac{A_t}{L_t} \right)$ sous la forme :

$a_t = a_0 + \mu(t) + \sigma(t)U_t$, avec $a_0 = \ln \left(\frac{A_0}{L_0} \right)$ et U_t un processus gaussien centré réduit de fonction d'auto-covariance ρ . On s'intéresse ici au calcul de $\mathbb{P}(\min_{k \in [0;N]} \left(\frac{a_{kt}}{N} \right) \leq 0)$.

$$\mathbb{P}\left(\min_{k \in [0;N]} \left(\frac{a_{kt}}{N}\right) \leq 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{k \in [0;N]} \left(\frac{a_{kt}}{N}\right) > 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N \left\{U_{kt} > -\frac{a_0 + \mu\left(\frac{kt}{N}\right)}{\sigma\left(\frac{kt}{N}\right)}\right\}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\min_{k \in [0;N]} \left(\frac{a_{kt}}{N}\right) \leq 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N \left\{U_{kt} < \frac{a_0 + \mu\left(\frac{kt}{N}\right)}{\sigma\left(\frac{kt}{N}\right)}\right\}\right)$$

$\mu(t)$ et $\sigma(t)$ sont des fonctions déterministes du temps. Cette dernière forme peut s'interpréter comme une fonction de répartition multivariée d'un vecteur gaussien centré et de matrice de variance-covariance Σ telle que :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) & \dots & \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{1}{N}, 1\right) \\ \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) & 1 & \dots & \rho\left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, 1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \dots & 1 & \rho\left(\frac{N-1}{N}, 1\right) \\ \rho\left(\frac{1}{N}, 1\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, 1\right) & \dots & \rho\left(\frac{N-1}{N}, 1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Nous montrons une application de ce calcul dans le cas d'un actif action suivant le modèle de Black-Scholes et dans le cas d'un actif taux suivant le modèle de Vasicek.

Une fois la forme de la matrice connue, il est possible d'utiliser un algorithme numérique afin d'obtenir la valeur des fonds propres à posséder à l'origine.

b. Application à un actif de type Black-Scholes

Nous commençons par appliquer ce résultat à un actif suivant le modèle de Black-Scholes ; il s'agit en effet du seul cas pour lequel on dispose d'une expression exacte de la probabilité de ruine sur un intervalle de temps, ce qui nous permettra de comparer les résultats obtenus par l'approximation avec la vraie valeur de la probabilité de défaut.

Dans ce cas simple il est possible d'utiliser directement l'auto-covariance du mouvement Brownien.

On a donc :

$$\begin{cases} \mu(t) = \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t \\ \sigma(t) = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} \end{cases}$$

De plus :

$$a_t = a_0 + \mu(t) + \sigma(t)W_t$$

On connaît la fonction d'auto-covariance d'un Brownien :

$$CoVar(W_t, W_s) = \min(t, s)$$

D'où la matrice d'auto-covariance, pour l'étude d'une probabilité de ruine à un an :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \ddots & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{N-1}{N} & \frac{N-1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{N-1}{N} & \frac{N-1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \dots & \frac{N-1}{N} & 1 \end{pmatrix}$$

Des trois cas étudiés, le cas Black-Scholes est cependant le seul où il est possible d'utiliser l'auto-covariance d'un mouvement Brownien, puisqu'il n'apparaît pas de processus de cette forme dans les autres cas étudiés.

c. Application à un actif zéro-coupon, processus de Vasicek

Dans le cas d'un actif zéro-coupon, pour lequel le processus taux instantané suit un modèle de Vasicek, on obtient une fonction d'auto-covariance plus complexe.

On a cette fois, avec T la maturité du zéro-coupon :

$$\begin{cases} \mu(t, T) = -\ln(PZC(0, T)) - B(t, T)(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t \\ \sigma^2(t) = B(t, T)^2 \eta^2 \frac{1}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) + \sigma_L^2 t \end{cases}$$

Et $\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\mu}(t, T) + \boldsymbol{\sigma}(t, T)\tilde{U}_t$ avec $\tilde{U}_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

On a donc en revenant sur nos pas et en prenant $0 \leq s \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} \rho(t, s) &= CoVar[\tilde{U}_t, \tilde{U}_s] \\ &= \frac{CoVar\left[\eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^r - \sigma_L W_t^L, \eta B(s, T) \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^r - \sigma_L W_s^L\right]}{\sigma(s)\sigma(t)} \\ &= \frac{\eta^2 B(t, T)B(s, T)CoVar\left[\int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^r, \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^r\right] + \sigma_L^2 s}{\sigma(s)\sigma(t)} \\ &= \frac{\eta^2 B(t, T)B(s, T) \int_0^s e^{-\kappa(t-u)} e^{-\kappa(s-u)} du + \sigma_L^2 s}{\sigma(s)\sigma(t)} \\ &= \frac{\eta^2 B(t, T)B(s, T)(e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa(t+s)}) + \sigma_L^2 \sqrt{\frac{s}{t}}}{\sigma(s)\sigma(t)} \end{aligned}$$

Il suffit donc de réintégrer cette expression dans la matrice d'auto-covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) & \cdots & \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{1}{N}, 1\right) \\ \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right) & 1 & \cdots & \rho\left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, 1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho\left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N}\right) & \cdots & 1 & \rho\left(\frac{N-1}{N}, 1\right) \\ \rho\left(\frac{1}{N}, 1\right) & \rho\left(\frac{2}{N}, 1\right) & \cdots & \rho\left(\frac{N-1}{N}, 1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Et nous obtenons aisément un algorithme permettant de calculer le montant des fonds propres à provisionner.

A noter que dans cette partie nous avons choisi de ne pas nous attarder sur le modèle de Merton actif car les possibilités d'obtenir des résultats par formule fermée en utilisant ce modèle sont limitées (voire inexistantes) du fait des sauts. Cependant, en utilisant les modélisations de Black-Scholes et de Vasicek, il est déjà possible de décrire un large panel de sous-jacents (zéro-coupons, actions, immobilier, OPCVM...).

Afin d'étudier un cas plus réaliste qu'un portefeuille de couverture d'un seul type, nous nous attachons dans la partie suivante à continuer notre étude pour un processus mixte, comportant une partie évoluant suivant un Brownien géométrique et une seconde partie zéro-coupon suivant un modèle de Vasicek, qui modélise le comportement d'un portefeuille composé d'actifs de type action, et de produits de taux.

B) Cas d'un portefeuille mixte

L'hypothèse d'un portefeuille d'actifs constitué uniquement d'actions ou d'immobilier, pour un assureur, est extrêmement peu réaliste, de même qu'un portefeuille purement composé de zéro-coupons, dont le risque est quasi nul mais le rendement est minimal. Il s'agit donc dans cette partie d'étudier un portefeuille de couverture mêlant les deux types d'actif.

a. Présentation du problème

On considère qu'à l'instant initial, le portefeuille d'actifs est constitué d'actions et d'obligations zéro-coupon de maturité unique, en proportions α et $1 - \alpha$. On a alors, en reprenant les notations des parties précédentes et en notant W_t^S le Brownien action et W_t^r le Brownien taux :

$$A_t = \alpha A_0 e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t^S} + \frac{(1 - \alpha)A_0 A(t, T)}{PZC(0, T)} e^{-B(t, T)r_t}$$

Pour cette partie et afin de rendre notre modélisation plus réaliste, nous considérons le coefficient de corrélation ρ entre les Browniens action et taux, qui vérifie, en prenant W_t^\perp est un Brownien indépendant de W_t^S :

$$dW_t^S \cdot dW_t^r = \rho, \text{ d'où } dW_t^r = \rho dW_t^S + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp$$

Puis :

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \eta\rho \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^{\perp}$$

Et avec $s = 0$:

$$r_t = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \eta\rho \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^{\perp}$$

Finalement, on obtient la valeur du portefeuille d'actifs en fonction de W_t^S et de W_t^{\perp} :

$$A_t = A_0 \left(\alpha e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t^S} + \frac{(1-\alpha)A(t,T)}{PZC(0,T)} e^{-B(t,T)\left(r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1-e^{-\kappa t}) + \eta\rho \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S + \eta\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^{\perp}\right)} \right)$$

Comme précédemment, on considère un passif modélisé par un Brownien géométrique, tel que :

$$L_t = \exp\left(\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t + \sigma_L W_t^L\right),$$

Avec W_t^L un mouvement Brownien indépendant des Browniens action et taux.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{A_t}{L_t} = \frac{A_0}{L_0} \left(\alpha e^{\left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t^S - \sigma_L W_t^L} + \frac{(1-\alpha)A(t,T)}{PZC(0,T)} e^{-B(t,T)r_0 e^{-\kappa t} - B(t,T)\theta(1-e^{-\kappa t}) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)t - \sigma_L W_t^L - \rho\eta B(t,T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S - \sqrt{1-\rho^2}\eta B(t,T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^{\perp}} \right)$$

Le processus $\frac{A_t}{L_t}$ est donc une somme de processus log-normaux corrélés.

Il est impossible de calculer directement la probabilité de ruine à partir de cette loi ; toutefois, il existe des méthodes permettant d'approximer une somme de processus log-normaux corrélés par un seul processus log-normal. Nous présentons maintenant une de ces méthodes, que nous mettrons en pratique par la suite.

b. Approximation de Fenton-Wilkinson

L'approximation de Fenton-Wilkinson (1960) [5] est une des méthodes permettant d'estimer les paramètres d'une loi log-normale approximant une somme de plusieurs log-normales, à partir de ses deux premiers moments.

Nous utilisons ici une approximation de ce type permettant de calculer la loi suivie par un portefeuille constitué de plusieurs actifs modélisés par des processus log-normaux.

Soit un processus de la forme $P_t = LN(\mu_1(t), \sigma_1^2(t)) + LN(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T))$, tel que :

$$\text{Correl} \left(\ln \left(LN(\mu_1, \sigma_1^2) \right), \ln \left(LN(\mu_2, \sigma_2^2) \right) \right) = \rho^f(t, T)$$

Dans le cas qui nous intéresse (et nous réutiliserons ces notations par la suite), $LN(\mu_1, \sigma_1^2)$ est la partie Black-Scholes du processus $\frac{A_t}{L_t}$ et $LN(\mu_2, \sigma_2^2)$ est sa partie zéro-coupon (Vasicek).

Il s'agit d'approximer la somme de lois log-normales par une unique loi log-normale, en égalant les deux premiers moments. On a alors :

$$\begin{cases} E[P_t] = m_1(t, T) = e^{\mu_1(t) + \frac{\sigma_1^2(t)}{2}} + e^{\mu_2(t, T) + \frac{\sigma_2^2(t, T)}{2}} \\ E[P_t^2] = m_2(t, T) = e^{2\mu_1(t) + 2\sigma_1^2(t)} + e^{2\mu_2(t, T) + 2\sigma_2^2(t, T)} \\ \quad + 2e^{\mu_1(t) + \mu_2(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t, T) + 2\rho^f(t, T)\sigma_1(t)\sigma_2(t, T))} \end{cases}$$

On peut alors en déduire les moments $\mu_X(t)$ et $\sigma_X(t)$ de l'approximation ($X_t = e^{\mu_X(t) + \sigma_X(t)U_t}$ avec U_t un processus gaussien centré, réduit) :

$$\begin{cases} \mu_X(t, T) = 2 \ln(m_1(t, T)) - \frac{1}{2} \ln(m_2(t, T)) \\ \sigma_X^2(t, T) = \ln(m_2(t, T)) - 2 \ln(m_1(t, T)) \end{cases}$$

Dans notre cas, on a :

$$\begin{cases} \mu_1(t) = \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \ln \left(\frac{A_0}{L_0} \alpha \right) \\ \mu_2(t, T) = -B(t, T)r_0 e^{-\kappa t} - B(t, T)\theta(1 - e^{-\kappa t}) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) t + \ln \left(\frac{A_0}{L_0} (1 - \alpha) \frac{A(t, T)}{PZC(0, T)} \right) \\ \sigma_1(t) = \sqrt{(\sigma_S^2 + \sigma_L^2)t} \\ \sigma_2(t, T) = \sqrt{\sigma_L^2 t + \frac{B(t, T)^2 \eta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})} \\ \text{Correl} \left(\ln \left(LN(\mu_1, \sigma_1^2) \right), \ln \left(LN(\mu_2, \sigma_2^2) \right) \right) = \rho^f(t, T) = \frac{-\frac{\eta\rho\sigma_S}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) B(t, T) + \sigma_L^2 t}{\sigma_1(t)\sigma_2(t, T)} \end{cases}$$

Ce qui nous permet de déduire les paramètres $\mu_X(t)$ et $\sigma_X(t)$ du processus qui approxime la somme de processus log-normaux, pour toute valeur de t .

Toutefois, connaître ces formules ne suffit pas à l'approximation du processus $\frac{A_t}{L_t}$, puisqu'on ne tient pas compte de son auto-covariance. Il faut donc améliorer la méthode.

c. Extension à des processus log-normaux

Il est possible d'étendre l'approximation de Fenton-Wilkinson à des processus log-normaux.

Pour cela, il faut égaliser la fonction d'auto-covariance $\rho_X(t)$ du processus d'approximation et celle du processus $\frac{A_t}{L_t}$, soit :

$$\forall s, t \in [0,1], t \geq s, \text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] = \text{CoVar} [X_t; X_s]$$

Ce type d'approximation, qui est utilisé en théorie du signal [6], est déjà documentée ; nous déroulons maintenant les calculs appliqués à notre situation :

$$\begin{aligned} \text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] &= \text{CoVar} \left[\text{LN} \left(\mu_1(t), \sigma_1^2(t) \right) + \text{LN} \left(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T) \right); \text{LN} \left(\mu_1(s), \sigma_1^2(s) \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{LN} \left(\mu_2(s, T), \sigma_2^2(s, T) \right) \right], \text{ soit} \\ \text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] &= \text{CoVar} \left[\text{LN} \left(\mu_1(t), \sigma_1^2(t) \right); \text{LN} \left(\mu_1(s), \sigma_1^2(s) \right) \right] \\ &\quad + \text{CoVar} \left[\text{LN} \left(\mu_1(t), \sigma_1^2(t) \right); \text{LN} \left(\mu_2(s, T), \sigma_2^2(s, T) \right) \right] \\ &\quad + \text{CoVar} \left[\text{LN} \left(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T) \right); \text{LN} \left(\mu_2(s, T), \sigma_2^2(s, T) \right) \right] \\ &\quad + \text{CoVar} \left[\text{LN} \left(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T) \right); \text{LN} \left(\mu_1(s), \sigma_1^2(s) \right) \right] \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant chacun des coefficients de covariance des logarithmes des termes de l'expression précédents :

$$\begin{aligned} c_{1,1}(t, s) &= \text{CoVar} \left[\ln \left(\text{LN} \left(\mu_1(t), \sigma_1^2(t) \right) \right); \ln \left(\text{LN} \left(\mu_1(s), \sigma_1^2(s) \right) \right) \right] \\ c_{1,1}(t, s) &= \text{CoVar} [\sigma_S W_t^S - \sigma_L W_t^L; \sigma_S W_s^S - \sigma_L W_s^L] = (\sigma_S^2 + \sigma_L^2) s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{1,2}(t, s) &= \text{CoVar} \left[\ln \left(\text{LN} \left(\mu_1(t), \sigma_1^2(t) \right) \right); \ln \left(\text{LN} \left(\mu_2(s, T), \sigma_2^2(s, T) \right) \right) \right] \\ c_{1,2}(t, s) &= \text{CoVar} \left[\sigma_S W_t^S - \sigma_L W_t^L; -\sigma_L W_s^L - \rho \eta B(s, T) \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^S \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 - \rho^2} \eta B(s, T) \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^\perp \right] \end{aligned}$$

$$c_{1,2}(t, s) = \sigma_L^2 s - \sigma_S \sqrt{s} \rho \sqrt{\frac{\eta^2 B(s, T)^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa s})} \text{Correl} \left(W_s^S, \int_0^s e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S \right)$$

$$c_{1,2}(t, s) = \sigma_L^2 s - \frac{\sigma_S \rho \eta B(s, T)}{\kappa} (1 - e^{-\kappa s})$$

$$\begin{aligned}
 c_{2,1}(s, t) &= \text{CoVar} \left[\ln \left(LN \left(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T) \right) \right); \ln \left(LN \left(\mu_1(s), \sigma_1^2(s) \right) \right) \right] \\
 c_{2,1}(s, t) &= \text{CoVar} \left[-\sigma_L W_t^L - \rho \eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^\perp; \sigma_S W_s^S - \sigma_L W_s^L \right] \\
 c_{2,1}(s, t) &= \text{CoVar}[-\sigma_L W_t^L; -\sigma_L W_s^L] + \text{CoVar} \left[-\rho \eta B(t, T) \int_0^s e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S; \sigma_S W_s^S \right] \\
 c_{2,1}(s, t) &= \sigma_L^2 s - \frac{\rho \eta B(t, T) \sigma_S}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa t})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{2,2}(t, s) &= \text{CoVar} \left[\ln \left(LN \left(\mu_2(t, T), \sigma_2^2(t, T) \right) \right); \ln \left(LN \left(\mu_2(s, T), \sigma_2^2(s, T) \right) \right) \right] \\
 c_{2,2}(t, s) &= \text{CoVar} \left[-\sigma_L W_t^L - \eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^r; -\sigma_L W_s^L - \eta B(s, T) \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^r \right] \\
 c_{2,2}(t, s) &= \sigma_L^2 s + \eta^2 B(t, T) B(s, T) \text{CoVar} \left[\int_0^s e^{-\kappa(t-u)} dW_u^r; \int_0^s e^{-\kappa(s-u)} dW_u^r \right] \\
 c_{2,2}(t, s) &= \sigma_L^2 s + \eta^2 B(t, T) B(s, T) \frac{e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa(t+s)}}{2\kappa}
 \end{aligned}$$

Le calcul de ces coefficients nous permet de calculer la covariance du processus log-normal ; en effet, on a pour tout $\{i, j\} \in \{1; 2\}^2$:

$$\text{CoVar} \left[LN(\mu_i(t), \sigma_i^2(t)); LN(\mu_j(s), \sigma_j^2(s)) \right] = e^{\mu_i(t) + \mu_j(s) + \frac{(\sigma_i^2(t) + \sigma_j^2(s) + 2c_{i,j}(t,s))}{2}} - e^{\mu_i(t) + \mu_j(s) + \frac{(\sigma_i^2(t) + \sigma_j^2(s))}{2}}$$

D'où on déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] &= e^{\mu_1(t) + \mu_1(s) + \frac{(\sigma_1^2(t) + \sigma_1^2(s))}{2}} (e^{c_{1,1}(t,s)} - 1) \\
 &\quad + e^{\mu_1(t) + \mu_2(s, T) + \frac{(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(s, T))}{2}} (e^{c_{1,2}(t,s)} - 1) \\
 &\quad + e^{\mu_2(t, T) + \mu_1(s) + \frac{(\sigma_2^2(t, T) + \sigma_1^2(s))}{2}} (e^{c_{2,1}(t,s)} - 1) \\
 &\quad + e^{\mu_2(t, T) + \mu_2(s, T) + \frac{(\sigma_2^2(t, T) + \sigma_2^2(s, T))}{2}} (e^{c_{2,2}(t,s)} - 1)
 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 \text{CoVar} [X_t; X_s] &= e^{\mu_X(t, T) + \mu_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T) + 2\sigma_X(t, T)\sigma_X(s, T)\rho_X(t, s))}{2}} \\
 &\quad - e^{\mu_X(t, T) + \mu_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T))}{2}}
 \end{aligned}$$

On obtient alors une expression de $\rho_X(t, s)$, la fonction d'auto-covariance du processus gaussien U_t obtenu en centrant et réduisant le logarithme du processus log-normal X_t .

Dans notre cas, on a :

$$\rho_X(t, s) = \frac{\left(\ln \left(\text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] + e^{\mu_X(t, T) + \mu_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T))}{2}} \right) \right) - \frac{\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T)}{2}}{-(\mu_X(t, T) + \mu_X(s, T)) \sigma_X(t, T) \sigma_X(s, T)}$$

L'approximation d'une somme de processus log-normaux par un processus log-normal unique nécessite donc uniquement de calculer sa fonction d'auto-covariance ainsi que ses deux premiers moments.

d. Ajout de dépendance entre le passif et les différentes parties actif.

Nous avons considéré dans la partie I.A que l'hypothèse d'indépendance entre processus actif et passif, souvent utilisée en assurance non-vie, pouvait être relevée aisément, dans la majeure partie des cas que nous avons étudiés. Cependant cette hypothèse d'indépendance est trop forte dans le cas d'un produit d'assurance-vie et même si nous l'avons choisie par simplicité, en considérant qu'elle serait facile à supprimer, il semble évident que dans le cas de notre étude d'un portefeuille mixte, l'intégration de corrélations entre les Browniens des parties actif Black-Scholes, Vasicek et du Passif n'est pas si aisée.

Dans cette section, nous avons choisi de présenter les résultats que l'on obtiendrait, dans ce cas uniquement, avec l'approximation de Fenton-Wilkinson, en intégrant une matrice de corrélation quelconque entre les trois Browniens.

Nous considérons ici le cas où les trois mouvements Browniens W_t^L , W_t^S et W_t^r sont corrélés de telle sorte que :

$$dW_t^L \cdot dW_t^S = \rho_{L,S}, \quad dW_t^L \cdot dW_t^r = \rho_{L,r}$$

$$\text{Et on a toujours : } dW_t^S \cdot dW_t^r = \rho$$

On peut donc écrire le Brownien passif sous la forme :

$$W_t^L = \rho_1 W_t^S + \rho_2 W_t^\perp + \rho_3 W_t^{\perp\perp}$$

Où W_t^\perp est le Brownien explicité plus haut et $W_t^{\perp\perp}$ est un Brownien indépendant de W_t^L et W_t^S , et avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \rho_{L,S} \\ \rho_2 = \frac{\rho_{L,r} - \rho_{S,r} \rho_{L,S}}{\sqrt{1 - \rho_{S,r}^2}} = \frac{\rho_{L,r} - \rho \rho_{L,S}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ \rho_3 = \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} \end{array} \right.$$

D'après la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} W_t^S \\ W_t^r \\ W_t^L \end{pmatrix}$.

On obtient alors de nouvelles valeurs pour $\sigma_1(t), \sigma_2(t, T), \rho^f(t, T)$ mais aussi $c_{1,1}(t, s), c_{1,2}(t, s), c_{2,1}(t, s)$ et $c_{2,2}(t, s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1^2(t) &= \mathbb{V}[\sigma_S W_t^S - \sigma_L W_t^L] = \mathbb{V}[\sigma_S W_t^S - \sigma_L \rho_1 W_t^S - \sigma_L \rho_2 W_t^\perp - \sigma_L \rho_3 W_t^{\perp\perp}] \\ &= (\sigma_S - \sigma_L \rho_1)^2 t + \sigma_L^2 (\rho_2^2 + \rho_3^2) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_2^2(t, T) &= \mathbb{V} \left[-\sigma_L W_t^L - \rho \eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^S - \sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) \int_0^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u^\perp \right] \\ &= \mathbb{V} \left[-\sigma_L \rho_3 W_t^{\perp\perp} - \int_0^t (\rho \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_1) dW_u^S - \int_0^t (\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_2) dW_u^\perp \right] \\ &= \sigma_L^2 \rho_3^2 t + \int_0^t (\rho \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_1)^2 du + \int_0^t (\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_2)^2 du \\ &= \sigma_L^2 t + \frac{B(t, T)^2 \eta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) + \frac{2B(t, T) \eta \sigma_L \rho_1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) + \frac{2B(t, T) \eta \sigma_L \sqrt{1 - \rho^2} \rho_2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^f(t, T) &= \text{Correl} \left[\sigma_S W_t^S - \sigma_L (\rho_1 W_t^S + \rho_2 W_t^\perp + \rho_3 W_t^{\perp\perp}); -\sigma_L \rho_3 W_t^{\perp\perp} - \int_0^t (\rho \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_1) dW_u^S - \int_0^t (\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_2) dW_u^\perp \right] \\ &= \frac{-\int_0^t (\rho \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_1) (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) du + \sigma_L \rho_2 \int_0^t (\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) e^{-\kappa(t-u)} + \sigma_L \rho_2) du + \sigma_L^2 \rho_3^2 t}{\tilde{\sigma}_1(t) \tilde{\sigma}_2(t, T)} \\ &= \frac{-\sigma_L \rho_1 (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) t - \frac{\rho \eta B(t, T) (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) (1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} + \sigma_L^2 \rho_2^2 t + \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) \sigma_L \rho_2 (1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} + \sigma_L^2 \rho_3^2 t}{\tilde{\sigma}_1(t) \tilde{\sigma}_2(t, T)} \\ \text{Soit : } \tilde{\rho}^f(t, T) &= \frac{\sigma_L^2 t - \sigma_S \sigma_L \rho_1 t - \frac{\rho \eta B(t, T) (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) (1 - e^{-\kappa t})}{\kappa} + \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) \sigma_L \rho_2 (1 - e^{-\kappa t})}{\kappa}}{\tilde{\sigma}_1(t) \tilde{\sigma}_2(t, T)} \end{aligned}$$

Et concernant $c_{1,1}(t, s), c_{1,2}(t, s), c_{2,1}(t, s)$ et $c_{2,2}(t, s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{1,1}(t, s) &= (\sigma_S - \sigma_L \rho_1)^2 s + \sigma_L^2 (\rho_2^2 + \rho_3^2) s \\ \tilde{c}_{1,2}(t, s) &= \sigma_L^2 s - \sigma_S \sigma_L \rho_1 s - \frac{\rho \eta B(s, T) (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) (1 - e^{-\kappa s})}{\kappa} \\ &\quad + \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(s, T) \sigma_L \rho_2 (1 - e^{-\kappa s})}{\kappa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2,1}(s, t) &= \sigma_L^2 s - \sigma_S \sigma_L \rho_1 s - \frac{\rho \eta B(t, T) (\sigma_S - \sigma_L \rho_1) (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa t})}{\kappa} \\ &+ \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \eta B(t, T) \sigma_L \rho_2 (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa t})}{\kappa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2,2}(s, t) &= \sigma_L^2 s + \frac{B(t, T) B(s, T) \eta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) + \frac{B(t, T) \eta \sigma_L \rho \rho_1}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa t}) \\ &+ \frac{B(s, T) \eta \sigma_L \rho \rho_1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa s}) + \frac{B(t, T) \eta \sigma_L \sqrt{1 - \rho^2} \rho_2}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-\kappa t}) \\ &+ \frac{B(s, T) \eta \sigma_L \sqrt{1 - \rho^2} \rho_2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa s}) \end{aligned}$$

Puis, les deux premiers moments de $\frac{A_t}{L_t}$ deviennent :

$$\begin{cases} E \left[\frac{A_t}{L_t} \right] = \tilde{m}_1(t, T) = e^{\mu_1(t) + \frac{\tilde{\sigma}_1^2(t)}{2}} + e^{\mu_2(t, T) + \frac{\tilde{\sigma}_2^2(t, T)}{2}} \\ E \left[\left(\frac{A_t}{L_t} \right)^2 \right] = \tilde{m}_2(t, T) = e^{2\mu_1(t) + 2\tilde{\sigma}_1^2(t)} + e^{2\mu_2(t, T) + 2\tilde{\sigma}_2^2(t, T)} \\ \quad + 2e^{\mu_1(t) + \mu_2(t, T) + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_1^2(t) + \tilde{\sigma}_2^2(t, T) + 2\tilde{\rho}^f(t, T)\tilde{\sigma}_1(t)\tilde{\sigma}_2(t, T))} \end{cases}$$

La loi log-normale approchée égalisant les moments de $\frac{A_t}{L_t}$ est donc la loi :

$$LN(\tilde{\mu}_X(t, T), \tilde{\sigma}_X^2(t, T)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_X(t, T) = 2 \ln(\tilde{m}_1(t, T)) - \frac{1}{2} \ln(\tilde{m}_2(t, T)) \\ \tilde{\sigma}_X^2(t, T) = \ln(\tilde{m}_2(t, T)) - 2 \ln(\tilde{m}_1(t, T)) \end{cases}$$

Nous obtenons donc un nouveau processus \tilde{X}_t et il suffit ensuite de réintroduire les formules obtenues pour $\tilde{\sigma}_1(t)$, $\tilde{\sigma}_2(t, T)$, $\tilde{c}_{1,1}(t, s)$, $\tilde{c}_{1,2}(t, s)$, $\tilde{c}_{2,1}(t, s)$, $\tilde{c}_{2,2}(t, s)$ mais aussi pour $\tilde{\mu}_X(t, T)$ et $\tilde{\sigma}_X^2(t, T)$, dans la formule de $\rho_X(t, s)$ (qui devient donc $\tilde{\rho}_X(t, s)$).

e. Probabilité de ruine en temps discret

Une fois ceci effectué, nous pouvons nous intéresser à :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\min_{k \in [0; N]} \left(\frac{A_k}{L_k} \right) \leq 1 \right) &\cong \mathbb{P} \left(\min_{k \in [0; N]} \left(X_k \right) \leq 1 \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\min_{k \in [0; N]} \left(\ln \left(X_k \right) \right) > 0 \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^N \left\{ \mu_X \left(\frac{k}{N}, T \right) + \sigma_X \left(\frac{k}{N}, T \right) V_k > 0 \right\} \right) \end{aligned}$$

où V_t est le processus normal dans la loi log-normale de X_t

Soit :

$$\mathbb{P} \left(\min_{k \in [0; N]} \left(\frac{A_k}{L_k} \right) \leq 1 \right) \cong 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^N \left\{ V_k > -\frac{\mu_X \left(\frac{k}{N}, T \right)}{\sigma_X \left(\frac{k}{N}, T \right)} \right\} \right)$$

$$\mathbb{P} \left(\min_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket} \left(\frac{A_k}{L_k} \right) \leq 1 \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^N \left\{ V_k < \frac{\mu_X \left(\frac{k}{N}, T \right)}{\sigma_X \left(\frac{k}{N}, T \right)} \right\} \right)$$

Avec $\mu_X(t, T)$ et $\sigma_X(t, T)$ des fonctions déterministes du temps.

Cette dernière forme peut à nouveau s'interpréter comme une fonction de répartition multivariée sur le vecteur gaussien (V_1, V_2, \dots, V_N) d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance Σ telle que :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_X \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N} \right) & \dots & \rho_X \left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N} \right) & \rho_X \left(\frac{1}{N}, 1 \right) \\ \rho_X \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N} \right) & 1 & \dots & \rho_X \left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N} \right) & \rho_X \left(\frac{2}{N}, 1 \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X \left(\frac{1}{N}, \frac{N-1}{N} \right) & \rho_X \left(\frac{2}{N}, \frac{N-1}{N} \right) & \dots & 1 & \rho_X \left(\frac{N-1}{N}, 1 \right) \\ \rho_X \left(\frac{1}{N}, 1 \right) & \rho_X \left(\frac{2}{N}, 1 \right) & \dots & \rho_X \left(\frac{N-1}{N}, 1 \right) & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la suite nous considérerons toujours vraie l'hypothèse que les processus actif et passif sont totalement indépendants. Les résultats présentés plus tard ne tiennent donc pas compte des calculs effectués dans la partie précédente.

f. Retour sur l'approximation de Fenton-Wilkinson

Grace à notre approximation théorique nous obtenons un résultat sous forme de formule fermée permettant d'estimer a priori la valeur de la probabilité de ruine à horizon un an en fonction de nos paramètres, ce qui nous permet par inversion d'obtenir le montant de fonds propres nécessaire pour couvrir le risque de ruine dans 99,5% des cas. Ce résultat est applicable pour les 3 cadres étudiés plus tôt mais inadaptée au cadre d'un processus actif à sauts.

Le cas qui va le plus nous intéresser par la suite sera celui du portefeuille mixte action-taux. Cependant, ce cas implique l'utilisation de l'approximation de Fenton-Wilkinson et donc un biais dans la détermination de la probabilité de ruine.

Des études [7] montrent que l'approximation est bonne pour des lois log-normales composantes indépendantes avec des volatilités relativement faibles (de l'ordre de 5%).

Dans notre cas, nous approximations la somme de deux lois log-normales corrélées, avec des volatilités supérieures à 5%. Il sera donc nécessaire de tester l'évaluation et de la comparer à des valeurs exactes (obtenues, par exemple, par Monte-Carlo) afin de la valider. De nous nous avons étudié l'évolution du biais attendu, lié à l'approximation, pour nos paramètres.

Nous avons donc simulé les valeurs réelle du processus $\frac{A_t}{L_t}$, et du processus approximé X_t en $t = 1$. Nous nous plaçons dans le cadre du portefeuille mixte, pour différentes valeurs de α , en utilisant les

mêmes paramètres que ceux utilisés par la suite (avec notamment une corrélation de -20% entre les deux Browniens ; voir partie IV). Puis nous comparons les densités de probabilité de la loi de $\frac{A_1}{L_1}$, et de la loi de X_1 , au voisinage du quantile à 0,5%.

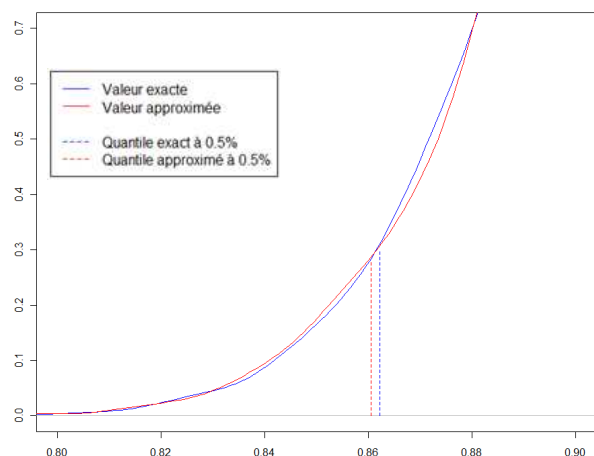


Figure 2 : $\alpha = 10\%$

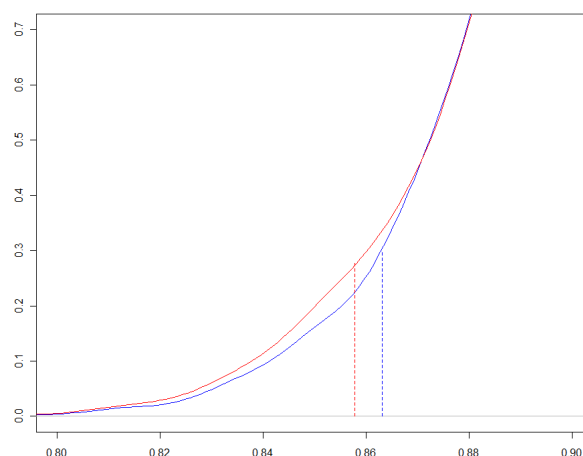


Figure 3 : $\alpha = 20\%$

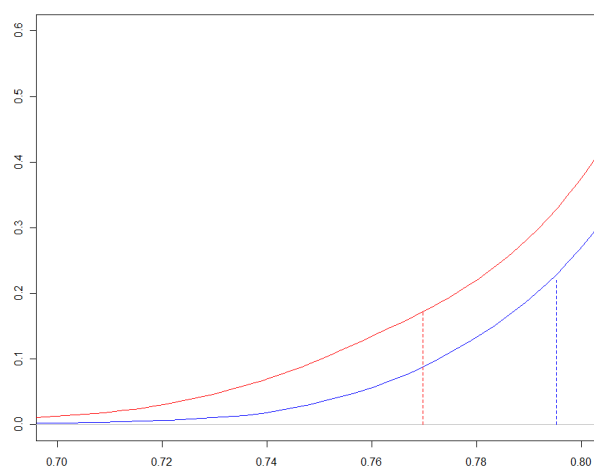


Figure 4 : $\alpha = 50\%$

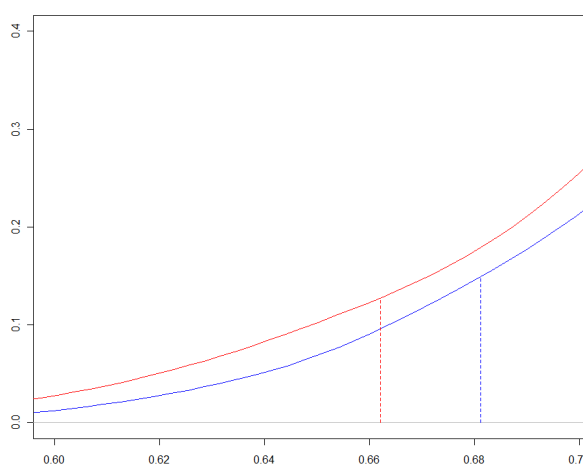


Figure 5 : $\alpha = 80\%$

Nous voyons ici que, dans tous les cas observés, le quantile à 0,5% estimé en utilisant l'approximation de Fenton-Wilkinson est inférieur au quantile exact, et que cet écart varie en fonction de α , pour un écart maximal avec $\alpha = 50\%$. Cet écart conduit à une surestimation du montant de fonds propres à conserver, qui reste raisonnable pour des petites valeurs de α (inférieures à 20%).

Nous pensons que cet écart s'explique par l'écart entre les troisième et quatrième moments de la loi normale et de la loi approximée, qui entraîne un épaississement de la queue de distribution à gauche de la loi approximée.

Tableau 1 : Comparaison entre les moments de la loi exacte et de la loi approximée, pour différentes valeurs de α

	$\alpha = 10\%$		$\alpha = 20\%$		$\alpha = 50\%$		$\alpha = 80\%$	
	Valeur exacte	Valeur approximée	Valeur exacte	Valeur approximée	Valeur exacte	Valeur approximée	Valeur exacte	Valeur approximée
Moyenne	0,9964	0,9964	1,0016	1,0015	1,0168	1,0168	1,0320	1,0321
Variance	0,0031	0,0031	0,0035	0,0035	0,0114	0,0115	0,0296	0,0296
Skewness	0,1638	0,1780	0,2259	0,1875	0,6003	0,3262	0,6458	0,5120
Kurtosis	3,0187	3,0368	3,1089	3,0427	3,6678	3,1609	3,7176	3,4396

Notamment, pour des valeurs de α supérieures à 20%, on observe que le coefficient d'asymétrie de la loi approximée est significativement inférieur au coefficient d'asymétrie de la loi exacte, ce qui explique en partie le phénomène observé.

III. Etude empirique : Implémentation et résultats

Afin de tester la validité de notre approche, nous avons implémenté le calcul de l'approximation que nous avons présentée, ainsi qu'un algorithme permettant d'évaluer le montant de fonds propres nécessaires pour couvrir un portefeuille de passifs, avec une probabilité de ruine donnée. Nous avons utilisé le logiciel R.

Le calcul de la probabilité de ruine, en se servant de notre approximation, se décompose en trois étapes :

- Calcul des paramètres $\mu_X(t)$ et $\sigma_X(t)$ de l'approximation
- Calcul de la matrice d'auto-covariance du processus
- Evaluation de la valeur de la fonction de répartition d'une gaussienne multivariée

L'algorithme que nous avons ensuite utilisé pour trouver la valeur de fonds propres est un algorithme dichotomique simple.

A) Implémentation de notre méthodologie discrète

a. Calcul de la probabilité de défaut

Nous utilisons le package *mvtnorm* du logiciel R, qui intègre des algorithmes de calcul pour une gaussienne multivariée. Plus spécifiquement, nous utilisons l'algorithme de Genz-Bretz ; il s'agit d'un algorithme utilisant une variante de la méthode de Monte-Carlo.

Le choix d'un tel algorithme par rapport à un algorithme de calcul exact, alors même que notre objectif était d'éviter les simulations dans le calcul de fonds propres, se justifie par sa vitesse d'exécution en comparaison d'un algorithme exact [8]. Nous donnons pour référence le tableau suivant, publié dans le même article :

Tableau 2 : Comparaison entre les temps de calcul d'un algorithme exact et d'un algorithme Genz-Bretz

Dimension	Temps d'exécution (secondes)			
	Miwa (Algorithme exact)		Genz-Bretz (précision = 10^{-4})	
	Simple	Double	Simple	Double
5	0,021	0,441	0,029	0,085
6	0,089	8,731	0,089	0,149
7	0,599	156,01	0,083	0,255
8	9,956	4 heures	0,138	0,233
9	89,921	-	0,231	0,392

L'inconvénient de cet algorithme est qu'il ne donne pas une valeur exacte de la quantité recherchée, mais une valeur estimée avec un seuil de précision donné.

La fonction prend deux paramètres en entrée : un vecteur et une matrice de variance-covariance.

Le calcul de la probabilité de défaut, pour un montant de fonds propres donné, se décompose donc en trois étapes (par la suite nous notons N le nombre de pas de discrétisation) :

- Calcul de $\left\{ \frac{\mu_X\left(\frac{k}{N}T\right)}{\sigma_X\left(\frac{k}{N}T\right)}, k \in \llbracket 1; N \rrbracket \right\}$ (calcul en $O(N)$)
- Calcul de la matrice de variance-covariance (calcul en $O(N^2)$)
- Calcul de la fonction de répartition multivariée.

L'ensemble de ce calcul s'effectue avec une complexité en $O(N^2)$, principalement à cause du calcul de la matrice de variance-covariance. Il est possible de diviser la complexité de cette opération par deux en utilisant la symétrie de la matrice, mais le calcul est demandeur de temps pour N très grand ; il y a donc un arbitrage à faire entre temps de calcul et précision, sachant que la précision sera de toute façon limitée par le choix de l'algorithme utilisé pour le calcul de la Gaussienne multivariée.

b. Présentation d'un algorithme naïf

Il est possible de calculer le montant de fonds propres pour un pas de discrétisation fixé à l'aide d'un algorithme simple, dont voici une description :

- 1) *Initialisation : on intègre $a_{0,min}$ et $a_{0,max}$ les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle sur lequel on recherche le montant de fonds propres à conserver.*
- 2) *On calcule la probabilité de ruine pour le montant $a_{0,test}$ qui est au milieu de l'intervalle*
- 3) *Si l'écart entre le seuil fixé et la probabilité calculée est supérieur à 0,00001, on renvoie $a_{0,test}$; sinon :*
 - *Si la probabilité calculée est supérieure au seuil fixé, on relance l'algorithme sur l'intervalle $[a_{0,test}; a_{0,max}]$*
 - *Sinon, on relance l'algorithme sur l'intervalle $[a_{0,min}; a_{0,test}]$*

Si jamais il existe une solution au problème dans l'intervalle initialement choisi pour l'initialisation, cet algorithme permet d'obtenir une solution en quelques itérations.

Toutefois, cette première version n'est pas efficace : en effet, à chaque itération, il faut recalculer la probabilité de ruine pour un montant de fonds propres. Or, la formule permettant de calculer la matrice d'auto-covariance du processus dépend *a priori* des fonds propres ; il faudrait donc calculer cette matrice à chaque itération de la fonction, ainsi que les paramètres du processus.

Le calcul d'une matrice a une complexité en $O(N^2)$, où N est le nombre de dates où l'on étudie le processus. Au vu de la complexité de l'opération, il est important de limiter le nombre de calculs de matrices dans l'algorithme, afin de le rendre utilisable en pratique.

Dans la suite, nous revenons sur un résultat remarquable concernant la forme de la fonction d'auto-covariance du processus étudié.

c. Retour sur la matrice d'auto-covariance

Au cours de nos calculs puis à travers la mise en équation formelle de la matrice d'auto-covariance, nous nous sommes aperçus que, dans aucun des cas étudiés, même dans le cas du portefeuille simple, le facteur a_0 n'intervient dans la matrice.

Dans cette section nous mettons en évidence ce fait pour le portefeuille simple uniquement, sans corrélations entre le Brownien passif et les autres mouvements Browniens afin de ne pas surcharger nos formules. Cependant l'intégration des corrélations ne change pas notre résultat fondamental. Les indices surmontés d'une barre représenteront des versions des indices utilisés précédemment mais où n'intervient plus a_0 .

Revenons tout d'abord sur les deux premiers moments, utilisés dans notre approximation, du quotient $\frac{A_t}{L_t}$:

$$\begin{cases} E \left[\frac{A_t}{L_t} \right] = m_1(t, T) = e^{a_0} \left(e^{\bar{\mu}_1(t) + \frac{\sigma_1^2(t)}{2}} + e^{\bar{\mu}_2(t, T) + \frac{\sigma_2^2(t, T)}{2}} \right) \\ E \left[\left(\frac{A_t}{L_t} \right)^2 \right] = m_2(t, T) = e^{2a_0} \left(e^{2\bar{\mu}_1(t) + 2\sigma_1^2(t)} + e^{2\bar{\mu}_2(t, T) + 2\sigma_2^2(t, T)} \right. \\ \left. + 2e^{\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t, T) + 2\rho^f(t, T)\sigma_1(t)\sigma_2(t, T))} \right) \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{\mu}_1(t) = \left(\mu_S - \mu_L - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \ln(\alpha) \\ \bar{\mu}_2(t, T) = -B(t, T)r_0 e^{-\kappa t} - B(t, T)\theta(1 - e^{-\kappa t}) - \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) t + \ln \left((1 - \alpha) \frac{A(t, T)}{PZC(0, T)} \right) \\ \sigma_1(t) = \sqrt{(\sigma_S^2 + \sigma_L^2)t} \\ \sigma_2(t, T) = \sqrt{\sigma_L^2 t + \frac{B(t, T)^2 \eta^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})} \\ \text{Correl}(\ln(LN(\mu_1, \sigma_1^2)), \ln(LN(\mu_2, \sigma_2^2))) = \rho^f(t, T) = \frac{-\frac{\eta\rho\sigma_S}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})B(t, T) + \sigma_L^2 t}{\sigma_1(t)\sigma_2(t, T)} \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} E \left[\frac{A_t}{L_t} \right] = e^{a_0} \bar{m}_1(t, T) \\ E \left[\left(\frac{A_t}{L_t} \right)^2 \right] = e^{2a_0} \bar{m}_2(t, T) \end{cases}$$

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{m}_1(t, T) = \frac{m_1(t, T)}{e^{a_0}} = e^{\bar{\mu}_1(t) + \frac{\sigma_1^2(t)}{2}} + e^{\bar{\mu}_2(t, T) + \frac{\sigma_2^2(t, T)}{2}} \\ \bar{m}_2(t, T) = \frac{m_2(t, T)}{e^{2a_0}} = \frac{e^{2\bar{\mu}_1(t) + 2\sigma_1^2(t)} + e^{2\bar{\mu}_2(t, T) + 2\sigma_2^2(t, T)}}{+ 2e^{\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t, T) + 2\rho^f(t, T)\sigma_1(t)\sigma_2(t, T))}} \end{array} \right.$$

Les deux paramètres $\mu_X(t, T)$ et $\sigma_X^2(t, T)$ de notre approximation log-normale X_t deviennent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_X(t, T) = a_0 + 2 \ln(\bar{m}_1(t, T)) - \frac{1}{2} \ln(\bar{m}_2(t, T)) \\ \quad = a_0 + \bar{\mu}_X(t, T) \\ \text{avec } \bar{\mu}_X(t, T) = 2 \ln(\bar{m}_1(t, T)) - \frac{1}{2} \ln(\bar{m}_2(t, T)) \\ \sigma_X^2(t, T) = \ln(\bar{m}_2(t, T)) - 2 \ln(\bar{m}_1(t, T)) \end{array} \right.$$

On voit déjà que a_0 n'intervient pas dans l'expression de $\sigma_X(t, T)$. De plus, d'après nos formules, on observe que a_0 n'intervient pas dans les expressions des $c_{i,j}(s, t)$ ($\{i, j\} \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$ et $s < t$).

Pour finir on obtient :

$$\begin{aligned} \text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] &= e^{2a_0} \left(e^{\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_1(s) + \frac{(\sigma_1^2(t) + \sigma_1^2(s))}{2}} (e^{c_{1,1}(t,s)} - 1) \right. \\ &\quad + e^{\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(s, T) + \frac{(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(s, T))}{2}} (e^{c_{1,2}(t,s)} - 1) \\ &\quad + e^{\bar{\mu}_2(t, T) + \bar{\mu}_1(s) + \frac{(\sigma_2^2(t, T) + \sigma_1^2(s))}{2}} (e^{c_{2,1}(t,s)} - 1) \\ &\quad \left. + e^{\bar{\mu}_2(t, T) + \bar{\mu}_2(s, T) + \frac{(\sigma_2^2(t, T) + \sigma_2^2(s, T))}{2}} (e^{c_{2,2}(t,s)} - 1) \right) \end{aligned}$$

On note par la suite $\overline{\text{CoVar}} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] = \frac{\text{CoVar} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right]}{e^{2a_0}}$.

L'auto-covariance du processus X_t avec les notations utilisées ci-dessus est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \text{CoVar} [X_t; X_s] &= \\ e^{2a_0} &\left(e^{\bar{\mu}_X(t, T) + \bar{\mu}_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T) + 2\sigma_X(t, T)\sigma_X(s, T)\rho_X(t, s))}{2}} - e^{\bar{\mu}_X(t, T) + \bar{\mu}_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T))}{2}} \right) \end{aligned}$$

On obtient donc la formule suivante pour $\rho_X(t, s)$:

$$\rho_X(t, s) = \frac{\left(\ln \left(\overline{\text{CoVar}} \left[\frac{A_t}{L_t}; \frac{A_s}{L_s} \right] + e^{\bar{\mu}_X(t, T) + \bar{\mu}_X(s, T) + \frac{(\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T))}{2}} \right) - (\bar{\mu}_X(t, T) + \bar{\mu}_X(s, T)) \right) - \frac{\sigma_X^2(t, T) + \sigma_X^2(s, T)}{2}}{\sigma_X(t, T)\sigma_X(s, T)}$$

a_0 n'intervient pas dans cette formule.

Cette observation est finalement généralisable dans les autres cas étudiés.

d. Amélioration de l'algorithme précédent

On a montré dans le paragraphe précédent que le calcul de $\rho_X(t, s)$ ne dépend pas de a_0 .

Il est donc possible d'améliorer l'algorithme de cette manière :

- 1) On calcule Σ la matrice d'auto-covariance du processus
- 2) Initialisation : on intègre $a_{0,min}$ et $a_{0,max}$ les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle sur lequel on recherche le montant de fonds propres à conserver, ainsi que Σ
- 3) On calcule la probabilité de ruine pour le montant $a_{0,test}$ qui est au milieu de l'intervalle, en utilisant la matrice calculée précédemment
- 4) Si l'écart entre le seuil fixé et la probabilité calculée est supérieur à 0,00001, on renvoie $a_{0,test}$; sinon :
 - Si la probabilité calculée est supérieure au seuil fixé, on relance l'algorithme sur l'intervalle $[a_{0,test}; a_{0,max}]$
 - Sinon, on relance l'algorithme sur l'intervalle $[a_{0,min}; a_{0,test}]$

Il suffit bien de ne calculer qu'une seule fois la matrice d'auto-covariance du processus, ce qui rend l'algorithme de calcul des fonds propres bien plus efficient que la première version naïve.

B) Résultats et analyse

L'implémentation de notre algorithme nous permet d'appliquer nos calculs théoriques et d'étudier l'efficacité de la méthode utilisant Genz-Bretz. Nous présentons dans cette partie les différents résultats obtenus pour chaque type de spécification du processus actif.

a. Résultats dans le cas B&S

Nous avons cherché à comparer les valeurs obtenues pour le montant de fonds propres (rapport $\frac{A_0}{L_0}$) entre les trois différentes méthodes (étude des fonds propres dans un an, calcul exact, et approximation) pour différentes valeurs de N .

L'utilisation de l'algorithme de Genz-Bretz qui utilise une méthode alternative d'estimation par Monte-Carlo, ce qui explique l'instabilité des solutions observées pour N grand. Cependant, la vitesse d'exécution de l'algorithme fait que son utilisation est bien plus recommandée que celle d'algorithmes déterministes. De plus, l'algorithme de Genz-Bretz est beaucoup moins instable qu'une méthode de Monte-Carlo standard (voir partie V).

i. Analyse des résultats

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\mu_S = 0,08 ; \mu_L = 0,04$$

$$\sigma_S = 20\% ; \sigma_L = 5\%$$

Nous avons utilisé notre algorithme pour obtenir la valeur de la variable FP_0 , la valeur nécessaire des fonds propres en 0 sous contrainte d'une probabilité de ruine estimée à horizon 1 an de 0,5%. Cette procédure a été effectuée pour un nombre de pas allant de 1 (vision « dans un an ») à 250 (tous les jours ouvrés sur un an). De plus, connaissant la vraie valeur des fonds propres en temps continu pour ces modèles simples, nous pouvons comparer les résultats obtenus et étudier l'efficacité de notre approximation discrète.

Les résultats obtenus sont suivants rassemblés dans le graphe suivant :

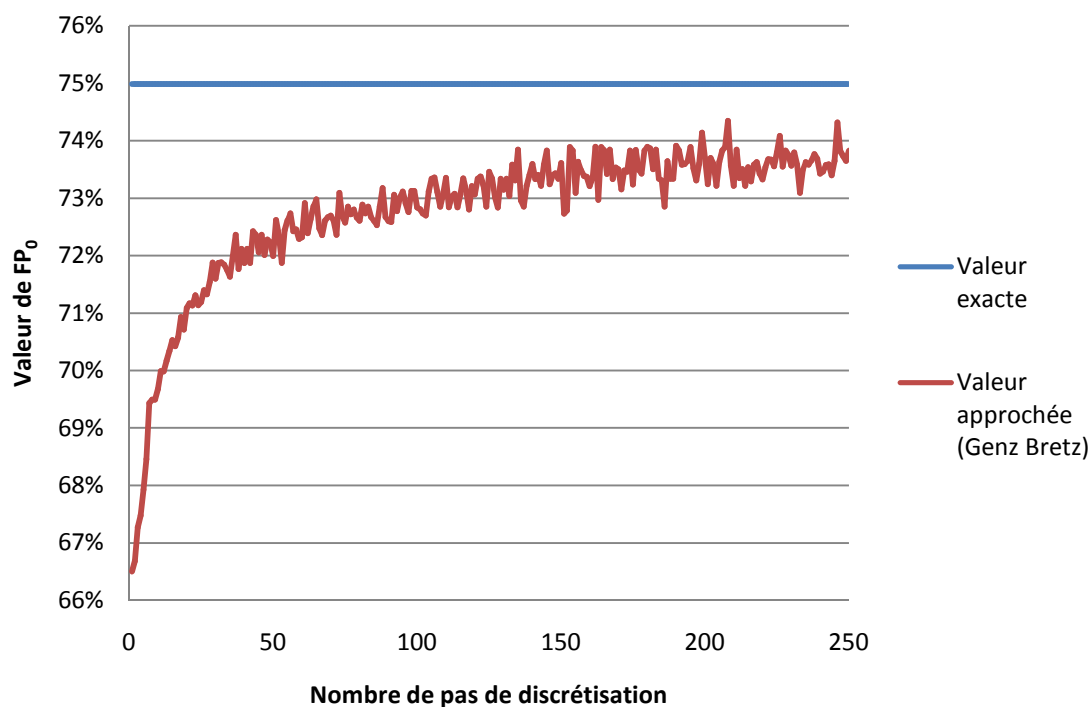


Figure 6 : Convergence de FP_0 vers la valeur obtenue en temps continu – cas Black-Scholes

Pour rappel, il est aisé d'obtenir la valeur de FP_0 à partir de la valeur de a_0 obtenue, en passant par la formule :

$$FP_0 = (exp^{a_0} - 1)L_0$$

Soit en assimilant FP_0 à sa valeur en pourcentage du passif : $FP_0 = exp^{a_0} - 1$

On obtient alors la valeur des fonds propres à provisionner en pourcentage de la valeur de passif initiale.

On constate que l'utilisation de l'approximation en temps discret permet d'améliorer sensiblement les résultats obtenus par rapport à ceux obtenus avec un tir direct à un an (qui correspond à un nombre de pas de discrétisation de 1).

Les écarts relatifs observés ci-après sont obtenus en comparant la vraie valeur de FP_0 aux valeurs obtenus par notre algorithme en fonction du nombre de pas.

Tableau 3 : Etude de la convergence de FP_0 vers la valeur obtenue en temps continu – cas Black-Scholes

Pas	Valeur obtenue par notre algorithme (Genz-Brenz)	Ecart relatif à la valeur exacte (temps continu)
1	66,50%	11,31%
25	71,20%	5,06%
50	72,00%	3,99%
75	72,58%	3,22%
100	72,84%	2,87%
125	73,46%	2,03%
150	73,61%	1,84%
175	73,24%	2,33%
200	73,71%	1,71%
225	73,80%	1,59%
250	73,83%	1,55%

On observe effectivement un rapprochement des résultats à la valeur en temps continu. Toutefois, on peut voir une certaine instabilité pour des pas élevés (> 100), liée à la partie Monte-Carlo de l'algorithme de Genz Bretz.

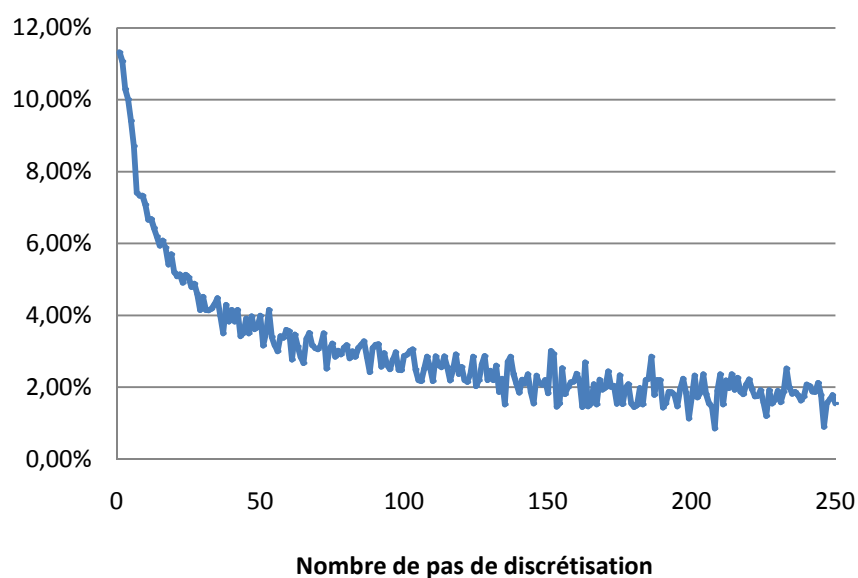


Figure 7 : Ecart relatif à la valeur obtenue en temps continu – cas Black-Scholes

La valeur obtenue semble bien converger vers la valeur exacte de la probabilité de défaut, quoique plus lentement à partir d'un pas de 50.

Afin de vérifier notre algorithme et de quantifier les écarts relatifs entre valeur approchée et nombre de pas de la discrétisation, lorsque ce nombre tend vers l'infini, nous avons lancé notre algorithme pour un pas de 1000. Les résultats obtenus sont les suivants, donnés en pourcentage du passif en 0 :

Valeur approchée par la discrétisation : 74,81%

Valeur exacte du montant de fonds propres : 74,99%

Ce résultat est rassurant puisque la forme de la courbe obtenue pouvait faire penser qu'il existait un biais incompressible entre les résultats de notre algorithme et la valeur réelle, ce biais pouvant être expliqué soit par les approximations inhérentes à l'algorithme d'évaluation de la loi normale multivariée, soit par le passage du temps discret au temps continu.

Or on observe bien que, lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, ce biais semble disparaître : pour un nombre de pas de discrétisation égal à 1000 (le maximum autorisé pour l'implémentation de l'algorithme de Genz-Bretz sous R), on obtient un écart-relatif qui n'est plus que de 0,2%.

Il est cependant nécessaire de rappeler que le cas d'un actif Black-Scholes pur, utilisé comme benchmark dans notre étude, n'est aucunement réaliste. Le chiffre irréaliste de 75% de fonds propres nécessaires en est la démonstration. Nous verrons que les résultats dans le cadre d'un actif zéro-coupon et du portefeuille mixte sont beaucoup plus réalistes.

ii. Etude de complexité et temps de calcul

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur standard, muni d'un processeur i7 920 QM, avec 4 Go de RAM.

Concernant les temps d'exécution des différentes parties de l'algorithme on obtient les résultats suivants :

Tableau 4 : Vitesse d'exécution du programme – cas Black-Scholes

Pas	Temps exécution machine (matrice)	Temps exécution machine (autres fonctions)	Temps total machine	FP₀
10	0,18 s	0,62 s	0,8 s	69,68%
25	1,26 s	2,28 s	3,54 s	71,20%
50	5,22 s	5,42 s	10,64 s	72,00%
100	20,46 s	11,34 s	31,8 s	72,84%
150	46,32 s	20,08 s	66,4 s	73,61%
200	81,48 s	20,1 s	101,58 s	73,71%
250	128,14 s	55,32 s	183,46 s	73,83%
300	186,84 s	32,14 s	218,98 s	73,62%
350	250,66 s	69,14 s	319,8 s	73,75%
400	326,74 s	47,94 s	374,68 s	74,14%

On constate que l'essentiel du temps de calcul provient du calcul de la matrice, pour des pas élevés ; par ailleurs, le temps d'exécution des fonctions autres que celles de la matrice (calcul de μ_X , de σ_X et de l'algorithme de recherche de a_0) s'exécute en temps linéaire en moyenne.

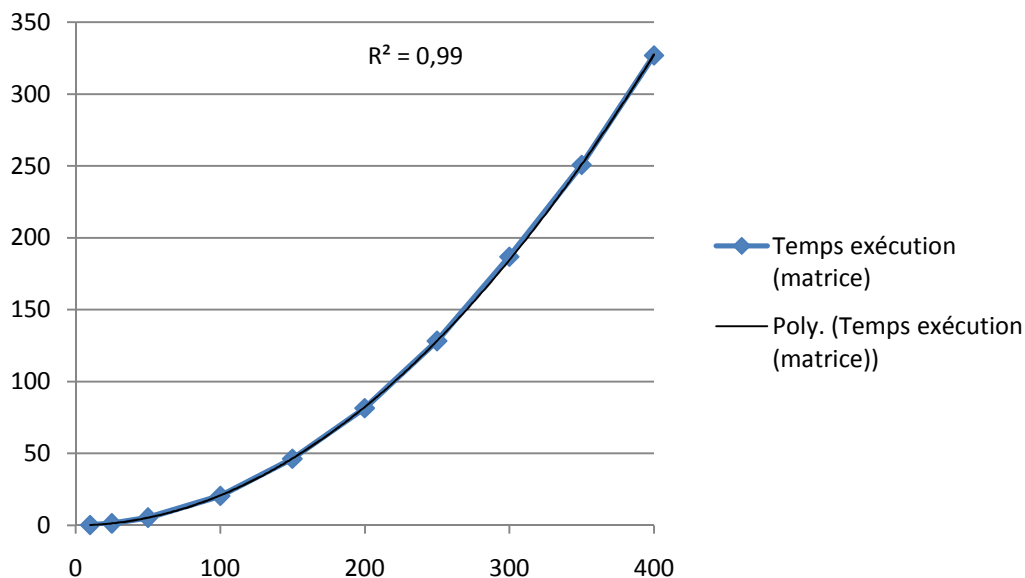


Figure 8 : Temps de construction de la matrice d'auto-covariance – cas Black-Scholes

On remarque ici que le temps nécessaire à la construction de la matrice de variance est parfaitement prévisible en fonction du nombre de pas de discrétisation choisi, ce qui est tout à fait cohérent puisqu'il n'y a aucune source d'aléas lors de cette étape du calcul.

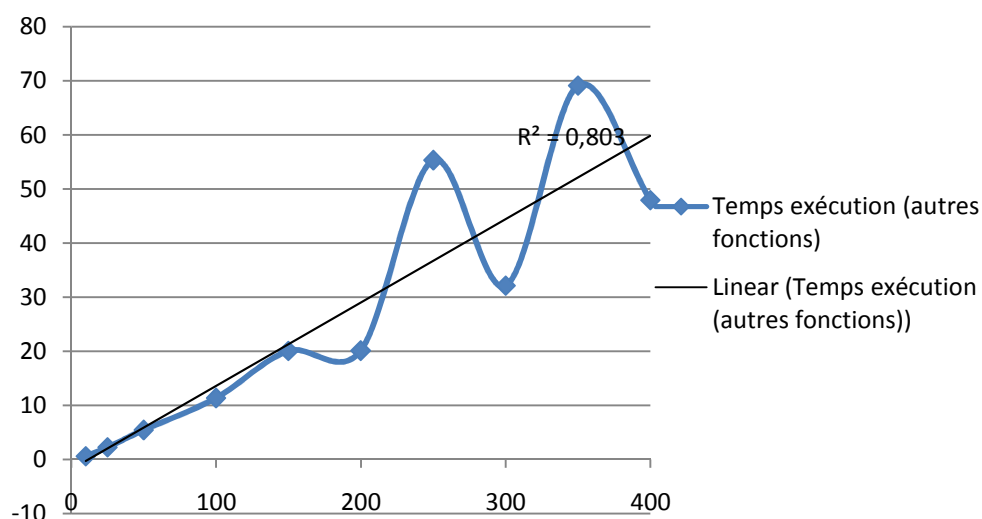


Figure 9 : Temps de calcul, autres fonctions – cas Black-Scholes

En revanche, et cela se vérifie en particulier pour un nombre de pas de discrétisation élevé, le temps de calcul pour les autres fonctions n'est plus prévisible, et semble osciller autour d'une tendance

linéaire. Ce phénomène peut s'expliquer par l'utilisation de l'algorithme de Genz-Bretz pour le calcul de la fonction de répartition multivariée. En effet, la marge d'incertitude autour du résultat obtenu introduit également une incertitude dans le nombre d'étapes nécessaire avant la convergence de l'algorithme de calcul des fonds propres ; quelques itérations en plus ou en moins expliquent la variation autour de la tendance. Par ailleurs, on remarque que le montant de fonds propres obtenus, dès l'utilisation de 50 pas de discrétisation, améliore fortement la valorisation directe (un seul pas). De plus, les valeurs obtenues avec l'algorithme sont sensiblement les mêmes lorsqu'on a un nombre de pas supérieur à 150.

b. Résultat dans le cadre de l'actif zéro-coupon – modèle de Vasicek

Nous cherchons maintenant à comparer les valeurs obtenues par notre algorithme dans le cas d'un portefeuille uniquement composé d'obligations zéro-coupons. Ici encore, nous utiliserons l'algorithme de Genz-Bretz.

Toutefois, contrairement au cas de l'actif Black-Scholes, nous ne disposons pas de la valeur des fonds propres nécessaires pour une probabilité de ruine de 0,5% à horizon 1 an, c'est-à-dire en restant sur une étude en temps continu. Nous utiliserons comme référence la valeur obtenue pour $N = 1000$ pas de discrétisations, dont on a vu qu'elle était proche de la valeur exacte (sans discrétisation) dans le cadre de Black-Scholes.

i. Analyse des résultats

Les paramètres utilisés sont les suivants :

$$\sigma_L = 5\% ; \mu_L = 0,04$$

$$\eta = 1\% ; r_0 = 3\%$$

$$\kappa = 0,031 ; \theta = 4\%$$

$$T = 5 \text{ ans}$$

Pour un lancé sur 1000 pas de discrétisation, nous obtenons une valeur de référence de :

$$FP_{0,ref} = 20,135\%$$

Ce résultat a été obtenu avec les données suivantes quant au temps de calcul :

Temps exécution machine (matrice auto-covariance)	Temps exécution machine (autres fonctions)	Temps total machine
3378,39 s	1059,61 s	4438,0 s

De la même manière que précédemment, nous avons lancé notre algorithme pour un nombre de pas allant de 1 à 250, de 5 en 5 afin de limiter le temps de calcul global. En effet le calcul de la matrice d'auto-covariance est beaucoup plus long, car plus complexe, que dans le cadre précédent. De plus, nous comparons les résultats obtenus à la valeur de référence afin d'étudier l'efficacité de notre approximation discrète.

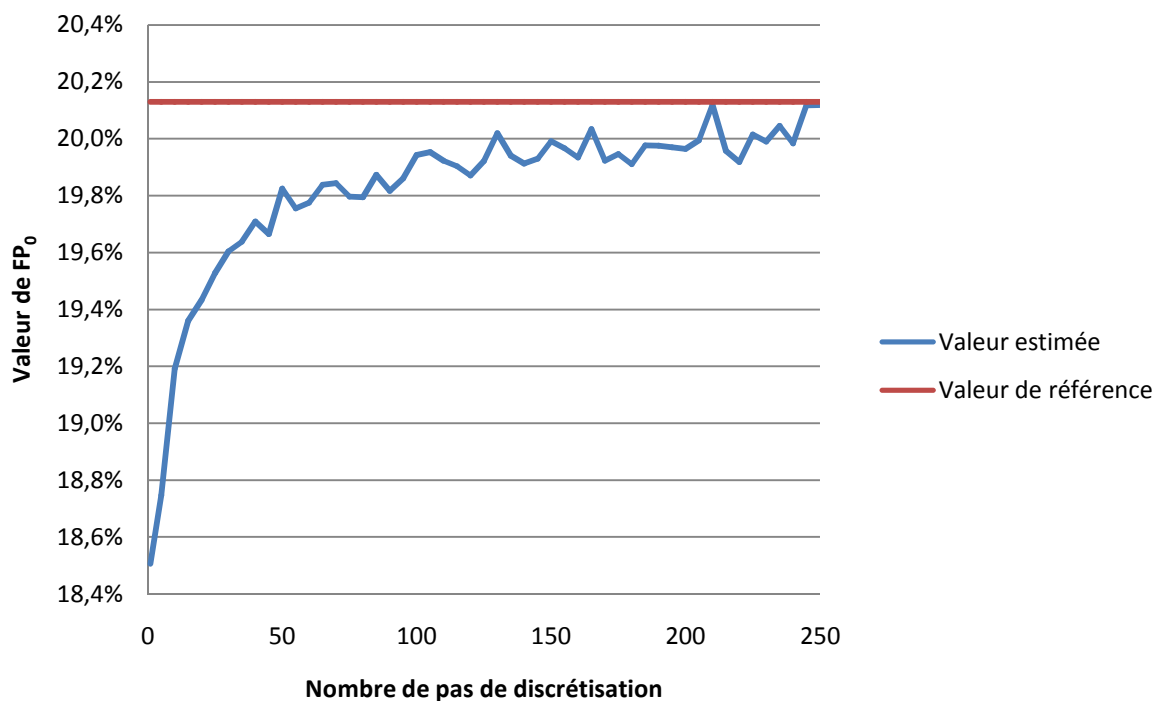


Figure 10 : Convergence de FP_0 – cas Vasicek

On constate que l'algorithme converge plus rapidement vers la valeur de référence, ce qui peut s'expliquer par la moins grande volatilité du zéro-coupon.

Ci-dessous l'évolution des écarts relatifs à la valeur réelle dans le cas du Vasicek et du Black-Scholes :

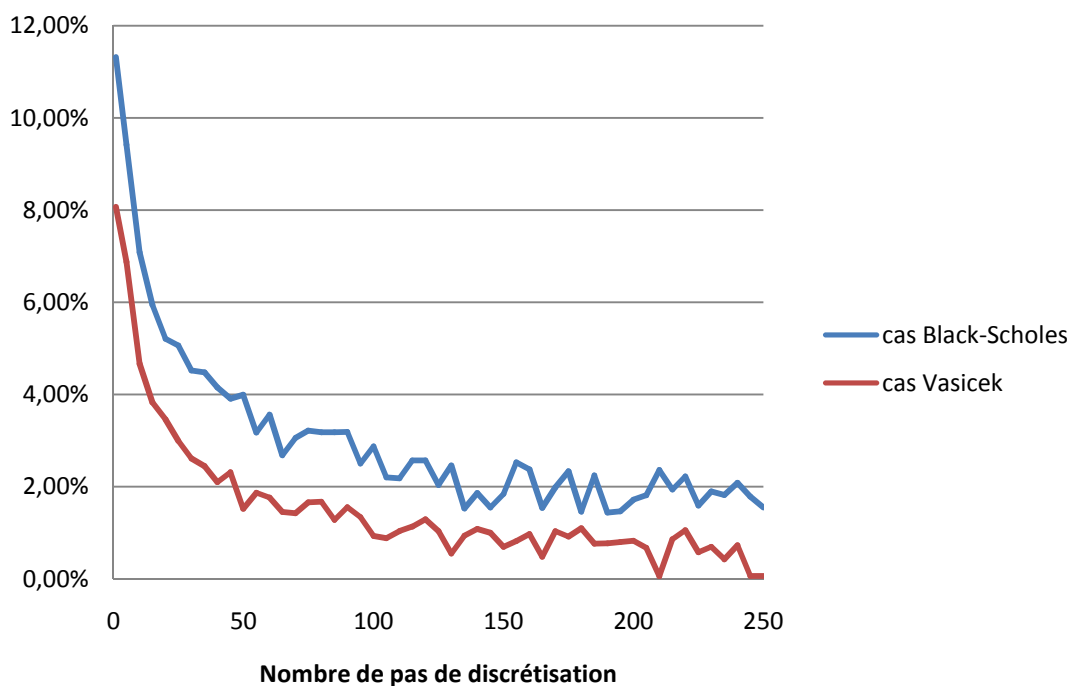


Figure 11 : Comparaison des vitesses de convergence Black-Scholes vs Vasicek

ii. Etude de complexité et temps de calcul

Du point de vue de la rapidité de convergence on observe toujours une complexité quadratique pour le calcul de la matrice d'auto-covariance, et une tendance linéaire pour les autres fonctions de l'algorithme avec des oscillations à proximité d'une droite. Les graphes représentant l'évolution du temps de calcul par étape sont les suivants :

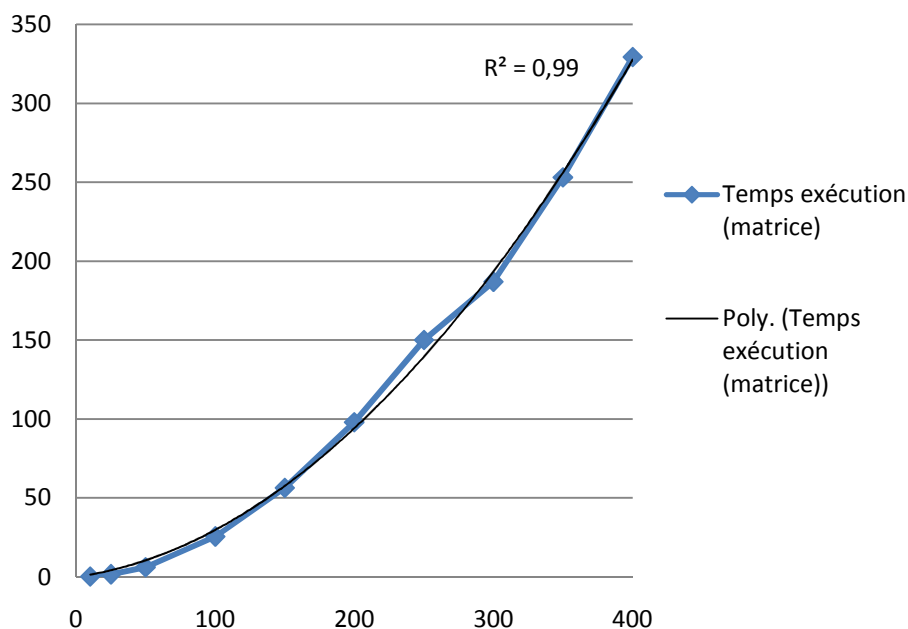


Figure 12 : Temps de construction de la matrice d'auto-covariance – cas Vasicek

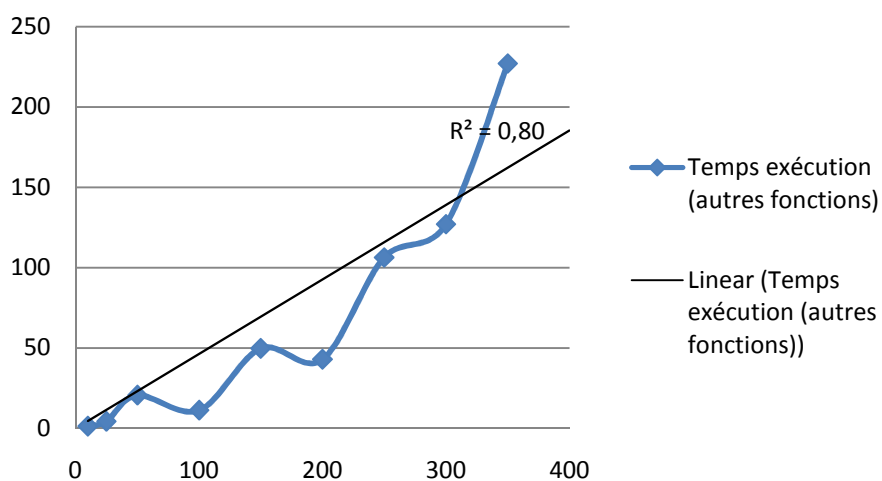


Figure 13 : Temps de calcul, autres fonctions – cas Vasicek

Le point équivalent à un pas de 400 n'a pas été inclus dans le graphique du temps d'exécution des autres fonctions de l'algorithme car il présente un vrai décrochement.

On peut voir cet effet dans le tableau suivant :

Tableau 5 : Vitesse d'exécution du programme – cas Vasicek

Pas	Temps exécution machine (matrice)	Temps exécution machine (autres fonctions)	Temps total machine	FP ₀
10	0,24 s	1,32 s	1,56 s	19,19%
25	1,51 s	4,32 s	5,83 s	19,53%
50	6,13 s	20,64 s	26,77 s	19,82%
100	25,45 s	11,33 s	36,78 s	19,94%
150	56,37 s	49,73 s	106,1 s	19,99%
200	97,97 s	42,96 s	140,93 s	19,96%
250	150,15 s	106,31 s	256,46 s	20,13%
300	186,95 s	127,07 s	314,02 s	20,08%
350	253,20 s	227,03 s	480,23 s	20,09%
400	329,45 s	604,11 s	933,56 s	20,14%

Comme on peut le voir, le calcul matriciel prend en moyenne 25% de temps en plus que dans le cas du Black-Scholes et les autres fonctions (calculs intermédiaires et sous-algorithme d'optimisation intégrant le Genz-Bretz) nécessitent 2 fois plus de temps, avec même une valeur aberrante pour un nombre de pas de 400.

Pour la matrice ces résultats sont compréhensibles puisque la fonction d'auto-covariance et les sous-fonctions qu'elle met en œuvre sont plus complexes, et nécessitent donc plus de calculs. Cependant pour les autres fonctions, il est difficile de donner une explication. Il est possible que la forme particulière de la matrice demande plus de calculs à l'algorithme de Genz-Bretz.

Globalement le temps de calcul reste dans des limites raisonnables, ne dépassant pas 5 minutes pour un nombre de pas inférieur à 250. De plus on observe une excellente stabilité des résultats à partir de 250 pas, encore une fois grâce à la faible volatilité du processus actif étudié.

c. Résultat dans le cadre du portefeuille mixte

Les deux cas considérés jusqu'à maintenant représentent des cas extrêmes pour un portefeuille de couverture. En effet un portefeuille constitué intégralement d'actions ne serait absolument pas réaliste car il serait trop risqué et un portefeuille constitué uniquement de produits de taux, même s'il est beaucoup moins risqué, ne permet pas d'obtenir un rendement suffisant pour satisfaire les assurés.

Nous cherchons donc maintenant à étudier le cas d'un portefeuille mixte incluant 20% d'actifs de type actions (Black-Scholes) et 80% de zéro-coupons de maturité T (Vasicek). Dans ce cadre, nous utilisons donc l'approximation de Fenton-Wilkinson afin d'obtenir les valeurs initiales des fonds propres nécessaires pour garantir une probabilité de ruine de 0,5% à horizon 1 an avec un nombre de pas de discrétisation allant de 1 à 250.

Nous avons mis le code utilisé pour le portefeuille mixte à disposition du lecteur (cf. Annexe 1).

i. Analyse des résultats

Les spécifications des modèles utilisés sont les suivantes :

$$\sigma_L = 5\% ; \mu_L = 0,04 ; \mu_S = 0,08 ; \sigma_S = 20\%$$

$$\eta = 1\% ; r_0 = 3\% ; \kappa = 0,031 ; \theta = 4\%$$

$$T = 5 \text{ ans} ; \rho = -20\%$$

Ici encore nous ne disposons pas de la valeur exacte du montant de fonds propres. Nous utiliserons donc comme référence la valeur obtenue en lançant l'algorithme avec 1000 pas de discrétisation :

$$FP_{0,ref} = 23,38\%$$

Temps exécution machine (matrice auto-covariance)	Temps exécution machine (autres fonctions)	Temps total machine
2663,94 s	2390,69 s	5054,63 s

Il est nécessaire de garder à l'esprit que les valeurs obtenues pour ce portefeuille ont nécessité l'utilisation d'une approximation de la loi du processus $\frac{A_t}{L_t}$. Les valeurs obtenues étant liées à des calculs de quantile élevés sur cette loi, nous ne pouvons être certains de la valeur que nous prenons comme référence, qui est très probablement biaisée. Les études relatives à cette approximation nous laissent penser que la valeur de référence est plus élevée que la valeur réelle puisque l'utilisation de Fenton-Wilkinson tend à surévaluer les volatilités, donc la volatilité du processus considéré. Le processus étant plus risqué, il serait normal d'obtenir des valeurs supérieures pour le montant de fonds propres nécessaires. Nous comparerons les résultats à ceux obtenus par un algorithme exact dans la partie V.

Les résultats obtenus sont présentés dans le graphe suivant. Ils sont donnés par incrément de 5 car les calculs sont plus longs (matrice des auto-covariances en particulier) que dans les cas précédents.

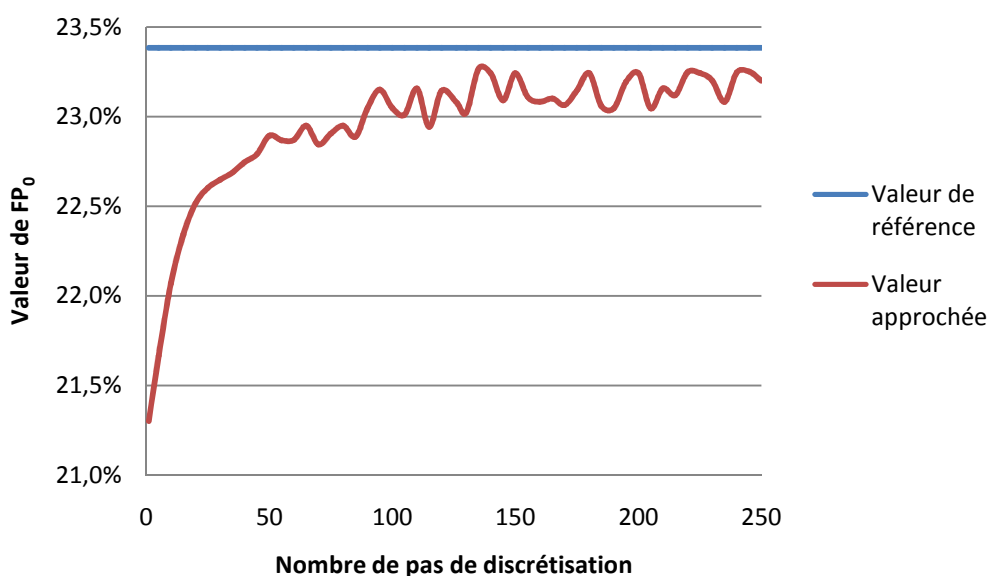


Figure 14 : Convergence de FP_0 – cas du portefeuille mixte, $\alpha=20\%$

Comme dans les cas précédents, on observe bien une tendance à s'approcher de la valeur de référence, et on a toujours une volatilité de l'estimateur obtenu par Genz-Bretz à partir de 50 pas. En termes d'écart relatif à la valeur de référence, on obtient des résultats intermédiaires entre les bons résultats du Vasicek et les moins bons du Black-Scholes (cf. Annexe 2). Cette observation permet une nouvelle fois de supposer que l'algorithme tend à s'approcher plus rapidement de la valeur de référence lorsque la volatilité du processus étudié est plus faible.

ii. Temps de calcul

Au niveau des temps de calcul, nous obtenons les résultats suivants :

Tableau 6 : Vitesse d'exécution du programme – cas du portefeuille mixte, $\alpha=20\%$

Pas	Temps exécution machine (matrice d'auto-covariance)	Temps exécution machine (autres fonctions)	Temps total machine	FP ₀
10	0,24 s	0,47 s	0,71 s	22,07%
25	1,61 s	2,96 s	4,57 s	22,60%
50	6,55 s	4,57 s	11,12 s	22,89%
100	29,2 s	15,56 s	44,76 s	23,05%
150	75,89 s	70,65 s	146,54 s	23,24%
200	137,96 s	48,27 s	186,23 s	23,24%
250	212,69 s	52,48 s	265,17 s	23,20%
300	346,45 s	221,55 s	568,0 s	23,24%
350	554,49 s	506,8 s	1061,29 s	23,05%
400	698,11 s	100,16 s	798,27 s	23,30%

Une fois encore, l'évolution du temps de calcul pour la matrice d'auto-covariance est quadratique avec un R^2 supérieur à 99%. En comparaison, le temps d'exécution pour les autres fonctions est quasi-linéaire avec des pics de complexité comme pour un nombre de pas de 300 ou 350 (cf. graphe en Annexe 3).

iii. Utilisation afin de déterminer un portefeuille optimal

Outre la rapidité relative de notre estimation des fonds propres nécessaires pour protéger l'entreprise contre la ruine à un niveau de confiance donné, l'intérêt de cette méthodologie est aussi de permettre un choix optimal dans la constitution du portefeuille (paramètre α). En termes de gestion Actif-Passif, il s'agit de maximiser une rentabilité espérée du processus $\frac{A_t}{L_t}$ en minimisant le montant de fonds propres nécessaires, tout en respectant les contraintes d'appétence au risque de l'entreprise d'assurance.

Dans le graphe suivant nous comparons les courbes obtenues pour le rendement de $\frac{A_t}{L_t}$ ainsi que la courbe de la valeur de FP_0 en fonction du paramètre α :

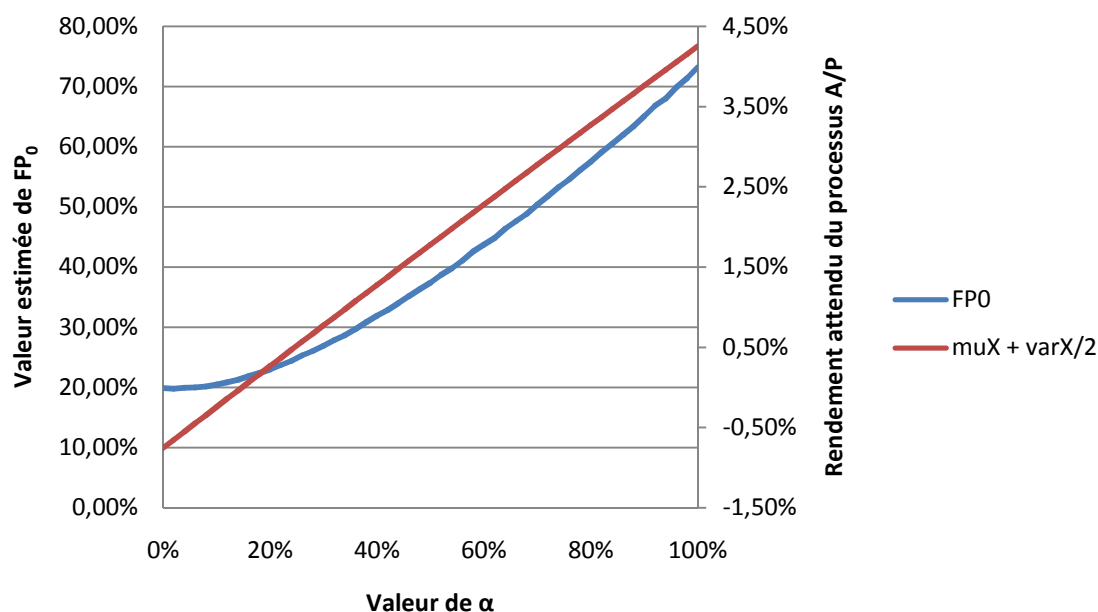


Figure 15 : Comparaison des rendements du processus $\frac{A_t}{L_t}$ et de la valeur de FP_0 trouvée, en fonction de α

Tout d'abord on remarque que le rendement du processus $\frac{A_t}{L_t}$ est négatif pour des valeurs de α inférieures à 17%. Cela indique que le rendement annuel du zéro-coupon ne suffit pas à compenser l'augmentation de la valeur du passif au cours de l'année, ce qui conduit à une diminution du rapport $\frac{A_t}{L_t}$. Autrement dit, cela signifie qu'on peut trouver un montant de fonds propres à allouer à un portefeuille de passifs couvert uniquement par des produits de taux, mais que ceci se fera, en moyenne, à perte pour l'assureur (le processus $\frac{A_t}{L_t}$ décroît alors au cours de l'année).

Par ailleurs, nous pouvons observer un réel effet de diversification pour des petites valeurs de α ($\alpha < 5\%$). En effet, le montant de fonds propres nécessaire est tout d'abord décroissant malgré l'ajout d'une partie plus volatile (Black-Scholes) à la partie constituée uniquement de zéro-coupons (qui correspond au cas $\alpha = 0\%$).

Cet effet vient du fait que les mouvements Browniens des deux parties du processus actif sont imparfaitement corrélés, ce qui crée un effet de compensation entre les trajectoires Black-Scholes et Vasicek : les variations à la baisse de l'actif action peuvent être compensées par des variations à la hausse de l'actif taux et réciproquement.

De manière générale, augmenter la proportion α d'actifs de type action augmente l'espérance de rendement, mais aussi le besoin en fonds propres réglementaires, une fois que l'effet de diversification n'agit plus. Cette observation est cohérente avec le fait que, traditionnellement, les actions sont plus rentables mais également plus risquées que les produits de taux ; on a un exemple

des problématiques de la gestion ALM d'un portefeuille, avec la question de l'arbitrage entre rendement et immobilisation de fonds propres.

L'objectif pour une firme est de couvrir les évolutions du portefeuille de passifs par celles du portefeuille d'actifs en minimisant les immobilisations de capital ; une stratégie optimale, qui n'entraînerait pas de pertes en capital pour l'assureur, serait donc de choisir le mélange actions/obligations qui lui permet d'avoir une croissance de l'actif égale à celle du passif sur un an. Avec les paramètres que nous avons donnés en exemple, une allocation $\alpha = 17\%$ permet d'obtenir une croissance de l'actif en moyenne égale à celle du passif, et minimise l'allocation de fonds propres au portefeuille.

Une autre stratégie possible serait de choisir la valeur de α nécessitant un minimum de fonds propres ($\alpha = 2,5\%$) ou un montant de fonds propres égal au montant de fonds propres requis dans le cas d'un portefeuille de couverture intégralement composé de zéro-coupons ($\alpha = 4,5\%$ ici).

IV. Etude empirique : Comparaison avec un « algorithme exact »

Dans cette partie, nous avons cherché à obtenir les valeurs des fonds propres à provisionner pour les différents modèles, en fonction des paramètres choisis, en utilisant une méthode de Monte-Carlo standard.

En effet cette méthode est utilisée de manière récurrente tant dans la littérature qu'en pratique et sa convergence est garantie par la Loi des Grands Nombres. L'objectif est donc double : nous pourrons utiliser les résultats obtenus en valeur et en temps de calcul pour les comparer aux nôtres, mais aussi comparer les performances de cette méthode « exacte » avec celles de la méthode alternative que nous proposons, mettant en œuvre l'algorithme de Genz-Bretz.

A) Cas d'un actif de type Black-Scholes

L'algorithme de Monte-Carlo s'effectue en plusieurs étapes :

- Simulations des différents Browniens (avec utilisation éventuelle d'une méthode de réduction de variance)
- Simulation du processus actif et du processus passif entre 0 et 1 avec un pas de discrétisation fixé à l'avance
- Évaluation du nombre de cas de ruine sur tous les scénarios générés (il y a ruine si à un moment entre 0 et 1, le processus actif / passif devient inférieur à 1)
- Détermination de la valeur de A_0 pour que la probabilité de ruine empirique $\left(\frac{\text{Nb cas de ruine}}{\text{Nb simulations}}\right)$ soit égale à 0.5%.

Dans la suite nous retraçons les différentes étapes réalisées pour chaque simulation. Le principe de l'algorithme de Monte-Carlo est de simuler un grand nombre de trajectoires et donc de répéter ce processus un grand nombre de fois, la précision des estimateurs obtenus (en particulier celui de la probabilité de ruine empirique) s'améliorant lorsque le nombre de trajectoires générées augmente.

a. Simulation des différents Browniens

i. Simulation par pont Brownien

Soit W_t un des mouvements Browniens.

La simulation par pont Brownien utilise les 3 étapes suivantes :

- On prend tout d'abord une suite $\left(U_{\frac{i}{N}} \right)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$ de réalisations de lois gaussiennes centrées réduites, indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.).
- On pose $W_0 = 0, W_1 = U_1$
- Puis on obtient récursivement $W_{\frac{i}{N}}$ pour $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ et N le nombre de pas entre 0 et 1 choisi, par la formule : $W_{\frac{i}{N}} = \frac{1}{N} W_0 + \frac{i-1}{N} W_{\frac{i+1}{N}} + \sqrt{\frac{1}{N} \times \frac{i-1}{N}} U_{\frac{i}{N}}$

La construction de trajectoires de Browniens en utilisant cette méthode [9] conserve les corrélations entre les suites de gaussiennes utilisées. Ainsi, si l'on corrèle les deux suites $\left(U_{\frac{i}{N}}^{Actif} \right)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$ et $\left(U_{\frac{i}{N}}^{Passif} \right)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$, les deux mouvements Browniens obtenus seront également corrélés à hauteur du coefficient de corrélation utilisé. Dans les cas étudiés, comme dans nos études précédentes, nous ne considérerons pas de corrélation entre le processus actif et le processus passif.

ii. Utilisation d'une méthode de réduction de variance

Il est possible d'améliorer la vitesse de convergence des estimateurs de Monte-Carlo en utilisant une méthode de réduction de variance telle que la méthode des variables antithétiques ou des méthodes de simulations pseudo-aléatoires utilisant des suites à discrétion faible comme la suite de Sobol.

Nous avons choisi d'utiliser la méthode des variables antithétiques. Cette méthode consiste, dans notre cas, à utiliser un jeu de Browniens simulés pour la première moitié des scénarios générés, puis son opposé pour la seconde moitié, en utilisant le fait que l'opposé d'un Brownien est toujours un Brownien.

Considérons l'estimateur de Monte-Carlo suivant, obtenu à partir de réalisations d'une fonction h des valeurs prise par un Brownien $W_{.,t}$ à pas réguliers entre 0 et 1 (comme dans notre étude) :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{NbSimu} \sum_{j=1}^{NbSimu} h \left(W_{j, \frac{1}{N}}; W_{j, \frac{2}{N}}; \dots; W_{j, 1} \right)$$

j est ici l'indice de la simulation considérée.

On recherche ici la valeur de $\mathbb{E} \left[h \left(W_{\frac{1}{N}}; W_{\frac{2}{N}}; \dots; W_1 \right) \right]$.

Or par la Loi des Grands Nombres : $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E} \left[h \left(W_{\frac{1}{N}}; W_{\frac{2}{N}}; \dots; W_1 \right) \right]$.

Et : $\hat{\theta} \xrightarrow[NbSimu \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[h \left(W_{\frac{1}{N}}; W_{\frac{2}{N}}; \dots; W_1 \right) \right]$

$\hat{\theta}$ est un estimateur convergent et sans biais.

En considérant que le nombre de simulations est pair, on étudie les deux estimateurs correspondant aux $\frac{NbSimu}{2}$ premières simulations puis aux $\frac{NbSimu}{2}$ suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_1 = \frac{1}{NbSimu/2} \sum_{j=1}^{NbSimu/2} h(W_{j,\frac{1}{N}}; W_{j,\frac{2}{N}}; \dots; W_{j,1}) \\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{NbSimu/2} \sum_{j=\frac{NbSimu}{2}+1}^{NbSimu} h(W_{j,\frac{1}{N}}; W_{j,\frac{2}{N}}; \dots; W_{j,1}) \\ \hat{\theta} = \frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) \end{array} \right.$$

La variance de $\hat{\theta}$ vérifie :

$$\mathbb{V}[\hat{\theta}] = \frac{\mathbb{V}[\hat{\theta}_1] + \mathbb{V}[\hat{\theta}_2] + 2CoVar[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]}{4}$$

Dans le cas i.i.d. (sans variables antithétiques) on obtient simplement :

$$\mathbb{V}[\hat{\theta}]_{i.i.d.} = \frac{\mathbb{V}[\hat{\theta}_1] + \mathbb{V}[\hat{\theta}_2]}{4}$$

En suivant la méthode des variables antithétiques, on exploite la symétrie de la loi du mouvement Brownien afin de construire la seconde partie de l'échantillon utilisé pour l'estimation. L'intérêt de la méthode est double :

- Il y a deux fois moins de simulations à effectuer qu'en suivant la méthode standard (puisque la seconde partie de l'échantillon correspond à l'opposé de la première) ;
- Si h a de bonnes propriétés permettant d'obtenir une covariance négative entre $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ (typiquement une fonction monotone du type exponentiel).

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}_1 = \frac{1}{\frac{NbSimu}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{NbSimu}{2}} h(W_{j,\frac{1}{N}}; W_{j,\frac{2}{N}}; \dots; W_{j,1}) \\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{\frac{NbSimu}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{NbSimu}{2}} h(-W_{j,\frac{1}{N}}; -W_{j,\frac{2}{N}}; \dots; -W_{j,1}) \end{array} \right.$$

Puis :

$$\mathbb{V}[\hat{\theta}] = \frac{\mathbb{V}[\hat{\theta}_1] + \mathbb{V}[\hat{\theta}_2] + 2CoVar[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]}{4} < \frac{\mathbb{V}[\hat{\theta}_1] + \mathbb{V}[\hat{\theta}_2]}{4} = \mathbb{V}[\hat{\theta}]_{i.i.d.}$$

Et toujours :

$$\mathbb{E}[\widehat{\theta}_1] = \mathbb{E}[\widehat{\theta}_2] = \mathbb{E}[\widehat{\theta}] = \mathbb{E}\left[h\left(W_{\frac{1}{N}}; W_{\frac{2}{N}}; \dots; W_1\right)\right]$$

On obtient ainsi un estimateur $\widehat{\theta}$ moins couteux en temps de calcul, avec une variance inférieure ; l'amélioration de la variance dépend cependant de la fonction h utilisée.

Cette méthode est très utilisée en finance dans le cadre d'une valorisation par Monte-Carlo de dérivés sur sous-jacents de type action simulés par génération de Browniens géométriques. Dans un tel cas, la monotonie de la fonction exponentielle garantit la covariance négative.

Pour l'évaluation d'un prix de Call de strike K et maturité T , sur le sous-jacent S , dépendant de la valeur d'un Brownien W_t , on obtient un estimateur du type :

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (S(W_{j,T}) - K)^+$$

Le sous-jacent étant considéré suivre la loi d'un Brownien géométrique on a bien :

$$\text{CoVar} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (S(W_{j,T}) - K)^+, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (S(-W_{j,T}) - K)^+ \right] < 0$$

Dans notre étude, nous estimerons un quantile et notre estimateur aura donc une forme différente du $\widehat{\theta}$ (ce ne sera pas une moyenne...), cependant cette méthode est proposée dans plusieurs articles [10] comme une amélioration des simulations Monte-Carlo standard (sans méthode de réduction de variance).

Il sera intéressant par la suite de comparer la vitesse de convergence de notre estimateur du quantile avec et sans variables antithétiques.

b. Discrétisation des deux processus

Il existe une discrétisation exacte des processus de type Brownien géométrique, ce qui facilite leur estimation par une méthode de Monte-Carlo. Ainsi nous simulons les processus A_t et L_t de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \text{Constante à évaluer} \\ A_{t+\Delta t} = A_t e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_S (W_{t+\Delta t}^S - W_t^S)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = 1 \\ L_{t+\Delta t} = L_t e^{\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_L (W_{t+\Delta t}^L - W_t^L)} \end{array} \right.$$

Dans notre cas $\Delta t = \frac{1}{N}$ où N est le nombre de pas de discrétisation entre 0 et 1, fixé au moment de la génération.

c. Evaluation du nombre de cas de ruine et détermination de la valeur de pour que la probabilité de ruine empirique $\left(\frac{Nb \text{ cas de ruine}}{Nb \text{ simulations}}\right)$ soit égale à 0,5%.

La simulation des valeurs d'actif et de passif nous permet de construire un jeu de trajectoires pour le processus $\frac{A_t}{L_t}$. Afin d'étudier la probabilité de ruine de l'assureur sur l'intervalle, nous nous intéressons au minimum de chaque trajectoire, et nous notons :

$$Min = \left(\min_{i \in \{0, \dots, N\}} \frac{A_{1, \frac{i}{N}}}{L_{1, \frac{i}{N}}}, \dots, \min_{i \in \{0, \dots, N\}} \frac{A_{NbSimu, \frac{i}{N}}}{L_{NbSimu, \frac{i}{N}}} \right)$$

La simulation j est considérée comme un cas de ruine si la j -ème valeur du vecteur Min est inférieure à 1.

De plus, en simulant nos jeux de trajectoire actif-passif avec un actif initialisé à 1, la valeur de A_0 pour laquelle seulement 0,5% des trajectoires sont des cas de ruine est obtenue aisément, en prenant l'inverse du quantile à 0,5% du vecteur Min . Il n'est donc pas besoin d'utiliser un algorithme d'optimisation pour obtenir la valeur recherchée :

$$A_0 = \frac{1}{\underset{j \in \{1, NbSimu\}}{\text{quantile}_{0,5\%}}(Min[j, 1])} = \underset{j \in \{1, NbSimu\}}{\text{quantile}_{99,5\%}}\left(\frac{1}{Min[j, 1]}\right)$$

Et à partir de la valeur obtenue on obtient FP_0 par la formule : $FP_0 = A_0 - 1$

Dès lors, il suffit de disposer d'un nombre suffisant de simulations pour que la valeur obtenue pour A_0 puisse être considérée comme assez précise.

d. Résultats et analyse

Pour rappel, nous utilisons, dans le cadre du modèle étudié, les paramètres suivants :

$$\mu_S = 0,08 ; \mu_L = 0,04$$

$$\sigma_S = 20\% ; \sigma_L = 5\%$$

i. Influence des variables antithétiques sur la convergence de l'algorithme

Dans un premier temps, nous avons cherché à établir la différence entre les vitesses de convergence de notre algorithme de Monte-Carlo, avec et sans utilisation de la méthode des variables antithétiques, l'objectif étant de vérifier que les résultats en termes de convergence seront améliorés grâce à l'utilisation de cette méthode de réduction de variance (ou tout du moins pas détériorés).

Nous avons donc fixé un nombre de pas (50 pas annuels) et avons lancé 2 jeux de scénarios de 200 000 simulations, un premier jeu de scénarios avec variables antithétiques et un second sans cette méthode. En parallèle, nous avons lancé une valorisation de la vraie valeur de avec 1 000 000 de scénarios sans variables antithétiques :

Dans les deux graphes ci-après, nous étudions l'écart relatif entre la valeur de obtenue en faisant varier le nombre de simulations prises en comptes et . Cet exercice est réalisé sur les deux paquets de 200 000 simulations générés.

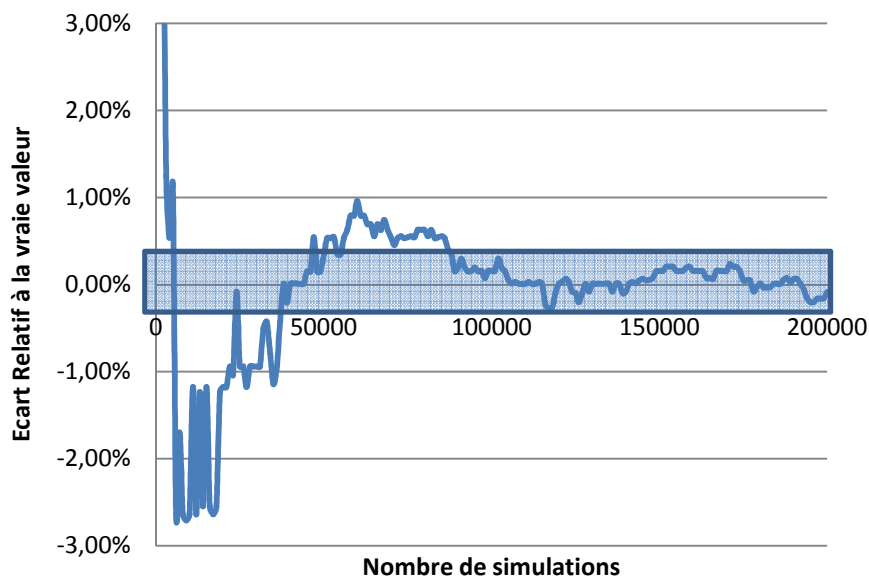


Figure 16 : Convergence de l'algorithme de Monte-Carlo avec utilisation des variables antithétiques

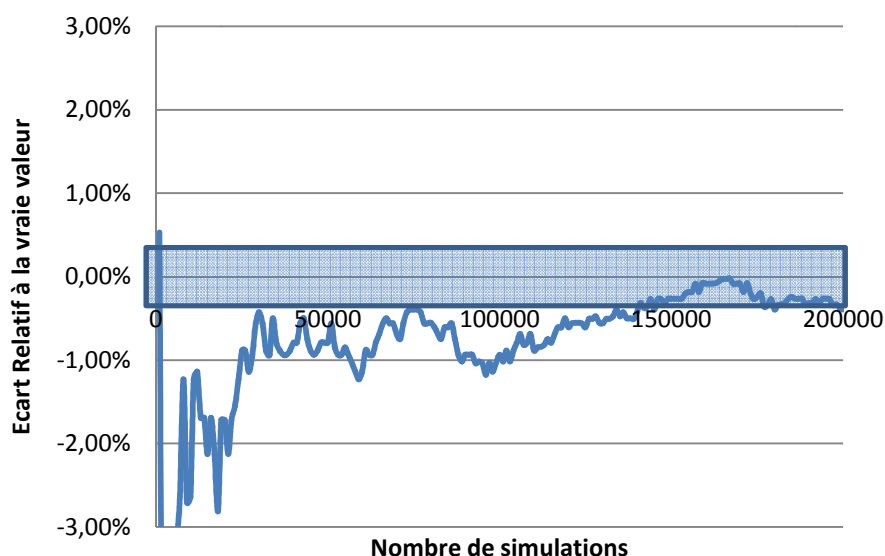


Figure 17 : Convergence de l'algorithme sans utilisation des variables antithétiques

On peut voir que, pour le paquet intégrant la méthode de réduction de variance, on obtient des valeurs de très proches de la valeur de référence (le rectangle bleu clair représente un intervalle

de +/- 0,3% d'écart relatif avec la valeur de (), même avant d'atteindre l'utilisation de 100 000 simulations, puis que la valeur estimée reste à peu près stable.

En comparaison, dans le cas où la génération des scénarios ne fait pas intervenir de méthode de diminution de variance, on constate qu'il faut attendre la prise en compte de 150 000 scénarios pour avoir une valeur suffisamment proche de la valeur de référence. De plus, même après 150 000 simulations on constate une instabilité du résultat.

Le graphique ci-après montre la dispersion des valeurs obtenues pour dans le cadre d'un actif Black-Scholes en fonction du nombre de simulations considérées, dans le cas où les simulations sont générées, avec et sans variables antithétiques. On considère à chaque changement de nombres de simulations 1000 jeux de scénarios. La barre horizontale représente la vraie valeur attendue (résultat obtenu pour 1 000 000 de simulations avec variables antithétiques : 66,32%).

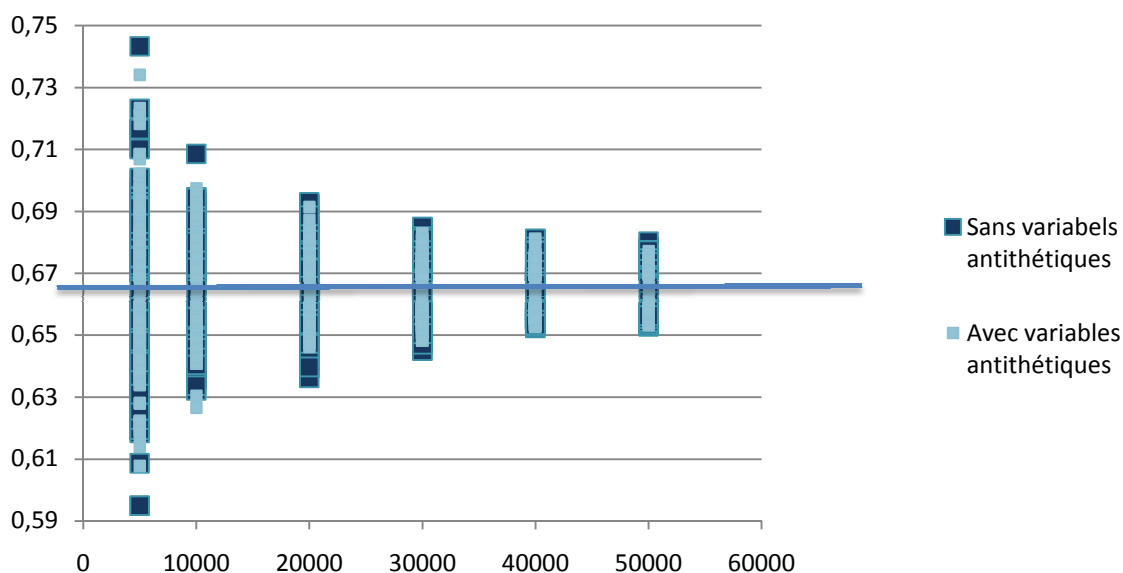


Figure 18 : Dispersion des estimateurs obtenus en fonction du nombre de simulations

On voit cette fois-ci que l'amélioration apportée par notre méthode de réduction de variance est présente, mais plus légère. En effet, dans la plupart des cas, la volatilité de notre résultat est plus faible en utilisant les variables antithétiques, mais les écarts sont peu visibles.

Nous choisissons cependant de conserver notre génération de scénarios utilisant la méthode des variables antithétiques car elle semble légèrement améliorer nos résultats, mais aussi et surtout car elle nous permet d'économiser du temps de génération des bruits actif et passif. Pour la suite, nous utiliserons tout de même un nombre de simulations fixe de 100 000. A noter que nous réalisons nos simulations en utilisant le logiciel R et que pour des pas élevés (dépassant 200) nous atteignons déjà les limites de la machine utilisée lorsque le nombre de simulations dépasse 100 000.

Pour les deux autres cas examinés (actif Vasicek et portefeuille mixte), nous nous contenterons d'utiliser la méthode des variables antithétiques sans faire d'analyse comparée avec les résultats obtenus sans méthode de réduction de variance.

ii. Analyse des résultats obtenus et comparaison avec le premier algorithme

Nous avons lancé notre algorithme de détermination du montant de fonds propres en 0 par méthode de Monte-Carlo pour un nombre de pas de discrétisation allant de 1 (« tir direct ») à 250, tout comme pour notre algorithme de détermination par formule fermée.

Notre objectif est triple :

- Valider les résultats et les tendances obtenues par notre premier algorithme
- Etudier les performances de l'estimateur en termes de volatilité (nous utilisons 100 000 simulations pour le Monte-Carlo et nous espérons donc minimiser la volatilité de nos résultats...) dans les deux cas
- Comparer les temps de calcul nécessaires.

Les résultats obtenus par les deux algorithmes, ainsi que la valeur exacte obtenue dans le cas continu, sont regroupés dans le graphe suivant :

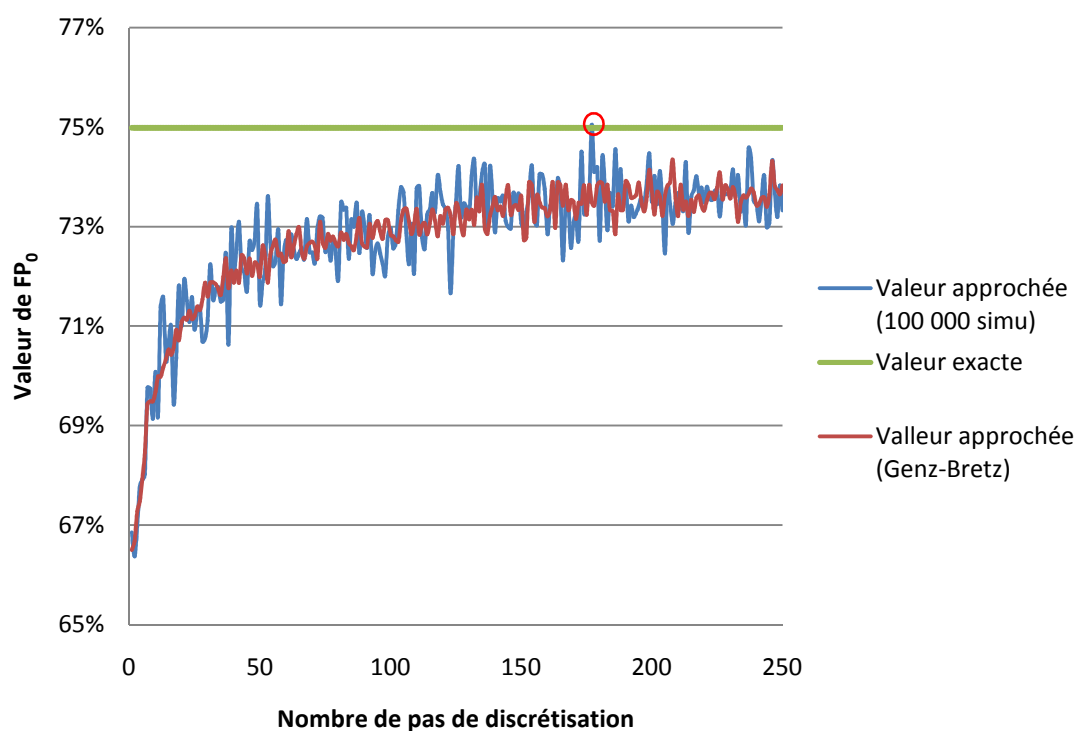


Figure 19 : Convergence comparée entre les deux algorithmes – cas Black-Scholes

Le graphe permet de valider nos deux implémentations : chacune converge vers une même valeur et suit une courbure similaire. De plus l'estimateur de Monte-Carlo est sans biais. Cependant, il est clair que l'algorithme de Monte-Carlo, malgré le grand nombre de simulations et l'utilisation des variables antithétiques, propose un estimateur plus volatile que l'estimateur obtenu grâce à l'algorithme utilisant Genz-Bretz. On observe même que pour 177 pas de discrétisation, la valeur obtenue par l'estimateur de Monte-Carlo est supérieure à la valeur exacte.

Si l'on se base sur les résultats obtenus entre 200 et 250 pas, où l'on a une relative stabilité de la valeur moyenne observée, on voit que l'écart type des valeurs obtenues par Monte-Carlo est de 0,4% contre 0,2% pour le Genz-Bretz. Pour obtenir une volatilité plus faible de l'estimateur de Monte-Carlo il serait nécessaire d'augmenter encore le nombre de simulations ; cependant on se heurte alors à une limite de capacité mémoire pour notre ordinateur.

iii. Comparaison des temps de calcul :

Si l'on a pu voir que l'algorithme de Monte-Carlo donnait un estimateur moins efficace, un autre outil de comparaison entre les deux méthodes étudiées est la complexité des calculs. Un algorithme de Monte-Carlo a une complexité linéaire, à comparer avec notre premier algorithme dont la complexité quadratique est due à la nécessité de générer la matrice d'auto-covariance du processus étudié.

L'étude du temps de calcul nécessité par l'algorithme de Monte-Carlo permet d'obtenir le graphe suivant :

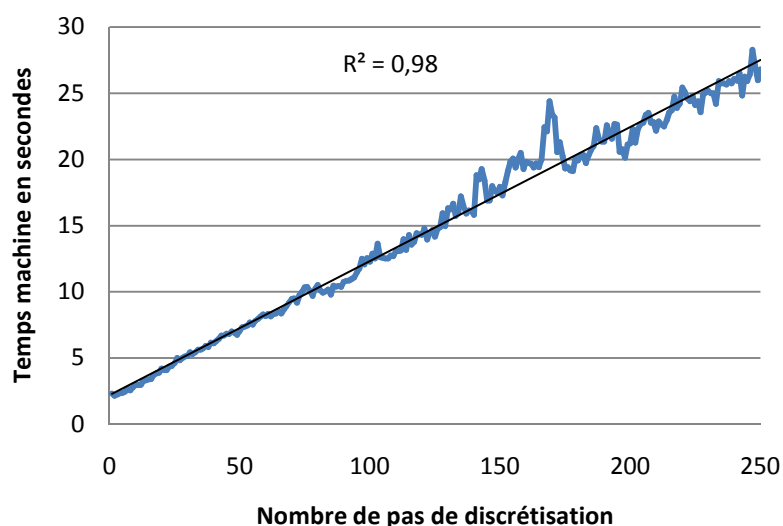


Figure 20 : Temps de calcul pour l'algorithme de Monte-Carlo - cas Black-Scholes

On observe bien une évolution à tendance linéaire du temps de calcul, ce qui est cohérent avec la méthode employée. Cependant, on observe une plus forte volatilité à partir de 150 pas. Nous nous attendions à de tels résultats pour des pas de discrétisation élevés car la mémoire de la machine commence à saturer. Comme on peut le voir avec les résultats du tableau ci-dessous, cette volatilité augmente encore pour des pas plus élevés :

Tableau 7 : Comparaison des temps d'exécution des deux algorithmes – cas Black-Scholes

Pas	Algorithme utilisant Genz-Bretz			Algorithme de Monte-Carlo		
	Temps total machine	FP ₀	Ecart relatif à la valeur exacte	Temps total machine	FP ₀	Ecart relatif à la valeur exacte
10	0,8 s	69,68%	7,08%	2,94 s	70,08%	6,55%
25	3,54 s	71,20%	5,05%	4,61 s	70,93%	5,41%

50	10,64 s	72,00%	3,99%	7,02 s	71,46%	4,71%
100	31,8 s	72,84%	2,87%	12,28 s	72,96%	2,70%
150	66,4 s	73,61%	1,84%	17,92 s	73,07%	2,56%
200	101,58 s	73,71%	1,71%	21,18 s	73,50%	1,99%
250	183,46 s	73,83%	1,55%	26,79 s	73,33%	2,22%
300	218,98 s	73,62%	1,83%	35,24 s	73,22%	2,36%
350	319,8 s	73,75%	1,65%	132,91 s	74,36%	0,84%
400	374,68 s	74,14%	1,13%	162,54 s	73,34%	2,20%

En dessous de 50 pas de discrétisation, l'algorithme utilisant la formule fermée est plus rapide que celui utilisant l'approche par simulations. Cependant, cette tendance s'inverse par la suite (Complexité quadratique contre complexité linéaire).

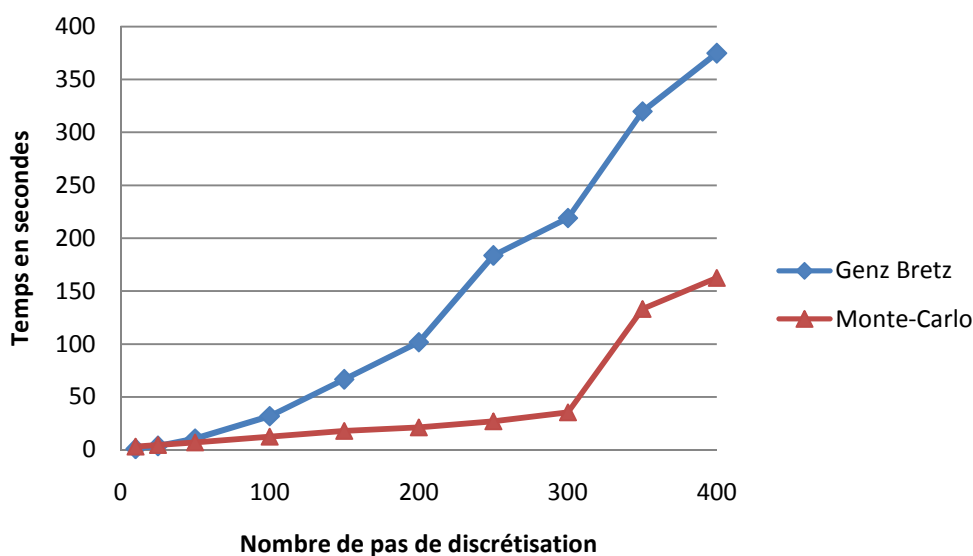


Figure 21 : Comparaison graphique des temps de calcul – cas Black-Scholes

On peut malgré tout observer une augmentation du temps total machine, dans le cadre du Monte-Carlo, à partir de 300 pas de discrétisation. Ceci pourrait être expliqué par une hausse de la volatilité du temps machine (Cf. commentaire précédent). Cependant, on a l'impression de pouvoir visualiser un réel décrochage, ce qui pourrait être expliqué par la taille des bases de données que le logiciel manipule (pour le processus passif, la base devient, pour 300 pas, une matrice de dimension 300*100 000, soit 30 000 000 de cellules...).

Une autre nuance à apporter tient au fait que les résultats obtenus par la formule fermée sont moins volatils que ceux utilisant l'approche par simulations, malgré l'utilisation d'un algorithme de Monte-Carlo pour évaluer la loi normale multivariée et le choix d'un nombre élevé de simulations. Pour pouvoir vraiment comparer le temps de calcul des deux algorithmes, il conviendrait de les étudier à un niveau de précision similaire, en augmentant encore le nombre de simulations, ce qui est impossible dans le cadre de notre étude (logiciel, spécification et performances de l'ordinateur).

B) Cas d'un actif zéro-coupon suivant un modèle de Vasicek

L'algorithme de Monte-Carlo utilisé pour ce nouveau processus actif est globalement similaire à l'algorithme utilisé dans la section précédente, en tout cas pour ce qui est des différentes étapes, cependant on a une différence notable dans la simulation du processus actif qui va impacter la génération des risques (les Browniens dans le cas Black-Scholes) sous-jacents.

a. Simulation du processus zéro-coupon

Si la simulation du processus passif se fait exactement de la même manière que dans le cas précédent (génération des Browniens, simulation pas par pas du processus), la simulation d'un processus zéro-coupon suivant un modèle de Vasicek est plus compliquée que celle d'un processus Brownien géométrique standard.

Revenons sur la dynamique du taux instantané dans le modèle de Vasicek :

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \eta dW_t^r$$

Une méthode classique de discrétisation du processus nous mènerait à utiliser une discrétisation d'Euler, du type :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \kappa(\theta - r_t)\Delta t + \eta\Delta W_{t+\Delta t}^r$$

Cependant cette discrétisation n'est pas une discrétisation exacte et ne nous permettrait pas, a priori, de comparer les résultats obtenus à ceux de notre algorithme alternatif (Genz-Bretz) puisqu'on aurait un biais de discrétisation dans nos simulations de Monte-Carlo.

Il est donc nécessaire de revenir à une discrétisation exacte :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa\Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \eta \int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} dW_u^r$$

Soit :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa\Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} U_{t+\Delta t}$$

Où U_t est un processus gaussien centré réduit, de fonction d'auto-covariance nulle. Dans ce cas il n'est donc pas nécessaire de générer un mouvement Brownien. Nous générons uniquement des lois normales standards.

Une fois ces bruits générés, il ne reste qu'à simuler le taux instantané en utilisant la formule de discrétisation exacte initialisée par le paramètre r_0 .

On obtient ainsi une simulation du processus A_t en utilisant les formules suivantes :

$$A_t = \frac{A_0}{PZC(0, T)} * A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A(t, T) = e^{\left(\theta - \frac{\eta^2}{2\kappa^2}\right)[B(t, T) - T + t] - \frac{\eta^2}{4\kappa} B(t, T)^2} \\ B(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ PZC(0, T) = A(0, T) e^{-B(0, T)r_0} \end{cases}$$

Il est également possible d'utiliser la méthode des variables antithétiques dans ce cas, en prenant l'opposé des valeurs de U_t utilisées pour les $\frac{NbSimu}{2}$ premières simulations, afin de générer les scénarios $\frac{NbSimu}{2} + 1$ à $NbSimu$. Comme précédemment, on s'appuie ainsi sur la symétrie de la loi des bruits actifs (gaussienne centrée réduite) afin de créer artificiellement une covariance négative entre les deux parties de la simulation.

b. Obtention du A_0 pour une base $L_0 = 1$ et une probabilité de ruine de 0,5%

De la même manière que dans le cas de l'actif de type Black-Scholes, on simule un nombre pair de jeux de valeurs pour le processus actif et le processus passif. Le processus actif est de plus initialisé à la valeur 1.

Dans un second temps on détermine le même vecteur Min . Pour rappel, Min est un vecteur de dimension $(NbSimu \times 1)$ tel que pour la j -ème simulation et N le nombre de pas de discrétisation :

$$Min[j, 1] = \min_{i \in [1, N]} \left(\frac{A_{j, \frac{i}{N}}}{L_{j, \frac{i}{N}}} \right)$$

La simulation j est donc un cas de ruine si $Min[j, 1] < 1$. De plus la valeur du A_0 recherché est :

$$A_0 = \frac{1}{\text{quantile}_{0,5\%}(\text{Min}[j, 1])_{j \in [1, NbSimu]}} = \text{quantile}_{99,5\%} \left(\frac{1}{\text{Min}[j, 1]} \right)_{j \in [1, NbSimu]}$$

Et finalement, on obtient la valeur de FP_0 par : $FP_0 = A_0 - 1$

c. Résultats et analyse

i. Analyse des résultats obtenus et comparaison avec le premier algorithme

De la même manière que pour notre premier algorithme, nous utilisons l'algorithme de Monte-Carlo à partir des discrétisations explicitées afin de déterminer les valeurs de fonds propres nécessaires pour un nombre de pas de discrétisation allant de 1 à 250 par incrément de 5 pas. Les paramètres des modèles sont les mêmes que dans la partie IV : nous estimons donc les mêmes valeurs.

Les résultats fournis par les deux algorithmes sont comparés dans le graphique suivant :

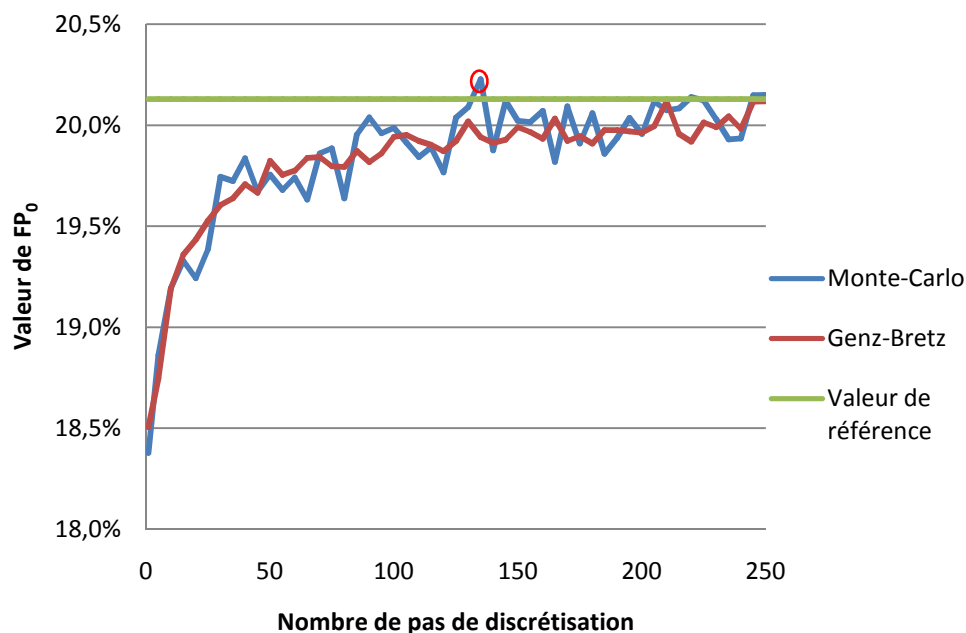


Figure 22 : Convergence comparée entre les deux algorithmes – cas Vasicek

Nous avons choisi d'utiliser comme valeur de référence le même montant que dans le cadre du premier algorithme, c'est-à-dire la valeur des fonds propres à conserver, obtenue en appliquant ce premier algorithme, pour un pas de discrétisation de 1000.

Pour les valeurs obtenues entre 100 et 250 pas (à peu près stable) on observe 0,06% de volatilité pour l'estimateur Genz-Bretz contre 0,11% pour le Monte-Carlo ; comme dans le cas d'un actif de Black-Scholes, les deux courbes ont la même courbure et semblent converger vers la même valeur, mais plus rapidement. Comme précédemment, pour diminuer la volatilité autour de la tendance de notre estimateur de Monte-Carlo, il faudrait augmenter le nombre de simulations, ce qui est très lourd à implémenter (notamment en termes de capacité mémoire de l'ordinateur).

Nous constatons encore une fois qu'il arrive que la valeur donnée par l'algorithme de Monte-Carlo soit supérieure à la valeur de référence.

ii. Comparaison des temps de calcul

L'algorithme de Monte-Carlo est là encore moins stable que celui utilisant Genz-Bretz. Cependant, l'étude des temps de calcul est encore à son avantage (le calcul se fait toujours en temps linéaire, par rapport à la construction de la matrice de variance-covariance utilisée dans notre approche alternative, qui se fait en temps quadratique).

27 mai 2011

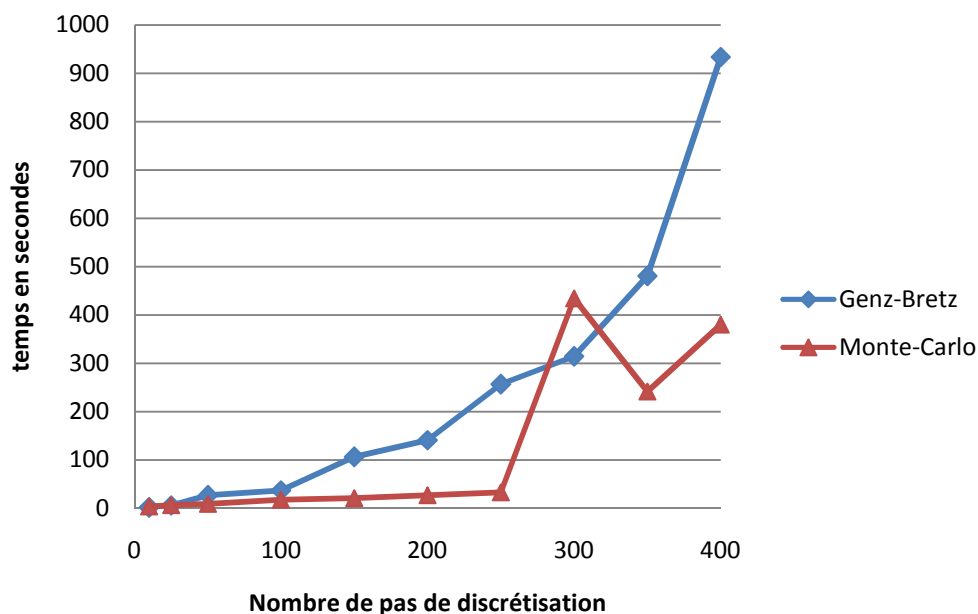


Figure 23 : Comparaison graphique des temps de calcul – cas Vasicek

Le décrochage que nous avons observé pour un nombre de pas supérieur à 300 est encore présent, et a des effets très significatifs sur le temps de calcul (on observe notamment que l'algorithme de Monte-Carlo met plus de temps à converger que l'algorithme utilisant Genz-Bretz, pour un pas de discrétisation de 300...). De plus, l'approche par simulations est beaucoup plus gourmande en termes de mémoire ; dans notre cas, cela s'est traduit par l'incapacité de trouver une valeur pour un pas de discrétisation supérieur à 400 (nous sommes arrivés à une saturation de la mémoire vive de l'ordinateur utilisé, soit 4 Go), tandis que nous avons pu parvenir à une valeur pour un pas de discrétisation égal à 1000 (limite de l'implémentation de l'algorithme de Genz-Bretz sous R) avec notre approche.

Tableau 8 : Comparaison des temps d'exécution des deux algorithmes – cas Vasicek

Pas	Algorithme utilisant Genz-Bretz			Algorithme de Monte-Carlo		
	Temps total machine	FP ₀	Ecart relatif à la valeur de référence	Temps total machine	FP ₀	Ecart relatif à valeur de référence
10	1,56 s	19,19%	4,7%	3,71 s	19,19%	4,7%
25	5,83 s	19,53%	3,0%	6,1 s	19,39%	3,7%
50	26,77 s	19,82%	1,5%	9,34 s	19,76%	1,9%
100	36,78 s	19,94%	0,9%	17,47 s	19,99%	0,7%
150	106,1 s	19,99%	0,7%	21,26 s	20,02%	0,5%
200	140,93 s	19,96%	0,8%	26,8 s	19,96%	0,9%
250	256,46 s	20,13%	0,0%	32,85 s	20,15%	-0,1%
300	314,02 s	20,08%	0,2%	434,15 s	19,88%	1,2%
350	480,23 s	20,09%	0,2%	241,19 s	19,95%	0,9%
400	933,56 s	20,14%	0,0%	379,86 s	20,15%	-0,1%

C) Cas d'un portefeuille mixte

A nouveau, nous allons utiliser un algorithme de Monte-Carlo pour valoriser notre besoin en fonds propres (à travers le calcul de A_0), cette fois dans le cadre du portefeuille mixte de la partie IV, section B. Même si les étapes de l'algorithme seront globalement les mêmes que dans les deux cas précédents, il est nécessaire d'ajouter un point de détail concernant la simulation. En effet, si nous continuons d'utiliser une discrétisation exacte du Vasicek afin d'éviter un biais de nos estimateurs, nous risquons de perdre les corrélations entre le Browniens du processus Black-Sholes et celui du processus Vasicek.

a. Retour sur la simulation du processus de Vasicek en intégrant de la corrélation

Dans la partie précédente, nous avons exposé la formule de discrétisation exacte du processus taux sous le modèle de Vasicek :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}} U_{t+\Delta t}$$

Cependant, cette formule était utilisable car aucune corrélation entre les processus n'était appliquée.

Dans le cadre du portefeuille, nous souhaitons intégrer une corrélation entre les mouvements Browniens des deux parties du processus actif : le processus Black-Scholes et le processus taux. En effet, si l'on considère que le premier représente un indice action, il n'est pas réaliste de considérer que les sous-jacents actions et taux varient de façon indépendante sur le marché.

Nous revenons donc sur nos pas concernant le Vasicek, et considérons les deux processus suivants :

$$\begin{cases} r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \eta \int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} dW_u^r \\ S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_S(W_{t+\Delta t}^S - W_t^S)} \end{cases}$$

initialisés à r_0 et 1 respectivement.

Avec :

$$dW_t^S \cdot dW_t^r = \rho, \text{ d'où } dW_t^r = \rho dW_t^S + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^\perp$$

Soit :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \eta \rho \int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} dW_u^S + \eta \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} dW_u^\perp$$

Ce qui nous donne en appliquant le principe de la discrétisation exacte :

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \eta \rho \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}} U_{t+\Delta t}^a + \eta \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}} U_{t+\Delta t}^b$$

Où U_t^a et U_t^b sont des processus gaussiens centrés réduits indépendants et :

$$\begin{aligned} \text{Correl}(U_{t+\Delta t}^a, W_{t+\Delta t}^S - W_t^S) &= \text{Correl}\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} dW_u^S, \int_t^{t+\Delta t} 1 dW_u^S\right) \\ &= \frac{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\kappa(t+\Delta t-u)} du}{\sqrt{\int_t^{t+\Delta t} e^{-2\kappa(t+\Delta t-u)} du} \sqrt{\int_t^{t+\Delta t} 1 du}} \\ &= \frac{\frac{1 - e^{-\kappa\Delta t}}{\kappa}}{\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} \sqrt{\Delta t}} = \rho_2 \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$U_{t+\Delta t}^a = \rho_2 \frac{W_{t+\Delta t}^S - W_t^S}{\sqrt{\Delta t}} + \sqrt{1 - \rho_2^2} U_{t+\Delta t}^{a'}$$

Avec cette fois $U_t^{a'}$ un processus discret gaussien centré réduit et indépendant de $W_{t+\Delta t}^S - W_t^S$ et de U_t^b . Ce processus a, de plus, une fonction d'auto-covariance nulle puisque $U_{t+\Delta t}^{a'}$ correspond à une intégrale de Brownien entre t et $t + \Delta t$ et est donc indépendant de $U_t^{a'}$ puis de toutes les valeurs du processus discret à des dates antérieures ou ultérieures.

Ce qui nous permet finalement d'obtenir la formule de la discrétisation exacte du Vasicek taux dans notre cas :

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta t} &= r_t e^{-\kappa\Delta t} + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \eta\rho \frac{\rho_2}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} (W_{t+\Delta t}^S - W_t^S) \\ &\quad + \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} \sqrt{(1 - \rho^2) + \frac{\rho^2(1 - \rho_2^2)}{\Delta t}} U_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

En regroupant les deux parties indépendantes et centrées réduites en $U_{t+\Delta t}^{a'}$ et $U_{t+\Delta t}^b$, en un unique processus $U_{t+\Delta t}$ centré réduit indépendant de la partie en $W_{t+\Delta t}^S - W_t^S$.

Une fois le processus taux correctement discrétisé, nous générons donc des trajectoires des 3 processus suivant :

$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_S (W_{t+\Delta t}^S - W_t^S)} \\ ZC_t = \frac{1}{PZC(0, T)} * A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \\ L_{t+\Delta t} = L_t e^{\left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_L (W_{t+\Delta t}^S - W_t^S)} \end{cases}$$

avec : $\begin{cases} S_0 = 1 \\ PZC(0, T) = A(0, T) e^{-B(0, T)r_0} \text{ soit } ZC_0 = 1 \\ L_0 = 1 \end{cases}$

Le processus passif est L_t et, connaissant α , la proportion d'actif Black-Scholes dans le portefeuille, le processus actif est :

$$A_t = A_0(\alpha S_t + (1 - \alpha)ZC_t)$$

b. Détermination de la valeur du A_0

Dans le cadre de notre portefeuille, si la simulation est plus complexe que dans les deux cas extrêmes ($\alpha = 0$ et $\alpha = 1$) explicités plus tôt, la détermination du facteur A_0 nécessaire pour garantir une probabilité de ruine de 0,5% à horizon 1 an, par l'algorithme de Monte-Carlo, est identique.

c. Résultats et analyse

En utilisant les discrétisations permettant l'intégration d'une corrélation entre les bruits du Vasicek et du Black-Scholes, nous obtenons une implémentation de l'algorithme de Monte-Carlo permettant d'estimer exactement les mêmes valeurs de FP_0 que celles déjà estimées avec notre premier algorithme. Nous utilisons donc des paramètres, pour les modèles, identiques à ceux utilisés dans la partie IV.

A nouveau, nous avons mis le code de l'algorithme de Monte-Carlo utilisé pour le portefeuille mixte à disposition des lecteurs (Annexe 4).

i. Analyse des résultats

De manière similaire, nous déterminons, grâce à ce nouveau code, les valeurs des fonds propres nécessaires pour un nombre de pas allant de 1 à 250, de 5 en 5.

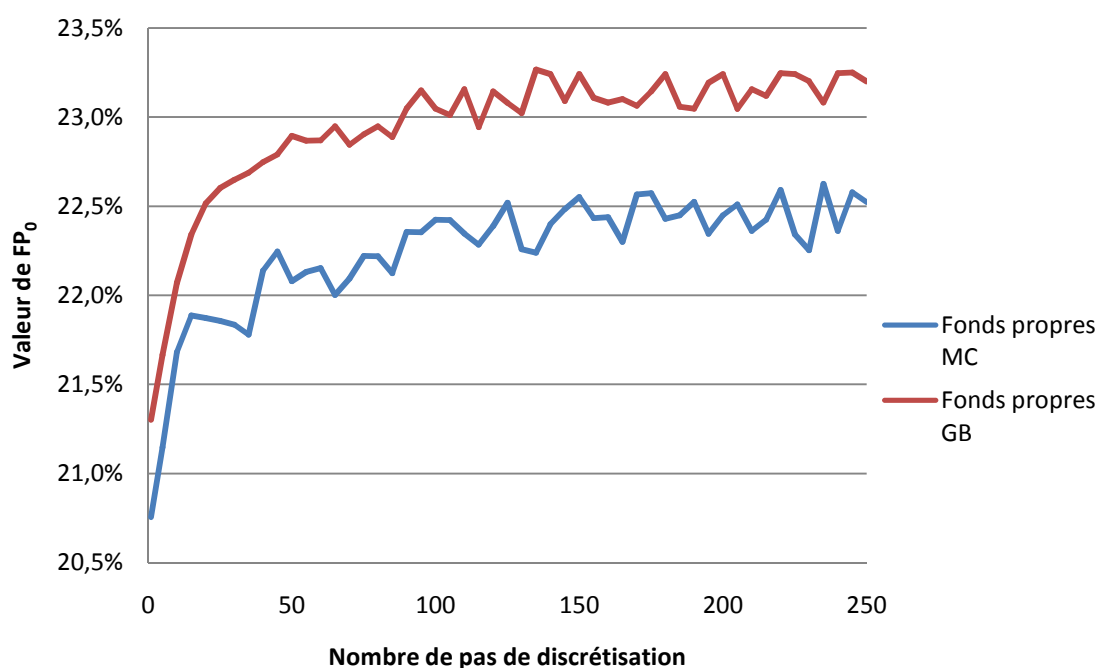


Figure 24 : Convergence comparée entre les deux algorithmes – cas du portefeuille mixte, $\alpha=20\%$

On observe clairement dans ce graphique qu'il apparait un écart entre les deux algorithmes, qui s'explique par notre utilisation de l'approximation de Fenton-Wilkinson dans le cas de l'algorithme Genz-Bretz.

Nous nous attendions à un tel biais, qui par ailleurs est bien positif : les valeurs obtenues par notre approximation de Fenton-Wilkinson sont supérieures aux vraies valeurs. Visuellement, on peut imaginer une convergence vers une valeur égale à 22,7% par le Monte-Carlo, contre 23,38% dans le cas de l'algorithme approximatif utilisant Genz-Bretz, soit un écart de 3% à terme. On observe de plus que ce biais tend, en valeur, à rester stable quel que soit le nombre de pas de discrétisation utilisé.

Au vu de cet écart de 3%, nous avons souhaité étudier son évolution en fonction du paramètre α . En effet, on sait que lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ on retombe sur un cas extrême 100% zéro-coupons ou 100% actions. Dans ces cas, on doit donc obtenir des valeurs similaires pour nos deux algorithmes. L'intérêt d'étudier l'évolution du biais en fonction de α est de pouvoir voir comment et dans quelles proportions l'approximation de Fenton-Wilkinson décale la courbe de sa trajectoire originale en fonction de la composition du portefeuille.

Le graphe ci-après compare l'évolution de la valeur obtenue pour FP_0 , pour 50 pas de discrétisations, en fonction de la valeur prise par α , pour les deux algorithmes.

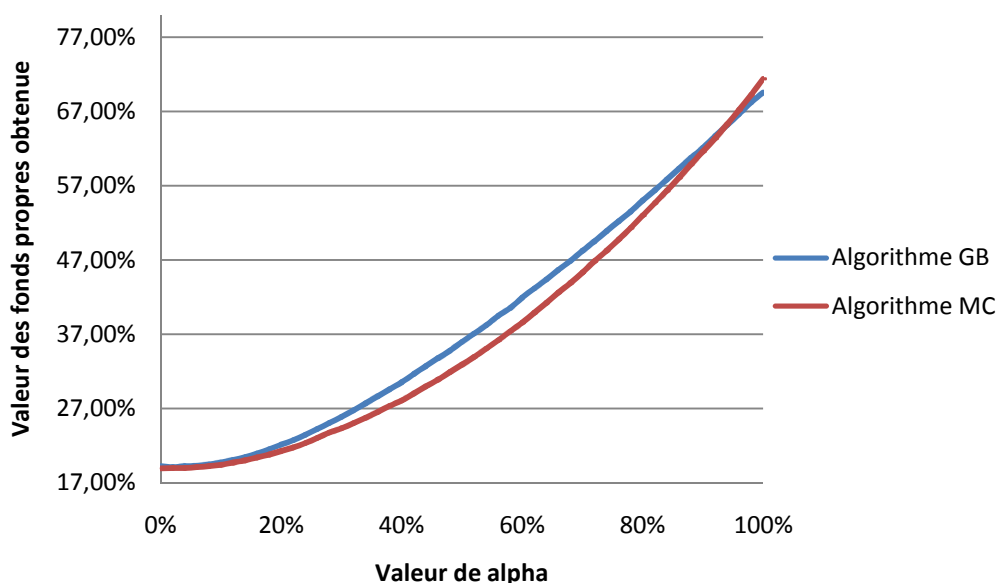


Figure 25 : Comparaison de l'évolution de FP_0 en fonction de α pour les deux algorithmes

Comme précédemment (IV.B), nous retrouvons l'effet de diversification des risques pour des petites valeurs de α , ce qui montre qu'un assureur a intérêt à intégrer des actifs action au sein de son portefeuille, en faible proportion, avec le double effet de diminuer son besoin en fonds propres réglementaires et d'augmenter le rendement global du portefeuille.

Toutefois, la comparaison entre l'approche par simulations et l'approche par calcul de la gaussienne multivariée montre que le biais observé plus haut est systématique pour des valeurs intermédiaires de α . Le biais atteint même les 10% (son maximum) pour $\alpha = 50\%$. Il devient très faible lorsque α

tend vers 0 ou 1. Il est cependant nécessaire de relativiser ces résultats qui intègrent aussi la volatilité des résultats des deux algorithmes. En particulier, nous avons obtenu un biais d'environ 3% pour $\alpha = 20\%$. Cependant dans le cas de ces derniers scénarios on obtient un biais de plus de 4%.

Tableau 9 : écarts relatifs entre les deux estimateurs en fonction de la valeur de α considérée

alpha	FP par algorithme de Genz-Bretz	FP par algorithme de MC	Ecart Relatif
0%	19,24%	18,97%	1,4%
10%	19,73%	19,42%	1,6%
20%	22,14%	21,27%	4,1%
30%	25,90%	24,35%	6,4%
40%	30,54%	28,09%	8,7%
50%	35,96%	32,91%	9,3%
60%	41,90%	38,55%	8,7%
70%	48,25%	45,30%	6,5%
80%	55,02%	53,00%	3,8%
90%	62,10%	61,60%	0,8%
100%	69,56%	71,41%	-2,6%

Comme nous l'avons énoncé plus haut, l'approximation de Fenton-Wilkinson est bonne pour des lois log-normales composantes indépendantes avec des écarts-types relativement faibles (de l'ordre de 5%). Dans le cas d'écart-type plus larges, comme ici, la méthode tend à sous-évaluer la moyenne de la somme et à surestimer la variance [7], d'où une surestimation du montant de fonds propres nécessaires. L'utilisation de notre algorithme approximé permet une estimation prudente pour la valorisation de ce montant, ce qui est intéressant dans le processus de maîtrise des risques des entreprises d'assurance. Enfin, comme nous avons pu le montrer, ce biais est encore relativement faible pour des valeurs de α réalistes (typiquement inférieures à 20%).

ii. Temps de calcul

La majeure partie du temps de calcul, dans le cadre de l'algorithme de Monte-Carlo, vient de la simulation des trajectoires actif et passif, et non de la génération des Browniens, mais nous avons déjà vu que la gestion du temps est biaisée lorsque le nombre de pas de discrétisation est très élevé, ce qui peut même nous mener à des temps de calcul supérieurs à ceux de l'algorithme utilisant Genz-Bretz. Dans la simulation des trajectoires actif et passif, ce sont surtout les trajectoires du processus Vasicek qui demandent du temps. En effet, il est nécessaire de générer le taux sans risque, puis le zéro-coupon, et les formules des deux processus sont plus complexes que celles d'un Brownien géométrique simple. On comprend dès lors que les temps de calcul observés pour le cas du portefeuille avec l'algorithme de Monte-Carlo soient très proches de ceux observés pour le Vasicek seul, pour un nombre de pas inférieur à 250.

Sur notre ordinateur, il n'est pas possible d'utiliser l'algorithme pour 100 000 simulations et 300 pas. Nous n'avons donc utilisé que 50 000 simulations afin d'obtenir les trois valeurs de FP_0 pour 300, 350 et 400 pas de discrétisation.

Tableau 10 : Comparaison des temps de calcul pour les deux algorithmes – cas du portefeuille mixte, $\alpha=20\%$

Pas	Algorithme utilisant Genz-Bretz		Algorithme de Monte-Carlo	
	Temps total machine	FP ₀	Temps total machine	FP ₀
10	0,71 s	22,07%	3,22 s	21,68%
25	4,57 s	22,60%	6,98 s	21,86%
50	11,12 s	22,89%	10,24 s	22,08%
100	44,76 s	23,05%	17,58 s	22,42%
150	146,54 s	23,24%	24,5 s	22,55%
200	186,23 s	23,24%	31,78 s	22,45%
250	265,17 s	23,20%	38,1 s	22,52%
300	568,0 s	23,24%	30,14 s	22,4%
350	1061,29 s	23,05%	47,48 s	22,24%
400	798,27 s	23,30%	144,72 s	22,51%

A nouveau, on observe qu'il est plus intéressant en terme de temps de calcul d'utiliser l'approximation mettant en œuvre Fenton-Wilkinson et l'algorithme de Genz-Bretz que le Monte-Carlo, jusqu'à 50 pas de discrétisation. Pour des pas supérieurs, la complexité quadratique du premier algorithme l'emporte largement.

D) Conclusion sur nos implémentations et notre approche

Si l'on effectue un retour en arrière, nous avons vu que la discrétisation de la probabilité de ruine donnait déjà des résultats satisfaisants pour 50 pas de discrétisation, ce qui représente une validation par semaine (52 semaines) environ. Ce nombre se justifie car on peut considérer que vérifier la solvabilité d'une entreprise à chaque début de semaine serait suffisant pour considérer qu'elle a été en état de ruine ou non durant l'année. Dès lors, l'utilisation de notre approche trouve sa légitimité en termes de temps de calcul et d'efficacité, puisque les résultats donnés par notre algorithme sont beaucoup moins volatiles que ceux donnés par un estimateur de Monte-Carlo, même en utilisant une méthode de réduction de variance.

Concernant le biais créé par l'approximation de Fenton-Wilkinson, nous avons vu qu'il ne dépassait pas 3% pour un mélange réaliste d'actifs. De plus il correspond à une évaluation prudente du montant de fonds propres à provisionner et sa faible volatilité garantie quasiment à 100% cette prudence.

Toutefois, notre algorithme peut être amélioré sur plusieurs points :

- Tout d'abord la rapidité de calcul, nous n'utilisons ici qu'un logiciel gratuit sur un seul processeur.
- Au niveau de notre approximation de la somme de lois log-normales, il existe des approximations plus réalistes, en particulier celle de Schwarz et Yeh (Schwarz et Yeh, 1982)

ou Ho (Ho, 1995) qui permettent de mieux approximer cette somme, toujours par une loi log-normale. Nous avons choisi Fenton-Wilkinson pour sa facilité d'utilisation et sa rapidité d'implémentation.

- L'utilisation de l'algorithme de Genz-Bretz pour évaluer la fonction de répartition d'une loi-normale multi-variée, ne fournit qu'un estimateur, alors que notre calcul fondamental donne une formule fermée. La littérature regorge de méthodologie d'implémentation du calcul de l'intégrale multiple liée à la fonction de répartition d'une gaussienne multivariée (Gauss Quadrature method par exemple [11]). La méthode de Genz-Bretz étant déjà implémentée sous R, ce choix s'est imposé de lui-même et il serait intéressant de tester l'efficacité d'autres méthodologies dans notre cas.
- L'algorithme que nous utilisons pour obtenir la valeur de FP_0 est un algorithme dichotomique simple, qui crée aussi une petite incertitude quant aux valeurs obtenues. Cet algorithme pourrait être amélioré, par exemple en utilisant un algorithme de Newton-Raphson, qui serait parfaitement implémentable puisque nous disposons de la dérivée de la fonction à optimiser. C'est en effet la densité d'une loi gaussienne multivariée.

Nous avons vu que notre approche permettait d'aider les gestionnaires des risques et les gestionnaires actif-passif en fournissant des informations grâce à la comparaison des profils de risque des portefeuilles, mais aussi grâce à la possibilité de déterminer l'adéquation entre le montant de fonds propres et le niveau de risque voulu.

De plus, si l'on considère une couverture par un portefeuille mixte telle que celle proposée dans notre étude, il est clair qu'au cours du temps les proportions relatives vont évoluer, impactant la valeur de α , et certains paramètres des modèles vont osciller (par exemple r_0). Notre approche permet alors de mettre de côté l'impact de telles modifications sur la valeur des engagements pour se concentrer sur la part représentée par les fonds propres dans le passif total de l'entreprise.

Conclusion

Dans notre travail nous avons étudié une approche structurelle basée sur les propriétés mathématiques des processus log-normaux, afin d'obtenir un algorithme permettant d'estimer le besoin en solvabilité sous certaines hypothèses concernant la dynamique de l'actif et du passif. Cette approche nous permet d'obtenir une formule fermée pour le besoin en fonds propres, mais également de nous rapprocher du « véritable » besoin en solvabilité ; nous pouvons en effet étudier la probabilité de ruine sur plusieurs dates intermédiaires au cours de l'année, et non plus seulement en fin d'exercice. Nous étudions trois cas :

- Actif suivant une dynamique de Black-Scholes ;
- Actif constitué d'obligations zéro-coupon, avec un taux suivant le modèle de Vasicek ;
- Actif constitué d'un portefeuille, combinaison des deux cas précédents.

Ce dernier cas nous conduit à introduire une approximation permettant de travailler avec un processus log-normal qui approxime la somme de deux processus log-normaux, même en cas de corrélation entre les parties normales. Dans les trois cas, nous montrons que le besoin en solvabilité semble converger vers une valeur limite lorsqu'on augmente le nombre de dates intermédiaires, qui serait le « réel » besoin en solvabilité (nous vérifions cette intuition avec le cas de Black-Scholes, pour lequel nous disposons d'une valeur exacte) ; par ailleurs, le calcul s'effectue dans un délai raisonnable, mais qui augmente rapidement avec le nombre de pas de discrétisation utilisé.

Afin de pouvoir confronter nos résultats, nous présentons également un exemple de calcul de *SCR* suivant une approche par simulations et utilisant une méthode de réduction de variance (la méthode des variables antithétiques). Nous montrons alors que :

- Dans le cas d'un portefeuille mixte, notre approche alternative entraîne une surévaluation du besoin en capital réglementaire, qui est maximale pour une proportion α de 50%. Cependant, ce biais dû à l'approximation utilisée est tout à fait tolérable pour des valeurs de α cohérentes économiquement ;
- Notre approche alternative donne des résultats moins volatils que l'approche par simulations, mais semble moins efficace en termes de temps de calcul (nous comparons avec la simulation de 1 000 000 de trajectoires de Browniens). Toutefois, elle consomme moins de mémoire, ce qui rend son utilisation appréciable.

Au cours de notre étude, nous avons pu constater que l'essentiel du temps de calcul utilisé par notre approche alternative était consommé par le calcul d'une matrice de variance – covariance, qui a une complexité de l'ordre du carré du pas de discrétisation choisi. Une des pistes d'amélioration de la méthode que nous proposons serait donc de proposer un algorithme

27 mai 2011

plus efficace que celui que nous avons implanté, par exemple en utilisant des approximations par blocs.

La méthode que nous proposons serait potentiellement applicable dans le cadre de compagnies d'assurances de taille moyenne, pour lesquelles l'approximation log-normale du passif est raisonnable (pour des produits avec peu d'optionnalité), et qui ne disposent pas forcément des moyens matériels pour implémenter une méthode utilisant une approche par simulations.

Annexes

Annexe 1 : Code de l'algorithme par formule fermée – cas du portefeuille mixte

```
library(mvtnorm)
```

```
#calcul de l'espérance et de la volatilité du taux
```

```
EspTaux <- fonction(t)
{
  mt <- r0*exp(-1*kappa*t) + theta*(1-exp(-1*kappa*t))
  mt
}
```

```
VolTaux <- fonction(t)
{
  volt <- eta*sqrt((1-exp(-2*kappa*t))/(2*kappa))
  volt
}
```

```
#Calcul des paramètres A(t,T) et B(t,T) qui interviennent dans le calcul du prix du zero-coupon
```

```
B <- fonction(t,maturite)
{
  Bt <- (1-exp(-1*kappa*(maturite-t)))/kappa
  Bt
}
```

```
A <- fonction(t,maturite)
{
  Bt <- B(t,maturite)
  At <- exp((theta - eta^2/(2*kappa^2))*(Bt - (maturite - t)) - eta^2/(4*kappa)*Bt^2)
  At
}
```

```
#####
#####   Calcul de l'espérance et de la variance des logarithmes des lois   #####
#####                                     en fonction de alpha, t, T et A0                                     #####
#####
```

```

Mu1 <- fonction(t,alpha)
{
  resultat <- (MuS - MuL - (SigmaS^2 - SigmaL^2)/2)*t + log(alpha)
  resultat
}

Sigma1 <- fonction(t)
{
  resultat <- sqrt((SigmaS^2 + SigmaL^2)*t)
}

Mu2 <- fonction(t,maturite,alpha)
{
  Bt <- B(t,maturite)
  At <- A(t,maturite)
  resultat <- -Bt*(r0*exp(-kappa*t)+theta*(1-exp(-kappa*t))) - (MuL - (SigmaL^2)/2)*t + log(1-
alpha) + log(At/PZCO)
  resultat
}

Sigma2 <- fonction(t,maturite)
{
  Bt <- B(t,maturite)
  resultat <- sqrt(SigmaL^2*t + Bt^2*eta^2/(2*kappa)*(1-exp(-2*kappa*t)))
  resultat
}

Correl <- fonction(t,maturite)
{
  Bt <- B(t,maturite)
  resultat <- (SigmaL^2*t - eta*rho*SigmaS/kappa*(1-exp(-
kappa*t))*Bt)/(Sigma1(t)*Sigma2(t,maturite))
  resultat
}

```

```

#####
#####   Calcul de l'espérance et de la variance des logarithmes de   #####
#####           L'estimation en fonction de alpha, t, T et A0           #####
#####

```

```

#Calcul des moments d'ordre 1 et 2 de la somme de log-normales

```

```

mbar1 <- fonction(t,maturite,alpha)

```



```

{
  resultat <- exp(Mu1(t,alpha) + Sigma1(t)^2/2) + exp(Mu2(t,maturite,alpha) +
Sigma2(t,maturite)^2/2)
  resultat
}

mbar2 <- fonction(t,maturite,alpha)
{
  resultat <- exp(2*Mu1(t,alpha) + 2*Sigma1(t)^2) + exp(2*Mu2(t,maturite,alpha) +
2*Sigma2(t,maturite)^2) + 2*exp(Mu1(t,alpha) + Mu2(t,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma1(t)^2 +
Sigma2(t,maturite)^2 + 2*Correl(t,maturite)*Sigma1(t)*Sigma2(t,maturite)))
  resultat
}

#Calcul des paramètres de l'approximation

MubarX <- fonction(t,maturite,alpha)
{
  resultat <- 2*log(mbar1(t,maturite,alpha)) - 0.5*log(mbar2(t,maturite,alpha))
  resultat
}

VarX <- fonction(t,maturite,alpha)
{
  resultat <- log(mbar2(t,maturite,alpha)/((mbar1(t,maturite,alpha))^2))
  resultat
}

#####
#####   Calcul de la fonction d'auto-covariance   #####
#####

#On cherche à calculer l'auto-covariance d'une somme de deux log-normales
#On décompose en quatre termes

Covar11 <- fonction(t,s)
{
  (SigmaS^2 + SigmaL^2)*min(t,s)
}

Covar12 <- fonction(t,s)
{
  SigmaL^2*min(t,s) - SigmaS*eta*rho*B(min(t,s),maturite)/kappa*(1-exp(-1*kappa*min(t,s)))
}

```

```
Covar21 <- fonction(t,s)
{
  SigmaL^2*min(t,s) - SigmaS*eta*rho*B(max(t,s),maturite)/kappa*(exp(-1*kappa*abs(t-s))-
exp(-1*kappa*max(t,s)))
}
```

```
Covar22 <- fonction(t,s)
{
  SigmaL^2*min(t,s) + eta^2*B(t,maturite)*B(s,maturite)*(exp(-1*kappa*abs(t-s)) - exp(-
1*kappa*(t+s)))/(2*kappa)
}
```

#Fonction d'auto-covariance globale des fonds propres

```
AutoCovarbarFP <- fonction(t,s,alpha)
{
  exp(Mu1(t,alpha) + Mu1(s,alpha) + 0.5*(Sigma1(t)^2 + Sigma1(s)^2 + 2*Covar11(t,s))) -
exp(Mu1(t,alpha) + Mu1(s,alpha) + 0.5*(Sigma1(t)^2 + Sigma1(s)^2)) +
  exp(Mu1(t,alpha) + Mu2(s,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma1(t)^2 + Sigma2(s,maturite)^2 +
2*Covar12(t,s))) - exp(Mu1(t,alpha) + Mu2(s,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma1(t)^2 +
Sigma2(s,maturite)^2)) +
  exp(Mu1(s,alpha) + Mu2(t,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma1(s)^2 + Sigma2(t,maturite)^2 +
2*Covar21(t,s))) - exp(Mu1(s,alpha) + Mu2(t,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma1(s)^2 +
Sigma2(t,maturite)^2)) +
  exp(Mu2(s,maturite,alpha) + Mu2(t,maturite,alpha) + 0.5*(Sigma2(s,maturite)^2 +
Sigma2(t,maturite)^2 + 2*Covar22(t,s))) - exp( Mu2(s,maturite,alpha) + Mu2(t,maturite,alpha) +
0.5*(Sigma2(s,maturite)^2 + Sigma2(t,maturite)^2))
}
```

#Fonction d'auto-corrélation de l'approximation F-W

```
RhoX <- fonction(t,s,alpha)
{
  (log(AutoCovarbarFP(t,s,alpha) +
exp(MubarX(t,maturite,alpha)+MubarX(s,maturite,alpha)+0.5*(VarX(t,maturite,alpha)+VarX(s,maturi
te,alpha)))) - (MubarX(t,maturite,alpha)+MubarX(s,maturite,alpha)) -
0.5*(VarX(t,maturite,alpha)+VarX(s,maturite,alpha)))/(sqrt(VarX(t,maturite,alpha)*VarX(s,maturite,al
pha)))
}
```

```
#####
##### Application #####
#####
```

#Paramétrage

```

rho <- -0.2 #Corrélation entre Browniens taux et action
kappa <- 0.031 #Vitesse de retour à la moyenne dans Vasicek
theta <- 0.04 #Taux de long terme Vasicek
eta <- 0.01 #Volatilité taux Vasicek
r0 <- 0.03 #Taux d'intérêt observé à l'origine
MuS <- 0.08 # Drift Action Black-Scholes
SigmaS <- 0.2 # Volatilité Action Black-Scholes
MuL <- 0.04 #Drift Passif Black-Scholes
SigmaL <- 0.05 #Volatilité passif Black-Scholes
Mat <- 5 # Maturité du zéro-coupon
alpha <- 0.2 # Proportion d'actif Black-Scholes dans le portefeuille
pas <- 100 # Nombre de pas de discrétisation

```

```

#####
#### Calcul du prix du zéro-coupon en t=0 ####
#####

```

```

PZC0=exp((theta-(eta^2)/(2*kappa^2))*(1/kappa*(1-exp(-kappa*(Mat)))-Mat)-eta^2*(1/kappa*(1-
exp(-kappa*(Mat))))^2/(4*kappa))*exp(-1/kappa*(1-exp(-kappa*(Mat)))*r0)

```

#Calcul du vecteur cible dans la c.d.f.

```

Mu=matrix(0,pas,1)
Var=matrix(0,pas,1)
for (i in 1:pas)
{
  date<-i/pas
  Mu[i,1]=MubarX(date,maturite,alpha)
  Var[i,1]=VarX(date,maturite,alpha)
}

```

#Calcul de la matrice de covariance de la loi étudiée

```

Sigma <- fonction(pas,maturite, alpha)
{
  resultat <- matrix(0,pas,pas)
  for (i in 2:pas)
  {
    for (j in 1:(i-1))
    {
      resultat[i,j] <- (RhoX(i/pas,j/pas,alpha)+RhoX(j/pas,i/pas,alpha))/2
    }
  }
}

```

```

    resultat=resultat+t(resultat)+diag(1,pas)
    resultat
}

V=array(c(Sigma(pas,Mat, alpha)),dim=c(pas,pas))

#V=array(1) ###Seulement pour le cas pas=1

#####
#### Fonction de calcul des fonds propres (par dichotomie) ####
#####

#Initialiser a0min et a0max à, par exemple, 1 et 3

FondsPropres <- fonction(p0,a0min,a0max)
{
    a0test <- a0min + (a0max - a0min)/2
    test <- c((Mu+log(a0test))/sqrt(Var))
    CalculProba <- 1- pmvnorm(lower=-Inf, upper=test, sigma=V, algorithm = GenzBretz())[1]
    if (abs(CalculProba - p0) > 0.00001)
    {
        if (CalculProba > p0) FondsPropre(p0,a0test,a0max) else
FondsPropre(p0,a0min,a0test)
    }
    else return(a0test)
}

```

Annexe 2 : Comparaison des écarts relatifs obtenus dans les trois cas étudiés pour l'algorithme utilisant Genz-Bretz

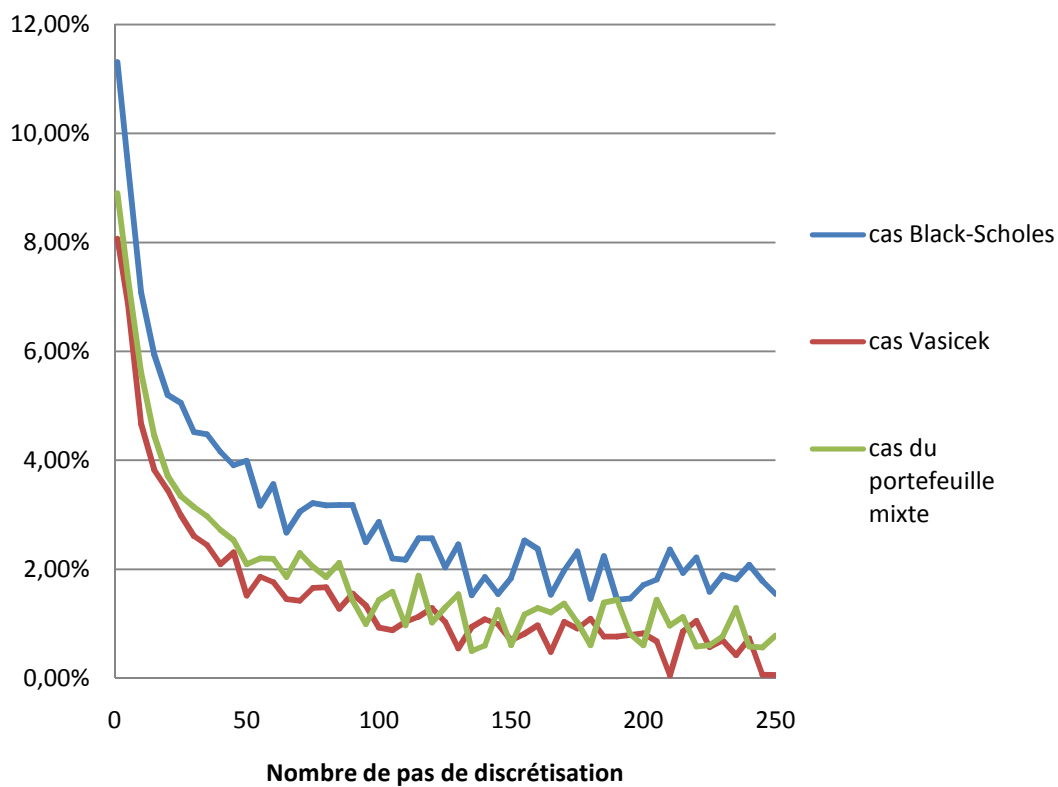


Figure 26 : Ecarts relatifs aux valeurs de référence

Annexe 3 : Graphes associés aux temps de calcul pour l'algorithme utilisant Genz-Bretz - cas du portefeuille mixte, $\alpha = 20\%$

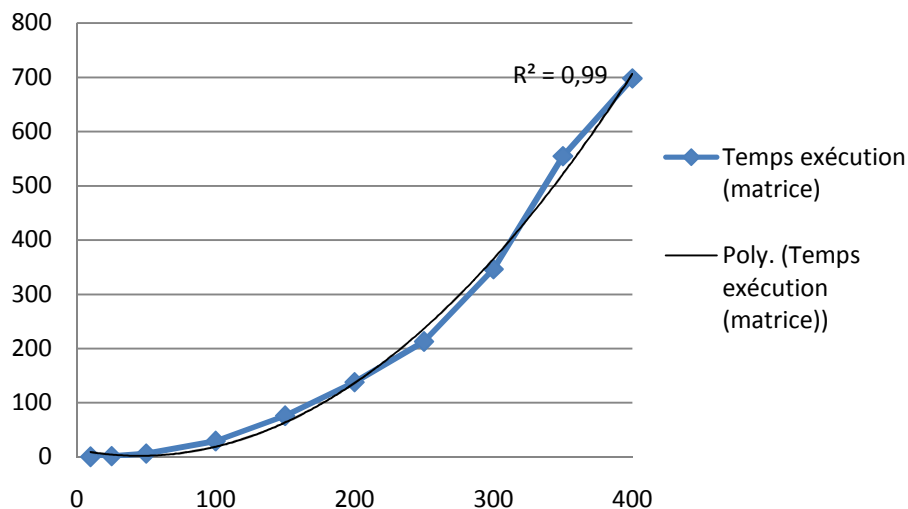


Figure 27 : Temps de construction de la matrice d'auto-covariance – cas du portefeuille mixte, $\alpha = 20\%$

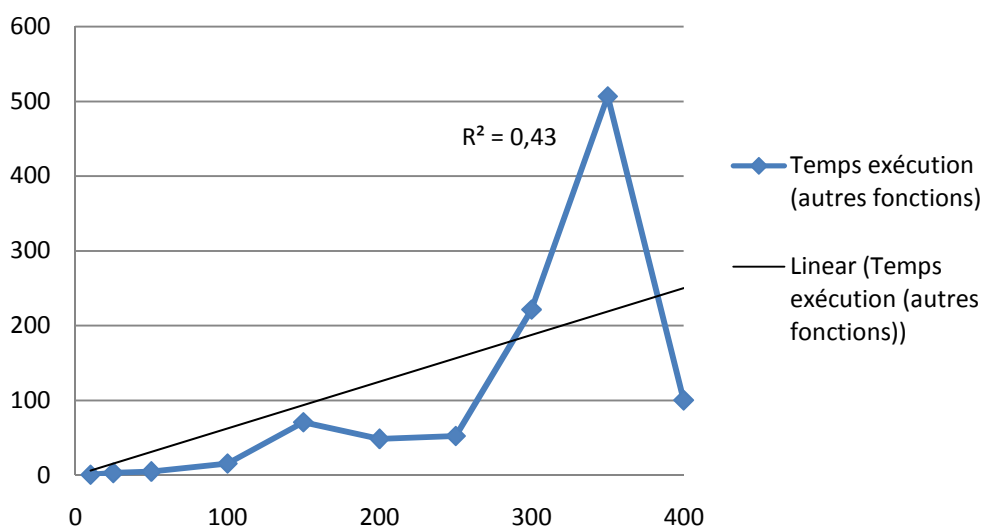


Figure 28 : Temps de calcul, autres fonctions – cas du portefeuille mixte, $\alpha=20\%$

Annexe 4 : Code de l'algorithme Monte-Carlo – cas du portefeuille mixte

```
#####
##### Paramétrage du modèle #####
#####

rho <- -0.2 #Corrélation entre Browniens taux et action
kappa <- 0.031 #Vitesse de retour à la moyenne dans Vasicek
theta <- 0.04 #Taux de long terme Vasicek
eta <- 0.01 #Volatilité taux Vasicek
r0 <- 0.03 #Taux d'intérêt observé à l'origine
MuS <- 0.08 # Drift Action Black-Scholes
SigmaS <- 0.2 # Volatilité Action Black-Scholes
MuL <- 0.04 #Drift Passif Black-Scholes
SigmaL <- 0.05 #Volatilité passif Black-Scholes
Mat <- 5 # Maturité du zéro-coupon

#####
#### Calcul du prix du zéro-coupon en t=0 ####
#####

PZC0=exp((theta-(eta^2)/(2*kappa^2))*(1/kappa*(1-exp(-kappa*(Mat)))-Mat)-eta^2*(1/kappa*(1-
exp(-kappa*(Mat))))^2/(4*kappa))*exp(-1/kappa*(1-exp(-kappa*(Mat)))*r0)
pas<-300
rho2=((1-exp(-kappa/pas))/kappa)/(sqrt((1-exp(-2*kappa/pas))/(pas*2*kappa)))
alpha=0.2

#####
##### Génération des browniens #####
#####

NbSimu=100000 #*Nombre de trajectoires simulées

Simulation <- fonction(pas)
{
  Rho=matrix(c(1,rho,0,rho, 1, 0, 0, 1),3) #Création de la matrice de corrélation
  C=t(chol(Rho)) #Matrice de Cholesky

#Création des matrices de lois normales corrélées utilisées pour la création de NbSimu/2 ponts
Browniens

  WS=matrix(rnorm(NbSimu/2*pas),NbSimu/2,pas)
  InterZC=matrix(rnorm(NbSimu/2*pas),NbSimu/2,pas)
  WZC=WS*C[2,1]+InterZC*C[2,2]
  InterL=matrix(rnorm(NbSimu/2*pas),NbSimu/2,pas)
  WL=WS*C[3,1]+InterZC*C[3,2]+InterL*C[3,3]
```

#Initialisation des tableaux contenant les valeurs prises par les Browniens simulés

```
BrownienS=matrix(0,NbSimu,pas+1)
BrownienS[,pas+1]=WS[,pas]
```

```
BrownienZC=matrix(0,NbSimu,pas+1)
BrownienZC[,pas+1]=WL[,pas]
```

```
BrownienL=matrix(0,NbSimu,pas+1)
BrownienL[,pas+1]=WL[,pas]
```

#Remplissage des tableaux précédents par la méthode des ponts Browniens

```
if (pas>1)
{
  for (j in pas:2){
    BrownienS[1:(NbSimu/2),j]=(j-
1)/j*BrownienS[1:(NbSimu/2),j+1]+1/j*BrownienS[1:(NbSimu/2),1]+sqrt((j-1)/pas/j)*WS[,j-1]
    BrownienZC[1:(NbSimu/2),j]=(j-
1)/j*BrownienZC[1:(NbSimu/2),j+1]+1/j*BrownienZC[1:(NbSimu/2),1]+sqrt((j-1)/pas/j)*WZC[,j-1]
    BrownienL[1:(NbSimu/2),j]=(j-
1)/j*BrownienL[1:(NbSimu/2),j+1]+1/j*BrownienL[1:(NbSimu/2),1]+sqrt((j-1)/pas/j)*WL[,j-1]
  }
}
```

#Complétion du tableau précédent par la méthode des variables antithétiques

```
BrownienS[(NbSimu/2+1):NbSimu,]=-BrownienS[1:(NbSimu/2),]
BrownienZC[(NbSimu/2+1):NbSimu,]=-BrownienZC[1:(NbSimu/2),]
BrownienL[(NbSimu/2+1):NbSimu,]=-BrownienL[1:(NbSimu/2),]
```

#Simulation des normales centrées réduites indépendantes utilisées pour générer les trajectoires de taux, méthode des variables antithétiques

```
U=matrix(0,NbSimu,pas)
U[1:(NbSimu/2),]=matrix(rnorm(pas*NbSimu/2),NbSimu/2,pas)
U[(NbSimu/2+1):NbSimu,]=-U[1:(NbSimu/2),]
```

```
#####
#####      Simulations des trajectoires de sous-jacents      #####
#####
```

```
S=matrix(1,NbSimu,pas+1)
L=matrix(1,NbSimu,pas+1)
PZC=matrix(1,NbSimu,pas+1)
r=matrix(r0,NbSimu,pas+1)
```

```
for (i in 2:(pas+1)){
  S[,i]=S[,i-1]*exp((MuS-(SigmaS^2)/2)*1/pas+SigmaS*(BrownienS[,i]-BrownienS[,i-1]))
```


27 mai 2011

```

L[,i]=L[,i-1]*exp((MuL-(SigmaL^2)/2)*1/pas+SigmaL*(BrownienL[,i]-BrownienL[,i-1]))
B=1/kappa*(1-exp(-kappa*(Mat-(i-1)/pas)))
A=exp((theta-(eta^2)/(2*kappa^2))*(B-Mat+(i-1)/pas)-eta^2*B^2/(4*kappa))
r[,i]=theta*(1-exp(-kappa/pas))+exp(-kappa/pas)*r[,i-
1]+eta*rho*rho2*sqrt(pas)*sqrt((1-exp(-2*kappa/pas))/(2*kappa))*(BrownienS[,i]-BrownienS[,i-
1])+eta*sqrt((1-exp(-2*kappa/pas))/(2*kappa))*sqrt((1-rho^2)+rho^2*(1-rho^2))*U[,i-1]
PZC[,i]=A*exp(-B*r[,i])/PZC0
}

```

```

#####
##### Recherche de A0 #####
#####

```

```

Min=matrix(1,NbSimu,1)
for (i in 1:NbSimu){
  Min[i,1]=min((alpha*S[i,2:(pas+1)]+(1-alpha)*PZC[i,2:(pas+1)])/L[i,2:(pas+1)])
}
FP=1/quantile(Min,probs=0.005)
FP
}

```

```

#####

```


Bibliographie

- [1] **Janssen J., Skiadas C. H., Zopounidis C. (2010)**, *Advances in stochastic modelling and data analysis*, Springer
- [2] **Planchet F., Therond S. (2005)**, *L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance*, Journal of Economic Literature Classification: C13 & G22.
- [3] **Revuz D., Yor M. (1999)**, *Continuous Martingales and Brownian Motion, third edition*, Springer
- [4] **Brigo D., Mercurio F. (2006)**, *Interest Rate Models – Theory and Practice*, Springer
- [5] **Fenton L. F. (1960)**, *The sum of lognormal probability distributions in scatter transmission systems*, IRE Trans
- [6] **Fischione C., Graziosi F., Santucci F. (2004)**, *Approximation for a Sum of On-Off Log-Normal Processes with Wireless Applications*, University of L'Aquila, Dpt. of Electrical Engineering, IEEE Communications Society
- [7] **El Faouzi N.-E., Maurin M. (2006)**, *Sur la loi de la somme de variables log-normales : application à la fiabilité des temps de parcours routiers*, Article de recherche, INRETS
- [8] **Xuefei M., Tetsuhisa M., Torsten H. (2009)**, *mvtnorm: New Numerical Algorithm for Multivariate Normal Probabilities*, The R journal
- [9] **Glasserman P. (2000)**, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer
- [10] **Devineau L., Loisel S. (2009)**, *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II*, Article de recherche, CCSD
- [11] **Drezner Z. (1992)**, *Computation of the multivariate normal integral*, California State University, Fullerton