

Christophe FRANTZ

sur

*Tarifification Actuarielle contre Financière
des Contrats en Unités de Compte*

Stage effectué à :

SECURA Belgian Re
Avenue des Nerviens, 9-31
Boîte 6
B - 1040 BRUXELLES



Sous la direction de :

Jean-François WALHIN

Responsable du Département Recherche & Développement

tél : +00 32 (0)2 504 82 22

fax : +00 32 (0)2 504 82 00

mail : jfw@secura-re.com

RESUME

Mots clés

Unité de compte, Tarification, Black-Scholes, Marge de solvabilité, Conditional Tail Expectation

Un contrat d'assurance vie en unités de compte (UC) est un contrat qui garantit un montant indexé sur un actif financier (l'UC). Nous disons d'un tel contrat qu'il est muni d'une garantie plancher lorsque celui-ci verse en cas de décès le maximum entre un montant garanti (par exemple le montant initial investi) et la valeur de l'UC. De ce fait, l'engagement de l'assureur à la date t en cas de décès équivaut à : $\max(K, S_t)$ ($= S_t + \max(K - S_t, 0)$), où K correspond au montant de la garantie plancher et S_t la valeur de l'UC au moment t . Dans la majorité des cas, avec ce type de produit, l'assureur cède 100% des sommes sous-risques aux réassureurs et ainsi, l'engagement du réassureur en cas de décès est équivalent à : $\max(K - S_t, 0)$. Nous constatons alors que l'engagement à la date t du réassureur en cas de décès sur ce type de produit est équivalent au flux terminal d'une option de vente européenne (put).

A partir de cette dernière remarque naît toute la problématique du sujet à savoir : comment déterminer la prime unique d'un tel contrat ? Par l'application de principes actuariels, tel que le principe d'équivalence, ou financiers, en utilisant des méthodes de tarification à base d'options ? Ce sujet est d'autant plus intéressant que les prix obtenus suivant chaque approche - à hypothèses égales - peuvent être jusqu'à dix fois différents.

Pour être en mesure de répondre à cette question, nous développons les deux méthodes de tarification de manière théorique.

L'approche actuarielle adopte la démarche d'un actuair qui souhaite tarifier un produit d'assurance vie, elle fournit une prime fondée sur le principe d'équivalence qui est égale à l'espérance de la somme actualisée des coûts futurs du contrat. La formule analytique de cette prime ressemble fort à la formule de tarification de Black-Scholes d'un put européen, à la différence qu'ici μ (le taux de rendement espéré de l'UC) remplace r (le taux sans risque). Pourtant, dans le cas présent, nous ne considérons pas la tarification d'un instrument financier mais appliquons simplement le principe d'équivalence bien connu en assurance vie.

L'approche financière quant à elle, adopte la démarche d'un financier qui considère que le contrat est un actif contingent. Sa démarche va être simple : le décès de l'assuré en t génère le paiement d'un montant équivalent au flux terminal d'une option de vente européenne de prix d'exercice K et maturité t . Le prix du contrat est donc égal à une succession de prix de puts européens de maturités différentes. Or, il est aisé d'évaluer le prix d'un put par la célèbre formule de Black-Scholes et donc relativement simple de calculer la prime de notre contrat par l'approche financière.

Les deux approches nous donnent donc des prix assez proches d'un point de vue analytique, la seule différence est que l'approche actuarielle fournit une prime sous la mesure de probabilité physique P et l'approche financière sous la mesure de probabilité risque-neutre Q . Mais nous ne savons rien quant aux différences de prix d'un point de vue pratique et surtout nous ne savons pas quel tarif appliquer.

C'est pour répondre à cette dernière question que nous développons un chapitre dédié à la simulation stochastique. En effet, grâce à des simulations de type Monte-Carlo, nous pouvons nous donner une idée de la prime moyenne mais nous pouvons également observer la distribution des coûts futurs actualisés obtenus suivant chaque démarche. Suite à ces simulations, nous constatons que la « Prime Pure Unique Actuarielle » (PPU^{Act}) est plus faible que la « Prime Pure Unique Financière » (PPU^{Fi}) (tant que μ est supérieur à r) mais PPU^{Act} est plus volatile que PPU^{Fi} .

Pour donner un tarif complet nous devons alors déterminer la Prime Technico-Financière (PTF), c'est à dire la prime qui prend en compte le coût d'allocation d'un capital dépendant de la volatilité des flux futurs, ce capital est encore appelé « marge de solvabilité ».

Le principe retenu pour le calcul de PTF est la Net Present Value (NPV), qui correspond à la valeur actualisée des profits/pertes futurs où le taux d'actualisation correspond au taux de rendement espéré de l'actionnaire qui investit dans la compagnie, ce taux est aussi appelé coût du capital (COC). De ce fait, si les profits/pertes sont fonction des coûts futurs, des provisions technique futures et de la marge de solvabilité future, la seule question qui subsiste est alors : « comment évaluer la marge de solvabilité ? ». En effet, nous connaissons les coûts moyens pour une date t vus de 0 grâce à nos simulations et de même pour les provisions techniques moyennes.

Afin de déterminer la marge de solvabilité pour une date t future, nous utilisons la mesure de risque « Conditional Tail Expectation » (CTE ou Tail-VaR) et l'appliquons à la distribution des coûts futurs actualisés en t . Cette marge de solvabilité pour la date t de seuil α représente alors la perte espérée en t sachant que cette perte appartient au quantile supérieur $(1-\alpha)\%$ de la distribution de celle-ci.

PTF prend alors en compte l'état moyen des provisions de chaque date t vu de 0 et le capital moyen adéquat au seuil α . Insistons sur le fait que les niveaux moyens de provisions et de capital sont vus de 0 et ne prennent pas en compte une éventuelle ruine entre deux dates, il ne s'agit donc pas de déterminer le montant des provisions et du capital à chaque date mais plutôt de se donner un niveau moyen de provisions permettant de se faire une idée du capital à allouer en conséquence.

Nous obtenons ainsi une expression relativement simple pour PTF.

ABSTRACT

Keywords

Unit-linked, Pricing, Black-Scholes, Solvency Margin, Conditional Tail Expectation

With a unit-linked life insurance contract, the sum insured depends on the development of some stock. Such a contract is called unit-linked with a floorlet guaranty when the sum insured is the maximum between a guaranteed amount (like the initial invested amount) and the value of the stock. Hence, the insurer's liability at t is: $\max(K, S_t)$ ($= S_t + \max(K - S_t, 0)$), where K correspond to the floorlet amount and S_t to the value of the stock at t . Typically, with this kind of contracts, the insurer let 100% of the sum at risk to the reinsurer and then, the reinsurer's liability at t is: $\max(K - S_t, 0)$. We can see that reinsurer's liability on this type of product is equivalent to the terminal cash-flow of a European put option. This last remark shows us the interest of the subject: how to determine the premium of such a contract? By using actuarial principles, such that equivalence principle, or financial principles by using option pricing? This question is all the more interesting that the prices obtained according to each approach – with the same hypothesis – can be ten times different.

In order to answer to this question, we develop the two pricing approaches in a theoretical way.

The actuarial approach adopt the thought process of an actuary who wants to price a life insurance contract, it gives a premium based on the equivalence principle equals to the present value of the future costs of the contract. The analytical formula of this premium looks like the Black-Scholes pricing formula applied to European put option with the difference that μ (the expected rate of return of the stock) replace r (the risk-free rate). But, in this case, we do not consider the pricing of a financial instrument, we only apply, the well-known life insurance equivalence principle.

The financial pricing adopts the approach of a trader who considers that the contract is equivalent to a contingent claim. Its thought process will be straightforward: the insured death's at t generate a payment equivalent to the terminal cash-flow of a European put option with strike price K and maturity t . The price of the contract is then equal to a succession of European put prices with different maturities. As it is simple to evaluate the price of a put option by using the famous Black-Scholes formula, it is quite easy to calculate the premium of our contract with the financial approach.

The two approaches provide us with quite close prices on the analytical point of view, the only difference is that the actuarial approach gives us a premium under the physical P probability measure and the financial approach under the risk-neutral Q probability measure. But we do not know anything about price differences on the practical point of view and especially anything about which pricing we have to apply.

In order to answer to this last question, we develop a chapter dedicated to stochastic simulation. Indeed, with the Monte-Carlo simulations, we can have an idea of the average premium but also have a look to the distribution of the present value of future costs according to each approach. Following these simulations, we note that the “Actuarial Unique Pure Premium” (UPP^{Act}) is less than the “Financial Unique Pure Premium” (UPP^{Fi}) (whereas μ is greater than r) but UPP^{Act} is more volatile than UPP^{Fi} .

To provide a full pricing, we must determine the Technical-Financial Premium (TFP): the premium that takes into account the cost of allowance of capital depending on the volatility of the future cash-flow, this capital is also called “solvency margin”.

The principle chose to calculate TFP is the Net Present Value (NPV) that correspond to the present value of the futures gains/losses where the actualisation rate is equal to expected rate of return of the shareholder who invests in the company, this rate is also called “cost of capital” (COC). Hence, if the futures gains/losses are function of the futures costs, the futures technical reserves and the future solvency margin, the question is “how to determine the solvency margin?”. Indeed, we know the pattern of the future costs for t view from 0, and the same for the pattern of the futures technical reserves.

To determine the solvency margin for a future date t , we use the risk measure “Conditional Tail Expectation” (CTE or Tail VaR) and apply it to the distribution of the value at t of the future costs. This solvency margin for t of level α represents the expected value of the loss given that the loss falls in the upper $(1-\alpha)$ tail of the distribution.

Hence, TFP takes into account the mean state of the reserves for each date t viewed from 0 and the accurate capital to allocate at level α . We insist on the fact that the mean level of the reserves and the capital are viewed from 0 et do not take into account a ruin probability between two dates, we do not want to determine the reserves’ amount and the exact solvency margin but we want to give us a mean level of the reserves according to make us an idea of the capital to allocate consequently.

We therefore obtain a quite simple expression for TFP.

SOMMAIRE

RESUME..... 3

ABSTRACT 5

INTRODUCTION 11

1. CONTEXTE ET OBJET DU MEMOIRE..... 12

1.1. SECURA BELGIAN-RE 12

1.2. LES CONTRATS EN UNITES DE COMPTE AVEC GARANTIE PLANCHER 13

1.3. INTERET DU SUJET 16

2. METHODES UTILISEES 17

3. RESULTATS OBTENUS..... 17

CHAPITRE I : FORMULES ET DEFINITIONS..... 19

1. MORTALITE..... 20

1.1. MODELE STOCHASTIQUE..... 20

1.2. FORCE DE MORTALITE 20

1.3. DISTRIBUTION DE LA DUREE DE VIE RESTANTE 21

1.4. QUELQUES LOIS DE MORTALITE STANDARD 22

1.4.1. *Loi exponentielle*..... 22

1.4.2. *Loi de Weibull*..... 24

1.4.3. *Loi de Gompertz-Makeham* 24

1.5. AGES ET DUREES DE VIE NON-ENTIERS 25

1.5.1. *Hypothèse de répartition uniforme*..... 25

1.5.2. *Hypothèse de Balducci*..... 26

1.5.3. *Hypothèse de force de mortalité constante*..... 26

1.6. TABLES DE MORTALITE..... 27

1.6.1. *Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances (UPEA)*..... 27

1.6.2. *Tables UPEA* 27

2. FINANCE..... 28

2.1. PROCESSUS STOCHASTIQUES : GENERALITES 28

2.2. PROCESSUS STOCHASTIQUES ET MOUVEMENT BROWNIEN 29

Définition 2.2.1 : Processus stochastique à temps continu..... 29

Définition 2.2.2 : Filtration 29

Définition 2.2.3 : Processus à accroissements indépendants..... 29

Définition 2.2.4 : Processus à accroissements stationnaires 29

Définition 2.2.5 : Mouvement brownien standard..... 30

Définition 2.2.6 : Mouvement brownien géométrique 30

Propriété 2.2.7 : Espérance et variance d'un mouvement brownien géométrique..... 30

2.3. MARTINGALES EN TEMPS CONTINU 31

Définition 2.3.1 : Martingale..... 31

Propriété 2.3.2 : Mouvements browniens et martingales 31

2.4. CALCUL D'ITO 32

Définition 2.4.1 : Processus d'Itô..... 32

Définition 2.4.2 : Formule d'Itô..... 32

Proposition 2.4.3 : Formule d'intégration par parties..... 33

Définition 2.4.4 : Transformation de Girsanov..... 33

CHAPITRE II : APPROCHE ACTUARIELLE.....	35
1. MODELISATION DE L'ACTIF FINANCIER.....	36
1.1. EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE	36
1.1.1. Recherche de la solution	36
1.1.2. Résultat.....	36
1.2. LOI DU RENDEMENT DE L'ACTIF FINANCIER	37
2. DETERMINATION DE LA PRIME PURE UNIQUE (PPU).....	38
2.1. EVALUATION DE L'ESPERANCE DE LA PERTE EN T POUR UN DECES EN DATE T	38
2.2. DEFINITION DE LA FILTRATION \mathcal{F}_T	39
2.3. CALCUL DE LA PRIME PURE UNIQUE	39
3. CONCLUSION.....	39
CHAPITRE III : APPROCHE FINANCIERE	41
1. MODELE	42
1.1. HYPOTHESES RELATIVES AU MODELE DE BLACK-SCHOLES	42
1.1.1. Marché parfait.....	42
1.1.2. Marché complet et Stratégie.....	43
1.1.2.1. Définition d'une stratégie.....	43
1.1.2.2. Processus de valeur associés à une stratégie	43
1.1.2.3. Stratégie autofinancée.....	44
1.1.3. Absence d'opportunité d'arbitrage.....	44
1.2. CHANGEMENT DE MESURE DE PROBABILITE.....	45
1.3. MESURES MARTINGALES EQUIVALENTES.....	46
2. EVALUATION DE L'ESPERANCE DE LA PERTE.....	47
2.1. PRINCIPE.....	47
2.2. CALCUL DE L'ESPERANCE DE LA PERTE EN CAS DE DECES EN DATE T	47
2.3. COMPARAISON DES DEUX APPROCHES	48
2.4. DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE LA STRATEGIE DE COUVERTURE.....	49
2.5. CALCUL DE LA PPU.....	50
2.6. STRATEGIE OPTIMALE DE COUVERTURE.....	50
3. CONCLUSION.....	51
CHAPITRE IV : SIMULATION STOCHASTIQUE	53
1. POURQUOI LA SIMULATION STOCHASTIQUE ?	54
2. METHODE DE SIMULATION	54
2.1. SIMULATION DE L'ACTIF FINANCIER	55
2.2. SIMULATION DES DECES	56
2.2.1. Modèle binomial du nombre de décès	56
2.2.2. Procédure de simulation.....	56
3. ADAPTATION DE CHAQUE APPROCHE A LA SIMULATION STOCHASTIQUE.....	57
3.1. APPROCHE ACTUARIELLE.....	57
3.1.1. Formulation mathématique	57
3.1.2. Comparaison avec la formule théorique	58
3.2. APPROCHE FINANCIERE	59
3.2.1. Détermination du coût de la stratégie de couverture.....	59
3.2.2. Flux de paiement à effectuer en cas de décès	60
3.2.3. Comparaison avec la formule théorique	60

4. RESULTATS.....	62
4.1. APPROCHE ACTUARIELLE.....	62
4.1.1. Statistiques.....	62
4.1.2. Distribution	62
4.1.3. Commentaires.....	62
4.2. APPROCHE FINANCIERE	63
4.2.1. Statistiques.....	63
4.2.2. Distribution	63
4.2.3. Commentaires.....	63
5. ANALYSE DE SENSIBILITE.....	64
5.1. PRINCIPE.....	64
5.2. SENSIBILITE PAR RAPPORT A μ	64
5.2.1. Distribution des CFA^{Act}	64
5.2.1.1. Statistiques	64
5.2.1.2. Distributions.....	65
5.2.1.3. Commentaires	65
5.2.2. Distribution des CFA^{Fi}	66
5.2.2.1. Statistiques	66
5.2.2.2. Distributions.....	66
5.2.2.3. Commentaires	67
5.3. SENSIBILITE PAR RAPPORT A σ	67
5.3.1. Distribution des CFA^{Act}	67
5.3.1.1. Statistiques	67
5.3.1.2. Distributions.....	68
5.3.1.3. Commentaires	68
5.3.2. Distribution des CFA^{Fi}	68
5.3.2.1. Statistiques	68
5.3.2.2. Distributions.....	69
5.3.2.3. Commentaires	69
6. CONCLUSION.....	70
CHAPITRE V : MODELE DE CASH-FLOW.....	71
1. VOLATILITE DES CFA.....	72
2. MODÈLE DE CASH-FLOW.....	73
2.1. LES PERTES MOYENNES	73
2.2. LES VARIATIONS MOYENNES DE PROVISIONS MATHÉMATIQUES	73
2.3. LES VARIATIONS MOYENNES DE CAPITAL	74
2.3.1. Marge de solvabilité.....	74
2.3.1.1. Définition.....	74
2.3.1.2. Pourquoi l'existence d'une marge de solvabilité ?	74
2.3.1.3. De quoi est constituée la marge de solvabilité ?	74
2.4. DETERMINATION DE LA MARGE DE SOLVABILITE	75
2.4.1. Mesures de risque	75
2.4.1.1. « Value at Risk »	75
2.4.1.2. « Conditional Tail Expectation ».....	76
2.5. FORMULATION DU CAPITAL MOYEN.....	76
2.6. TAXES ET INTERETS.....	77
2.7. COUT DU CAPITAL (COST OF CAPITAL OU COC).....	77
3. PRINCIPE DE DETERMINATION DE LA PRIME TECHNICO-FINANCIERE.....	78
3.1. NET PRESENT VALUE (NPV)	78
3.2. DETERMINATION DES PROFITS FUTURS	78
3.3. CALCUL DE LA PRIME TECHNICO-FINANCIERE :	79
4. CONCLUSION.....	79

CONCLUSION	81
1. RESULTATS	82
2. QUESTIONS OUVERTES	83
3. EXTENSIONS POSSIBLES DU MODELE	83
BIBLIOGRAPHIE	85
GLOSSAIRE	89
NOTATIONS MATHÉMATIQUES	91
TABLES DES ILLUSTRATIONS	93
ANNEXES	95
REMERCIEMENTS	103

INTRODUCTION

Avant de commencer notre étude à proprement parler, nous exposons le cadre de celle-ci c'est à dire l'environnement dans lequel nous nous plaçons et les raisons qui nous ont poussé à développer ce sujet. Nous terminons cette introduction en exposant les différents résultats que nous obtenons.

1. CONTEXTE ET OBJET DU MEMOIRE

1.1. SECURA BELGIAN-RE

Secura Belgian Re a été fondée en 1946, elle est la filiale réassurance du bancassureur KBCAssurance, 3ème assureur belge et actionnaire principal avec 95,04% du capital, contre 4,96% pour les AP Assurance (groupe DEXIA). Secura est aujourd'hui la seule compagnie de réassurance belge, elle exerce l'essentiel de son activité en Europe, et est également active au Japon, mais n'est pratiquement pas présente sur le marché américain. Non sans humour, le comité exécutif de Secura accueille l'internaute par cette phrase : « *Nous ne sommes peut-être pas le plus grand réassureur, mais nous essayons de fournir la meilleure qualité de service* ». Notons qu'un dixième du personnel de Secura est actuariaire et actif de manière permanente au sein du département Recherche & Développement.

L'an passé en 2001, la compagnie a collecté un volume de primes nettes de 196,9 millions d'euros, en hausse de 24%. L'année comptable se clôture avec un bénéfice de 563.115,72 euros. Suite à l'augmentation du capital de 75 millions d'euros par KBCAssurance en 2001, les moyens propres atteignent à présent 183,1 millions d'euros pour 94,4 millions d'euros au 31 décembre 2000. Toutes ces informations sont disponibles sur [S-2].

Tableau 1 : Evolution de la prime (en millions d'euros) :

	2001	2000
Prime brute totale	256,7	215,5
Prime des affaires cédées par le groupe	22,8	21,2
Prime brute ajustée	233,9	194,4
Prime acquise nette	196,9	158,8

Tableau 2 : Répartition de la prime brute ajustée par branche et par type (en millions d'euros) :

	2001		2000	
Vie	21,4	9,1 %	13,3	6,8%
Short-Tail proportionnel	82,8	35,4%	72	37,0%
Short-Tail non-proportionnel	18,5	7,9%	16,3	8,4%
Long-Tail proportionnel	58,8	25,1%	46,6	24,0%
Long-Tail non-proportionnel	25,0	10,7%	24,1	12,4%
Divers	27,4	11,7%	22,1	11,4%

Tableau 3 : Répartition géographique de la prime brute ajustée (en millions d'euros) :

	2001		2000	
Benelux	78.7	33.60%	65.1	33.50%
Europe du nord	52.9	22.60%	41.3	21.20%
Europe Centrale	27.7	11.80%	33.1	17.00%
Europe du sud	61.1	26.10%	41.3	21.30%
Reste du monde	13.5	5.80%	13.6	7.00%

1.2. LES CONTRATS EN UNITES DE COMPTE AVEC GARANTIE PLANCHER

Le cadre légal en Belgique pour les types de produits lié à des fonds d'investissement est régi par l'arrêté royal du 17 décembre 1992 (articles 64 à 73). Cet arrêté royal définit le cadre légal permettant de créer, à l'intérieur du bilan des compagnies, des fonds d'actifs et de lier le rendement de contrats d'assurance à ces fonds. Nous disons communément que ce type de produit appartient à la branche 23. Toutes ces descriptions font référence à [L-1].

Les produits d'assurance relevant de la branche 23 développés par les compagnies d'assurance permettent au preneur d'assurance d'investir via des fonds dans des valeurs mobilières cotées en bourse (essentiellement des actions et des obligations).

Ceci se fait par le biais d'unités de compte (UC). Lorsqu'une prime est versée, elle est convertie (après prélèvement des frais) en un nombre d'UC qui est repris dans le contrat. De même lors d'un rachat, un nombre d'unités est déduit du contrat et le client en perçoit la contre-valeur en devise.

Le franc nominal est donc remplacé par la valeur d'unité ce qui explique la terminologie anglo-saxonne pour ce type de produits : « unit-linked ».

La valeur de l'unité – publiée dans les journaux financiers – n'est pas un cours variant en fonction de l'offre et de la demande, mais une valeur d'inventaire. Cette valeur d'unité ou d'inventaire, à l'instant t , est donnée par le rapport entre la valeur du fonds et le nombre d'unités qu'il contient. La valeur du fonds est déterminée en fonction des cours boursiers des valeurs qui le composent.

La valeur d'inventaire est dite nette (VNI) lorsque les frais de gestion du fonds (taxes boursières, commissions d'intermédiaire, rémunération des gestionnaires, ...) sont déduits.

Il est important de noter que le preneur d'assurance ne peut pas connaître la valeur de l'unité avant d'effectuer un versement ou un rachat (souscription à l'aveugle). Pour cette raison, la conversion en unités est effectuée, au plus tôt, le jour suivant le versement ou la demande de rachat sur base de la valeur d'unité à cette date.

Contrairement à la branche 21 où le volet épargne prévoit un rendement garanti majoré généralement d'une participation bénéficiaire, la branche 23 ne présente, en principe, aucune garantie de résultat et aucune participation bénéficiaire ne peut être octroyée.

Le rendement obtenu sera fonction du comportement des marchés financiers et de la capacité des gestionnaires du ou des fonds à en profiter. Cela signifie que le preneur d'assurance supporte la totalité du risque financier inhérent à l'opération.

Il a cependant l'occasion de choisir la compagnie gestionnaire ainsi que la composition du ou des fonds et leur niveau de risque. Les possibilités ne manquent pas : fonds d'actions plus ou moins risquées, d'obligations, d'options, ... ou de combinaisons de ces produits financiers, fonds basés sur la croissance ou la moyenne d'un ou de plusieurs indices, fonds à cliquets, fonds sectoriels, fonds géographiques, ...

En outre, ces produits peuvent avoir un terme fixé ou une durée indéterminée, prévoir une période de souscription limitée ou illimitée, imposer des pénalités de sortie ou encore être libellés en devise étrangère.

Le volet épargne (prestation en cas de vie) peut également être accompagné d'un volet de prévoyance consistant généralement en une couverture décès spécifique. Dans ce cas, la compagnie d'assurance conserve le risque d'assurance (ou technique) qui résulte de la couverture de prévoyance.

Les fonds de placement peuvent être gérés :

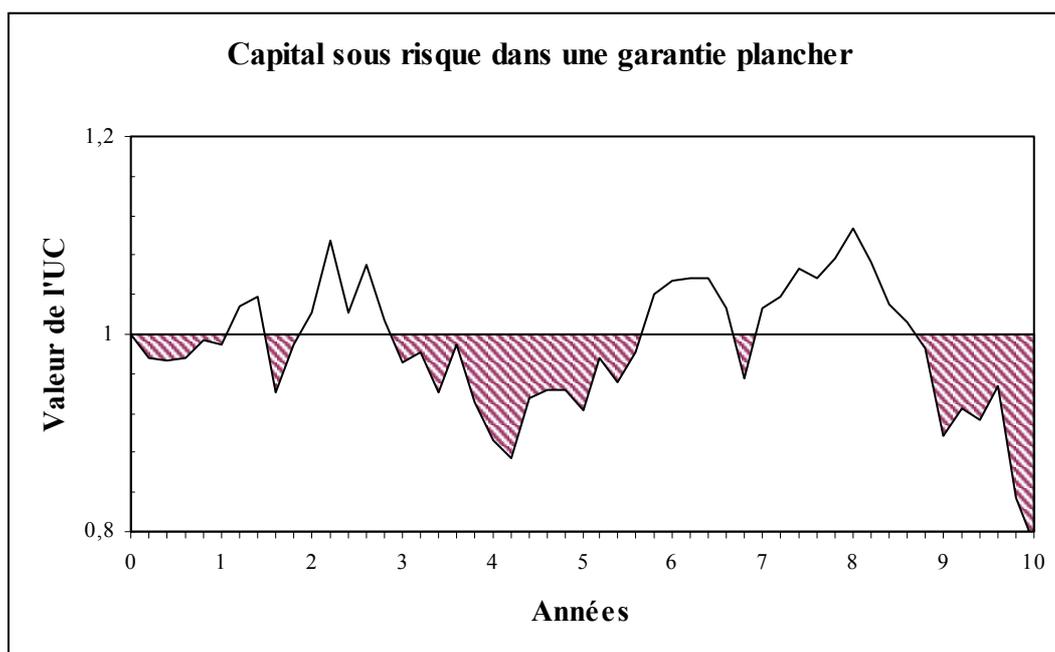
- soit par la compagnie d'assurance elle-même sous la forme d'un compte distinct dans son bilan d'activité ; il s'agit d'un fonds interne.
- soit par une société juridiquement distincte de la compagnie d'assurance ; il s'agit alors d'un fonds externe.

La compagnie d'assurance doit fixer la politique d'investissement du fonds ainsi que les règles permettant à tout instant de déterminer la valeur d'unité. Elle est tenue d'informer le preneur d'assurance lors de la souscription. Elle doit également lui communiquer au moins une fois par an la valeur de l'unité (état annuel).

Bien que le risque financier ne soit pas supporté par la compagnie d'assurance, il s'agit d'un produit d'assurance vie qui nécessite un preneur, un assuré, un bénéficiaire en cas de vie et en cas de décès. En cas de décès de l'assuré, le contrat prend fin et la contre-valeur des unités du contrat est payée au bénéficiaire (plus le capital décès garanti éventuel).

Nous nous intéressons aux contrats de la branche 23 munis d'une garantie plancher, c'est à dire qu'en cas de décès, le montant initial investi est remboursé.

Figure 1 : Illustration du capital sous risque d'un contrat en UC avec garantie plancher



La partie colorée de la Figure 1 représente le capital sous-risque d'un contrat en UC avec garantie plancher, c'est à dire que si le décès de l'assuré survient à un instant où la valeur de l'UC est inférieure à 1 (dans notre exemple), l'assureur est tenu de payer le maximum entre 1 et la valeur de l'UC. D'un point de vue mathématique, l'engagement de l'assureur à l'instant t est :

$$E_t^A = \max(K, S_t) = S_t + \max(K - S_t, 0),$$

où S_t est la valeur de l'UC à la date t et K est le montant de la garantie plancher (1 dans notre exemple).

Mais n'oublions pas que nous nous intéressons à la partie réassurance de ce type de contrat. Nous supposons que l'assureur cède 100% du capital sous risque et ainsi, l'engagement du réassureur à l'instant t correspond à :

$$E_t^R = \max(K - S_t, 0), \tag{1}$$

c'est à dire uniquement la partie sous risque.

Au regard de cette dernière formule, nous retrouvons le caractère optionnel du contrat, en effet, la formule (1) décrit exactement le paiement terminal d'un option de vente européenne (put). Rappelons qu'un put européen est un contrat conférant le droit de vendre une quantité spécifiée d'un actif à un prix déterminé à l'avance à une échéance fixée.

C'est à partir de cette dernière remarque que naît la problématique du sujet : comment déterminer la prime unique d'un tel contrat? Par l'application de principes actuariels classiques tels que le principe d'équivalence bien connu en assurance vie ou le principe de tarification financière, c'est à dire l'utilisation de couvertures sur les marchés financiers ?

1.3. INTERET DU SUJET

Secura a été amené à se positionner sur le marché des produits d'assurance vie en unités de compte avec garantie plancher. Suite à une étude menée en 2000 par un étudiant de troisième année d'Actuariat de Strasbourg, la méthode de tarification de ces produits utilisée par Secura est une application du modèle de Black-Scholes sous la mesure de probabilité physique P . Toute la méthodologie est décrite dans le très instructif mémoire de Frédéric Daeffler [M-2] et ce principe de tarification est très pratique dans la mesure où il ne demande aucun temps de calcul (aucune simulation), très flexible car il prend en compte un grand nombre de paramètres (rendement et volatilité de l'actif sous-jacent, âge de l'assuré,...) et enfin simple d'utilisation : un programme SAS IML a été réalisé. Il devient alors très aisé de tarifier le type de contrat qui nous concerne.

Toutefois, suite à [M-2] plusieurs questions subsistent.

Dans un premier temps nous pouvons nous interroger sur la pertinence de la méthodologie adoptée. En effet, utiliser la formule de Black-Scholes sous la mesure de probabilité physique P relève d'une approche tarifaire que nous qualifierons d'actuarielle, c'est à dire que nous évaluons la prime de notre contrat comme nous évaluerions celle d'un contrat d'assurance vie classique à la seule différence que le montant versé en cas de décès dépend d'un actif sous-jacent.

Cependant un autre type d'approche est envisageable, nous dirons qu'il s'agit d'une approche financière. En effet, comme les montants versés en cas de décès dépendent d'un actif financier, plaçons nous dans la peau d'un financier, comment ferait un financier pour tarifier un tel contrat ? Intuitivement, il dirait que le contrat est un actif contingent et qu'il suffit de se « couvrir » sur les marchés financiers afin de dupliquer les flux générés par cet actif contingent, ainsi, la stratégie de couverture correspond à l'achat d'une succession d'options de vente européennes (puts). La prime de notre contrat est donc la somme des prix de ces puts. Cette approche revient à appliquer la formule de Black-Scholes sous la mesure de probabilité risque-neutre Q .

Une première interrogation est donc la suivante : quelle approche utiliser pour tarifier ces produits, dans la mesure où, en prenant les mêmes hypothèses de départ, les prix fournis par les deux méthodes peuvent être jusqu'à dix fois différents ? Cette question est partiellement abordée dans le pertinent mémoire de Donatien Hainaut [M-3].

Dans un second temps, nous pouvons nous interroger sur la pertinence, cette fois, du résultat obtenu par l'application de la célèbre formule de Black-Scholes (que ce soit sous P ou sous Q). Nous obtenons en fait une prime moyenne mais nous ne savons rien quant à la variance de ces coûts futurs actualisés ou plus généralement de leur distribution, ce qui est plutôt dangereux. Nous trouvons d'ailleurs une réponse partielle à notre première interrogation, en effet il semble plutôt intuitif qu'à hypothèses égales, la prime déterminée par tarification financière a une variance plus faible que celle déterminée par tarification actuarielle. Pour pouvoir comparer ces variances, nous avons recours à la simulation stochastique.

Ce sujet est donc particulièrement intéressant dans le sens où nous devons comparer deux méthodes de tarification et par la même occasion déterminer la méthode de tarification la plus adaptée à notre contrat. Abordons maintenant les méthodes utilisées tout au long de l'étude.

2. METHODES UTILISEES

Les méthodes utilisées font majoritairement appel aux mathématiques relatives à l'assurance vie, à la finance et, d'un point de vue plus pratique à la programmation informatique.

En assurance vie, nous avons recours aux notions de base décrites dans le paragraphe 1 à partir de la page 20, c'est à dire la modélisation du processus stochastique représentant les décès et l'utilisation de lois de mortalité.

Concernant les outils financiers nous recourons aux processus stochastiques en temps continu (particulièrement au mouvement brownien), aux mesures martingales et à la célèbre formule de tarification des options de Black-Scholes.

Enfin, nous implémentons un programme de simulation stochastique et faisons appel à tout le « background » probabiliste et statistique relatif à cette méthode.

Une description détaillée des notions nécessaires à notre étude figure dans le Chapitre I, de la page 20 à la page 39.

Intéressons nous maintenant aux résultats obtenus en conclusion de cette étude.

3. RESULTATS OBTENUS

Les résultats obtenus à la clôture de cette étude sont multiples.

D'un point de vue tarification, nous obtenons les formules des primes pures découlant respectivement de l'approche actuarielle et de l'approche financière (chapitre II et III) et constatons que les deux formules de tarification ont la même structure et ne diffèrent que d'un paramètre (confirmé dans[L-2]).

Nous confirmons également notre intuition de départ à savoir que la prime déterminée par l'approche actuarielle est plus volatile que celle déterminée par l'approche financière et ceci dû à la couverture sur les marchés financiers induite par la démarche financière. Nous analysons également l'influence des différents paramètres induits par nos hypothèses sur la prime pure obtenue par chaque méthode, cette partie de l'étude est détaillée dans le chapitre IV, paragraphe 5 à partir de la page 64.

Enfin, nous déterminons une méthode d'évaluation de la prime technico-financière, c'est à dire la prime qui tient compte des flux positifs et négatifs futurs. Ce modèle de cash-flow permet de déterminer le montant de capital à allouer pour la marge de solvabilité du contrat. Cette dernière étape de construction de la prime du contrat est décrite dans le chapitre V.

CHAPITRE I : FORMULES ET DEFINITIONS

Tout au long du mémoire nous faisons référence à divers grands concepts théoriques comme par exemple les formules standards d'assurance vie, le mouvement brownien ou les martingales en temps continu.

Dans un souci de lisibilité et de compréhension nous définissons dans ce premier chapitre une bonne partie de ces concepts auxquels nous faisons directement référence durant toute la suite.

1. MORTALITE

Considérons dans un premier temps le modèle stochastique décrivant la mortalité. Nous regroupons dans la section qui suit les principales formules actuarielles standards relatives au domaine de l'assurance vie. Nous faisons ici référence à [L-4], [C-3] et [C-5].

1.1. MODELE STOCHASTIQUE

Dénotons par T la variable aléatoire non négative correspondant à la durée de vie restante d'un nouveau-né choisi au hasard dans une population.

T a pour fonction de répartition :

$$F(t) = \mathbb{P}[T \leq t] \stackrel{\text{Notation}}{=} {}_t q_0,$$

et pour fonction de survie :

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}[T > t] \stackrel{\text{Notation}}{=} {}_t p_0.$$

Nous supposons que F est absolument continue et définissons la densité de probabilité de T par :

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = -\frac{d}{dt} \bar{F}(t).$$

1.2. FORCE DE MORTALITE

Quand nous travaillons avec des variables aléatoires non-négatives représentant des durées de vie, il est commode de considérer la force de mortalité μ :

$$\mu_t = -\frac{d \ln \bar{F}(t)}{dt} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad (2)$$

Pour de petits intervalles de temps dt , nous avons :

$$\mu_t dt = \frac{f(t) dt}{\bar{F}(t)} = \frac{\mathbb{P}[t < T \leq t + dt]}{\mathbb{P}[T > t]} = \mathbb{P}[t < T \leq t + dt | T > t].$$

Ainsi, pour une personne d'âge t , la probabilité de décéder dans les dt années qui suivent est proportionnelle à la longueur de l'intervalle de temps dt .

Le facteur de proportionnalité μ_t dépend de l'âge atteint et est appelé force de mortalité.

En intégrant (2) de 0 à t et sachant que $F(0) = 0$, nous obtenons :

$$\exp(-\int_0^t \mu_u du) = \bar{F}(t),$$

et (2) peut être réécrite comme :

$$f(t) = \mu_t \cdot \bar{F}(t) = \mu_t \cdot \exp(-\int_0^t \mu_u du).$$

Cette dernière équation signifie que la probabilité $f(t)dt$ de décéder dans l'intervalle d'années $(t, t+dt)$ correspond au produit de la probabilité $\bar{F}(t)$ de survivre pendant t années et de la probabilité conditionnelle $\mu_t dt$ de décéder avant $t+dt$ années sachant que l'individu a déjà survécu pendant t années.

1.3. DISTRIBUTION DE LA DUREE DE VIE RESTANTE

Notons par T_x la durée de vie restante d'un individu d'âge x choisi au hasard dans une population. Alors la distribution de T_x est similaire à celle de $T-x$ conditionnellement au fait que $T > x$. T_x a pour fonction de distribution :

$$F(t/x) = P[T \leq x+t | T > x] = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \stackrel{\text{Notation}}{=} {}_t q_x,$$

et comme fonction de survie :

$$\bar{F}(t/x) = P[T > x+t | T > x] = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} \stackrel{\text{Notation}}{=} {}_t p_x, \quad (3)$$

qui sont toutes deux bien définies pour tout x tel que $F(x) < 1$.

La fonction de densité de cette distribution conditionnelle est :

$$f(t/x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x)}. \quad (4)$$

Notons par $\mu_{t/x}$ la force de mortalité associée à la distribution $F(t/x)$ qui est obtenue en insérant $f(t/x)$ de l'équation (4) et $\bar{F}(t/x)$ de (3) au places respectives de f et \bar{F} dans la définition (2). Nous trouvons :

$$\mu_{t/x} = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x+t)} = \mu_{x+t}. \quad (5)$$

Notons que :

$${}_t p_x \cdot \mu_{x+t} = f(t/x).$$

Ainsi, en insérant (2) dans (3) nous obtenons :

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_u du\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+y} dy\right).$$

La relation (5) explique pourquoi il est particulièrement pratique de travailler avec la force de mortalité : elle ne dépend que de l'âge atteint $x+t$ tandis que la densité conditionnelle de (4) dépend en général de x et de t de manière plus complexe. Ainsi, les propriétés de toutes les fonctions de distribution conditionnelles sont résumées par une simple fonction dépendant uniquement de l'âge.

1.4. QUELQUES LOIS DE MORTALITE STANDARD

Il existe quelques fonctions qui sont commodes et souvent utilisées en pratique. Il s'agit plus particulièrement des lois exponentielles, Weibull et Gompertz-Makeham.

1.4.1. LOI EXPONENTIELLE

Avec la distribution exponentielle nous supposons que la force de mortalité est $\mu_t = \lambda$ indépendante de l'âge. Cela signifie que la durée de vie d'un individu ne dépend pas de son âge.

La fonction de survie est ainsi :

$$\bar{F}(t) = \exp(-\lambda t),$$

et la densité devient :

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t).$$

De ce fait, la distribution de la variable aléatoire T est une distribution exponentielle de paramètre λ .

La fonction de survie conditionnelle devient :

$${}_t p_x = \exp(-\lambda t) = \bar{F}(t).$$

La distribution exponentielle est un modèle adapté pour des dispositifs techniques tels que des ampoules ou composants électroniques mais malheureusement pas pour la description de vies humaines.

Figure 2 : Illustration de la loi Exponentielle

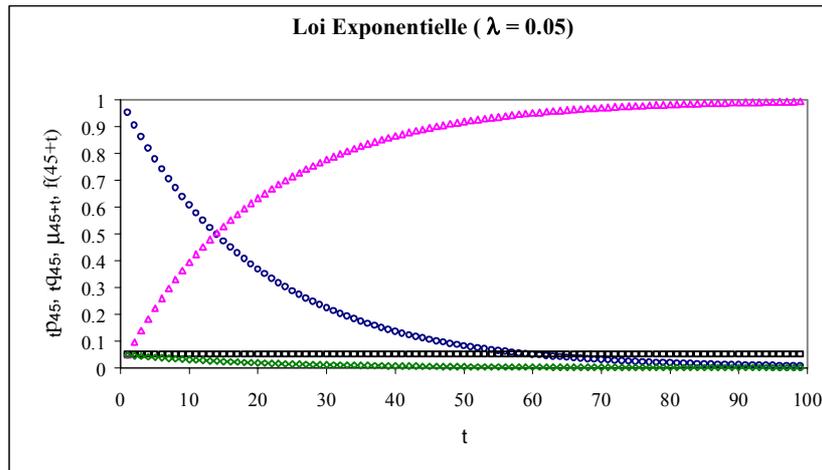


Figure 3 : Illustration de la loi de Weibull

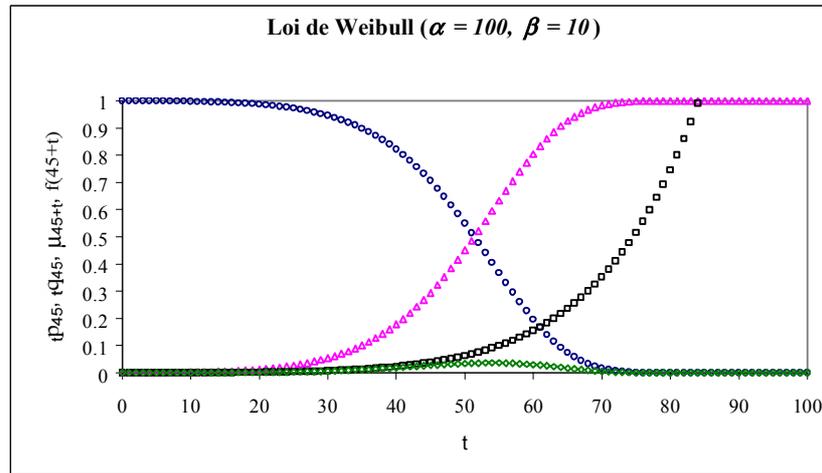
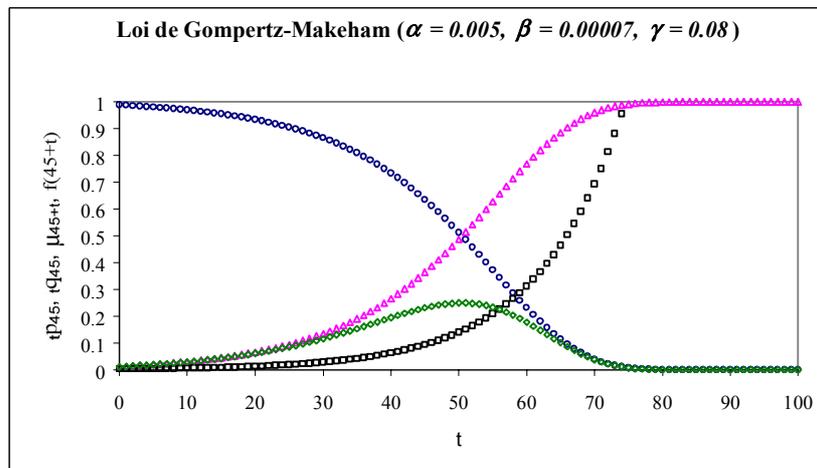


Figure 4 : Illustration de la loi de Gompertz-Makeham



● : ${}_t p_{45}$ ▲ : ${}_t q_{45}$ ■ : μ_{45+t} ◆ : $f(45+t)$

1.4.2. LOI DE WEIBULL

L'intensité de la loi de Weibull est de la forme :

$$\mu_t = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta-1},$$

avec $\alpha, \beta > 0$.

Si $\beta > 1$ alors μ_t est croissante en t , sinon elle est décroissante.

Si $\beta = 1$, la loi de Weibull se réduit en une loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$.

La fonction de survie correspondante est :

$$\bar{F}(t) = \exp\left(- (t/\alpha)^\beta\right).$$

1.4.3. LOI DE GOMPERTZ-MAKEHAM

Cette distribution est fréquemment utilisée comme modèle de survie de vie humaine et particulièrement dans le cadre de l'assurance vie. Nous utiliserons d'ailleurs cette loi dans les développements futurs

La force de mortalité de cette loi est de la forme :

$$\mu_t = \alpha + \beta e^{\gamma t},$$

avec $\alpha, \beta \geq 0$. La fonction de survie correspondante est :

$$\bar{F}(t) = \exp\left(-\alpha t - \beta(e^{\gamma t} - 1)/\gamma\right).$$

Si $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ alors μ_t est une fonction croissante de t .

La constante α reflète certaines causes de décès indépendantes de l'âge comme certains accidents et/ou maladies.

Le terme $\beta e^{\gamma t}$ prend en compte tous les effets dus à l'âge.

Nous avons :

$$\mu_{x+t} = \alpha + \beta e^{\gamma(x+t)},$$

et donc

$${}_t p_x = \exp\left(-\alpha t - \beta e^{\gamma x} (e^{\gamma t} - 1)/\gamma\right),$$

qui est aussi une fonction de survie de Gompertz-Makeham avec paramètres $\alpha, \beta e^{\gamma x}$ et γ

Le cas spécial $\alpha = 0$ est connu sous le nom de loi (pure) de Gompertz.

1.5. AGES ET DUREES DE VIE NON-ENTIERES

Dans le cadre de travaux actuariels, nous avons très souvent recours à des tables de mortalité or, en général, les données de ces tables sont fournies pour des âges entiers. Pour obtenir les mêmes données entre deux âges entiers successifs, il faut avoir recours à certaines hypothèses que nous allons présenter, il en existe principalement trois.

Nous n'utilisons pas directement les âges et durées de vie non-entiers dans la suite mais cette partie est utile pour ce qui concerne l'implémentation d'un programme de tarification.

Notons que tout au long de ce paragraphe nous supposons que $0 \leq t < 1$.

1.5.1. HYPOTHESE DE REPARTITION UNIFORME

En utilisant cette hypothèse, nous supposons qu'il y a répartition uniforme des décès dans chaque année d'âge, c'est à dire que la loi de la variable aléatoire continue indiquant la fraction d'année vécue dans l'année de décès est une loi uniforme continue sur $[0,1]$.

Ceci revient à postuler que :

$${}_t q_x = t \cdot q_x.$$

Nous en dérivons ainsi les formules suivantes :

$${}_t p_x = 1 - t \cdot q_x,$$

pour la probabilité de survie,

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - t \cdot q_x},$$

pour la force de mortalité et enfin la probabilité de décès avec âge et durée de vie non entiers :

$${}_y q_{x+t} = \frac{y \cdot q_x}{1 - t \cdot q_x},$$

pour $0 \leq t+y < 1$.

1.5.2. HYPOTHESE DE BALDUCCI

Ici nous faisons l'hypothèse que la quantité ${}_{1-t}q_{x+t}$ est linéaire en t .
Ce qui implique que :

$${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t) \cdot q_x$$

Les conséquences sur les autres formules classiques sont les suivantes :

$${}_tq_x = \frac{t \cdot q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x},$$

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x},$$

et

$${}_yq_{x+t} = \frac{y \cdot q_x}{1 - (1-y-t) \cdot q_x},$$

pour $0 \leq t+y < 1$.

1.5.3. HYPOTHESE DE FORCE DE MORTALITE CONSTANTE

Dans ce dernier cas, nous supposons que la force de mortalité est constante dans chaque année d'âge donc $\mu_{x+t} = \mu_x$.

Ainsi,

$${}_tp_x = (p_x)^t,$$

$${}_yq_{x+t} = 1 - (p_x)^y$$

pour $0 \leq t+y < 1$.

1.6. TABLES DE MORTALITE

1.6.1. UNION PROFESSIONNELLE DES ENTREPRISES D'ASSURANCES (UPEA)

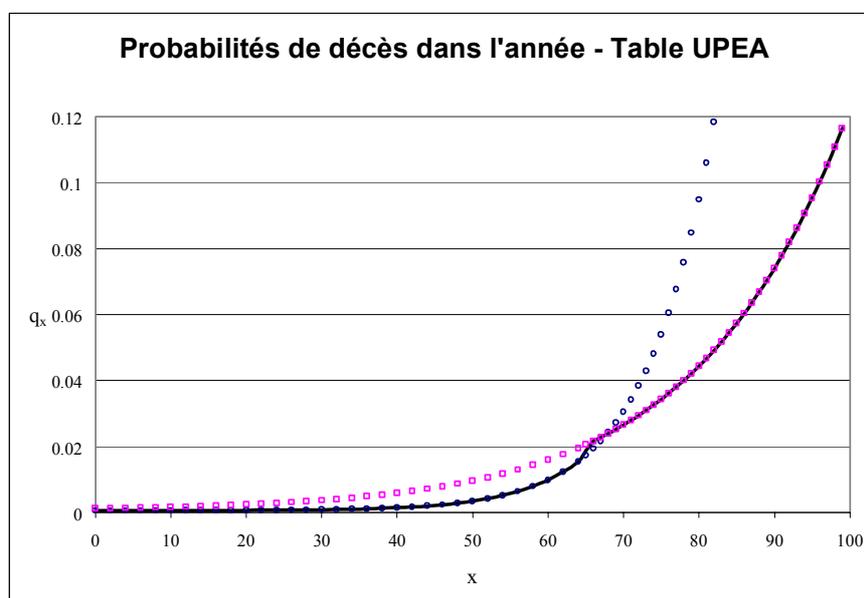
L'Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances (UPEA) a été fondée en 1920. Elle groupe la quasi-totalité des compagnies d'assurances belges et étrangères qui opèrent sur le marché belge et sa représentativité atteint 95% de l'encaissement en non-vie, un peu moins en vie. Cet organisme fournit, entre autre, des tables d'expérience (fondées sur la mortalité observée).

1.6.2. TABLES UPEA

Nous utilisons, pour refléter la mortalité les tables d'expérience de l'UPEA. Ces tables sont construites en utilisant deux lois de Gompertz-Makeham et fournissent les coefficients α , β et γ de chacune des deux lois.

La première loi est utilisée pour les âges entre 0 et 64 ans et la seconde pour les âges de 66 à 99 ans. Pour obtenir la force de mortalité à l'âge de 65 ans, l'UPEA procède à la moyenne entre celle à 64 ans et celle à 66 ans (ce qui ne donne pas une force de mortalité très lisse).

Figure 5 : Probabilités de décès issues d'une table UPEA



Les deux courbes en pointillés représentent les deux lois de Gompertz-Makeham utilisées et la courbe reliée représente l'ajustement pour la loi de mortalité entre les âges de 0 à 99 ans.

Après avoir présenté les notations standard pour décrire le modèle de mortalité, introduisons le modèle financier. Nous faisons ici référence à [L-5] page 209, [L-6], [L-7], [C-2] et [C-4].

2. FINANCE

Cette partie est consacrée à des généralités sur les processus stochastiques et propriétés afférentes. Il n'est pas question ici de faire de la théorie exhaustive, nous exposons uniquement les propriétés essentielles et les outils nécessaires pour les développements qui suivent.

2.1. PROCESSUS STOCHASTIQUES : GENERALITES

Toute variable dont les valeurs changent en fonction du temps de façon aléatoire est dite suivre un processus stochastique. Un processus stochastique peut être classé dans deux catégories : processus stochastique en temps discret et processus stochastique en temps continu.

Un processus stochastique en temps discret implique que les changements de valeurs de la variable aléatoire peuvent uniquement se produire à des points fixes du temps tandis qu'un processus stochastique continu permet des changements continus dans le temps.

Nous pouvons également procéder à la distinction entre processus stochastique à valeurs discrètes (le processus ne peut prendre que des valeurs discrètes) et à valeurs continues (le processus peut prendre n'importe quelle valeur dans un certain intervalle).

Dans notre étude nous nous intéressons aux processus stochastiques en temps continu et à valeurs continues pour modéliser l'évolution du prix d'un actif financier.

Deux raisons motivent ce choix.

La première vient du phénomène que l'on veut modéliser : les variations des cotations sur les marchés organisés sont en pratique tellement fréquentes qu'un modèle discret peut difficilement en rendre compte.

La seconde provient du fait que les modèles continus conduisent à des méthodes de calcul plus explicites que les modèles discrets, même s'il faut parfois avoir recours à des méthodes numériques.

2.2. PROCESSUS STOCHASTIQUES ET MOUVEMENT BROWNIEN

Définissons tout d'abord de manière formelle ce qu'est un processus stochastique.

Définition 2.2.1 : *Processus stochastique à temps continu*

Nous appelons processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathcal{E} , une famille $(X_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

L'emploi du terme «filtration» étant très fréquent en mathématique financière, rappelons que la filtration retrace toute l'information dont nous disposons à chaque pas de temps, en voici une définition dans l'environnement mathématique ainsi qu'une définition d'un processus adapté.

Définition 2.2.2 : *Filtration*

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} .

La tribu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ représente l'information dont nous disposons à l'instant t .

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour chaque t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Enonçons encore deux propriétés caractérisant certains processus stochastiques afin d'être en mesure de définir le mouvement brownien.

Définition 2.2.3 : *Processus à accroissements indépendants*

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour toute suite

$0 < t_1 < \dots < t_n$ ($n \geq 2$), les variables aléatoires X_{t_1} , $X_{t_2} - X_{t_1}$, ..., $X_{t_n} - X_{t_{(n-1)}}$ sont indépendantes.

Définition 2.2.4 : *Processus à accroissements stationnaires*

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires si la distribution de la variable $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t .

Nous sommes maintenant en mesure de définir le mouvement brownien, rappelons qu'il nous est utile pour décrire l'évolution du prix d'un actif financier.

Définition 2.2.5 : *Mouvement brownien standard*

Un processus stochastique $(W_t)_{t \geq 0}$ est appelé mouvement brownien (standard) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- $W_0 = 0$,
- $(W_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires,
- pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi normale $N(0, t)$ (de moyenne nulle et de variance t).

Le mouvement brownien peut-être interprété comme une perturbation. Lors de la modélisation de l'actif financier, nous utilisons un mouvement brownien pour venir «perturber» le prix de l'actif et nous nous intéressons plus particulièrement au mouvement brownien géométrique.

Définition 2.2.6 : *Mouvement brownien géométrique*

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien.

Le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$, où $Y_t = \exp(W_t)$ est appelé mouvement brownien géométrique.

Introduisons un paramètre de dérive μ qui représentera le rendement moyen d'un actif et un paramètre de dispersion σ pour refléter la volatilité de cet actif.

Propriété 2.2.7 : *Espérance et variance d'un mouvement brownien géométrique*

Soient $(W_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard et $(Y_t)_{t \geq 0}$ le processus géométrique défini par :

$$Y_t = \exp(\mu t + \sigma W_t),$$

alors

$$E[Y_t] = \exp((\mu + \sigma^2 / 2)t),$$

$$Var Y_t = \exp(2(\mu + \sigma^2 / 2)t) (\exp(t\sigma^2) - 1).$$

Il est trivial de constater que le processus Y_t suit une loi log-normale de paramètres $(\mu - \sigma^2/2)t$ et $\sigma^2 t$:

$$Loi(Y_t) = \log - N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t).$$

2.3. MARTINGALES EN TEMPS CONTINU

Comme dans le cas des modèles à temps discret, la notion de martingale est un outil essentiel pour expliciter la notion d'arbitrage. La définition suivante est une extension de celle en temps discret.

Définition 2.3.1 : Martingale

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de cet espace.

Une famille adaptée $(M_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires intégrables est :

- une martingale si, pour tout $s \leq t$, $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$,
- une surmartingale si, pour tout $s \leq t$, $E[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$,
- une sousmartingale si, pour tout $s \leq t$, $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$.

Remarque : Nous déduisons de cette définition que, si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale alors $E[M_t] = E[M_0]$ pour tout t .

Donnons des exemples de martingales que nous pouvons construire à partir du mouvement brownien.

Propriété 2.3.2 : Mouvements browniens et martingales

Si $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

- W_t est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,
- $W_t^2 - t$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,
- $\exp(\sigma W_t - (\sigma^2/2)t)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Nous ne revenons pas sur l'intégration stochastique par rapport au mouvement brownien et supposons que cette technique est connue.

Nous allons toutefois introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques à savoir aborder plus en détails le processus d'Itô et l'outil essentiel que constitue la formule d'Itô.

2.4. CALCUL D'ITO

Commençons tout d'abord par préciser la définition de la classe de processus pour laquelle nous pouvons énoncer la formule d'Itô : les processus d'Itô.

Définition 2.4.1 : Processus d'Itô

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(W_t)_{t \geq 0}$, un mouvement brownien. Nous appelons processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathcal{R} tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_u du + \int_0^t H_u dW_u ,$$

pour tout $t \leq T$ avec :

- X_0 \mathcal{F}_0 -mesurable,
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ des processus adaptés à \mathcal{F}_t et intégrables.

Définition 2.4.2 : Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_u du + \int_0^t H_u dW_u ,$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable, nous avons :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s ,$$

où, par définition :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds ,$$

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s .$$

De même si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , ces dérivées étant continues en (t, x) , nous avons :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s .$$

Enonçons encore la formule d'intégration par parties qui nous sera utile pour démontrer l'unicité d'une solution à l'équation différentielle stochastique qui décrit l'évolution d'un actif financier.

Proposition 2.4.3 : *Formule d'intégration par parties*

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s .$$

alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t ,$$

avec la convention que :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds .$$

Nous définissons enfin, la transformation de Girsanov qui permet de changer de mesure de probabilité.

Définition 2.4.4 : *Transformation de Girsanov*

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$, un mouvement brownien standard défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) et $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus mesurable satisfaisant :

$$E[\exp(\frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_s|^2 ds)] < \infty , \text{ pour } 0 < t < \infty .$$

Soit $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$L_t = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda_s|^2 ds \right\} , \text{ pour } 0 \leq t \leq T .$$

Définissons la loi de probabilité Q équivalente à P par :

$$Q(A) = \int_A L_T dP \Leftrightarrow Q(A) = E_P[L_T 1_A] , \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}_T .$$

Alors, sous Q, $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$ est un mouvement brownien standard.

CHAPITRE II : APPROCHE ACTUARIELLE

Notre objectif est ici de déterminer la prime pure pour le contrat qui nous concerne en utilisant le principe d'équivalence. Nous devons dans un premier temps modéliser l'actif financier et déterminer la loi du rendement de cet actif puis dans un deuxième temps nous devons calculer la prime pure unique (PPU) du contrat en évaluant l'espérance des flux futurs sous la mesure de probabilité physique P .

1. MODELISATION DE L'ACTIF FINANCIER

Nous supposons maintenant que l'actif financier sous-jacent à notre contrat suit le processus stochastique décrit par l'équation différentielle suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \Leftrightarrow S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s, \text{ avec } S_0 = x_0. \quad (6)$$

Cherchons tout d'abord une solution à cette équation différentielle stochastique.

1.1. EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

1.1.1. RECHERCHE DE LA SOLUTION

Nous cherchons les solutions $(S_t)_{t \geq 0}$ de l'équation (6).

Afin de trouver une telle solution, posons $Y_t = \ln(S_t)$ où S_t est solution de l'équation (6).

S_t est un processus d'Itô (voir Définition 2.4.1 page 32) avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$, nous pouvons ainsi appliquer la formule d'Itô décrite dans la Définition 2.4.2 page 32 à la fonction $f(x) = \ln(x)$. Nous obtenons alors, en supposant que S_t soit positif :

$$Y_t = Y_0 + (\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t \Leftrightarrow S_t = x_0 \cdot \exp((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t).$$

Pour prouver l'unicité d'une telle solution nous supposons qu'il existe une autre solution et en utilisant la formule d'intégration par parties exposée dans la Proposition 2.4.3 page 33 nous prouvons que les deux solutions sont nécessairement égales (pour plus de détails voir [L-6]).

1.1.2. RESULTAT

Ainsi, μ et σ étant deux nombres réels, $(W_t)_{t \geq 0}$ étant un mouvement brownien et T un réel strictement positif il existe alors un processus d'Itô unique $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui vérifie pour tout $t \leq T$ l'équation (6), ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \cdot \exp((\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma W_t). \quad (7)$$

Le processus S_t que nous venons d'expliciter servira de modèle standard pour le prix de l'actif financier. Notons que lorsque $\mu = 0$, S_t est une martingale (conséquence directe de la Propriété 2.3.2 page 31) et que ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.

1.2. LOI DU RENDEMENT DE L'ACTIF FINANCIER

Nous pouvons maintenant caractériser la loi du rendement de l'actif financier dans l'objectif de calculer la prime pure du contrat.

Si μ et σ correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart-type de l'actif financier dont le cours vaut S_t en t , nous avons en utilisant (7) l'égalité suivante :

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left((\mu - \sigma^2 / 2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right).$$

Le rendement S_T/S_t suit alors un mouvement brownien géométrique au sens de la Définition 2.2.6 page 30 et ainsi, en vertu de la Propriété 2.2.7 page 30 :

$$\text{Loi}\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \log - N\left((\mu - \sigma^2 / 2)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \quad (8)$$

Le rendement de l'actif financier suit donc une loi log-normale de paramètres $(\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)$ et $\sigma^2(T - t)$.

Notons que souvent nous considérons T comme la date terminale, nous considérerons alors dans toute la suite que $T = \omega - x$ où ω est l'âge à la retraite des assurés.

Maintenant que nous connaissons la loi de probabilité du rendement de l'actif financier, il nous est facile de déterminer l'espérance des flux futurs actualisés en t en cas de décès sous condition que l'actif financier soit inférieur à la garantie plancher.

En effet, il nous suffit d'intégrer la différence entre la garantie plancher et la valeur de l'actif financier par rapport à la loi log-Normale de l'équation (8) sur l'intervalle adéquat.

2. DETERMINATION DE LA PRIME PURE UNIQUE (PPU)

2.1. EVALUATION DE L'ESPERANCE DE LA PERTE EN t POUR UN DECES EN DATE T

Nous voulons maintenant estimer la quantité :

$$V^P(t, T) = E_p \left[e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) / \mathfrak{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} \int_0^K (K - x) dF(x),$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= P[S_T \leq x / \mathfrak{F}_t] = P[\log(S_T / S_t) \leq \log(x / S_t) / \mathfrak{F}_t] \\ &= \Phi \left(\frac{\log(x / S_t) - (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) \quad (\text{application de (8)}). \end{aligned}$$

$V^P(t, T)$ représente le montant espéré (sous la mesure de probabilité physique P) de la différence entre K (notre garantie plancher) et l'actif financier S_T , actualisée à la date t .

Il s'agit donc du montant espéré à payer en t s'il y a décès en T .

Effectuons donc le changement de variable suivant :

$$u = \frac{\log(x / S_t) - (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \Leftrightarrow x = x_0 \cdot e^{u\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{(\mu - \sigma^2 / 2)(T-t)},$$

et posons

$$\begin{aligned} d_2^{Act}(t, T) &= \frac{\log(S_t / K) + (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \\ d_1^{Act}(t, T) &= d_2^{Act}(t, T) + \sigma \sqrt{T - t} \end{aligned}$$

Il vient :

$$V^P(t, T) = e^{-r(T-t)} \left(K \int_{-\infty}^{-d_2^{Act}(t, T)} d\Phi(u) - x_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2 / 2)(T-t)} \int_{-\infty}^{-d_1^{Act}(t, T)} e^{u\sigma\sqrt{T-t}} d\Phi(u) \right)$$

\Leftrightarrow

$$V^P(t, T) = Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2^{Act}(t, T)) - S_t \cdot e^{(\mu-r)(T-t)} \Phi(-d_1^{Act}(t, T)).$$

(9)

Nous venons donc d'évaluer une formule permettant, par passage à l'espérance mathématique sous la mesure de probabilité physique P, d'actualiser les flux de paiement futurs effectués en T à la date t . Cette formule ressemble fort à la formule de tarification d'une option de vente européenne de Black-Scholes, à la différence qu'ici μ remplace r , ce constat est confirmé dans [L-2] et dans [M-2]. Pourtant, dans le cas présent, nous ne considérons pas un instrument financier mais nous appliquons simplement le principe d'équivalence bien connu en assurance-vie.

2.2. DEFINITION DE LA FILTRATION \mathcal{F}_t

Explicitons brièvement de manière formelle la filtration \mathcal{F}_t , il s'agit en fait de la filtration (au sens de Définition 2.2.2 page 29) générée par l'économie et le portefeuille d'assurance :

$$\mathcal{F}_t = G_t \vee H_t,$$

où $G_t = \sigma\{S_u, u \leq t\}$ est la filtration générée par l'économie et $H_t = \sigma\left\{\sum_{i=1}^{l_x} 1_{\{T_i \leq u\}}, u \leq t\right\}$ est la filtration naturelle du portefeuille d'assurance.

2.3. CALCUL DE LA PRIME PURE UNIQUE

Maintenant que nous connaissons l'espérance du montant du paiement à effectuer en cas de décès, il est aisé de calculer la PPU d'un tel contrat.

La PPU du contrat est calculée comme une prime d'un contrat d'assurance décès standard, c'est à dire en actualisant l'espérance des flux futurs et en pondérant par la fonction de densité de mortalité, dans le modèle discret avec un pas de discrétisation annuel nous avons :

$$\begin{aligned} \text{PPU}^{\text{Act}} &= \sum_{k=1}^{\omega-x} V^{\text{P}}(0, k) {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^T \left(K e^{-rk} \Phi(-d_2^{\text{Act}}(0, k)) - x_0 \cdot e^{(\mu-r)k} \Phi(-d_1^{\text{Act}}(0, k)) \right) {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \text{PPU}^{\text{Act}} &= \sum_{k=1}^T K e^{-rk} \Phi\left(-\frac{\log(x_0 / K) + (\mu - \sigma^2 / 2)k}{\sigma\sqrt{k}}\right) {}_k p_x q_{x+k} \\ &\quad - \sum_{k=1}^T x_0 \cdot e^{(\mu-r)k} \Phi\left(-\frac{\log(S_t / K) + (\mu + \sigma^2 / 2)k}{\sigma\sqrt{k}}\right) {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned} \tag{10}$$

où ω représente l'âge à la retraite de l'assuré et $V^{\text{P}}(0, k)$ fait référence à (9).

Le résultat que nous obtenons ici correspond à la PPU moyenne or, comme nous l'avons précisé plus haut nous souhaitons obtenir la distribution des coûts futurs actualisés.

3. CONCLUSION

Nous venons ici d'obtenir la PPU après une démarche qualifiée d'actuarielle. Il semble assez évident que cette prime sera très sensible aux hypothèses que nous avons prises quant à l'évolution de l'actif sous-jacent étant donné que nous ne nous couvrons pas contre ce risque sur les marchés financiers.

Ainsi, la PPU obtenue par cette approche sera très sensible à des variations de μ ou σ , ce qui est confirmé dans la partie dédiée à l'analyse de sensibilité.

CHAPITRE III : APPROCHE FINANCIERE

Nous adoptons maintenant la démarche du financier qui voudrait évaluer la PPU du contrat qui nous concerne, c'est à dire élaborer une stratégie financière dupliquant les flux de paiement futurs de notre contrat et calculer le coût de cette stratégie.

Notons que nous adoptons les mêmes hypothèses que lors de la démarche actuarielle, en particulier que le modèle de l'actif financier est toujours décrit par l'équation différentielle stochastique (6).

1. MODELE

Nous allons maintenant adopter la démarche du financier qui voudrait évaluer la PPU de notre contrat. Sa démarche va être simple : le décès de l'assuré génère le paiement d'un montant équivalent au flux terminal d'une option de vente européenne avec prix d'exercice égal au montant de la garantie plancher et maturité égale à la durée entre l'âge au décès et l'âge de l'assuré au moment de la signature du contrat. Le caractère optionnel du flux de paiement futur étant induit par la notion de garantie plancher.

Pour procéder à une approche financière, nous allons faire appel au modèle de Black-Scholes et aux hypothèses relatives à ce modèle.

1.1. HYPOTHESES RELATIVES AU MODELE DE BLACK-SCHOLES

Le modèle de Black-Scholes repose sur les hypothèses suivantes :

- L'actif sous-jacent obéit au modèle brownien géométrique (Définition 2.2.6 page 30), nous supposons en particulier qu'il n'y a pas de versement de dividendes durant la durée de l'option.
- Nous nous intéressons à une option européenne.
- Nous supposons qu'il existe un titre non risqué de rendement constant instantané r .

La méthodologie de Black-Scholes repose sur trois hypothèses fondamentales concernant le marché financier : il doit être parfait, complet et ne pas permettre l'existence d'opportunités d'arbitrage.

1.1.1. MARCHE PARFAIT

Un marché est parfait s'il satisfait les conditions suivantes :

- Aucun investisseur n'est dominant sur le marché.
- Tous les investisseurs ont accès à toutes les informations concernant les titres et sont rationnels.
- Les titres sont infiniment divisibles.
- Il n'y a pas de coût de transaction, d'impôts ni de restriction de vente à découvert.

1.1.2. MARCHE COMPLET ET STRATEGIE

Un marché est complet si, pour tout actif, il existe une stratégie permettant de le dupliquer. Définissons alors ce qu'est une stratégie.

1.1.2.1. DEFINITION D'UNE STRATEGIE

Une stratégie est un processus $\theta = (\eta_t(T), \xi_t(T))_{0 \leq t \leq T}$ où $\eta_t(T)$ représente la quantité d'actifs sans risque et $\xi_t(T)$ représente la quantité d'actifs risqués à détenir entre les instants $t-1$ et t dans le portefeuille pour dupliquer les flux d'un actif désigné qui a une maturité T (nous noterons le processus $\theta = (\eta_t, \xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté quant à la maturité de l'actif dupliqué).

Ce choix est supposé être effectué juste après avoir pris connaissance des prix des titres à l'instant $t-1$. Il est évident que les composantes de θ peuvent être positives ou négatives (vente à découvert).

1.1.2.2. PROCESSUS DE VALEUR ASSOCIES A UNE STRATEGIE

Déterminons la valeur de la couverture à l'instant t , elle est égale à :

$$V_t = \eta_t + \xi_t S_t.$$

C'est à dire qu'à chaque t , nous devons payer V_t pour réadapter notre couverture.

Un actif L est alors atteignable (ou duplicable) s'il existe une stratégie θ telle que $V_T = L$.

Il faut toutefois considérer que nous devons liquider en t la position prise en $t-1$, le montant de la vente s'exprime de la façon suivante :

$$G_t = \eta_{t-1} e^r + S_t \xi_{t-1}.$$

Le principe de la stratégie de couverture consiste donc à payer V_t de sorte qu'en $t+1$ la quantité G_{t+1} couvre notre position, c'est à dire qu'elle soit égale au montant espéré à payer en $t+1$.

La somme des gains/pertes entre 0 et T actualisée est alors équivalente à :

$$C(T) = \sum_{t=1}^T e^{-r(t-1)} V_{t-1} - e^{-rT} G_T = - \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} (e^{-rT} S_t - e^{-r(t-1)} S_{t-1}) \quad (11)$$

Nous imposons d'une part aux stratégies d'être autofinancées et d'autre part que la valeur du portefeuille soit positive à tout instant.

1.1.2.3. STRATEGIE AUTOFINANCEE

Une stratégie est autofinancée s'il n'y a ni retrait, ni apport d'argent nouveau, c'est à dire que :

$$V_t = V_0 + C(t) \quad (12)$$

Nous aurons besoin de cette propriété pour contruire le processus de coût de stratégie lors des procédures de simulations stochastiques au Chapitre IV.

1.1.3. ABSENCE D'OPPORTUNITE D'ARBITRAGE

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie θ telle que : $V_0 = 0$ et $V_T \geq 0$.

Un marché est alors dit viable s'il n'autorise pas d'opportunité d'arbitrage. En d'autres termes, il est impossible de construire un portefeuille générant un profit certain pour un coût négatif ou nul.

Si tel n'était pas le cas, si une telle opportunité existait sur le marché, tous les agents ayant une fonction d'utilité croissante seraient demandeurs d'une quantité infinie de ce portefeuille.

Cette dernière hypothèse implique que sur le marché financier, deux actifs engendrant les mêmes flux ont le même prix.

Sous les hypothèses précédentes, le prix à l'instant t ($= 0, 1, \dots, T$) d'un actif L dupliqué par une stratégie θ noté $p_t(L)$ est donné par :

$$p_t(L) = V_t = \eta_t + \xi_t S_t.$$

Grâce à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et de marché complet, nous savons que le rendement espéré de ce portefeuille (dupliquant et actif dupliqué) est r .

En effet, si son rendement était supérieur alors les agents pourraient emprunter au taux sans risque, acheter le portefeuille puis le revendre plus tard et rembourser leur emprunt en empochant un gain certain.

Néanmoins, nous avons considéré dans notre modèle financier (décrit par l'équation (6) page 36) que le rendement espéré de l'actif sous-jacent était égal à μ (non nécessairement égal à r). Nous devons alors transformer notre modèle financier (tout en restant cohérent) pour nous placer dans un environnement risque-neutre, c'est ce que nous faisons en ayant recours au passage sous la mesure de probabilité risque neutre Q .

1.2. CHANGEMENT DE MESURE DE PROBABILITE

Le prix de l'actif, le temps, la volatilité du prix de l'actif et le taux d'intérêt sans risque, toutes ces variables sont indépendantes du degré d'aversion au risque. La formule de Black-Sholes ne serait pas indépendante du degré d'aversion au risque si elle prenait en compte l'espérance du taux de rendement de l'actif : μ .

La valeur de μ dépend totalement du degré d'aversion au risque, μ est d'autant plus élevé que le degré d'aversion au risque des investisseurs est grand. Nous en venons alors à l'hypothèse que tous les agents sont neutres au risque, et ainsi le taux de rendement espéré de chaque titre est égal au taux sans risque : r .

L'idée de base du recours aux mesures martingales ou neutres au risque est de changer la mesure de probabilité P par une probabilité Q équivalente à P , c'est à dire que pour tout événement A , nous avons :

$$P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0.$$

De plus, si la mesure de probabilité Q est équivalente à P , alors il existe pour tout instant t une variable aléatoire M_t vérifiant :

- $M_t \geq 0$ p.s.
- $E_P[M_t] = 1$.
- Pour toute variable intégrable U : $E_Q[U] = E_P[M_t U]$.

Cette notion va nous permettre de définir les mesures « neutres au risque ».

De ce fait l'analyse de produits tels que les options de n'importe quel type devient beaucoup plus simple, il suffit de calculer l'espérance de la valeur de l'option en T en supposant que le taux de rendement du sous-jacent n'est plus μ mais r puis d'actualiser en utilisant le taux sans risque r .

Afin de déterminer la mesure de probabilité risque neutre introduisons maintenant le processus de prix actualisé de l'actif sous-jacent :

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t, \tag{13}$$

et passons à l'évaluation proprement dite de cette mesure risque-neutre.

1.3. MESURES MARTINGALES EQUIVALENTES

Une mesure de probabilité Q équivalente à P est appelée neutre au risque si, sous la mesure de probabilité Q , le processus des prix actualisés de l'équation (13) est une martingale au sens de la Définition 2.3.1 page 31.

Mais comment trouver les mesures martingales équivalentes ?

La transformation de Girsanov (Définition 2.4.4 page 33) va nous permettre de répondre à cette question.

Le problème est de trouver le processus $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ conduisant à la mesure Q décrite ci-dessus sous laquelle le processus $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

Appliquons la formule d'Itô décrite dans la Définition 2.4.2 page 32 au processus S_t et à la fonction $f(t, x) = e^{-rt}$, nous trouvons alors :

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r - \lambda_t \sigma) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t.$$

Nous constatons que $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale sous la mesure de probabilité Q si et seulement si nous fixons la valeur de λ_t à :

$$\lambda_t = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Dès lors, sous Q , le processus S_t satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$$

Le processus S_t suit alors un mouvement brownien sous la mesure de probabilité Q mais μ a été remplacé par r , pour d'avantage de détails, voir [L-2].

2. EVALUATION DE L'ESPERANCE DE LA PERTE

2.1. PRINCIPE

Le flux à payer au moment du décès d'un assuré correspond au flux d'une option européenne de prix d'exercice égal au montant de la garantie plancher et de maturité égale à la durée de vie restante de l'assuré.

Nous voyons déjà ici une des faiblesses du modèle relative à la maturité de l'option considérée. En effet, la durée de vie restante d'un assuré qui a 25 ans a une forte probabilité d'être supérieure à 30 ans or il n'existe pas sur les marchés financiers d'option avec une telle maturité. Par ailleurs, la maturité de cette option devrait être stochastique (puisque les assurés ne décèdent pas tous au même rythme que la table de mortalité utilisée) et non déterministe.

2.2. CALCUL DE L'ESPERANCE DE LA PERTE EN CAS DE DECES EN DATE t

L'adaptation de la formule (8) page 37 dans le cadre financier nous donne :

$$\text{Loi}\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \log - N\left((r - \sigma^2 / 2)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \quad (14)$$

Et définissons :

$$V^Q(t, T) = E_Q\left[e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) / \mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)} \int_0^K (K - x) dF(x)$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= P[S_T \leq x / \mathcal{F}_t] = P[\log(S_T / S_t) \leq \log(x / S_t) / \mathcal{F}_t] \\ &= \Phi\left(\frac{\log(x / S_t) - (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right). \end{aligned} \quad (\text{d'après (14)})$$

Il vient que :

$$V^Q(t, T) = Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2^{Fi}(t, T)) - S_t \Phi(-d_1^{Fi}(t, T)). \quad (15)$$

où

$$\begin{aligned} d_2^{Fi}(t, T) &= \frac{\log(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_1^{Fi}(t, T) &= d_2^{Fi}(t, T) + \sigma\sqrt{T - t} \end{aligned}$$

Pour d'avantage de détails sur \mathcal{F}_t , voir 2.2 page 39.

Ainsi, le prix financier en date 0 d'un put européen de prix d'exercice K et de maturité t est :

$$V^Q(0,t) = Ke^{-rt} \Phi(-d_2^{Fi}(0,t)) - x_0 \Phi(-d_1^{Fi}(0,t)). \quad (16)$$

La méthode de calcul est analogue à celle utilisée pour l'approche actuarielle (page 38) à la différence que le passage sous la mesure de probabilité Q implique que μ est remplacé par r et comme la transformation de Girsanov (Définition 2.4.4 page 33) nous donne un mouvement brownien standard sous Q , nous avons le résultat obtenu en (15).

2.3. COMPARAISON DES DEUX APPROCHES

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les formules exprimant la perte future obtenue par l'approche actuarielle (équation (9)) et financière (équation (15)).

Rappelons tout d'abord ces deux formules :

Formule actuarielle :

$$V^P(t,T) = K \Phi \left(- \frac{\log(S_t / K) + (\mu - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) - S_t \cdot e^{(\mu - r)(T - t)} \Phi \left(- \frac{\log(S_t / K) + (\mu + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$

Formule financière :

$$V^Q(t,T) = K \Phi \left(- \frac{\log(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right) - S_t \Phi \left(- \frac{\log(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$

Nous constatons que la différence entre ces deux formules réside dans le taux de rendement espéré de l'actif. Dans le cas actuariel, ce taux correspond à μ et dans le cas financier, il correspond au taux sans risque r .

Toutefois n'oublions pas les hypothèses nécessaires à chacune de ces deux approches surtout concernant la stratégie à adopter suivant que nous appliquons l'un ou l'autre tarif.

En effet, si nous considérons la PPU sous l'approche actuarielle, nous n'avons aucune position à prendre sur les marchés financiers étant donné que la formule obtenue en (9) ne résulte d'aucun raisonnement financier mais consiste en une simple espérance actualisée des coûts futurs sous la mesure P . Ainsi une telle PPU ne nécessite pas de couverture sur les marchés financiers.

A l'inverse, l'approche financière fournit une PPU par suite d'un raisonnement de non-arbitrage mais l'application d'une telle PPU nécessite que nous nous couvrions sur les marchés financiers en achetant les puts considérés ou en les dupliquant, c'est à dire en appliquant la stratégie de couverture. Nous ne pouvons pas considérer une telle PPU sans appliquer la stratégie de couverture associée sur les marchés financiers.

2.4. DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE LA STRATEGIE DE COUVERTURE

Déterminons les coefficients η_t et ξ_t de façon à couvrir notre position, à savoir dupliquer les flux terminaux d'un put européen de maturité T et de prix d'exercice K .

Comme le marché est complet, tout nouveau titre peut être dupliqué par un portefeuille de titres existants, ainsi le prix de l'option en t est :

$$E_Q \left[e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) / \mathcal{F}_t \right] = V^Q(t, T),$$

où $V^Q(t, T)$ a été déterminé dans l'équation (15) page 47.

D'où, par identification :

$$\begin{aligned} \eta_t(T) &= K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2^{Fi}(t, T)) \\ \xi_t(T) &= -\Phi(-d_1^{Fi}(t, T)) \end{aligned}$$

Ces coefficients représentent les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué à détenir au moment t ($= 0, 1, \dots, T$) de sorte à dupliquer les flux terminaux d'un put européen de prix d'exercice K et de maturité T .

Notons tout de même que cette couverture n'est que localement sans risque, en effet, nous sommes parfaitement couverts au moment du calcul de la couverture mais entre deux périodes, nous ne sommes plus parfaitement couverts vu que le prix de l'actif se sera modifié à l'instant suivant notre prise de position sur le marché financier.

Si le prix de l'actif ne se modifie pas trop entre deux périodes, l'écart de couverture ne sera pas très important mais il se peut qu'entre deux instants, les prix changent de façon considérable (suite à un krach par exemple) et dans ce cas notre couverture n'est plus adaptée. C'est pourquoi nous qualifions notre couverture de couverture localement sans risque.

2.5. CALCUL DE LA PPU

La PPU est maintenant composée du coût de la stratégie, c'est à dire :

$$\text{PPU}^{\text{Fi}} = \sum_{k=1}^{\omega-x} V^{\text{Q}}(0, k)_k p_x q_{x+k} . \quad (17)$$

où $V^{\text{Q}}(0, k)$ fait référence à (16).

A l'inverse de la PPU actuarielle, nous considérons ici un instrument financier, la prime équivaut toujours à l'espérance des coûts actualisés mais les coûts sont des coûts de stratégie tandis que dans le cas actuariel, il s'agit des montants à verser en cas de décès.

2.6. STRATEGIE OPTIMALE DE COUVERTURE

Précédemment (en 2.4 page 49), nous avons déterminé les coefficients η et ξ de façon à dupliquer les flux terminaux d'un put européen de maturité T et de prix d'exercice K . Nous devons maintenant déterminer les coefficients de la stratégie qui nous permet de dupliquer les flux de notre contrat.

Pour ce faire, développons la formule (17) :

$$\begin{aligned} \text{PPU}^{\text{Fi}} &= \sum_{k=1}^T \eta_0(k)_k p_x q_{x+k} + x_0 \sum_{k=1}^T \xi_0(k)_k p_x q_{x+k} \\ &= \tilde{\eta}_0^{\theta}(T) + x_0 \cdot \tilde{\xi}_0^{\theta}(T) \end{aligned} \quad (18)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_t^{\theta}(T) &= \sum_{k=t+1}^T \eta_t(k)_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=t+1}^T e^{-r(k-t)} K \Phi(-d_2^{\text{Fi}}(t, k))_k p_x q_{x+k} \\ \tilde{\xi}_t^{\theta}(T) &= - \sum_{k=t+1}^T \xi_t(k)_k p_x q_{x+k} = - \sum_{k=t+1}^T \Phi(-d_1^{\text{Fi}}(t, k))_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Le processus $(\eta_t^{\theta}(T), \xi_t^{\theta}(T))_{0 \leq t \leq T}$ correspond au nombre d'actifs à détenir en t pour dupliquer un put européen de prix d'exercice K et de maturité T .

Le processus $(\tilde{\eta}_t^{\theta}(T), \tilde{\xi}_t^{\theta}(T))_{0 \leq t \leq T}$ quant à lui correspond au nombre d'actifs à détenir en t pour dupliquer les flux générés par notre contrat (qui prend fin en T), il s'agit en fait d'une somme des coefficients de la stratégie de duplication d'un put européen classique pondérée par la densité de mortalité.

3. CONCLUSION

Nous obtenons ici une PPU qui est construite sur la base d'un instrument financier. Il semble assez intuitif que cette prime soit beaucoup moins volatile que la prime déterminée grâce à l'approche actuarielle du fait qu'elle prend en compte un instrument financier qui vient contrebalancer tous les effets induits par la volatilité de l'actif sous-jacent.

Cette prime étant localement sans risque d'un point de vue financier, toute la variabilité de cette prime est induite par le risque de mortalité et par les écarts de couverture entre deux périodes (induits par le fait que nous ne sommes que localement sans risque). Nous avons également déterminé la stratégie de couverture optimale pour dupliquer les flux générés par notre contrat.

Nous avons alors déterminé les PPU moyennes à appliquer suivant une approche actuarielle et une approche financière, toutefois nous n'avons toujours aucune distribution de coûts futurs actualisés (CFA) et n'avons pas confirmé nos intuitions quant aux volatilités des CFA suivant chaque approche. Nous devons donc procéder à de la simulation stochastique pour répondre à toutes ces questions, en particulier pour obtenir les distributions des CFA suivant chaque approche et pour procéder à une analyse de sensibilité.

CHAPITRE IV : SIMULATION STOCHASTIQUE

Nous venons d'aborder les formules théoriques de tarification actuarielle et financière et les avons comparées. Le résultat de cette comparaison apparaît particulièrement dans [L-2] mais nous ne savons rien quant aux résultats pratiques de ces deux types de tarification.

Par la simulation stochastique, observons les conséquences des deux approches sur chaque tarif.

1. POURQUOI LA SIMULATION STOCHASTIQUE ?

Arrivé à ce stade il semble nécessaire d'introduire la notion de simulation stochastique. En effet, en vue d'obtenir une distribution des CFA il nous faut nécessairement des réalisations, aussi bien des décès que des valeurs prises par l'actif financier au cours du temps. Avec ces observations, nous pouvons alors calculer la PPU observée et, en réitérant cette opération un très grand nombre de fois, nous serons en mesure d'obtenir la fonction de distribution des CFA. Il s'agit du principe de simulation de Monte-Carlo.

Dans notre cas, nous simulerons le processus de prix de l'actif financier (processus S_t) ainsi que le processus de décès des assurés (processus N_t).

Il semble évident qu'il faille procéder à une simulation du processus S_t afin de prendre en compte la volatilité de l'actif financier dans la distribution de nos CFA. Il est aisé de comprendre que notre PPU est d'autant plus volatile que la volatilité de l'actif financier sous-jacent est élevée.

De plus, une seconde source de volatilité pour la PPU est induite par le processus N_t . La raison est simple, nous considérons que les assurés décèdent au même rythme que celui imposé par la loi de mortalité utilisée, néanmoins il est évident nous assistons à des écarts entre la mortalité observée et la mortalité théorique. Il convient alors de prendre en compte cette source de volatilité supplémentaire pour la PPU et de ce fait nous ne considérons plus que la mortalité est un processus déterministe dans notre modèle mais, tout comme le processus S_t un processus stochastique.

2. METHODE DE SIMULATION

Désormais nous savons comment calculer la prime de notre contrat de manière théorique. Les réponses fournies nous donne la prime pure moyenne d'un tel contrat mais nous nous interrogeons toujours sur plusieurs points :

Dans un premier temps quelles sont les formules pratiques pour obtenir ces primes pures, c'est à dire, de quelle façon les implémenter dans un programme ?

Par ailleurs nous souhaitons obtenir plus d'informations que les primes moyennes, nous souhaitons connaître la variance de ces coûts futurs actualisés et en connaître leur distribution.

Pour ce faire nous devons procéder à des simulations de type Monte-Carlo.

C'est à dire que nous cherchons à réaliser sur un ordinateur une suite de tirage de la variable aléatoire concernée.

Pour obtenir d'avantage de détails sur la simulation de type Monte-Carlo, consulter [L-6].

2.1. SIMULATION DE L'ACTIF FINANCIER

Il existe de nombreuses méthodes pour simuler la dynamique d'une équation différentielle stochastique. Nous n'utiliserons ici que la méthode la plus élémentaire : la méthode d'Euler aléatoire. Le principe en est le suivant, il s'agit de simuler l'équation :

$$\begin{cases} S_0 = x_0 \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{cases}$$

Nous nous fixons un pas de discrétisation du temps Δt . Nous pouvons alors construire un processus à temps discret $(X_n)_{n \geq 0}$ approximant l'équation différentielle stochastique aux instants $n\Delta t$, en posant :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_{n+1} - X_n = \mu X_n \Delta t + \sigma X_n (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \end{cases},$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} X_0 = x_0 \\ X_{n+1} = X_n (1 + \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}) \end{cases},$$

où ε suit une loi normale centrée réduite.

(Représentation d'une trajectoire de l'actif sous-jacent à la Figure 12 page 96).

2.2. SIMULATION DES DECES

Ne sachant pas quelle est la part du risque de mortalité et la part du risque financier dans ce type de contrat, nous assimilons à chaque risque un processus adapté qui est simulé. De ce fait, nous simulons également un processus de décès.

2.2.1. MODELE BINOMIAL DU NOMBRE DE DECES

Si nous considérons une cohorte de N individus, tous de même âge x , prouvons alors que la variable aléatoire Y_t comptant le nombre de décès à la date t suit une loi binomiale.

En effet, supposons que T_1, \dots, T_N soient les durées de vie restante de nos N individus. Nous avons alors pour la fonction de répartition de la durée de vie restante (voir page 21) :

$$P[T_1 \leq t] = {}_tq_x.$$

Nous avons ainsi :

$$E[Y_t] = E\left[\sum_{i=1}^N 1_{\{T_i \leq t\}}\right] = \sum_{i=1}^N E[1_{\{T_i \leq t\}}] = N {}_tq_x$$

et

$$Var Y_t = \sum_{i=1}^N Var 1_{\{T_i \leq t\}} = N {}_tq_x \cdot {}_tp_x.$$

En considérant que $1_{\{T_1 \leq t\}}, \dots, 1_{\{T_N \leq t\}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre ${}_tq_x$, il est trivial de remarquer que la loi du nombre de décès est une loi binomiale.

2.2.2. PROCEDURE DE SIMULATION

Il devient alors aisé de simuler un processus de décès.

Supposons qu'à la date t , le nombre de survivant soit B_t alors le nombre de décès durant la période allant de t à $t+1$ suit une loi binomiale de paramètres B_t et q_{x+t} .

Il suffit donc qu'à chaque période nous effectuions un tirage aléatoire d'une loi binomiale de paramètres B_t et q_{x+t} pour obtenir une réalisation de cette loi et, en effectuant ceci pour chaque t , simuler un processus de décès.

(Représentation d'un processus de décès à la Figure 13 page 96).

3. ADAPTATION DE CHAQUE APPROCHE A LA SIMULATION STOCHASTIQUE

Dans les deux chapitres précédents nous nous sommes intéressés à la théorie relative à chacune des deux approches tarifaires. Nous souhaitons maintenant procéder à une application pratique avec pour objectif déterminer la distribution des CFA sous chacune des deux approches. Nous développons ainsi dans les deux parties suivantes la procédure à suivre quant à la simulation de ces PPU.

3.1. APPROCHE ACTUARIELLE

3.1.1. FORMULATION MATHEMATIQUE

L'adaptation de l'approche actuarielle à la simulation est relativement aisée. En effet, il s'agit uniquement d'évaluer le montant à verser en cas de décès au moment t , il est égal à (pour la simulation i et l'individu j) :

$$M_t^{(i,j)} = (K - S_t^{(i)}) \cdot 1_{\{S_t^{(i)} < K \cap T_{x(j)} = t\}}(t), \quad (19)$$

c'est à dire égal à la différence entre le cours du sous-jacent au moment t noté (S_t) et la garantie plancher (K) dans le cas où, et l'assuré j décède au moment t , et le cours de l'actif sous-jacent est inférieur au montant de la garantie plancher pour la simulation i .

Pour obtenir une réalisation de la variable aléatoire PPU^{Act} (équation (10) page 39) il suffit d'évaluer la somme (sur les N individus et les M simulations) actualisée sur tout t de la réalisation de $M_t^{(i,j)}$, c'est à dire :

$$ppu^{Act} = \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N e^{-rk} M_k^{(i,j)} \quad (20)$$

N.B. : Nous utilisons la terminologie PPU^{Act} quand il s'agit de la variable aléatoire représentant la PPU déterminée par l'approche actuarielle et ppu^{Act} lorsqu'il s'agit d'une réalisation de PPU^{Act} . De même pour PPU^{Fi} et ppu^{Fi} avec la démarche financière.

3.1.2. COMPARAISON AVEC LA FORMULE THEORIQUE

Nous sommes maintenant en mesure de comparer la formule théorique (équation (10) page 39) et la formule utilisée pour la simulation (équation (20)).

Réécrivons (20) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N e^{-rk} M_k^{(i,j)} &= \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N e^{-rk} (K - S_k^{(i)}) \cdot 1_{\{S_k^{(i)} < K \cap T_{x(j)} = k\}}(k) \\ &= \sum_{k=1}^T \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rk} (K - S_k^{(i)}) 1_{\{S_k^{(i)} < K\}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\{T_{x(j)} = k\}}(k) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\{T_{x(j)} = k\}}(k) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}[1_{\{T_x = k\}}(k)] = {}_k p_x q_{x+k} \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rk} (K - S_k^{(i)}) 1_{\{S_k^{(i)} < K\}} &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} e^{-rk} \hat{\mathbb{E}}_P[\max(K - S_k, 0)] = \hat{V}^P(0, k). \end{aligned} \tag{21}$$

où $\hat{V}^P(0, k)$ est l'estimation de l'espérance de la variable aléatoire décrite en (9) page 38 pour $t = 0$ et $T = k$.

Par conséquent, nous avons :

$$\frac{1}{MN} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N e^{-rk} M_k^{(i,j)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^T \hat{V}^P(0, k) {}_k p_x q_{x+k} = ppv^{Act}$$

Ce qui implique que notre procédure simulation approche bien PPU^{Act}.

3.2. APPROCHE FINANCIERE

Pour adapter l'approche financière à la simulation, nous devons déterminer le montant à verser aux assurés à la date t (il s'agit de la même formule que celle utilisée pour l'approche actuarielle) mais également déterminer le coût de la stratégie de couverture que nous appliquons.

Transposons-nous dans la situation où nous voulons simuler le coût d'une telle stratégie. Nous avons d'un côté des paiements à effectuer en cas de décès des assurés et de l'autre côté une prise de position sur les marchés financiers par application de la stratégie visant à dupliquer les flux générés par les paiements à effectuer.

Ainsi, si nous étions parfaitement couverts, c'est à dire si nous réadaptions notre couverture à chaque instant et que le rythme auquel les assurés décèdent correspond au rythme de la table de mortalité utilisée, notre stratégie dupliquerait le montant exact à verser au moment exact où un assuré viendrait à décéder.

Evaluons dans un premier temps le coût de la stratégie puis dans un second temps le flux de paiement à effectuer en cas de décès.

3.2.1. DETERMINATION DU COUT DE LA STRATEGIE DE COUVERTURE

Le coût de recouverture en t en actif risqué actualisé en 0 est égal à :

$$G_{\xi}(r, t, S_t, \tilde{\xi}_t) = e^{-rt} S_t (\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_{t-1}).$$

Ce qui correspond au montant actualisé dépensé pour réajuster notre couverture en actif risqué, ce montant peut être positif ou négatif.

De même, le coût actualisé de réajustement de couverture en actif sans risque est égal à :

$$G_{\eta}(r, t, \tilde{\eta}_t) = e^{-rt} (\tilde{\eta}_t - \tilde{\eta}_{t-1}).$$

Ainsi, le coût total de la stratégie correspond à :

$$\begin{aligned} C(T) &= \sum_{k=1}^T G_{\xi}(r, k, S_k, \tilde{\xi}_k) + G_{\eta}(r, k, \tilde{\eta}_k) + \tilde{\eta}_0 + \tilde{\xi}_0 S_0 \\ &= \sum_{k=1}^T e^{-rk} S_k (\tilde{\xi}_k - \tilde{\xi}_{k-1}) + (e^{-rk} \tilde{\eta}_k - e^{-r(k-1)} \tilde{\eta}_{k-1}) + \tilde{\eta}_0 + \tilde{\xi}_0 S_0 \\ &= - \sum_{k=1}^T \tilde{\xi}_{k-1} (e^{-rk} S_k - e^{-r(k-1)} S_{k-1}) \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi l'expression de l'équation (11) page 43.

3.2.2. FLUX DE PAIEMENT A EFFECTUER EN CAS DE DECES

Le montant à verser en cas de décès est indépendant de l'approche choisie, il est donc égal à celui qui est décrit en (19) page 57, à savoir :

$$M_t^{(i,j)} = (K - S_t^{(i)}) \cdot 1_{\{S_t^{(i)} < K \cap T_{x(j)} = t\}}(t)$$

3.2.3. COMPARAISON AVEC LA FORMULE THEORIQUE

Le coût total déterminé par l'approche financière dans le cadre de la simulation stochastique correspond à la somme entre le coût de couverture sur chacun des deux actifs (risqué et non risqué) et le flux de paiement à effectuer en cas de décès. Ce coût est une réalisation de la PPU financière, ainsi :

$$\begin{aligned} ppu^{Fi} &= \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N e^{-rk} M_k^{(i,j)} + G_{\xi}^{(i)}(r, k, S_k^{(i)}, \tilde{\xi}_k^{(i)}) + G_{\eta}^{(i)}(r, k, \tilde{\eta}_k^{(i)}) + \tilde{\eta}_0^{(i)} + \tilde{\xi}_0^{(i)} S_0^{(i)} \\ &= \sum_{k=1}^T \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M -\tilde{\xi}_{k-1}^{(i)} (e^{-rk} S_k^{(i)} - e^{-r(k-1)} S_{k-1}^{(i)}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^T \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rk} (K - S_k^{(i)}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\{S_k^{(i)} < K \cap T_{x(j)} = k\}}(k) \end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rk} (K - S_k^{(i)}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\{S_k^{(i)} < K\}}(k) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} \hat{V}^P(0, k),$$

au même titre que pour la mesure de probabilité P dans (21) page 58, et d'après l'équation (11) page 43 :

$$-\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{\xi}_{k-1}^{(i)} (e^{-rk} S_k^{(i)} - e^{-r(k-1)} S_{k-1}^{(i)}) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} -\hat{\xi}_{k-1} (e^{-rk} S_k - e^{-r(k-1)} S_{k-1}).$$

Si le processus de décès évolue comme la table de mortalité, que la stratégie nous couvre parfaitement et sachant que la stratégie est autofinancée (équation (12) page 44) alors :

$$\sum_{k=1}^T \tilde{\xi}_{k-1} (e^{-r(k-1)} S_{k-1} - e^{-rk} S_k) = \hat{\eta}_0(T) + x_0 \hat{\xi}_0(T) - (\hat{\eta}_T(T) + S_T \hat{\xi}_T(T)) - \sum_{k=1}^T \hat{V}^P(0, k) {}_k p_x q_{x+k}.$$

C'est à dire que la valeur de la stratégie de couverture est égale à la différence entre la valeur initiale cette stratégie et les sommes versées en cas de décès.

Ainsi il nous reste :

$$\begin{aligned} ppu^{Fi} &= \hat{\eta}_0(T) + x_0 \cdot \hat{\xi}_0(T) - \underbrace{(\hat{\eta}_T(T) + S_T \hat{\xi}_T(T))}_{=0} - ppu^{Act} + ppu^{Act} \\ &= \hat{\eta}_0(T) + x_0 \cdot \hat{\xi}_0(T) \end{aligned}$$

Si nous comparons avec (18) page 50, nous constatons qu'il s'agit bien d'une estimation de la PPU déterminée par l'approche financière.

4. RESULTATS

Examinons maintenant de plus près les résultats obtenus, à savoir les distributions des coûts futurs actualisés en $t = 0$ propres à chaque approche.

(*Hypothèses* : $S_0 = 1$, $K = 1$, $\mu = 8,5\%$, $\sigma = 25\%$, 1000 têtes de 45 ans, 10 000 simulations)

4.1. APPROCHE ACTUARIELLE

4.1.1. STATISTIQUES

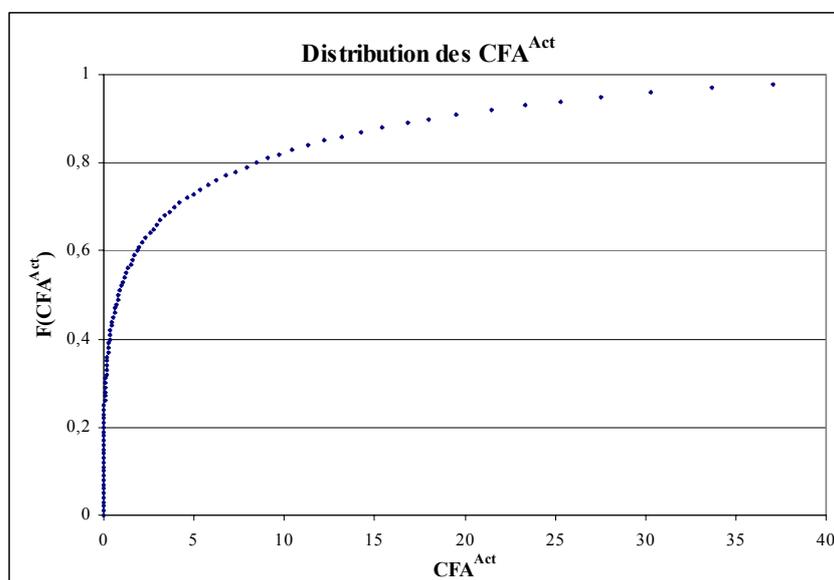
Table 1 : Statistiques relatives aux CFA^{Act}

	Moyenne	Ecart-Type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
CFA^{Act}	5,28	9,38	36,53	47,51	591%	799%

Les notions de $CTE_{95\%}$, $CTE_{99\%}$, $K_{95\%}$ et $K_{99\%}$ sont explicitées en 2 page 73 Pour simplifier, disons que $K_{95\%}$ et $K_{99\%}$ représentent le montant de capital à allouer en pourcentage de prime pure.

4.1.2. DISTRIBUTION

Figure 6 : Distribution des CFA^{Act}



4.1.3. COMMENTAIRES

Nous constatons que l'approche actuarielle fournit (comme nous pouvions nous y attendre) une distribution des coûts futurs actualisés (Coûts Futurs Actualisés - méthode actuarielle -) CFA^{Act} très dispersée. Ceci s'explique par le fait que nous ne nous couvrons pas sur les marchés financiers, les CFA^{Act} sont donc très sensibles aux fluctuations de l'actif sous-jacent.

4.2. APPROCHE FINANCIERE

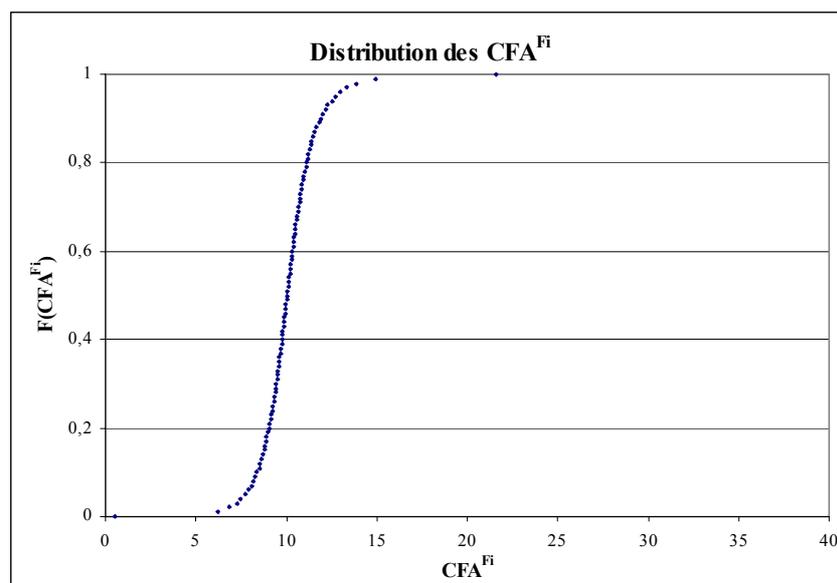
4.2.1. STATISTIQUES

Table 2 : Statistiques relatives aux CFA^{Fi}

	Moyenne	Ecart-Type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
CFA^{Fi}	10,11	1,58	14,02	16,22	39%	60%

4.2.2. DISTRIBUTION

Figure 7 : Distribution des CFA^{Fi}



4.2.3. COMMENTAIRES

Les CFA^{Fi} (Coûts Futurs Actualisés - méthode financière -) sont beaucoup plus centrés autour de leur moyenne que les CFA^{Act} , cela tient au fait que la stratégie de couverture fait accroître le coût moyen (dès lors que $\mu > r$). Nous pouvons dès à présent anticiper que l'approche financière apportera une PPU^{Fi} moins sensible à μ que PPU^{Act} (confirmé en 5).

Notons également que le capital à allouer est sensiblement moins important dans l'approche financière que dans l'approche actuarielle (en comparant les quantités $K_{95\%}$, $K_{99\%}$ déterminés par chaque approche).

5. ANALYSE DE SENSIBILITE

5.1. PRINCIPE

Dans la mesure où nous procédons à des simulations pour évaluer notre distribution de CFA, nous devons fixer un grand nombre de paramètres (le taux d'intérêt sans risque r , le taux de rendement espéré de l'actif μ , la volatilité de l'actif σ, \dots). La distribution des CFA est donc une fonction de ces paramètres.

Afin de discerner quel est l'impact de chaque paramètre, nous allons procéder à une analyse de sensibilité, c'est à dire étudier le comportement de la distribution des CFA obtenue suite à une modification d'un des paramètres.

5.2. SENSIBILITE PAR RAPPORT A μ

Procédons tout d'abord par une analyse de sensibilité par rapport à μ : le taux de rendement espéré de l'actif sous-jacent.

(Hypothèses : $S_0 = 1$, $K = 1$, $\sigma = 25\%$, 1000 têtes de 45 ans, 10 000 simulations)

5.2.1. DISTRIBUTION DES CFA^{ACT}

5.2.1.1. STATISTIQUES

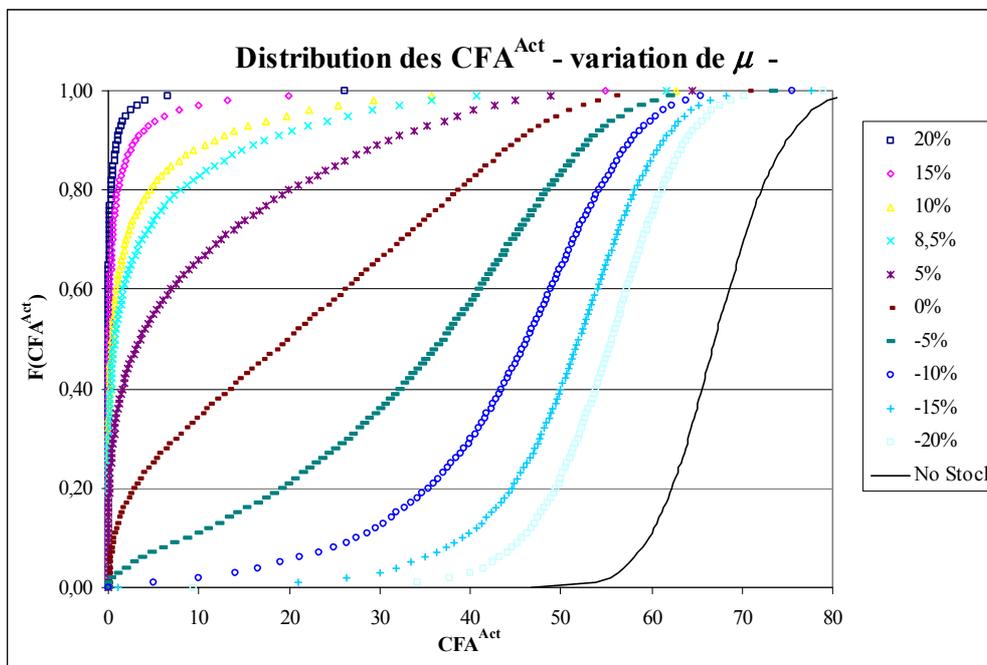
Table 3 : Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à μ (approche actuarielle)

	Moyenne	Ecart-type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
20%	0.42	1.42	5.05	11.30	1108%	2603%
15%	1.22	3.57	13.97	26.92	1049%	2114%
10%	3.51	7.28	29.39	42.64	737%	1114%
8.5%	5.04	9.04	35.23	45.77	599%	808%
5%	9.94	12.93	44.90	53.02	352%	434%
0%	21.18	16.81	53.73	59.44	154%	181%
-5%	34.04	16.13	60.03	64.75	76%	90%
-10%	44.15	12.46	63.56	67.74	44%	53%
-15%	50.86	9.33	66.43	70.31	31%	38%
-20%	55.06	7.43	68.75	72.54	25%	32%
No Stock	67.20	5.92	79.76	83.87	19%	25%

(Représentations graphiques : Figure 16 et Figure 17 page 98)

5.2.1.2. DISTRIBUTIONS

Figure 8 : Sensibilité par rapport à μ des CFA^{Act}



5.2.1.3. COMMENTAIRES

Nous constatons que plus μ diminue (de +20% à -20%), plus PPU^{Act} augmente, ce qui vient confirmer notre intuition. En effet, plus le rendement moyen espéré de l'actif est élevé, moins nous avons de « chance » de devoir payer un montant positif en cas de décès puisque plus la probabilité que le prix de l'actif sous-jacent soit supérieur au montant de la garantie plancher est grande.

Par ailleurs, nous constatons que lorsque μ devient négatif, la forme de la distribution des CFA^{Act} tend vers la courbure de la distribution des coûts futurs actualisés d'un contrat d'assurance décès classique. Il s'agit de la même forme de distribution que celle trouvée par l'approche financière (voir Figure 7 page 63). Ce qui est tout à fait logique dans la mesure où la probabilité de payer un montant non négatif en cas de décès est d'autant plus grande que μ est faible. Nous sommes donc de plus en plus certain de devoir payer un montant positif en cas de décès.

Nous remarquons enfin que la variance des CFA^{Act} atteint son maximum pour $\mu = 0$. Cela peut sembler surprenant à première vue mais il s'agit en fait d'un phénomène « naturel ». En effet, lorsque $\mu = 0$, le prix de l'actif sous-jacent oscille autour de x_0 (son prix en $t = 0$), or nous supposons dans chaque simulation que le montant de la garantie plancher K est constant et est égal à la valeur x_0 . Ainsi, les CFA^{Act} seront très volatiles d'une simulation à une autre.

5.2.2. DISTRIBUTION DES CFA^{Fi}

5.2.2.1. STATISTIQUES

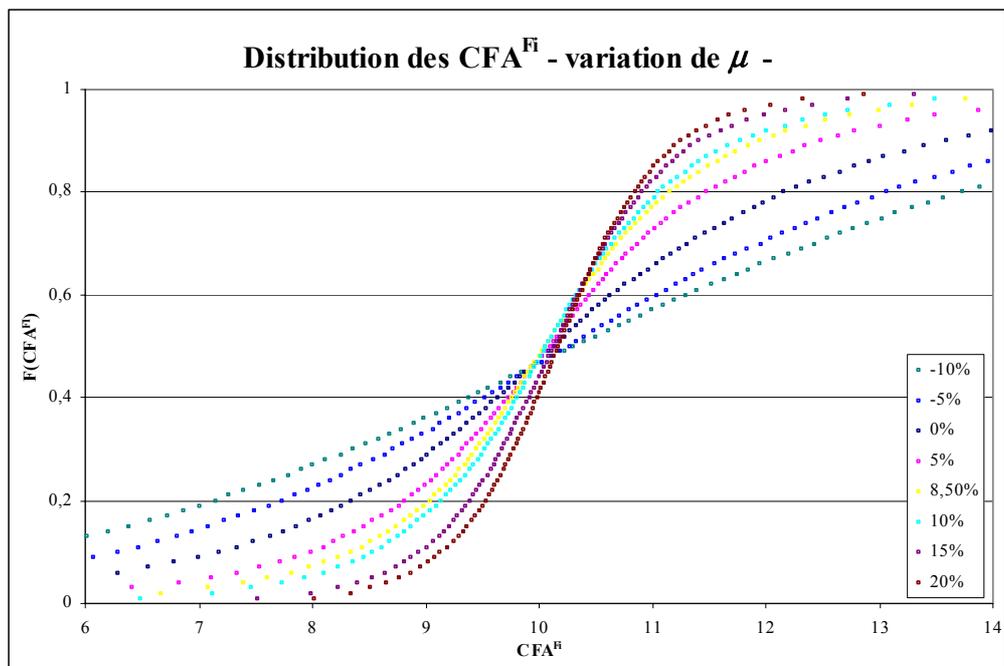
Table 4 : Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à μ (approche financière)

	Moyenne	Ecart-Type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
-10%	10,45	4,11	19,53	22,70	87%	117%
-5%	10,40	3,49	18,35	21,49	76%	107%
0%	10,26	2,71	16,69	19,31	63%	88%
5%	10,16	1,99	14,97	17,36	47%	71%
9%	10,10	1,60	13,92	15,94	38%	58%
10%	10,12	1,45	13,70	15,82	35%	56%
15%	10,17	1,10	12,84	14,32	26%	41%
20%	10,20	0,92	12,41	13,64	22%	34%

(Représentations graphiques : Figure 18 et Figure 19 page 99)

5.2.2.2. DISTRIBUTIONS

Figure 9 : Sensibilité par rapport à μ des CFA^{Fi}



5.2.2.3. COMMENTAIRES

Constatons tout d'abord la quasi-constance de PPU^{Fi} : peu importe la valeur de μ , PPU^{Fi} garde la même valeur (à quelques décimales près). Cet effet est tout à fait logique, et c'est d'ailleurs dans cet objectif que l'approche financière a été élaborée. La stratégie θ a été déterminée de telle sorte qu'elle ne dépende pas de μ (voir 2.6 page 50), il est donc naturel que PPU^{Fi} soit indépendante de μ .

Toutefois, μ affecte la variance de PPU^{Fi} , dans la mesure où plus μ va augmenter et plus la variance des CFA^{Fi} sera faible. Encore une fois, cet effet était prévisible, μ affecte uniquement le montant à payer en cas de décès donc plus μ est grand et plus la probabilité de ne rien payer en cas de décès est faible donc plus les CFA^{Fi} sont « stables ».

Tout ceci est visible sur la Figure 9 : toutes les courbes de distributions des CFA^{Fi} pivotent autour de PPU^{Fi} mais les courbes avec de petites valeurs de μ sont plus dispersées que les courbes avec de grandes valeurs de μ .

5.3. SENSIBILITE PAR RAPPORT A σ

Intéressons nous maintenant à la sensibilité par rapport à σ : la volatilité de l'actif sous-jacent.

(*Hypothèses* : $S_0 = 1$, $K = 1$, $\mu = 8.5\%$, 1000 têtes de 45 ans, 10 000 simulations)

5.3.1. DISTRIBUTION DES CFA^{ACT}

5.3.1.1. STATISTIQUES

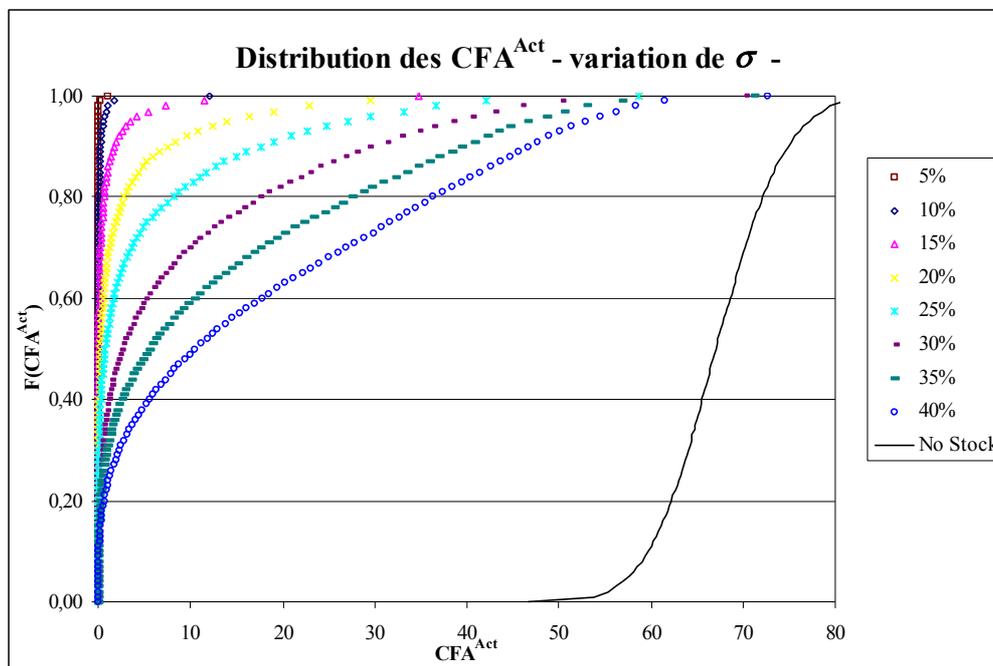
Table 5 : Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à σ (approche actuarielle)

	Moyenne	Ecart-type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
5%	0.01	0.02	0.08	0.17	1297%	2950%
10%	0.11	0.40	1.33	2.99	1148%	2703%
15%	0.71	2.21	8.28	17.37	1064%	2342%
20%	2.46	5.64	23.02	35.50	834%	1341%
25%	5.11	9.22	35.99	46.59	605%	812%
30%	8.94	12.77	45.61	54.61	410%	511%
35%	13.17	15.88	52.86	60.43	301%	359%
40%	17.64	18.28	58.15	64.79	230%	267%

(Représentations graphiques : Figure 20 et Figure 21 page 100)

5.3.1.2. DISTRIBUTIONS

Figure 10 : Sensibilité par rapport à σ des CFA^{Act}



5.3.1.3. COMMENTAIRES

Nous constatons que les distributions des CFA^{Act} « s'étalent » de plus en plus et que PPU^{Act} s'accroît à mesure que σ augmente (voir 5.3.2.3).

5.3.2. DISTRIBUTION DES CFA^{Fi}

5.3.2.1. STATISTIQUES

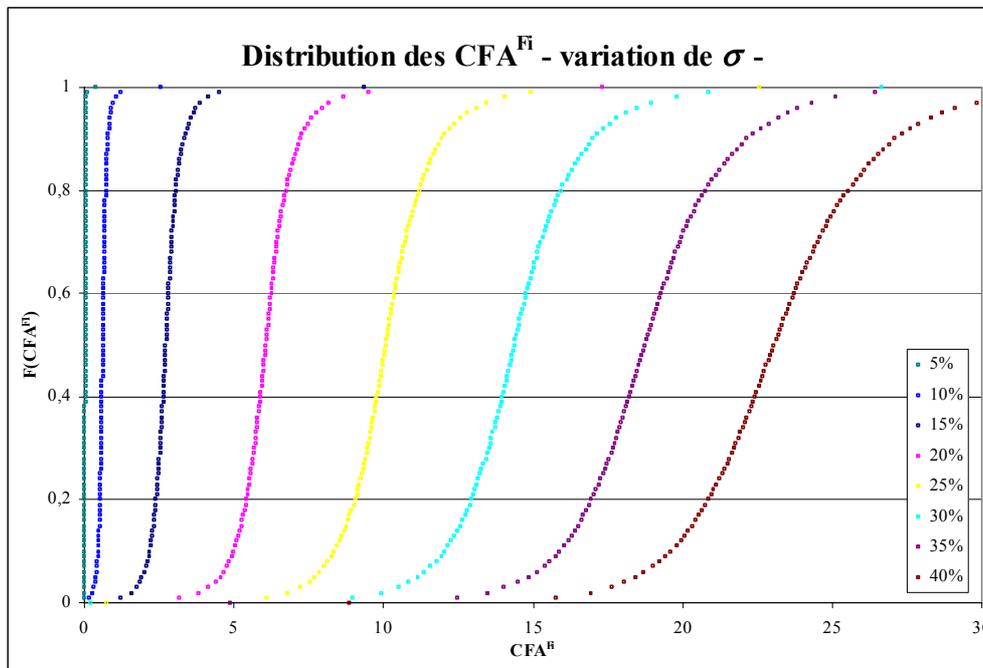
Table 6 : Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à σ (approche financière)

	Moyenne	Ecart-Type	CTE _{95%}	CTE _{99%}	K _{95%}	K _{99%}
5%	0,03	0,02	0,08	0,13	158%	317%
10%	0,63	0,17	1,08	1,45	71%	129%
15%	2,75	0,57	4,21	5,27	53%	91%
20%	6,10	1,07	8,81	10,69	44%	75%
25%	10,14	1,61	14,15	16,36	40%	61%
30%	14,47	2,19	19,81	22,44	37%	55%
35%	18,90	2,65	25,23	27,92	34%	48%
40%	23,24	3,14	30,69	33,68	32%	45%

(Représentations graphiques : Figure 22 et Figure 23 page 101)

5.3.2.2. DISTRIBUTIONS

Figure 11 : Sensibilité par rapport à σ des CFA^{Fi}



5.3.2.3. COMMENTAIRES

Tout comme l'effet décrit en 5.3.1.3, le fait d'augmenter σ fait s'accroître PPU^{Fi} et rend plus volatiles les CFA^{Fi} . Nous constatons dans le cas présent que les courbes se décalent vers la droite (traduit le fait que PPU^{Fi} augmente) et que les courbes s'évalent (traduit l'accroissement de la variance des CFA^{Fi}) à mesure que σ augmente.

Nous remarquons toutefois que lors de l'étude de variation de σ pour les CFA^{Act} (réalisée en 5.3.1), PPU^{Act} et la variance des CFA^{Act} augmentent de façon quasi-proportionnelle quand σ augmente (voir Figure 20 page 100).

Concernant la distribution des CFA^{Fi} , la variance augmente bien à mesure que σ augmente mais moins que proportionnellement (voir Figure 22 page 101). Ceci s'explique encore une fois par l'existence de la stratégie de couverture dans l'approche financière.

6. CONCLUSION

Tirons maintenant les conclusions de cette analyse de sensibilité et choisissons l'approche la plus adaptée. Pour résumer, disons que PPU^{Fi} est quasi insensible à μ tandis que PPU^{Act} y est fortement liée. De plus, les deux approches fournissent une PPU sensible à σ , mais PPU^{Fi} y est moins sensible que PPU^{Act} d'un point de vue variance.

Il semble évident que l'approche optimale serait l'approche financière mais trois arguments vont nous pousser à choisir l'approche actuarielle.

Tout d'abord, rappelons que pour appliquer le tarif de l'approche financière, il faut impérativement réaliser la stratégie de couverture. Nous savons dans un premier temps que cette stratégie est « localement » sans risque, c'est à dire que nous ne sommes parfaitement couverts qu'au moment du calcul des coefficient de θ . Ainsi, si entre deux périodes, un crash financier survient (ce que ne prend pas en compte les mouvement brownien géométrique utilisé comme modèle d'actif financier) et qu'il y a des décès, alors notre stratégie de couverture ne sera pas optimale pour payer les coûts des décès.

Par ailleurs, notons que nous avons utilisé les modèle de Black-Scholes pour calculer les coefficients de notre stratégie et de ce fait les hypothèses relatives à ce modèle. Souvenons-nous alors de 1.1.1 page 42 où nous supposons que le marché est parfait et de ce fait qu'il n'existe pas de coûts de transaction. Cette hypothèse est fondamentale et pourtant, dans notre cas, si nous appliquions une telle stratégie de couverture (supposons que nous la réajustions tous les mois), ces coûts de transaction devraient être inclus dans la PPU^{Fi} et modifieraient grandement les résultats obtenus précédemment.

Enfin, la raison la plus valable pour ne pas utiliser l'approche financière est la faisabilité de la stratégie de couverture. Une compagnie de réassurance telle que Secura ne peut pas se couvrir sur les marchés financiers pour des raisons financières et de gestion.

L'approche adoptée est ainsi l'approche actuarielle. Nous avons donc un modèle pour la PPU, qui correspond à l'espérance sous la mesure de probabilité physique P des flux futurs actualisés mais comment aboutir à la prime commerciale, c'est à dire en incluant les frais de gestion mais surtout la prise en compte d'un chargement qui reflète la volatilité des flux futurs. Comment déterminer ce chargement ?

CHAPITRE V : MODELE DE CASH-FLOW

Dans cette dernière partie nous allons chercher comment charger la PPU déterminée par l'approche actuarielle de telle sorte que nous obtenions la prime technico-financière (PTF).

Notre objectif est de se donner une idée des provisions moyennes pour chaque date t vue de 0 et ainsi de déterminer la marge de solvabilité associée.

1. VOLATILITE DES CFA

Nous savons que PPU^{Act} est une prime moyenne, c'est à dire qu'en moyenne, elle couvre l'espérance des pertes futures déterminées par les paramètres de départ (μ, σ, \dots). Nous sommes maintenant en mesure de déterminer cette prime. Cependant, au regard de l'analyse de sensibilité décrite en 5.3.1 page 67, nous constatons que cette prime est particulièrement volatile (sa variance est très grande). Pour déterminer la PTF, il faut prendre en compte cette volatilité.

Pour prendre en compte cette volatilité, intéressons nous à la quantité suivante :

$$P_t = 1_{\{t < T\}}(t) \sum_{k=t+1}^T e^{-r(k-t)} \Delta C_k$$

où ΔC_k représente la perte subie à la date k , c'est à dire le coût non cumulatif en k , vue de 0.

Nous avons déjà utilisé cette quantité dans le cas particulier où $t = 0$ en 5 page 64 lors de l'analyse de sensibilité sous la dénomination CFA^{Act} . P_t représente la valeur moyenne en t des engagements futurs vu de 0 ou encore la provision mathématique en t vue de 0.

Grâce à notre procédure de simulation (abordée en 3.1 page 57), nous sommes en mesure d'avoir une évaluation de P_t pour chaque t entre 0 et T et surtout d'en avoir sa distribution.

Nous sommes maintenant capables d'obtenir les distributions pour la date t (insistons bien sur le fait qu'elles sont vues de la date 0 et non pas vues de la date t) des engagements moyens futurs et de ce fait capables d'évaluer la volatilité de ces quantités. Comment rendre compte dans la PTF de la volatilité de la PPU ?

2. MODÈLE DE CASH-FLOW

Essayons de reconstituer le compte de résultats de notre produit, c'est à dire déterminons les flux entrants et sortants. Notre objectif est alors de distinguer les différents flux (cash-flow) qui vont avoir lieu au cours du temps. Intuitivement, nous pouvons nous imaginer qu'il y aura des flux de paiements à effectuer (dus aux décès) au niveau de l'actif et des flux de capitaux au niveau du passif (provisions techniques et détermination de la marge de solvabilité). Nous souhaitons déterminer les capitaux que nous devons mettre à disposition de sorte que nous puissions faire face à nos engagements futurs avec pour objectif ultime, non pas de déterminer le montant des provisions pour chaque période mais de déterminer les capitaux à mobiliser en moyenne (vus de la date 0) afin de prendre en compte dans la prime finale le coût de la mobilisation de ces capitaux. Mais interrogeons nous d'abord sur la nature de ces flux.

2.1. LES PERTES MOYENNES

Elles constituent les montants moyens (vus de 0) à verser pour chaque date t .

Dans le cadre de la modélisation nous les notons : ΔC_t où C_t représente les pertes moyennes cumulées jusqu'à la date t .

Dans le cadre de la simulation stochastique, la définition est la suivante :

$$\overline{\Delta c_t} = \frac{1_{\{t>0\}}(t)}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (K - S_t^{(i)}) \cdot 1_{\{S_t^{(i)} < K \cap T_{x(j)} = t\}}(t).$$

La notation est similaire à celle utilisée en 3 page 57.

C'est à dire que sur chaque simulations (M simulations au total) nous évaluons les montants à verser au moment t et nous en prenons la moyenne.

2.2. LES VARIATIONS MOYENNES DE PROVISIONS MATHÉMATIQUES

Comme nous l'avons énoncé précédemment, la provision mathématique moyenne pour t vue de 0 correspond à la somme actualisée des engagements futurs, comme la prime du contrat est unique, il s'agit uniquement de la somme des coûts futurs actualisés. Si la variable aléatoire :

$$P_t = 1_{\{t < T\}}(t) \sum_{k=t+1}^T e^{-r(k-t)} \Delta C_k \quad (22)$$

alors :

$$\overline{p_t} = 1_{\{t < T\}}(t) \sum_{k=t+1}^T e^{-r(k-t)} \overline{\Delta c_k} \text{ est un estimateur de } E[P_t]. \quad (23)$$

Notons que dans le cas particulier où $t = 0$, nous retrouvons l'équation (20) de la page 57, celle de ppu^{Act} . D'où la variation moyenne de provision :

$$\overline{\Delta p_t} = (\overline{p_{t+1}} - \overline{p_t}) \cdot 1_{\{t>0\}}(t) + \overline{p_0} \cdot 1_{\{t=0\}}(t).$$

2.3. LES VARIATIONS MOYENNES DE CAPITAL

Dans ce cadre, le terme capital est à assimiler avec marge de solvabilité, définissons ainsi la marge de solvabilité.

2.3.1. MARGE DE SOLVABILITE

2.3.1.1. DEFINITION

La marge de solvabilité est le montant de capital que les autorités de réglementation des Etats membres de l'Union Européenne (« les régulateurs ») obligent les entreprises d'assurance à détenir. Toutes ces informations sont disponibles sur [S-1].

2.3.1.2. POURQUOI L'EXISTENCE D'UNE MARGE DE SOLVABILITE ?

Toutes les entreprises d'assurance contractent des engagements, tels que, par exemple, la promesse d'indemniser leurs assurés pour leurs sinistres actuels et futurs. A cet effet, elles mettent de côté une somme d'argent (les provisions techniques), calculée sur des bases prudentes. L'assurance reste toutefois une activité à risque, qui ne va pas sans comporter certains imprévus, comme un sinistre supérieur aux prévisions ou un placement peu performant. Ces provisions techniques, bien que constituées avec prudence, peuvent donc finalement s'avérer insuffisantes. La marge de solvabilité fournit une source supplémentaire de capitaux permettant de faire face aux imprévus et, par conséquent, de protéger les clients des entreprises d'assurance.

2.3.1.3. DE QUOI EST CONSTITUEE LA MARGE DE SOLVABILITE ?

Selon [S-1], la marge de solvabilité disponible est constituée par le patrimoine de l'entreprise d'assurance y compris : le capital social, les réserves (légalés ou libres), le report du bénéfice ou de la perte déduction faite des dividendes à verser.

De manière synthétique, disons que la somme entre marge de solvabilité et les provisions mathématiques doit permettre de faire face aux engagements contractés par la compagnie. Notre tâche maintenant est d'évaluer notre marge de solvabilité.

2.4. DETERMINATION DE LA MARGE DE SOLVABILITE

Il semble évident que le montant de la marge de solvabilité doit être à la mesure du risque du produit concerné, c'est à dire qu'un produit d'assurance décès classique ne nécessitera pas un montant aussi important qu'un produit d'assurance décès indexé sur un actif sous-jacent avec garantie plancher. Il semble intuitif que la volatilité des montants à verser est moins importante dans le premier contrat. Pour confirmer notre intuition nous devons alors faire appel à une mesure de risque qui prendra en compte la dispersion des valeurs actualisées en t (vue de 0) de notre contrat (la variable aléatoire P_t vue dans l'équation (22) page 73).

2.4.1. MESURES DE RISQUE

Une mesure de risque est un critère qui permet d'exprimer le risque par un nombre réel. Un exemple de mesure de risque est le principe de prime : nous utilisons la distribution de pertes futures probables et la transposons en une prime appropriée.

Il existe plusieurs mesures de risque, abordons en particulier « Value At Risk » et « Conditional Tail Expectation ». Nous nous référons particulièrement à [A-1] et [A-11].

2.4.1.1. « VALUE AT RISK »

« Value At Risk » ou VaR d'ordre α ($0 \leq \alpha \leq 1$) est V_α où :

$$V_\alpha(P_t) = \inf\{V : P[P_t \leq V] \geq \alpha\}. \quad (24)$$

V_α peut être simplement interprété comme le montant actualisé au taux sans risque en t qui sera suffisant pour payer une charge ayant une probabilité α de se réaliser.

Toutefois, cette mesure de risque peut être très dangereuse et nous pouvons rencontrer des cas où :

$$V_\alpha(P_t) \leq E[P_t],$$

c'est à dire que le montant nécessaire pour être couvert dans $100\alpha\%$ des cas est inférieur à la perte moyenne. Ce dernier cas est particulièrement dangereux.

Pour plus de détails, les inconvénients de cette mesure de risque sont exposés dans [A-1]. Il est toutefois intéressant de définir VaR pour la suite.

2.4.1.2. « CONDITIONAL TAIL EXPECTATION »

« Conditional Tail Expectation » de seuil $100\alpha\%$ ou CTE_α (ou $Tail-VaR_\alpha$) est une mesure de risque qui pallie les inconvénients de VaR .

$$CTE_\alpha(P_t) = E[P_t / P_t > V_\alpha(P_t)]$$

où $V_\alpha(P_t)$ fait référence à l'équation (24) de la page précédente.

CTE_α représente la perte moyenne espérée sachant que cette perte appartient au quantile supérieur $(1-\alpha)\%$ de la distribution de la perte.

Nous constatons aisément que lorsque $\alpha = 0$, $CTE_\alpha(P_t) = E[P_t]$ et quelque soit $\alpha > 0$, $CTE_\alpha(P_t)$ est nécessairement supérieur à la perte moyenne, palliant de ce fait l'inconvénient majeur de VaR .

Une mesure de risque telle que CTE_α est très facile à implémenter dans le cadre de simulations stochastiques, il suffit de prendre les $100(1-\alpha)\%$ réalisations de coûts les plus élevées et d'en calculer la moyenne. En utilisant une telle méthode, nous obtenons un estimateur plus robuste que VaR .

Grâce à CTE , nous sommes en mesure de déterminer à chaque date t le montant vu de 0 tel que nous puissions faire face à nos engagements futurs dans plus de $100\alpha\%$ des cas.

2.5. FORMULATION DU CAPITAL MOYEN

La capital moyen à allouer pour chaque t , vu de 0 au seuil α est donc :

$$k_t^\alpha = (CTE_\alpha(p_t) - \bar{p}_t) \times RiskCoef ,$$

où : $p_t = 1_{\{t < T\}}(t) \sum_{k=t+1}^T e^{-r(k-t)} \Delta c_k$ et \bar{p}_t fait référence à (23).

Sachant que ce capital est investi dans une proportion p en actions et $(1-p)$ en obligations, le coefficient $RiskCoef (>1)$ reflète le caractère risqué de ce placement (nous sommes conscients que ce coefficient n'est qu'une grossière estimation, la détermination de celui-ci demanderait une étude plus poussée).

Déterminons également la variation moyenne de capital :

$$\Delta k_t^\alpha = (k_{t+1}^\alpha - k_t^\alpha) \cdot 1_{\{t > 0\}} + k_0^\alpha \cdot 1_{\{t=0\}}$$

2.6. TAXES ET INTERETS

Considérons un taux de taxe égal à γ et un taux de rendement moyen des actions de δ . Le taux de rendement moyen des obligations est égal au taux sans risque considéré : r .

Alors le rendement moyen sur un an en t des provisions, des actions et des obligations sont respectivement :

$$R_t(\bar{p}) = 1_{\{t>0\}} \overline{p}_{t-1} (e^r - 1)$$

$$R_t(k, S) = 1_{\{t>0\}} k_{t-1}^\alpha (e^\delta - 1)p$$

$$R_t(k, B) = 1_{\{t>0\}} k_{t-1}^\alpha (e^r - 1)(1 - p)$$

2.7. COUT DU CAPITAL (COST OF CAPITAL OU COC)

Nous faisons référence ici au pertinent mémoire de Stéphane Bleton [M-1].

Le coût du capital de la compagnie se détermine à partir du taux de rendement sans risque auquel s'ajoute une prime de risque pour l'investissement dans la compagnie considérée.

L'idée pour la détermination du coût du capital trouve son origine dans le CAPM (Capital Asset Pricing Model) : l'investisseur attend un rendement des placements correspondant au rendement obtenu pour un placement dans un autre actif comportant le même niveau de risque systématique.

Dans notre cas précis, le coût du capital considéré correspond au taux de rendement espéré de l'actionnaire qui investit dans la compagnie.

3. PRINCIPE DE DETERMINATION DE LA PRIME TECHNICO-FINANCIERE

3.1. NET PRESENT VALUE (NPV)

Encore une fois nous faisons référence à [M-1].

NPV correspond à la valeur actualisée des profits futurs où le taux d'actualisation correspond au coût du capital.

Dans le cadre d'une analyse des contrats en cours, le contrat est profitable si NPV est positive ; si NPV est négative, le contrat ne devrait pas être commercialisé, parce qu'il ne remplit pas les objectifs de rentabilité de la compagnie.

En matière de tarification, NPV nous est utile pour déterminer la prime technico-financière (PTF) à appliquer de telle sorte que NPV soit nulle.

Il nous suffit maintenant d'analyser les flux nécessaires pour déterminer les profits futurs.

3.2. DETERMINATION DES PROFITS FUTURS

En tenant compte de ce qui a été exposé en 2.1 page 73 et suivants, évaluons les profits futurs moyens pour chaque t , vus de la date 0.

Analysons les différents flux :

flux négatifs :

- la perte moyenne nette : $\overline{\Delta c}_t(1 - \gamma)$,
- la variation nette moyenne de provision mathématique : $\overline{\Delta p}_t(1 - \gamma)$,
- la variation moyenne de capital : Δk_t^α ;

flux positifs :

- le rendement net moyen sur les provisions : $R_t(\overline{p})(1 - \gamma)$,
- le rendement net moyen sur le capital en obligations : $R_t(k, B)(1 - \gamma)$,
- le rendement moyen sur le capital en actions : $R_t(k, S)$.

3.3. CALCUL DE LA PRIME TECHNICO-FINANCIERE :

Afin d'obtenir la PTF nette, il nous faut, sous le principe de NPV, résoudre l'équation suivante :

$$ptf(1-\gamma) - \sum_{t=0}^T e^{-t(COC)} \left[\overline{\Delta c}_t (1-\gamma) + (\overline{\Delta p}_t - R_t(\overline{p})) (1-\gamma) + \Delta k_t^\alpha - R_t(k, S) - R_t(k, B)(1-\gamma) \right] = 0,$$

et nous obtenons :

$$ptf = \frac{\sum_{t=0}^T e^{-t(COC)} \left[\overline{\Delta c}_t (1-\gamma) + (\overline{\Delta p}_t - R_t(\overline{p})) (1-\gamma) + \Delta k_t^\alpha - R_t(k, S) - R_t(k, B)(1-\gamma) \right]}{1-\gamma}.$$

4. CONCLUSION

Nous obtenons une expression de PTF relativement simple du fait que cette prime est unique, si cette prime avait été périodique, nous aurions du procéder à un programme d'optimisation linéaire.

Cette prime prend en compte l'état moyen des provisions de chaque date t vu de 0 et le capital moyen adéquat au seuil α . Insistons sur le fait que les niveaux moyens de provisions et de capital sont vus de 0 et ne prennent pas en compte une éventuelle ruine entre deux dates, il ne s'agit donc pas de déterminer le montant des provisions et du capital à chaque date mais plutôt de se donner un niveau moyen de provisions permettant de se faire une idée du capital à allouer. Pour plus de détails sur les mesures de risque dynamiques, voir [A-12].

CONCLUSION

1. RESULTATS

Pour conclure ce mémoire, exposons les différents résultats auxquels nous avons abouti.

Tant pour l'approche actuarielle que financière, nous sommes en mesure de produire une fonction de distribution des coûts futurs actualisés propres à chaque approche (CFA^{Act} et CFA^{Fi}), nous sommes donc capable d'évaluer, en plus de la prime moyenne, sa variance et ses quantiles. Au regard de ces distributions, nous confirmons notre intuitions première : certes, le « prix financier » est plus élevé que le « prix actuariel » (à hypothèses égales) mais le prix financier est beaucoup moins volatile. Ceci est confirmé en « 5. Analyse de sensibilité » page 64 et au regard de la Figure 8, Figure 9, Figure 10 et Figure 11 page 65 et suivantes.

Dans les deux cas (actuariel et financier), notre tarif repose sur le modèle de Black-Scholes et ses lourdes hypothèses. Même si certaines de ces hypothèses sont très fortes comme l'absence de coûts de transaction ou l'existence d'un marché complet, cette approche se montre très robuste et constitue un excellente base pour des modèles plus sophistiqués. Nous avons également implémenté un logiciel de simulation stochastique sous SAS IML (un sous langage du programme SAS sous forme matricielle) qui, sous une contrainte de temps acceptable (4 mns pour 10 000 simulations de 1000 têtes) permet de tarifer de manière efficace.

De plus, grâce au CTE, nous pouvons déterminer la marge de solvabilité moyenne pour chaque date t , vu de 0 et, grâce au principe de NPV déterminer une prime technico-financière qui prend en compte le coût d'allocation du capital dans la prime finale.

Nous avons donc choisi une approche actuarielle pour des raisons de faisabilité mais le choix des hypothèses reste encore assez difficile. Malgré les multiples analyses de sensibilité, il est difficile de décrire l'évolution du fonds géré par la compagnie cédante.

En effet, d'un point de vue contractuel, la cédante est tenue par exemple d'indiquer comment elle compte gérer son fonds (celui de base des UC), c'est à dire, quel indice de référence elle compte suivre. Pour construire notre modèle d'actif, nous nous basons alors sur l'actif que la cédante compte suivre mais en cas de décès, le montant décès versé dépend du fonds géré par la cédante et non de l'actif de référence. Il existe alors un risque supplémentaire au risque de décès et au risque financier : le risque de base. Ce dernier risque est difficilement quantifiable et devrait, en toute logique, être supporté par la cédante.

Ajoutons par ailleurs que le taux à utiliser pour le CTE dans le cadre de la détermination de la marge de solvabilités est difficilement évaluable.

Ces deux derniers exemple illustrent bien le fait que, malgré les développements que nous venons d'effectuer quant à la tarification du contrat, plusieurs questions subsistent.

2. QUESTIONS OUVERTES

Plusieurs questions peuvent subsister suite à notre étude et elles sont de deux types : que devrions nous modifier dans le traité de réassurance, en lui-même et que devrions nous rendre plus pertinent dans notre modèle ?

La problématique du risque de base (décrite plus haut) est relativement importante et surtout dans la conjoncture actuelle. En effet, si nous nous indexons sur l'Eurostoxx 50 par exemple pour construire notre modèle d'actif et que le fonds de la cédante gère de telle sorte que nous suivions l'Eurostoxx mais avec d'avantage de volatilité alors l'estimation du σ de notre modèle est fortement biaisée. Ce simple exemple nous montre comment nous sommes encore sous risque malgré une prime calculée sur des bases prudentielles et nous dirige vers un autre point de discussion : le modèle d'actif en lui-même.

En effet, jusqu'à présent, nous avons supposé que la dynamique de l'actif sous-jacent est décrite par l'équation (6) mais ce modèle est tout de même soumis à de fortes hypothèses décrites en « 1.1. Hypothèses relatives au modèle de Black-Scholes » page 42. Nous pourrions envisager une autre dynamique, utiliser des séries temporelles ou tout autre modèle. Il s'agirait donc de faire une analyse de sensibilité du modèle en plus d'une analyse de sensibilité des paramètres de celui-ci.

Enfin, une des dernières questions que nous pourrions nous poser est relative à la mesure de risque CTE, non pas quant au choix de la mesure car CTE est supposée être cohérente au sens de [A-1] mais quant au seuil α à utiliser. Ce seuil devrait être déterminé en fonction de tous les autres produits de la compagnie de réassurance pour prendre en compte une éventuelle diversification du capital mais pourrait également être donné par les agences de notation ou les autorités de contrôle.

Toutes ces questions demandent des développements supplémentaires, interrogeons nous cependant d'une manière plus concrète quant aux extensions possibles du modèle.

3. EXTENSIONS POSSIBLES DU MODELE

Au regard de la littérature, que pourrions nous faire pour rendre notre modèle encore plus pertinent ?

Nous pouvons commencer par citer les travaux de Hardy qui envisage un modèle à deux états pour décrire l'actif sous-jacent : un état à volatilité « faible » et un état à volatilité « forte ». Ce modèle est particulièrement détaillé dans [A-6].

Citons également Møller pour ses travaux concernant « Risk Minimization » et son absence d'hypothèse de marché complet. Ce dernier considère dans [A-8] un tarif à la financière mais qui n'est plus constitué d'une stratégie autofinancée.

Citons enfin Jacques pour son intéressante alternative de tarification des contrats en unités de compte, décrite dans [A-7].

BIBLIOGRAPHIE

Articles

[A-1] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1998).
Coherent Measures of Risk

[A-2] CUMMINS, J.D.
Multi-Period Discounted Cash-Flow Rate-making Models in Property-Liability Insurance.
The Journal of Risk Insurance pp. 79-109.

[A-3] EMBRECHTS, P. (2000).
Actuarial versus Financial Pricing of Insurance.
The journal of Risk Finance, pp. 17-26.

[A-4] FÖLLMER, H., SCHWEIZER, M. (1989).
Hedging by Sequential Regression : An Introduction to the Mathematics of Option Trading.
Astin Bulletin Vol. 19, S, pp. 29-42.

[A-5] FÖLLMER, H., SONDERMANN D. (1986).
Hedging of Non-Redundant Contingent Claims.
Elsevier (1986).

[A-6] HARDY, M.R. (2001).
A Regime-Switching model of Long-term Stock Returns.
North American Actuarial Journal (2001).

[A-7] JACQUES, M.
The meaning of using option pricing theory to price equity-linked contracts.

[A-8] MØLLER, T. (1998).
Risk-Minimizing hedging Strategies for Unit-Linked Life Insurance Contracts.
Astin Bulletin Vol. 28, No. 1, pp. 17-47.

[A-9] MØLLER, T. (2001).
Indifference Pricing of Insurance Contracts : Applications.
Working Paper No. 171, March 2001.

[A-10] SCHWEIZER, M. (2000).
From Actuarial to Financial Valuation Principles.

[A-11] TASK FORCE ON SEGREGATED FUNDS (2000).
Report of the Task Force on Segregated Fund Investment Guarantees.
Canadian Institute of Actuaries (2000).

[A-12] WANG, T. (1999).
A Class of Dynamic Risk Measures.

Cours

[C-1] EISELE, K. T.

Simulation Stochastique.

Deuxième année d'Actuariat Strasbourg.

[C-2] FOATA, D.

Probabilités I, II, III.

Première, deuxième et troisième année d'Actuariat Strasbourg.

[C-3] NORBERG, R.

Basic Life Insurance Mathematics (excerpt of Version April 17, 2002).

Troisième année d'Actuariat Strasbourg.

[C-4] ROGER, P.

Finance, gestion du risque de taux.

Deuxième et troisième année d'Actuariat Strasbourg.

[C-5] RUBIO, A.

Assurance-Vie I, II.

Première et deuxième année d'Actuariat Strasbourg.

Livres

[L-1] BRIOT, J.-M., ESCH, L., JUSTENS, D., KINON, V., SIMON, L., STIEVENART, TH.

Modélisation et gestion du risque en finance.

Presses Ferrer (2000).

[L-2] DEVOLDER, P.

Finance Stochastique.

Editions de l'Université de Bruxelles (1993).

[L-3] FOATA, D., FUCHS, A.

Calcul des Probabilités.

Dunod (1998).

[L-4] GERBER, H.U.

Life Insurance Mathematics.

Springer-Verlag (1995).

[L-5] HULL, J.C.

Options, Futures and Other Derivatives Securities.

Prentice Hall (1993).

[L-6] LAMBERTON, D., LAPEYRE, B.

Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.

Chapman and Hall (1996).

[L-7] MUSIELA, M., RUTKOWSKI, M.

Martingale Methods in Financial Modelling.

Springer-Verlag (1997).

Mémoires

[M-1] BLETON, S.
Profit Testing en Assurance Vie Collective.
Magistère d'Actuariat Strasbourg (2002).

[M-2] DAEFFLER, F.
Contrats en Unités de Compte.
Magistère d'Actuariat Strasbourg (2000).

[M-3] HAINAUT, D.
Assurances Décès en Branche 23.
Université Catholique de Louvain (2000 - 2001).

Sites Internet

[S-1] COMMISSION EUROPEENNE.
Règles Relatives à la marge de solvabilité des entreprises d'assurance.
http://europa.eu.int/comm/internal_market/fr/finances/insur/02-26.htm

[S-2] SECURA-BELGIAN-RE.
<http://www.secura-re.com/>

GLOSSAIRE

<hr/>	
A	
Actif atteignable	43
<hr/>	
B	
Branche 23	13
<hr/>	
C	
CAPM	77
Cash-flow	73
CFA	51
CFA ^{Act}	62
CFA ^{Fi}	63
COC	77
CTE	76
<hr/>	
F	
Filtration	29
Force de mortalité	20
Formule d'Itô	32
<hr/>	
G	
Gompertz-Makeham	22
<hr/>	
M	
Marge de solvabilité	74
Martingale	31
Monte-Carlo	54
Mouvement brownien	30
<hr/>	
N	
NPV	78
<hr/>	
P	
PPU	38
Processus de décès	56
Processus de prix	54
Processus d'Itô	32
Processus stochastique	29
PTF	78
Put	15
<hr/>	
R	
Risque de base	82
<hr/>	
S	
SAS IML	82
Sousmartingale	31
Stratégie	43
Stratégie autofinancée	44
Surmartingale	31
<hr/>	
T	
Transformation de Girsanov	33
<hr/>	
U	
UC	13
Unit-Linked	13
UPEA	27
<hr/>	
V	
VaR	75
VNI	13
<hr/>	
W	
Weibull	22

NOTATIONS MATHÉMATIQUES

Coefficients de stratégie et estimateurs

- $\eta_t(T)$: quantité d'actif sans risque à détenir en t pour dupliquer un put maturité T (page 49).
 $\xi_t(T)$: quantité d'actif risqué à détenir en t pour dupliquer un put maturité T (page 49).
 $\tilde{\eta}_t(T)$: quantité d'actif sans risque à détenir en t pour dupliquer les flux du contrat (page 50).
 $\tilde{\xi}_t(T)$: quantité d'actif risqué à détenir en t pour dupliquer les flux du contrat (page 50).
 $\hat{\eta}_t(T)$: estimateur de $\tilde{\eta}_t(T)$ (page 60).
 $\hat{\xi}_t(T)$: estimateur de $\tilde{\xi}_t(T)$ (page 60).

Espérances de perte et estimateurs

- E_t^A : engagement de l'assureur à la date t (page 15).
 E_t^R : engagement du réassureur à la date t (page 15).
 $V^P(t, T)$: espérance de la perte en t pour un décès en date T sous la mesure P (page 38).
 $V^Q(t, T)$: espérance de la perte en t pour un décès en date T sous la mesure Q (page 47).
 $\hat{V}^P(t, T)$: estimateur de $V^P(t, T)$ (page 58).

Filtrations

- G_t : filtration générée par l'économie (page 39).
 H_t : filtration générée par le portefeuille d'assurance (page 39).
 \mathcal{F}_t : filtration combinée de l'économie et du portefeuille d'assurance (page 39).

Mesures de risque

- V_α : Value at Risk au seuil α (page 75).
 CTE_α : Conditional Tail Expectation au seuil α (page 76).

Modèle de Cash-Flow

- ΔC_t : perte subie à la date t vue de 0 (page 72).
 $\underline{\Delta c}_t$: estimateur de $E[\Delta C_t]$ (page 73).
 \underline{P}_t : somme actualisée en t des pertes subies entre t et T (page 72).
 \underline{p}_t : estimateur de $E[\underline{P}_t]$ (page 73).
 Δp_t : \underline{p}_t non cumulé (page 73).
 k_t^α : capital moyen à allouer au seuil α (page 76).
 Δk_{t-}^α : k_t^α non cumulé (page 76).
 $R_t(p)$: rendement moyen sur un an en t des provisions estimées (page 77).
 $R_t(k, S)$: rendement moyen sur un an en t des actions (page 77).
 $R_t(k, B)$: rendement moyen sur un an en t des obligations (page 77).

Paramètres financiers

μ : rendement espéré de l'actif sous-jacent.

σ : volatilité espérée de l'actif sous-jacent.

Primes et estimateurs

PPU^{Act} : Prime Pure Unique déterminée par l'approche actuarielle (page 39).

PPU^{Fi} : Prime Pure Unique déterminée par l'approche financière (page 50).

PTF : Prime Technico-Financière (page 79).

ppu^{Act} : estimateur de PPU^{Act} (page 57).

ppu^{Fi} : estimateur de PPU^{Fi} (page 60).

Ptf : estimateur de PTF (page 79).

Probabilités de décès et survie

${}_tq_x$: probabilité qu'une tête d'âge x décède dans t années (page 21).

${}_tp_x$: probabilité qu'une tête d'âge x survive dans t années (page 21).

Processus stochastiques

$(W_t)_{t \geq 0}$: mouvement brownien standard sous la mesure P (page 30).

$(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$: mouvement brownien standard sous la mesure Q (page 46).

$(S_t)_{t \geq 0}$: processus de prix de l'actif sous-jacent (page 36).

$(N_t)_{t \geq 0}$: processus de décès (page 54).

$(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$: processus de prix actualisé de l'actif sous-jacent (page 45).

$(\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$: quantité d'actif sans risque à détenir en t pour réaliser la stratégie θ (page 43).

$(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$: quantité d'actif risqué à détenir pour en t réaliser la stratégie θ (page 43).

$(V_t)_{0 \leq t \leq T}$: valeur de la stratégie θ en t (page 43).

$(G_t)_{0 \leq t \leq T}$: valeur de liquidation en t de la stratégie θ réalisée en $t-1$ (page 43).

TABLES DES ILLUSTRATIONS

Figures

Figure 1 : <i>Illustration du capital sous risque d'un contrat en UC avec garantie plancher</i>	14
Figure 2 : <i>Illustration de la loi Exponentielle</i>	23
Figure 3 : <i>Illustration de la loi de Weibull</i>	23
Figure 4 : <i>Illustration de la loi de Gompertz-Makeham</i>	23
Figure 5 : <i>Probabilités de décès issues d'une table UPEA</i>	27
Figure 6 : <i>Distribution des CFA^{Act}</i>	62
Figure 7 : <i>Distribution des CFA^{Fi}</i>	63
Figure 8 : <i>Sensibilité par rapport à μ des CFA^{Act}</i>	65
Figure 9 : <i>Sensibilité par rapport à μ des CFA^{Fi}</i>	66
Figure 10 : <i>Sensibilité par rapport à σ des CFA^{Act}</i>	68
Figure 11 : <i>Sensibilité par rapport à σ des CFA^{Fi}</i>	69
Figure 12 : <i>Simulation d'une trajectoire de l'actif sous-jacent - S_t -</i>	96
Figure 13 : <i>Simulation d'un processus de décès - N_t -</i>	96
Figure 14 : <i>Simulation de la stratégie en actif risqué - ξ_t -</i>	97
Figure 15 : <i>Simulation de la stratégie en actif non-risqué - η_t -</i>	97
Figure 16 : <i>Moyenne et écart-type de PPU^{Act}, sensibilité de μ (Table 3 page 64)</i>	98
Figure 17 : <i>Capital à allouer - approche actuarielle - sensibilité de μ (Table 3 page 64)</i>	98
Figure 18 : <i>Moyenne et écart-type de PPU^{Fi}, sensibilité de μ (Table 4 page 66)</i>	99
Figure 19 : <i>Capital à allouer – approche financière - sensibilité de μ (Table 4 page 66)</i>	99
Figure 20 : <i>Moyenne et écart-type de PPU^{Act}, sensibilité de σ (Table 5 page 67)</i>	100
Figure 21 : <i>Capital à allouer - approche actuarielle - sensibilité de σ (Table 5 page 67)</i>	100
Figure 22 : <i>Moyenne et écart-type de PPU^{Fi}, sensibilité de σ (Table 6 page 68)</i>	101
Figure 23 : <i>Capital à allouer - approche financière - sensibilité de σ (Table 6 page 68)</i>	101

Tables

Table 1 : <i>Statistiques relatives aux CFA^{Act}</i>	62
Table 2 : <i>Statistiques relatives aux CFA^{Fi}</i>	63
Table 3 : <i>Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à μ (approche actuarielle)</i>	64
Table 4 : <i>Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à μ (approche financière)</i>	66
Table 5 : <i>Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à σ (approche actuarielle)</i>	67
Table 6 : <i>Statistiques relatives à la sensibilité par rapport à σ (approche financière)</i>	68

ANNEXES

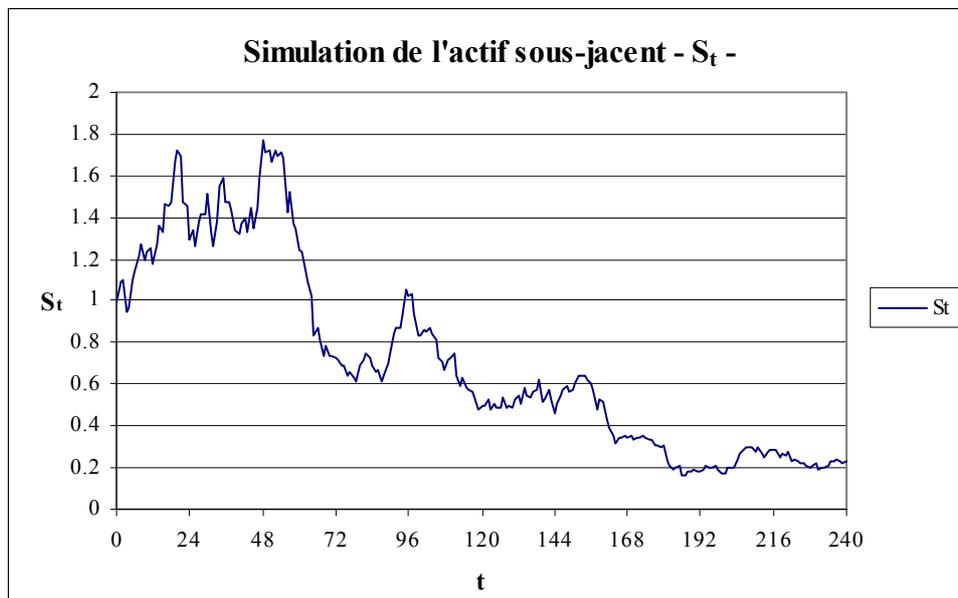
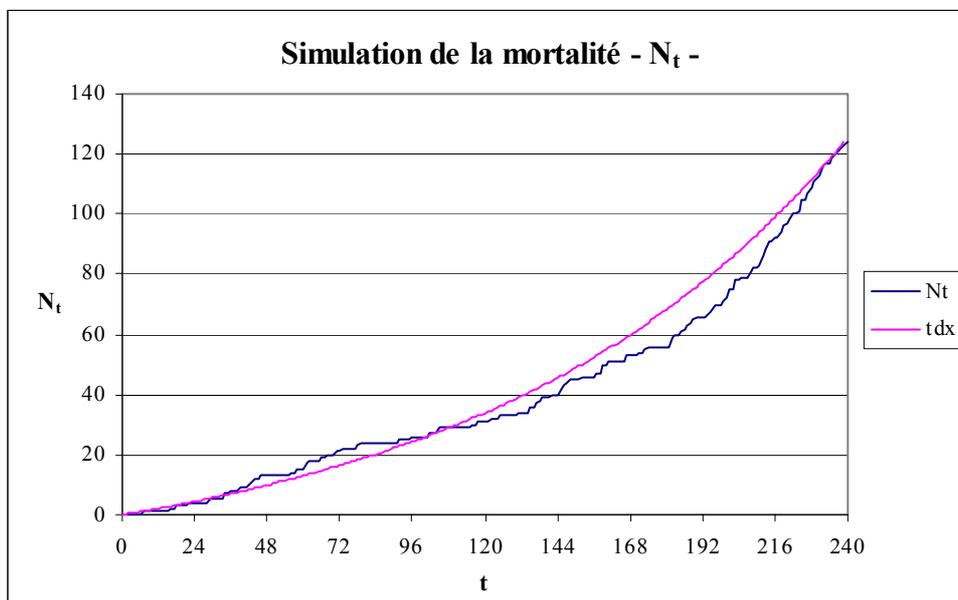
Figure 12 : Simulation d'une trajectoire de l'actif sous-jacent - S_t -**Figure 13 :** Simulation d'un processus de décès - N_t -

Figure 14 : Simulation de la stratégie en actif risqué - ξ_t -

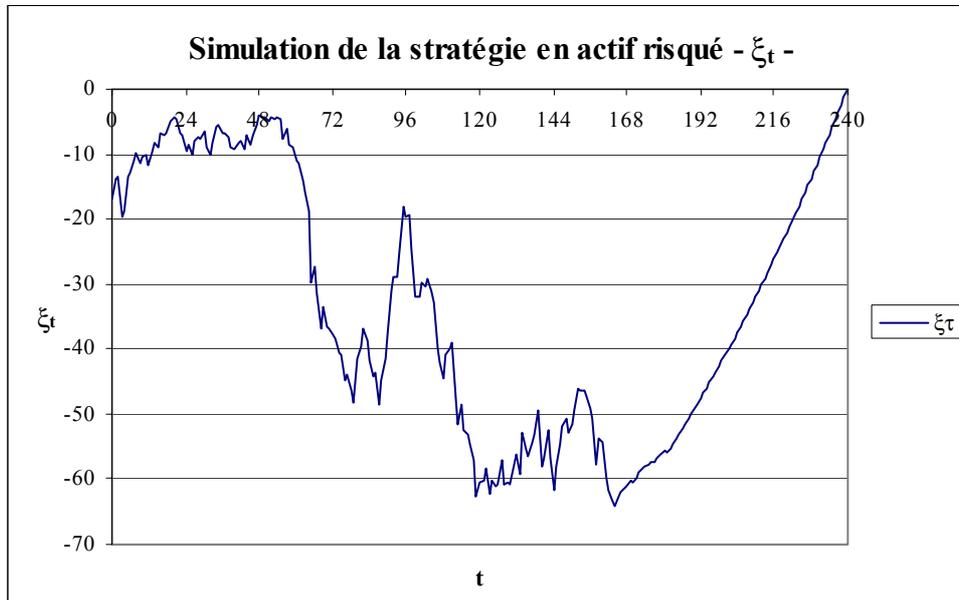


Figure 15 : Simulation de la stratégie en actif non-risqué - η_t -

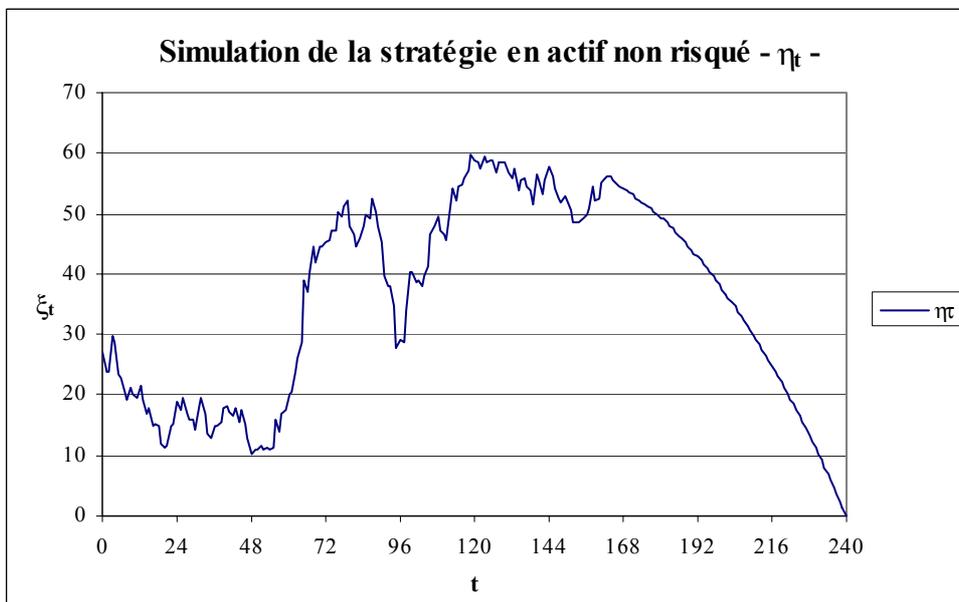


Figure 16 : Moyenne et écart-type de PPU^{Act} , sensibilité de μ (Table 3 page 64)

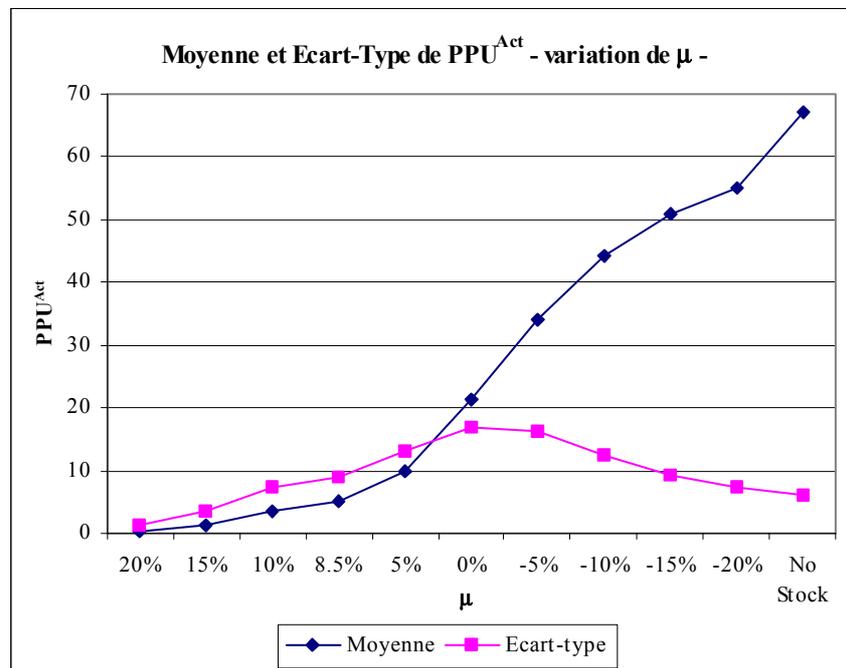


Figure 17 : Capital à allouer - approche actuarielle - sensibilité de μ (Table 3 page 64)

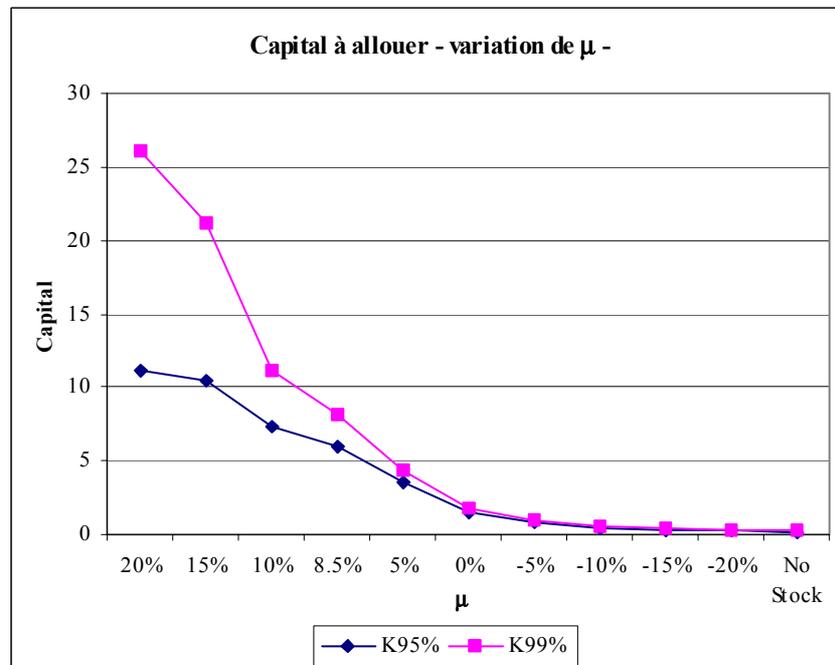


Figure 18 : Moyenne et écart-type de PPU^{Fi} , sensibilité de μ (Table 4 page 66)

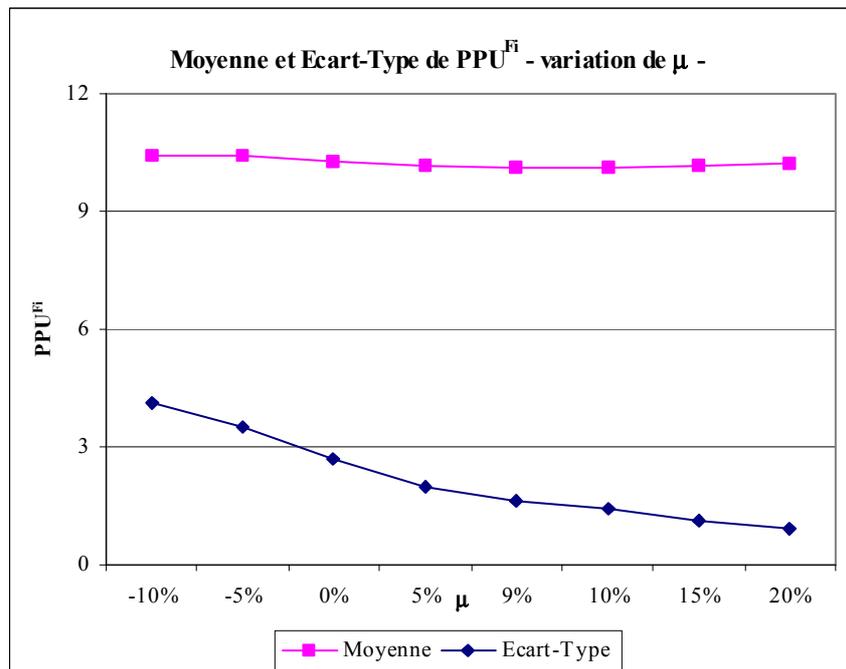


Figure 19 : Capital à allouer – approche financière - sensibilité de μ (Table 4 page 66)

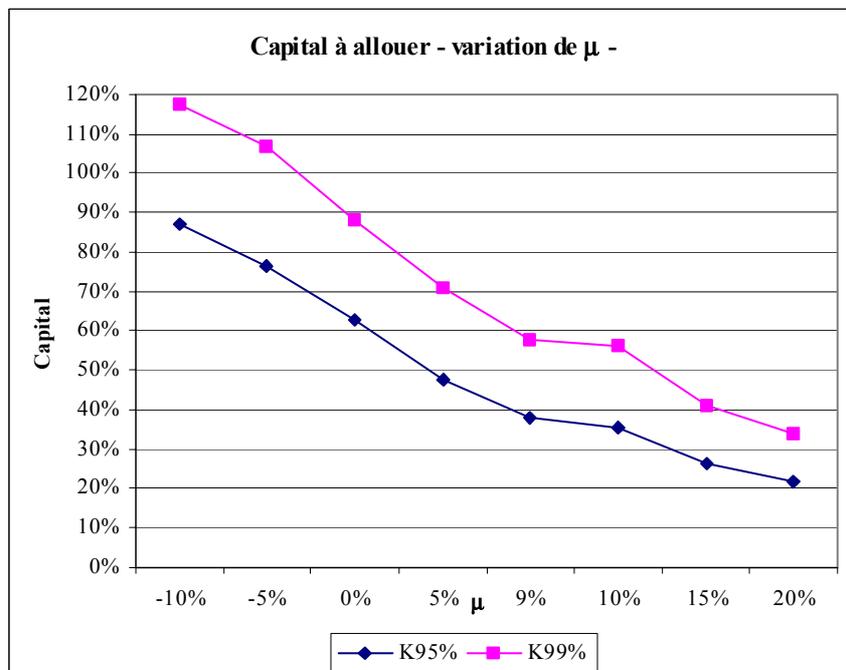


Figure 20 : Moyenne et écart-type de PPU^{Act} , sensibilité de σ (Table 5 page 67)

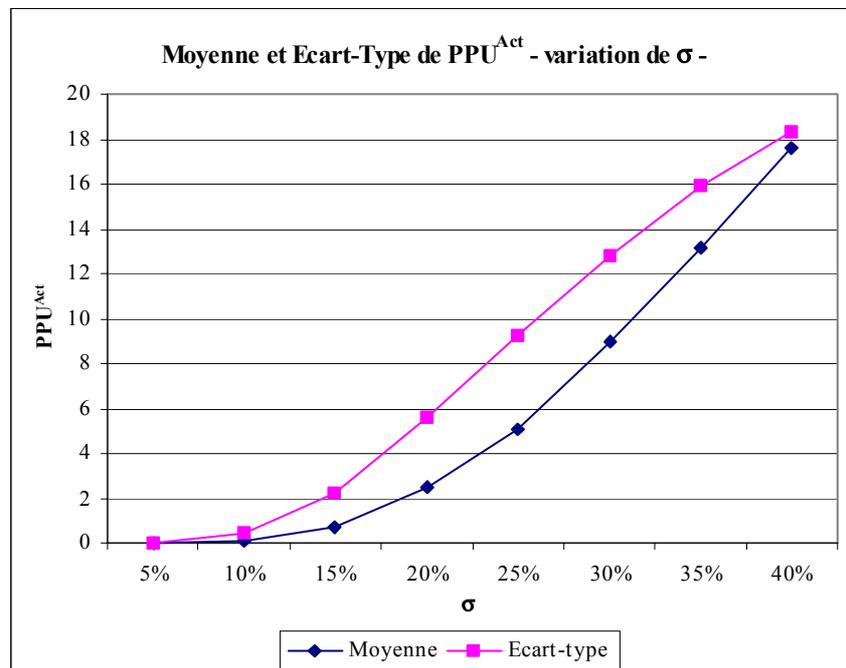


Figure 21 : Capital à allouer - approche actuarielle - sensibilité de σ (Table 5 page 67)

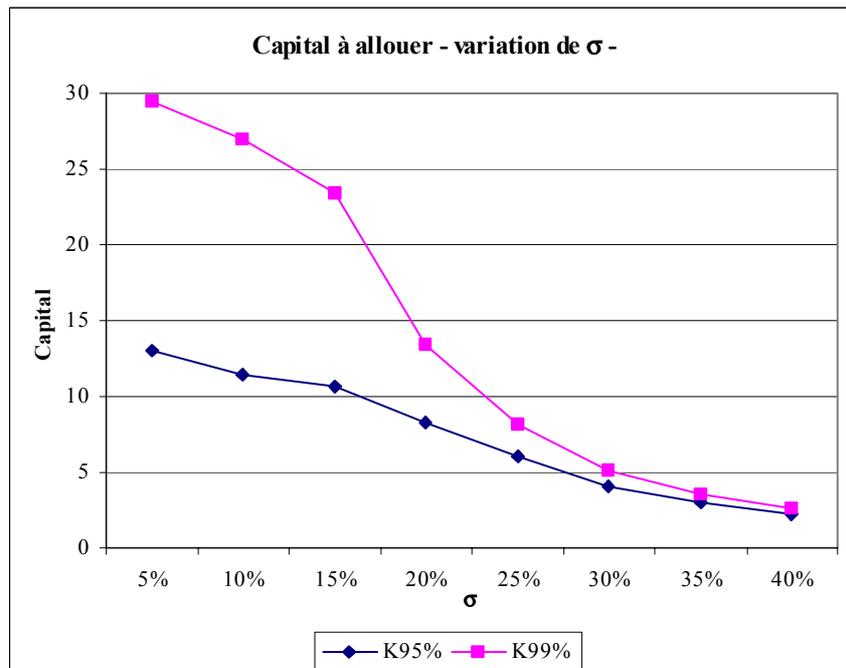


Figure 22 : Moyenne et écart-type de PPU^{Fi} , sensibilité de σ (Table 6 page 68)

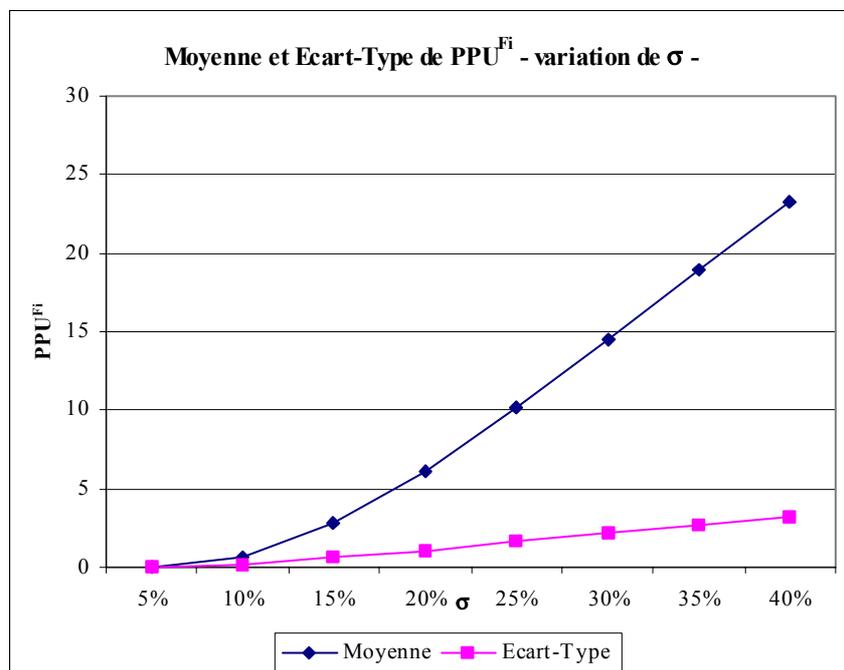
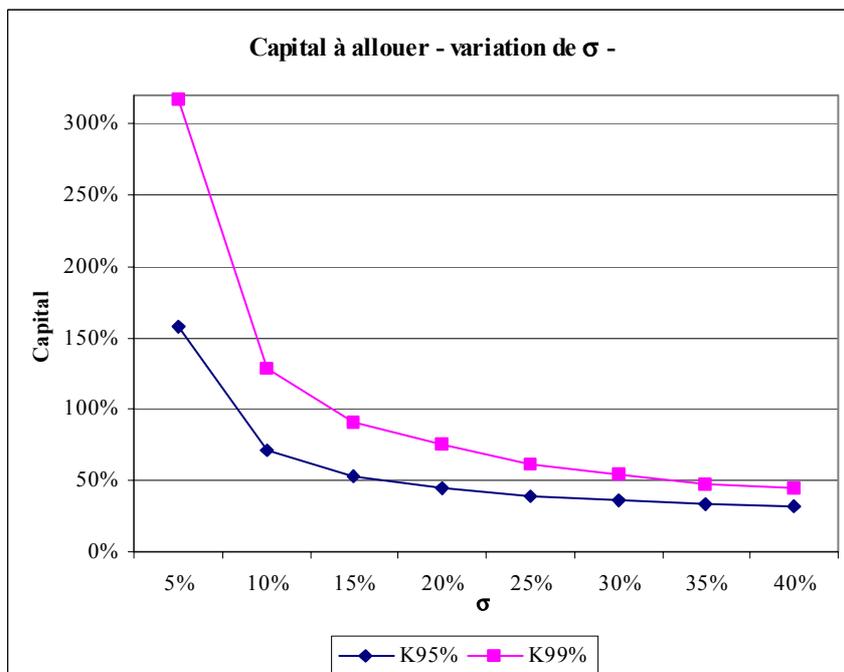


Figure 23 : Capital à allouer - approche financière - sensibilité de σ (Table 6 page 68)



REMERCIEMENTS

Je souhaite ici remercier toutes les personnes qui m'ont aidé tant dans la réalisation de mon stage que dans l'élaboration de mon mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-François Walhin, mon maître de stage, responsable du département R&D pour son encadrement permanent. Sa disponibilité ainsi que ses précieux conseils m'ont permis de mener ce travail dans les conditions les plus favorables.

J'exprime également toute ma gratitude à l'équipe R&D pour leur chaleureux accueil et leur convivialité. Je tiens particulièrement à remercier Monsieur Xavier Chenut pour son soutien quotidien, ses éclaircissements sur certains points techniques et ses remarques pertinentes quant à mon travail.

Je souhaite enfin remercier mon camarade de promotion, et collègue de travail durant quatre mois, Mathieu Lafond, pour son soutien moral, sa motivation communicative et tout le reste...

Christophe FRANTZ
Magistère d'Actuariat de Strasbourg

Chris_Frantz@gmx.fr

Octobre 2002