
Remerciements :

Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur Michel PIERMAY, Président de FIXAGE, pour m'avoir accueilli dans sa société et avoir veillé au bon déroulement de mes recherches et de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie également Mademoiselle Dorothee BARY, responsable du pôle de modélisation financière pour ses conseils avisés et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Monsieur Christian HESS, directeur du Master II Actuariat à Paris Dauphine ainsi que l'ensemble du corps professoral du Master II Actuariat pour la qualité de l'enseignement délivré.

Enfin, je remercie mes parents sans qui tout cela n'aurait pu être possible.

Résumé :

Une obligation convertible est un actif qualifié d'« hybride » car elle associe les avantages de deux véhicules financiers de risques différents, à savoir une obligation et une action. Elle est composée d'une obligation assortie d'une option qui permet au porteur de convertir l'obligation en une ou plusieurs actions.

L'obligation convertible de type « mixte » est le profil le plus recherché par les investisseurs car sa convexité est alors à son maximum. Une obligation convertible est qualifiée de « mixte » lorsque sa sensibilité au sous-jacent est comprise entre 15% et 75%. Toute hausse du sous-jacent se propage rapidement à l'obligation convertible qui, si le mouvement de hausse persiste, tend à suivre le cours de l'action sous-jacente. En cas de baisse de l'action, le « parachute » obligataire se déclenche très vite. Dès que le plancher obligataire est atteint, la baisse de la convertible est interrompue. Ainsi, la double nature de la convertible joue pleinement son rôle.

Sous les normes actuelles de solvabilité (Solvabilité I), l'exigence de marge de solvabilité pour les assureurs est indépendante de la composition de l'actif. Cependant, l'environnement réglementaire est en pleine évolution avec l'apparition des nouvelles normes Solvabilité II, dont nous connaissons maintenant les principaux axes.

L'un des principaux objectifs de Solvabilité II est d'établir un système de solvabilité qui soit plus adapté aux risques effectifs qui pèsent sur les compagnies d'assurances. Le niveau de fonds propres exigés (SCR : *Solvency Capital Requirement*) doit prendre en compte le risque global supporté par la société. La directive impose que le montant des fonds propres corresponde à la *Value-at-Risk* de la variation à horizon un an du surplus (actif-passif) mesuré en *full fair value* de l'entreprise d'assurance avec un seuil de 99,5%. Autrement dit, le capital réglementaire doit couvrir le risque de perte en fonds propres 199 fois sur 200 cas. Le montant des fonds propres réglementaires peut être calculé par la formule standard donnée par la directive ou par une approche modèle interne.

Ainsi l'allocation d'actifs contribuera directement au niveau de fonds propres exigés par Solvabilité II. Nous avons donc étudié le comportement des obligations convertibles sous ce nouvel environnement prudentiel. Pour cela nous avons construit deux problèmes d'optimisation pour la construction de portefeuilles minimisant le niveau des fonds propres sous Solvabilité II à performance fixée. Le premier problème d'optimisation consiste à minimiser le niveau des fonds propres exigés par la formule standard fournie par le QIS 5

(*Qualitative Impact Studies 5*) et le second a pour objectif de déterminer les portefeuilles minimisant les fonds propres calculés par une approche modèle interne qui sera basée sur le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE.

La composition de ces portefeuilles met en évidence que le critère « Performance/Fonds propres exigés par la formule standard » est globalement favorable à l'obligation convertible de type « mixte ». Selon ce critère, elle apparaît comme très compétitive par rapport aux autres classes d'actifs et permet donc aux investisseurs de profiter d'une bonne performance tout en modérant le niveau des fonds propres exigés par la formule standard.

Cependant l'utilisation d'un modèle interne reflétant mieux la réalité et les risques auxquels est soumise une compagnie d'assurance, sera moins favorable pour une obligation « convertible ». La composante optionnelle, sensible au marché action, sera plus fortement pénalisée par un modèle interne utilisant un générateur de scénarios économiques car la pénalisation appliquée aux actions, par la formule standard du QIS 5, suppose que le rendement des actions est distribué suivant une loi normale, ce qui tend à sous-estimer le risque de perte extrême et par conséquent à sous-estimer le besoin en capital pour faire face au risque action. Alors comparées à des classes d'actifs insensibles aux actions, comme les obligations classiques, le couple « Performance/SCR'marché » sera plus favorable aux obligations classiques qu'aux convertibles.

Toutefois, quelque soit l'approche utilisée pour le calcul des fonds propres, l'obligation convertible de type « mixte » permet d'obtenir un bon rendement tout en modérant son exposition au risque. Cela se traduit par un coût en fonds propres exigés par la directive Solvabilité II relativement faible par rapport à ses perspectives de performances. Les obligations convertibles et plus particulièrement les convertibles de type « mixte » semblent alors, l'actif idéal pour satisfaire à la fois des objectifs de performances relativement élevés et un niveau de fonds propres raisonnable.

Abstract :

A convertible bond is an asset called as “hybrid” because it relates advantages of two financial products with different risk, the bond and the equity. It is constituted of a bond linked to an option which allows the holder to convert the bond into one or more equities.

The convertible bond “at the money” is a profile which is the most searched by investors because its bond convexity is at the maximum. Any increase of the underlying spreads quickly to the convertible bond that tends to follow the rate of the underlying equity as long as the increase continues. In any case of decrease of the equity, the bond “parachute” goes off fast. Once the bottom bond price is reached, the decrease of the convertible bond is stopped. Thus the double entity of the convertible bond acts perfectly.

Under the actual solvency rules (Solvency I), the solvency margin requirement for insurers is not linked to the composition of the asset. However, the regulatory environment has been evolving with the emergence of Solvency II.

One of the most important objectives of Solvency II is to establish a solvency system that is adapted to the actual risk taken on by a company. The equity amount required (SCR: Solvency Capital Requirement) has to take into account these entire risks. The directive implies that the amount of equity corresponds to the Value-at-Risk, for a probability of 99,5 and a time horizon of one year, of the variation of the excess (the asset minus liabilities) measure in full fair value of the insurer. In other words, the capital requirement is the capital required to ensure that the insurance company will be able to meet its obligation 199 times on 200 cases. The equity amount required could be calculated by the standard formula, given by the directive, or by an internal model-based approach.

Thereby, the asset allocation will directly contribute to the equity amount required by Solvency II. I have studied the impact of the convertible bond into this new regulatory environment. For this purpose I have built two portfolio optimization problems by minimising the cost of capital. The first problem is to minimize the cost of capital amount required with the standard formula uses in the QIS 5 (Qualitative Impact Studies 5). The second problem is to minimize this same cost with an internal model-based approach. The internal model used is the economic scenario generator developed by Fixage.

The portfolio composition of these two problems allows us to conclude that the criteria Performance/Equity asking by the standard formula is generally favourable to the convertible

bond “at the money”. Following the standard formula, the ratio Performance/SCR’equity of the convertible bonds appears to be very competitive against the other asset.

However, an internal model which is more close to the economic reality than the standard formula, will penalized more strictly the assets which are sensitive to the equity market than the standard formula. Because the standard formula makes the following assumption: the normality of equity returns. Then the standard formula under estimate the equity risk and then the capital required. So the ratio Performance/SCR’equity will not be as competitive as with the standard formula.

Nevertheless both approach show that, the convertible bond called as “hybrid” gets a good return without taking too many risk. Then the convertible bond seems the ideal asset in order to get high return with low cost of capital required by Solvability II.

Table des matières :

<i>Remerciements :</i>	2
<i>Résumé :</i>	3
<i>Abstract :</i>	5
<i>Introduction:</i>	9
I) L'exigence de capital dans Solvabilité II dans le cadre du QIS 5	11
I.1) Présentation de la formule standard.	12
I.2) L'exigence de capital liée au risque de marché : SCR_{marché}.	15
2.1) Le risque de taux d'intérêt (Marché _{taux}) :	15
2.2) Le risque sur les actions (Marché _{actions}) :	17
2.3) Le risque sur l'immobilier (Marché _{immo}) :	19
2.4) Le risque de change (Marché _{change}) :	19
2.5) Le risque de signature (Marché _{sign}) :	20
2.6) Le risque de concentration (Marché _{conc}) :	21
2.7) Le risque de prime d'illiquidité (Marché _{ip}) :	23
2.8) Agrégation des risques de marchés :	24
I.3) Les modèles internes.	26
3.1) Définition d'un modèle interne :	26
3.2) L'utilité des modèles internes :	26
3.3) Calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne :	27
I.4) L'exigence de capital comme contrainte dans la stratégie d'allocation d'actifs.	29
4.1) Description de la problématique:	29
4.2) La méthode d'optimisation de Markowitz :	30
4.3) Formalisation des deux problèmes :	30
II) Présentation du Générateur de scénarios économiques : Modélisation de l'actif	35
II.1) Modélisation des taux nominaux.	35
1.1) Description du modèle :	35
1.2) Prix zéro-coupon et courbe des taux :	36
1.3) Ajout d'un processus à sauts :	37
II.2) Modélisation de la performance des actions.	38
2.1) Description du modèle général :	38
2.2) Ajout de processus à sauts :	38
II.3) Modélisation des spreads de crédit.	39
II.4) Corrélation entre les variables de marché.	40
4.1) Corrélation des cœurs des distributions :	40
4.2) Corrélation des queues de distributions :	41

III) Une classe d'actifs particuliers : Les obligations convertibles en actions	42
III.1) Présentation d'une obligation convertible.	42
1.1) Partie obligataire :	42
1.2) Partie optionnelle :	43
III.2) Modélisation et valorisation d'une obligation convertible.	46
2.1) Modélisation et valorisation de la composante obligataire :	46
2.2) Modélisation et valorisation de la composante optionnelle :	47
III.3) L'évolution de l'obligation convertible en fonction de son sous-jacent.	50
3.1) Les obligations convertibles de type « taux » :	51
3.2) Les obligations convertibles de type « mixte » :	53
3.3) Les obligations convertibles de type « action » :	54
3.4) Quel « type » de convertible choisir ?	56
IV) Le traitement des obligations convertibles en actions sous Solvabilité II	59
IV.1) SCR'marché de différents types d'obligations convertibles.	59
1.1) SCR'marché par la formule standard fournie dans le QIS 5 :	60
1.2) SCR'marché par une approche modèle interne basé sur notre générateur de scénarios :	67
IV.2) Optimisation de la composition d'un portefeuille selon le couple « Performance espérée/ SCR'marché ».	72
2.1) Performance et SCR'marchés de chaque actif :	73
2.2) Illustration de la méthode de construction de portefeuilles sur deux actifs :	75
2.3) L'allocation d'actifs « optimale » sous la formule standard :	80
2.4) L'allocation d'actifs « optimale » sous l'approche par modèle interne :	84
2.5) Lieux géométriques des portefeuilles minimisant le SCR'marché à performance fixée :	86
IV.3) Comparaison entre les SCR'marchés calculés par la formule standard et ceux calculés par l'approche modèle interne .	89
3.1) Différences dans l'évaluation du risque de taux et du risque de spread :	89
3.2) La sous estimation du risque action par le QIS 5 :	91
Conclusion :	94
Bibliographie :	96

Introduction:

La commission Européenne a initié en 2000 l'ambitieux projet de réformer le système de contrôle de solvabilité des assureurs européens. Le monde de l'assurance se prépare alors à l'entrée en vigueur de la Directive Européenne Solvabilité II, qui devrait avoir lieu à partir du 31 décembre 2012.

Bien que Solvabilité I se soit montré efficace et ait permis au secteur assurantiel d'absorber des chocs exceptionnels depuis 1973, ce système de solvabilité n'est pas adapté aux spécificités de chaque compagnie. Dans Solvabilité I, la marge de solvabilité dépend uniquement des provisions mathématiques et des capitaux sous risques en assurance vie et du montant des primes ou des sinistres en assurance non vie, sans tenir compte de l'allocation d'actifs. Il en va autrement dans Solvabilité II puisque le capital requis doit contrôler l'ensemble des risques supportés par la compagnie, auquel contribue l'allocation d'actifs, et limiter la probabilité de ruine à un an de la compagnie à 0,5%.

L'un des principaux objectifs de Solvabilité II, est d'établir un système de solvabilité qui soit plus adapté aux risques effectifs qui pèsent sur les compagnies d'assurances. Le niveau de fonds propres exigé (SCR : *Solvency Capital Requirement*) doit prendre en compte le risque global supporté par la société. La directive impose que le montant des fonds propres corresponde à la *Value-at-Risk* de la variation à horizon 1 an du surplus (actif-passif) mesuré en *full fair value* de l'entreprise d'assurance avec un seuil de 99,5%. Autrement dit le capital réglementaire doit couvrir le risque de perte en fonds propres 199 fois sur 200 cas. Le montant des fonds propres réglementaires peut être calculé par la formule standard donnée par la directive ou par une approche modèle interne, partiel ou complet, sous réserve de son acceptation par l'autorité de contrôle. L'approche standard est facile à mettre en place. Elle est commune à tous les assureurs et est construite selon une approche modulaire des risques. L'approche modèle interne est plus compliquée à mettre en œuvre, mais elle a l'avantage de modéliser le profil de risque général de la société d'assurance et d'offrir une mesure de risque cohérente avec l'activité de l'assureur.

La Directive Solvabilité II va directement impacter la stratégie d'allocation d'actifs des assureurs européens, notamment par le module « risque de marché » qui impose la constitution d'un capital selon l'allocation d'actifs. L'objectif de ce mémoire est d'analyser l'effet sur l'allocation d'actifs du coût des fonds propres dans le cadre de Solvabilité II pour la classe d'actifs suivante : Les obligations convertibles.

Une obligation convertible est composée d'une partie obligataire qui donne droit aux versements de coupons et au remboursement au terme de l'emprunt comme une obligation classique. Elle comporte également une partie optionnelle qui donne la possibilité au porteur de convertir l'obligation en action(s). Elle présente toutes les caractéristiques de la sécurité d'une obligation associée aux opportunités de performance de l'action. L'obligation convertible est donc un produit « hybride », intermédiaire entre l'action et l'obligation.

Par son caractère hybride, l'obligation convertible présente un couple « Rendement/Risque » très compétitif par rapport aux autres actifs. Mais la directive Solvabilité II va changer les règles de décision des investisseurs. Lors de leur allocation d'actifs, les assureurs devront prendre en compte le coût des fonds propres exigés par la Directive Solvabilité II. Nous utiliserons une méthode de sélection d'actifs basée sur le modèle de H.MARKOWITZ avec comme contrainte le niveau des fonds propres réglementaires.

Après avoir présenté en détail les obligations convertibles et leurs comportements en fonction de leur sous-jacent, nous utiliserons une méthode de construction de portefeuille permettant de minimiser le niveau des fonds propres exigés par Solvabilité II à performance fixé. Ainsi nous étudierons la place des obligations convertibles au sein de ce nouvel environnement prudentiel. De plus, nous comparerons les deux approches de calcul de fonds propres que sont la formule standard et un modèle interne qui sera basé sur le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE.

I) L'exigence de capital dans Solvabilité II dans le cadre du QIS 5

Les règles de solvabilités actuelles en France s'articulent autour de trois piliers :

- La constitution de provisions techniques suffisantes calculées selon des hypothèses prudentes ;
- Des actifs sûrs, diversifiés, liquides et rentables ;
- Des fonds propres comptables minimum (EMS : Exigence minimale de marge de solvabilité) calculés de manière forfaitaire à partir des provisions mathématiques et des capitaux sous risque (en vie).

Le système actuel s'est montré efficace. En effet, malgré les chocs exceptionnels de ces dernières années (effondrement des marchés financiers, réduction de l'activité économique...), peu de compagnies européennes ont fait faillite et les entreprises demeurent solvables au sens de Solvabilité I.

Cependant, il existe plusieurs limites à ce système :

- L'exigence de marge de solvabilité n'est pas basée sur le risque propre à l'entreprise d'assurance ;
- Certains risques extrêmement coûteux, comme le terrorisme, ne sont pas pris en compte par Solvabilité I ;
- Les nouveaux produits financiers comme les options ou les produits structurés ne sont pas traités, de plus la prise en compte de la corrélation et de la dispersion des risques est insuffisante.

Solvabilité I est un système de « prêt à porter » qui n'est pas adapté aux spécificités de chaque compagnie. Il n'encourage pas les compagnies à analyser, gérer et contrôler leurs propres risques.

La Commission Européenne a initié en 2000 l'ambitieux projet de réformer le système de contrôle de la solvabilité des assureurs européens. L'un des principaux objectifs de Solvabilité II est d'établir un système de solvabilité qui soit plus adapté aux risques effectifs qui pèsent sur les compagnies d'assurance.

Dans le nouveau régime, il incombera aux assureurs de prendre en compte tous les types de risques auxquels ils sont exposés et de les gérer plus efficacement.

L'exigence de capital réglementaire défini par Solvabilité II peut être calculé de deux façons :

- Par la formule standard
- Par un modèle interne

I.1) Présentation de la formule standard.

Le modèle de calcul de l'exigence de capital vise à quantifier chaque élément de risque. Il se fonde sur l'hypothèse d'une poursuite de l'activité de l'entreprise concernée (principe de continuité d'activité).

Il concerne différents domaines de l'activité des organismes d'assurance :

- Les risques liés aux évolutions des marchés financiers ;
- Le risque lié à l'activité vie ;
- Le risque lié à l'activité non-vie ;
- Le risque lié à la santé ;
- Le risque de contrepartie ;
- Le risque opérationnel.

Pour chaque domaine, le modèle propose de calculer les fonds propres nécessaires pour faire face à différents risques identifiés. L'exigence de capital final correspond à une agrégation des montants obtenus à l'aide de matrices de corrélations données.

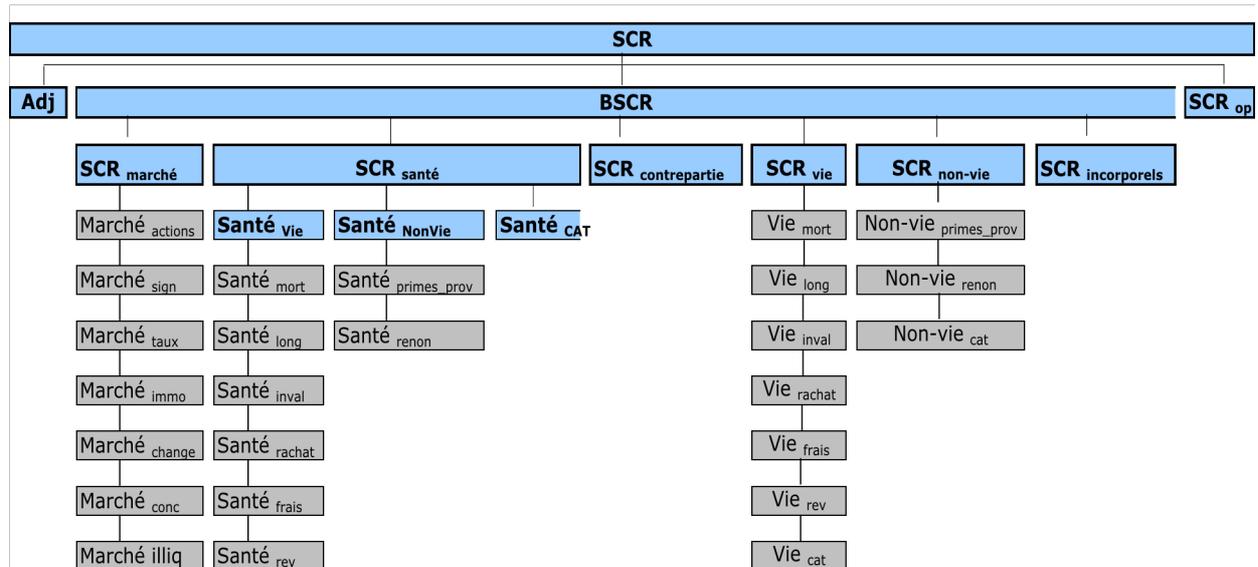
Le surplus (*Net Asset Value*) est défini comme la valeur de marché de l'actif diminué de la provision *best estimate*¹ et de la *risk margin*².

Le principe posé par la directive est que l'exigence de capital (SCR : *Solvency Capital Requirement*) doit permettre d'absorber une perte probable (*Value-at-Risk*) au niveau de confiance de 99,5% de la variation de ce surplus (Δ NAV) dans un an. C'est-à-dire que le surplus doit rester positif dans 99,5% des cas. Ce qui équivaut à une probabilité de ruine de 0,5% à horizon un an.

¹ Provision *best estimate* : moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des flux futurs de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente

² *Risk Margin* : calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques soient équivalentes au montant dont les entreprises d'assurance auraient besoin pour reprendre et honorer des engagements d'assurance

Voici l'architecture du QIS 5 :



La formule standard de calcul du SCR est la suivante :

$$\text{SCR} = \text{BSCR} - \text{Adj} + \text{SCR}_{op}$$

Où

BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*) : capital de solvabilité requis de base ;

Adj : ajustement pour les effets d'atténuation des risques provenant de la participation aux bénéfices et des impôts différés ;

SCR_{op} : capital requis pour le risque opérationnel.

Le BSCR représente le SCR de base. Il mesure le besoin en capital des 6 modules de risques (souscription non-vie, marché, crédit, santé, souscription vie, actifs incorporels).

Pour le calcul du BSCR, on a besoin de calculer les montants suivants :

SCR_{non-vie} : capital requis pour le risque lié à l'assurance non-vie ;

SCR_{marché} : capital requis pour le risque de marché ;

SCR_{contrepartie} : capital requis pour le risque de crédit ;

SCR_{santé} : capital requis pour le risque lié à l'assurance santé ;

SCR_{vie} : capital requis pour le risque lié à l'assurance vie ;

SCR_{incorporels} : capital requis pour le risque lié aux actifs incorporels ;

nSCR_{marché} : capital requis pour le risque de marché incluant les effets d'atténuation des risques des participations aux bénéfices futures ;

nSCRcontrepantie : capital requis pour le risque de crédit incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures ;

nSCRsanté : capital requis pour le risque lié à l'assurance-santé incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures ;

nSCRvie : capital requis pour le risque lié à l'assurance vie incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures .

Chaque montant est calculé à partir des risques individuels (risque actions, risque de mortalité,...) ; pour chacun, un modèle permet de calculer un besoin en capital représentatif du risque. Les besoins des risques individuels d'un même module sont agrégés en appliquant une matrice de corrélation tenant compte des interactions pouvant exister en situation de stress.

Le BSCR est calculé en appliquant une matrice de corrélation aux besoins en capital calculés pour chaque module.

$$BSCR = \sqrt{\left(\sum_{i,j} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j \right)} + SCR_{incorporels}$$

Où

$Corr_{ij}$: coefficient de la matrice de corrélation des différents modules du SCR ;

SCR_i, SCR_j : capital requis pour les risques i et j correspondant aux lignes et aux colonnes de la matrice de corrélation ;

$SCR_{incorporels}$: capital requis pour le risque lié aux actifs incorporels.

Les coefficients $Corr_{ij}$ sont donnés par la matrice de corrélation suivante :

	SCR marché	SCR contr.	SCR vie	SCR santé	SCR non-vie
SCR marché	1	0,25	0,25	0,25	0,25
SCR contr.	0,25	1	0,25	0,25	0,5
SCR vie	0,25	0,25	1	0,25	0
SCR santé	0,25	0,25	0,25	1	0
SCR non-vie	0,25	0,5	0	0	1

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons au module risque de marché qui va directement impacter l'allocation d'actifs des assureurs. Nous décrirons maintenant le modèle de calcul du SCR lié au risque de marché.

I.2) L'exigence de capital liée au risque de marché : SCR_{marché}.

Dans la formule standard, le risque de marché résulte du niveau, ou de la volatilité, des taux ou des prix de marché des instruments financiers.

Le modèle proposé cherche à mesurer l'impact sur la valeur des actifs et sur la valeur du passif des mouvements au niveau des variables financières, comme : les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change, les spreads, le niveau de concentration, la prime d'illiquidité.

Le capital requis pour le risque de marché se calcule en combinant les différents sous-risques par l'intermédiaire d'une matrice de corrélation, donnée dans le modèle.

Pour chaque facteur de risque, le SCR correspondant se calcule en mesurant l'impact de ce choc correspondant sur la « *Net-Asset-Value* », c'est-à-dire sur la valeur de marché de l'actif moins la « *fair value* » du passif.

L'assureur doit mesurer l'impact du choc, simultanément sur l'actif et sur le passif.

2.1) Le risque de taux d'intérêt (Marché_{taux}) :

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de taux d'intérêt.

Les actifs concernés sont les investissements à revenu fixe (obligations et OPCVM obligataires), les instruments de financement (capital d'emprunt), les produits dérivés de taux d'intérêt,... Tous les actifs sont pris en compte, même ceux qui ne font pas face à des provisions.

L'actualisation des provisions techniques aux taux du marché rend ces éléments sensibles au taux. Les provisions techniques interviennent donc dans la détermination du besoin de capital.

Le principe est de calculer la valeur des actifs nets des passifs dans l'hypothèse d'une modification de la totalité de la courbe des taux à partir d'évolutions à la hausse et à la baisse par maturité des flux.

$$\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{hausse}} = \Delta \text{NAV} | \text{choc à la hausse}$$

$$\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{baisse}} = \Delta \text{NAV} | \text{choc à la baisse}$$

Où

$\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{hausse}}$ et $\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{baisse}}$ sont calculés en supposant que les taux de participation aux bénéficiaires restent inchangés dans les scénarios de hausse ou de baisse considérés ; NAV est la valeur des actifs nets des passifs.

Les chocs relatifs à la hausse et à la baisse des taux sont les suivants :

Maturité t	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
Variation relative Choc à la hausse	70%	70%	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%
Variation relative Choc à la baisse	-75%	-75%	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%

Maturité t	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Variation relative Choc à la hausse	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%	31%	30%	29%
Variation relative Choc à la baisse	-33%	-31%	-30%	-29%	-28%	-28%	-27%	-28%	-28%	-28%

Maturité t	19	20	21	22	23	24	25	30 et plus
Variation relative Choc à la hausse	27%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	25%
Variation relative Choc à la baisse	-29%	-29%	-29%	-30%	-30%	-30%	-30%	-30%

Pour le calcul de la réduction des risques pour la participation bénéficiaires deux calculs sont à effectuer : l'un supposant des taux de participation constants et l'autre supposant une possibilité de modifier les taux de participation.

2.2) Le risque sur les actions (Marché_{actions}) :

Le risque sur les actions résulte de la volatilité des prix de marché des actions. L'exposition à ce risque se rapporte à tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de prix des actions.

Le module Marché_{actions} vise à mesurer le risque systématique actions, tandis que le risque lié à une mauvaise diversification du portefeuille actions est pris en compte dans le risque de concentration.

Le modèle utilisé par l'approche standard est basé sur deux indices et suppose que toutes les actions ont la même exposition au risque que l'un de ces indices, en termes de volatilité et de corrélations.

Les deux indices pris en compte sont les suivants :

1	Global
2	Autres

L'indice « Autres » désigne les actions des marchés émergents, les actions non cotées, les investissements alternatifs,...

Les couvertures existantes sont prises en compte et donc réduisent l'impact d'un stress du marché.

Etape 1 : Stress sur le niveau des actions pour chaque indice.

Le besoin en capital alloué à l'indice i est mesuré par la relation :

$\text{Marché}_{\text{actions},i} = \text{Max}(\Delta \text{NAV} / \text{choc actions indice } i ; 0)$, où le choc pour l'indice i est défini par une baisse de l'indice de :

	Indice	Choc avant effet d' « ajustement symétrique »
1	Global	39%
2	Autres	49%

Ces chocs sont modulés par un effet d' « ajustement symétrique ». L'ajustement symétrique est fonction du niveau actuel d'un indice et de la moyenne pondérée de ce même indice calculée sur 3 ans.

Ce mécanisme d'ajustement est limité. Il ne peut entraîner une augmentation ou une diminution de plus de 10 points des chocs sur les actions.

Le choc actions « global » peut varier entre 29% et 49% par ce mécanisme

Le choc actions « autres » peut varier entre 39% et 59% par ce mécanisme

En fin d'année 2009, ce mécanisme d'ajustement symétrique conduit à un facteur correctif de -9% (qui s'explique par le fait que les marchés sont aujourd'hui à un niveau plus bas que leur niveau moyen sur les trois dernières années).

Actuellement, les chocs à appliquer pour le QIS 5 sont les suivants :

	Indice	Choc après effet d' « ajustement symétrique »
1	Global	30%
2	Autres	40%

Selon le CEIOPS, le but du mécanisme d'ajustement symétrique est de limiter la procyclicité de la directive.

Etape 2 : Agrégation - Calcul du besoin en capital.

Le besoin en capital $\text{Marché}_{\text{actions}}$ est obtenu en appliquant une matrice de corrélation à la matrice $\text{Marché}_{\text{actions},i}$.

Les corrélations à prendre en compte sont les suivantes :

Indice	Global	Autres
Global	1	0,75
Autres	0,75	1

Etape 3 : Réduction des risques générée par la participation aux bénéfices

En assurance vie, deux calculs doivent être effectués : l'un supposant des taux de participations aux bénéfices constants et l'autre supposant des taux de participation ajustés.

2.3) Le risque sur l'immobilier (Marché_{immo}) :

Le risque sur l'immobilier résulte de la volatilité des prix de marché de l'immobilier.

Le QIS 5 propose de différencier l'immobilier coté (qui doit être traité comme les actions), de l'immobilier non coté.

Pour les actifs traités comme de l'immobilier, le principe est de simuler la variation de la valeur nette des actifs dans l'hypothèse d'une chute de 25% des marchés immobiliers en tenant compte des détentions réelles en matière d'immobilier et notamment des éventuelles couvertures.

$$\text{Marché}_{\text{immo}} = \Delta \text{NAV} / \text{choc immobilier}$$

En assurance-vie, le capital à allouer doit être déterminé à l'aide de deux calculs : l'un supposant des taux de participation aux bénéfices constants et l'autre supposant des taux de participation ajustés.

La mise en œuvre du calcul est la même que dans le cas du risque action.

2.4) Le risque de change (Marché_{change}) :

Le risque de change résulte de la volatilité des taux de change.

Le principe est de simuler la variation de la valeur nette des actifs, dans l'hypothèse d'une variation (à la hausse ou à la baisse) de 25% des devises étrangères, en tenant compte notamment des éventuelles couvertures.

Pour chaque devise étrangère C, le besoin en capital $\text{Marché}_{\text{change},C}$ correspond au maximum entre $\text{Marché}_{\text{change},C}^{\text{hausse}}$ et $\text{Marché}_{\text{change},C}^{\text{baisse}}$:

$$\text{Marché}_{\text{change},C}^{\text{hausse}} = \Delta \text{NAV} / \text{choc à la hausse de la devise C}$$

$$\text{Marché}_{\text{change},C}^{\text{baisse}} = \Delta \text{NAV} / \text{choc à la baisse de la devise C}$$

Le besoin en capital total pour ce risque de change $\text{Marché}_{\text{change}}$ est la somme de tous les besoins en capitaux $\text{Marché}_{\text{change},C}$ ainsi calculés par la devise.

$$\text{Marché}_{\text{change}} = \sum_C \text{Marché}_{\text{change},C}$$

En assurance-vie, il doit être effectué deux calculs : l'un supposant des taux de participation aux bénéfices constants et l'autre supposant des taux de participation ajustés.

2.5) Le risque de signature (Marché_{sign}) :

Le risque de signature, correspond à la part de risque provenant de la volatilité du spread par rapport au taux sans risque.

L'approche retenue est une approche par choc, qui permet notamment de prendre en compte les différentes couvertures.

Le besoin en capital pour le risque de signature des obligations, est déterminé comme suit :

$$\text{Marché}_{\text{sign}} = \Delta \text{NAV} / \text{choc de spread}$$

Marché_{sign} est l'effet attendu d'une dépréciation des obligations causées par une hausse des spreads, sur la valeur nette des actifs et calculé comme suit :

$$\text{Marché}_{\text{sign}} = \sum_i VM_i \times \text{Sensi}_i \times F^{\text{hausse}}(\text{Sign}_i)$$

Où, pour chaque exposition à un risque de crédit i :

VM_i : valeur de marché de l'exposition au risque i ;

Sensi_i : sensibilité au taux de l'exposition au risque i ;

Sign_i : signature de l'exposition au risque i.

F^{hausse} est une fonction de la signature, définie par :

Signature	F ^{hausse}	Sensibilité plancher	Sensibilité plafond
AAA	0,9%	1	36
AA	1,1%	1	29
A	1,4%	1	23
BBB	2,5%	1	13
BB	4,5%	1	10
B ou moins	7,5%	1	8
Non notée	3,0%	1	12

Pour les obligations des Etats de l'Espace Economique Européen, émises dans la devise de l'Etat membre, le besoin en capital pour le risque de signature est nul.

Pour les obligations des Etats hors EEE, émises dans la devise de l'Etat considéré, la fonction F^{hausse} est définie par :

Signature	F^{hausse}	Sensibilité plancher	Sensibilité plafond
AAA	0%	-	-
AA	0%	-	-
A	1,1%	1	29
BBB	1,4%	1	23
BB	2,5%	1	13
B ou moins	4,5%	1	10
Non notée	3,0%	1	12

2.6) Le risque de concentration ($\text{Marché}_{\text{conc}}$):

Le risque de concentration vient du fait que la volatilité d'un portefeuille augmente avec sa concentration :

- Sur un même émetteur ;
- Dans un même domaine d'activité ;
- Dans une même zone géographique.

La diversification par rapport à tous ces éléments permet de diminuer le risque de perte en valeur des actifs.

Dans le QIS 5, le risque de concentration traduit uniquement le risque de concentration sur un même émetteur (les sociétés d'un même groupe sont considérées comme un seul émetteur).

Le calcul de l'exigence en capital liée au risque de concentration, prend en compte les produits de taux et les actions, ainsi que les produits dérivés de ces actifs et les actifs immobiliers.

Le calcul du besoin en capital pour le risque de concentration s'effectue en 4 étapes.

Etape 1. Regroupement par émetteur

Les expositions au risque des actifs sont à regrouper par émetteur. Les sociétés d'un même groupe sont considérées comme un même émetteur. L'exposition à une contrepartie est notée E_i .

Etape 2. Exposition excessive

Le risque de concentration apparaît, lorsque le taux d'exposition à la contrepartie i , est supérieur à un seuil fixé a priori, en fonction de la notation de la contrepartie i .

L'exposition excessive est $XS_i = \max\left(0; \frac{E_i}{Actif_{xl}} - SC\right)$

Où XS_i est borné à 8% et les seuils de concentration SC sont définis par :

Notation	SC
A à AAA	3%
BBB ou moins ou non noté	1,5%

La valeur de l' $Actif_{xl}$ comprend l'ensemble des actifs à l'exclusion :

- Des contrats en unités de compte ;
- Des expositions à une contrepartie qui appartient au même groupe que l'entreprise et qui satisfait les conditions ci-dessous :
 - La contrepartie est une entreprise qui satisfait les règles prudentielles ;
 - La contrepartie appartient à la même consolidation que l'entreprise ;
 - Aucun obstacle pratique ou légal n'empêche le transfert de fonds propres ou le remboursement de dettes de la contrepartie vers l'entreprise ;
 - Des actifs dont le risque de contrepartie est couvert.

Etape 3. Risque de concentration par émetteur.

Le calcul du besoin en capital pour le risque de concentration par émetteur est déterminé à partir du scénario suivant :

$$Conc_i = \Delta NAV \mid \text{choc sur le niveau de concentration}$$

Le choc sur le niveau de concentration pour l'émetteur i est défini par : $XS_i * g_i$ où le paramètre dépend de la notation de la contrepartie i :

Notation _i	Niveau de qualité de crédit « Credit Quality Step »	g _i
AAA	1A	0,12
AA	1B	0,12
A	2	0,21
BBB	3	0,27
BB ou moins	4-,6-	0,73

Etape 4. Calcul du risque de concentration global.

Le besoin en capital pour le risque de concentration financier est calculé en supposant une corrélation nulle entre les risques calculés pour chaque émetteur :

$$Marché_{conc} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2}$$

Pour les obligations des Etats de l'Espace économique Européen émises dans la devise de l'Etat membre, le besoin en capital pour le risque de concentration est nul.

2.7) Le risque de prime d'illiquidité (Marché_{ip}) :

La prime d'illiquidité sur les marchés financiers donne lieu à un surplus de taux pour l'actualisation des flux dans le calcul de la provision *best estimate*. Cela diminue mécaniquement la valeur de la provision *best estimate*. En contrepartie, le QIS 5 introduit une exigence de capital lié au risque de baisse du niveau de prime d'illiquidité qui viendrait ré-augmenter la valeur de la provision *best estimate*.

Ce besoin en capital est déterminé à l'aide du scénario suivant :

$$\text{Marché}_{ip} = \Delta \text{NAV} \mid \text{choc sur la prime d'illiquidité}$$

Pour ce scénario, l'effet d'absorption des pertes par les provisions techniques n'est pas pris en compte : les taux de participation futurs sont supposés constants.

Le choc à appliquer à la prime d'illiquidité observée sur les marchés financiers est de -65%. Un second calcul est réalisé, en tenant compte de l'effet d'absorption des pertes par les provisions techniques.

2.8) Agrégation des risques de marchés :

Les besoins en capitaux calculés pour chaque risque sont agrégés à partir de deux matrices de corrélation données.

$$SCR_{\text{marché}} = \max \left(\sqrt{\sum_{r,c} \text{Corr}_{r,c}^{\text{hausse}} \times \text{Marché}_r^{\text{hausse}} \times \text{Marché}_c^{\text{hausse}}}; \sqrt{\sum_{r,c} \text{Corr}_{r,c}^{\text{baisse}} \times \text{Marché}_r^{\text{baisse}} \times \text{Marché}_c^{\text{baisse}}} \right)$$

La matrice de corrélation pour les scénarios de baisse des niveaux de taux d'intérêt est la suivante:

	Taux	Actions	Immobilier	Signature	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Actions	0,5	1					
Immobilier	0,5	0,75	1				
Signature	0,5	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

La matrice de corrélation pour les scénarios de hausse des niveaux de taux d'intérêt est la suivante :

	Taux	Actions	Immobilier	Signature	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Actions	0	1					
Immobilier	0	0,75	1				
Signature	0	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

De la même façon, le besoin en capital net de la réduction de risque due aux participations aux bénéfices est calculé à partir de ces matrices de corrélation.

I.3) Les modèles internes.

La gestion et l'évaluation des risques sont au centre du nouveau système de solvabilité. Pour répondre à ces exigences, la mise en place d'un modèle interne paraît indispensable.

Aujourd'hui, la plupart des assureurs disposent d'outils d'évaluation et de projection (tarification, provisionnement, modèle de gestion Actif-Passif...). Ces outils contribuent au modèle interne.

Solvabilité II va renforcer le besoin de structuration du modèle interne et va offrir, de manière optionnelle, la possibilité aux organismes d'assurance, d'utiliser ce modèle interne afin de calculer l'exigence de capital réglementaire.

3.1) Définition d'un modèle interne :

Les modèles internes utilisés pour l'évaluation des risques et du besoin en capital sont des cas particuliers de modèles mathématiques.

Un modèle interne est une représentation mathématique de l'activité d'un assureur, développé afin d'analyser globalement les risques auxquels il fait face, de les quantifier et de déterminer le montant de capital permettant de couvrir raisonnablement ces risques. Ceci fait des modèles internes une composante importante du système de gestion des risques d'un assureur.

3.2) L'utilité des modèles internes :

Leur but est de modéliser le profil de risque général d'une branche ou d'un groupe d'assurance dans son intégralité. Ils doivent être harmonisés avec les outils de gestion Actif-Passif, de calcul d'*embedded value* et les modèles de provisionnement.

Le premier objectif est l'identification et la mesure des risques liés à l'activité.

En particulier, l'assureur essaie de quantifier le niveau de capital minimum qui correspond au risque de ruine qu'il estime acceptable. Il doit également gérer ses risques à un niveau qu'il juge correct compte tenu de sa structure.

Le deuxième objectif d'un modèle interne est de fournir un cadre de référence où la rentabilité exigée d'une activité dépend du risque qu'elle fait supporter à la compagnie. Le modèle doit permettre de réaliser des arbitrages en ce qui concerne les stratégies de développement de la compagnie.

Il conduit à des actions très concrètes :

- Prise ou cession du risque ;
- Surveillance du risque de défaut d'émetteurs ou de réassureur ;
- Analyse de la réassurance ;
- Réduction de l'exposition à la volatilité des marchés actions ;
- Mesure de performance ;
- Allocation d'actifs ;
- Politique d'intéressement ;
- Politique de participation aux bénéfices.

3.3) Calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne :

Dans le cas d'un modèle interne, la *Value-at-Risk* à 99,5% de la ΔNAV (variation Actif-Passif) à horizon un an, qui définit le besoin en capital, est estimée à partir de la distribution de la *Net Asset Value* dans un an. Cette *Value-at-Risk* est obtenue par projection stochastique à horizon un an des différentes variables économiques et financières.

Cette projection stochastique à horizon un an des différentes variables économiques et financières est réalisée en univers « monde réel », c'est-à-dire à partir de modèles calibrés sur l'historique adaptés à la mesure de risque.

Pour chaque scénario, l'organisme assureur réévalue dans un an :

- La valeur de l'actif d'après les nouvelles conditions de marché ;
- La *fair value* du passif.

Cette *fair value* du passif, correspondant à la notion de provision *best estimate* dans un an, s'obtient par une nouvelle simulation stochastique qui projette les flux futurs. Cette simulation de second niveau est réalisée en univers « risque-neutre » pour deux raisons pratiques.

La mesure risque neutre :

- est cohérente avec les prix du marché ;
- permet de trouver des valeurs indépendantes des risques pris.

Dans l'approche modèle interne, le recours à un générateur de scénarios économiques est indispensable pour déterminer la distribution de la *Net Asset Value* dans un an et en déduire le SCR.

I.4) L'exigence de capital comme contrainte dans la stratégie d'allocation d'actifs.

4.1) Description de la problématique:

Dans la réglementation actuelle, le niveau des fonds propres exigés ne dépend pas directement de l'allocation d'actifs. Il en va autrement dans la directive Solvabilité II qui impose un capital réglementaire :SCR (*Solvency Capital Requirement*) qui doit contrôler le risque global de l'assureur auquel l'allocation d'actif contribue. Ainsi, l'allocation d'actifs influe directement sur le niveau des fonds propres, la structure de l'actif impactant directement le niveau de solvabilité de l'assureur.

Les compagnies vont devoir adapter leur allocation d'actifs de sorte à être solvables au sens de Solvabilité II. Lors de l'allocation stratégique, les assureurs devront prendre en compte le capital requis qui sera exigé pour faire face au risque de marché. Autrement dit, le processus de sélection d'actifs des assureurs ne peut plus être uniquement basé sur un critère « Rentabilité/Volatilité », mais il doit intégrer le coût des fonds propres réglementaires.

Le niveau des fonds propres réglementaires peut être calculé de deux façons :

- Par la formule standard ;
- Par un modèle interne.

Les deux modes de calculs vont entraîner des courbes « Rentabilité/Niveau de fonds propres réglementaires» différentes.

Nous allons utiliser la méthode d'optimisation de Markowitz pour construire des portefeuilles qui minimisent le niveau des fonds propres réglementaires pour une performance fixée. Nous effectuerons les deux approches possibles pour calculer le SCR_{marché} de l'assureur (Formule standard et modèle interne). L'approche modèle interne sera basée sur un générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE.

Ainsi nous évaluerons l'impact du choix d'utilisation de la formule standard ou d'un modèle interne pour le calcul du SCR.

Dans la suite de ce mémoire, nous présenterons les obligations convertibles puis nous étudierons leurs comportements lors de l'utilisation d'un processus de sélection d'actifs suivant le critère « Rendement/Fonds propres réglementaires sous Solvabilité II ».

Pour plus de simplicité, au lieu du calcul du SCR marché complet, nous ne tiendrons pas compte des effets d'absorption par le passif, des impôts différés et de la diversification apportée par les autres placements. Nous supposons l'actif de l'assureur suffisamment diversifié pour considérer que le SCR de concentration est nul. C'est pourquoi nous le noterons SCR'marché.

4.2) La méthode d'optimisation de Markowitz :

L'allocation d'actifs consiste à optimiser la composition d'un portefeuille entre différentes classes d'actifs, selon un critère « Rentabilité/Risque ». La théorie d'allocation classique de portefeuille a été développée par Harry Markowitz en 1952. En définissant simplement pour chaque classe d'actif :

- Sa rentabilité à long terme ;
- Sa volatilité à un an ;
- La corrélation de sa performance avec la performance de chacun des autres actifs.

Il permet de déduire par une formule fermée, les portefeuilles optimaux (situés sur la frontière efficiente), c'est-à-dire ceux pour lequel il n'existe pas de portefeuille qui améliore la rentabilité, avec une volatilité moindre.

L'avantage de ce modèle est sa simplicité de mise en œuvre : aucune projection stochastique n'est nécessaire. Mais ce modèle repose sur des hypothèses fortes (le cours des actifs suit une loi normale multivariée, les corrélations sont linéaires et stables dans le temps,...), qui ne sont pas vérifiées en pratique, et il écarte par hypothèse tous les actifs conditionnels. Il n'est donc pas correct d'utiliser le modèle de Markowitz pour l'allocation d'actif avec comme classe d'actifs les obligations convertibles.

L'utilisation d'un générateur de scénarios économiques permet de s'affranchir de ces hypothèses fortes, car celui-ci, modélise plus finement la performance des actifs, même conditionnels et leurs interrelations.

4.3) Formalisation des deux problèmes :

Dans l'approche standard comme dans l'approche modèle interne le SCR'marché peut être assimilé à un critère de risque. Nous sommes donc ramenés à une problématique classique « Rentabilité/Risque » dans laquelle on peut tracer une frontière efficiente où le critère de risque est le niveau de capital affecté à chaque classe d'actifs.

Quelque soit l'approche choisie pour le calcul du SCR'marché, les distributions de performance des différents actifs seront projetées à l'aide du générateur de scénarios économiques que nous présenterons par la suite.

a) Approche formule standard

Le SCR'marché d'un portefeuille d'actifs se calcule en agrégeant à l'aide d'une matrice de corrélation les différents besoins en capitaux liés aux variables de marchés suivantes :

- Le cours des actions et leur volatilité : $\text{Marché}_{\text{action}}$;
- Les taux d'intérêt : $\text{Marché}_{\text{taux}}$;
- Les spreads de crédit : $\text{Marché}_{\text{spread}}$;
- Les prix de l'immobilier : $\text{Marché}_{\text{immobilier}}$;
- Les taux de change : $\text{Marché}_{\text{change}}$;
- Le niveau de concentration du risque de marché : $\text{Marché}_{\text{concentration}}$;
- La prime d'illiquidité : $\text{Marché}_{\text{ip}}$.

L'objectif est de déterminer l'allocation d'actifs optimale qui, pour un objectif de performance, minimisent le SCR'marché calculé par la formule standard. Cela revient à

$$\text{résoudre le problème suivant : } \left\{ \begin{array}{l} \min_{w_i} \sqrt{\text{Marché}' * \text{Corr} * \text{Marché}} \\ \\ SC \\ \sum_{i=1}^n w_i r_i = r \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{array} \right.$$

Où

(w_1, w_2, \dots, w_n) : vecteur des pondérations de chaque actif dans le portefeuille,

$R=(r_1, r_2, \dots, r_n)$: vecteur des performances espérées de chaque actif ,

r : rendement cible

$$\text{Marché} = \begin{pmatrix} \text{Marché}_{\text{Taux}} \\ \text{Marché}_{\text{Actions}} \\ \text{Marché}_{\text{Immobilier}} \\ \text{Marché}_{\text{Signature}} \\ \text{Marché}_{\text{Concentration}} \\ \text{Marché}_{\text{Change}} \\ \text{Marché}_{\text{prime illiquidité}} \end{pmatrix} : \text{vecteur composé des besoins en capitaux calculés pour}$$

chaque sous risque composant le risque de marché;

$$SCR_{\text{Taux}} = \sum_{i=1}^n w_i \text{Marché}_{\text{taux}_i} : \text{capital requis pour faire face au risque de taux, il est calculé}$$

comme la somme des $\text{Marché}_{\text{taux}}$ de chaque actif pondéré par leur poids dans le portefeuille.

Nous procédons de la même manière pour le $\text{Marché}_{\text{Actions}}$, le $\text{Marché}_{\text{Immobilier}}$, le $\text{Marché}_{\text{signature}}$, le $\text{Marché}_{\text{change}}$.

Nous ne tenons pas compte du risque de concentration qui tient compte de tout l'actif, ni du risque de prime d'illiquidité qui est lié au Passif.

Ne tenant pas compte des effets d'absorption par le Passif, le risque de taux auquel est exposé l'assureur est le risque de hausse des taux.

Corr est la matrice de corrélations entre les risques cités ci-dessus :

	Taux	Actions	Immobilier	Signature	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Actions	0	1					
Immobilier	0	0,75	1				
Signature	0	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

L'approche modèle interne consiste à déterminer la distribution de probabilité de performance des portefeuilles d'actifs, alors l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques s'avère indispensable pour la résolution de ces problèmes d'optimisation.

Dans la prochaine partie, nous présenterons le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE, qui sera ensuite utilisé tout au long de ce mémoire pour simuler le cours de différents actifs.

II) Présentation du Générateur de scénarios économiques : Modélisation de l'actif

Le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE est basé sur une approche de statistique descriptive : les lois utilisées sont adaptées pour coller avec les observations et les modèles sont calibrés d'après des séries historiques longues et adaptées aux risques à mesurer.

Le générateur peut simuler au sein d'un même scénario plusieurs variables économiques comme la performance annuelle des actions, la courbe des taux, le taux d'inflation, les spreads de crédit et la performance annuelle de l'immobilier.

Ces variables économiques ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais les scénarios générés sont indépendants entre eux.

Toutes ces variables économiques sont simulées sur un pas de temps annuel.

Nous allons présenter les différents modèles mathématiques utilisés pour simuler les variables économiques qui nous serviront dans la suite de ce mémoire.

II.1) Modélisation des taux nominaux.

Le générateur de scénarios économiques simule l'évolution future de la courbe des taux zéro coupon grâce à la simulation du taux court nominal.

Un modèle à deux facteurs est utilisé de manière à représenter la majorité des courbes de taux possibles. Ainsi, le taux court est déterminé par une équation stochastique qui dépend du taux long terme et qui, lui-même est stochastique.

1.1) Description du modèle :

Le modèle utilisé par le générateur de scénarios est le modèle de BLACK KARASINSKI à deux facteurs.

Les équations différentielles stochastiques définissant le taux court terme r_t et le taux long terme m_t sont les suivantes :

$$\begin{cases} d\ln(r_t) = \alpha_1(\ln(m_t) - \ln(r_t))dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ d\ln(m_t) = \alpha_2(\mu - \ln(m_t))dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{cases}$$

Où

W_t^1 et W_t^2 : deux mouvements Brownien indépendants ;

α_1 et α_2 : vitesses de retour à la moyenne ;

μ : moyenne sur le long terme du taux court.

Le modèle de BLACK KARASINSKI a l'avantage de ne pas générer de taux négatifs. De plus ce modèle permet de prendre en compte le phénomène de retour vers la moyenne. Le phénomène de retour vers la moyenne des taux s'explique comme cela :

- si les taux sont élevés cela diminue l'investissement et ralentit l'économie ce qui entraîne une baisse des taux.
- inversement lorsque les taux sont bas, l'investissement est moins coûteux ce qui entraîne une hausse des taux.

Malgré ces avantages, ce modèle a un inconvénient de taille : il n'existe pas de solution analytique permettant de calculer le prix des obligations zéro-coupon, et donc des courbes des taux. Alors, le temps de calcul des courbes de taux avec ce modèle est trop important.

1.2) Prix zéro-coupon et courbe des taux :

Pour pallier ce problème, le générateur utilise un modèle de VASICEK à deux facteurs pour générer les courbes de taux. Ce modèle possède une solution analytique pour trouver le prix des zéro-coupon, de plus il autorise une grande souplesse dans la forme des courbes de taux et permet notamment de générer des courbes de taux inversées.

Le modèle de VASICEK à deux facteurs est décrit par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} dr_t = \alpha_1(m_t - r_t)dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ dm_t = \alpha_2(\mu - m_t)dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{cases}$$

Où

W_t^1 et W_t^2 deux mouvements Brownien indépendants ;

α_1 et α_2 représentent les vitesses de retour à la moyenne ;

μ est la moyenne sur le long terme du taux court.

La solution analytique de ce modèle qui permet de calculer le prix des obligations zéro-coupon de maturité T à la date t est la suivante :

$$B(t, T) = \exp\left[A(T - t) - B_1(T - t)r_t - B_2(T - t)m_t\right]$$

Avec

$$B_1(t) = \frac{1 - e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1}, \quad B_2(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2} - B_1(t) \right]$$

et

$$A(t) = (B_1(t) - t) \left(\frac{\mu - \sigma_1^2}{2\alpha_1^2} \right) + B_2(t)\mu - \frac{\sigma_1^2 B_1(t)^2}{4\alpha_1} + \frac{\sigma_2^2}{2} \left[\frac{t}{\alpha_2^2} - 2 \cdot \frac{B_1(t) + B_2(t)}{\alpha_2^2} + \frac{1 - e^{-2\alpha_1 t}}{2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)} - \frac{2\alpha_1(1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t})}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1^2(1 - e^{-2\alpha_2 t})}{2\alpha_2^3(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]$$

Les taux courts r_t et les taux longs m_t sont donc diffusés à l'aide du modèle de BLACK KARASINSKI puis le prix des obligations zéro-coupon est calculé à l'aide de cette formule fermée.

Une fois le prix des zéro-coupon déterminés, il est alors possible de déterminer la courbe des taux par la formule suivante :

$$R(t, T) = - \frac{\ln(B(t, T))}{T - t}$$

Alors nous pouvons calculer la courbe des taux pour chaque scénario et ceci à chaque pas de temps.

1.3) Ajout d'un processus à sauts :

Les taux d'intérêt peuvent subir de fortes variations car ils sont influencés par les politiques monétaires des différentes banques centrales. Ainsi les taux peuvent subir des sauts à la hausse comme à la baisse.

Le générateur intègre au modèle de BLACK KARASINSKI un processus à saut. Ainsi chaque année, les taux ont une probabilité, qui est fonction des performances antérieures des actions et des taux, de subir un saut à la hausse ou à la baisse.

II.2) Modélisation de la performance des actions.

Le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE modélise, la performance annuelle des actions, en combinant une loi normale pour le cœur de la distribution et des processus à sauts au niveau des queues de distributions qui traduisent le risque de krach boursier ou de forte hausse.

2.1) Description du modèle général :

Le modèle utilisé pour le cœur de la distribution du cours des actions est un mouvement Brownien géométrique.

L'équation de diffusion des actions d'après ce modèle est la suivante :

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_s S_t dW_t$$
$$\Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu_t - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) t + \sigma_s W_t \right]$$

Où

S_0 : valeur initiale du cours de l'action ;

μ_t : espérance de rentabilité de l'action ;

σ_s : volatilité de l'action ;

W_t : mouvement Brownien standard.

Ce modèle à l'avantage d'être très simple à mettre en place mais il possède des hypothèses très restrictives comme la volatilité constante, rendements normaux...

2.2) Ajout de processus à sauts :

Modéliser la performance des actions en supposant que leurs rendements suivent une loi normale tend à sous-estimer les queues de distribution.

Le modèle utilisé par le générateur, épaissit les queues de distribution de la performance des actions, en ajoutant des processus à sauts.

Chaque année, il existe une faible probabilité qu'un krach boursier se produise. Dans ce cas, la performance de l'année n'est pas tirée selon la loi normale du cœur de distribution mais selon une loi « de krach » centrée sur une performance négative.

Il existe de même une faible probabilité d'une forte hausse des actions. Dans ce cas, la performance de l'année n'est pas tirée selon la loi normale du cœur de distribution mais selon une loi « de saut à la hausse » centrée sur une performance positive.

Ces probabilités de saut sont modulées au court du temps pour tenir compte des cycles boursiers :

- Après une forte progression de la bourse sur les 5 dernières années, la probabilité de krach est augmentée ;
- Après une forte baisse de la bourse sur les 3 dernières années, la probabilité de forte hausse des actions est augmentée.

L'ajout de ces processus à sauts, permet au modèle utilisé par le générateur de coller au mieux avec les queues de distribution de la performance des actions.

II.3) Modélisation des spreads de crédit.

Le spread de crédit est : l'écart de taux entre une obligation émise par une entreprise, comme une obligation « corporate », et un emprunt d'état. Ce spread de crédit permet d'observer la prime de risque entre un actif sans risque et un actif risqué.

Le générateur de scénarios économiques projette les spreads de crédit en fonction du cours des actions. Lorsqu'aucun choc boursier ne se produit, les spreads de crédit oscillent autour d'une valeur de référence relativement faible. Cette valeur est calibrée sur l'historique des indices iBoxx. Dans le cas inverse, si un krach boursier survient, les spreads de crédit subissent un choc à la hausse d'amplitude aléatoire. Ce choc est également calibré sur l'historique iBoxx.

II.4) Corrélation entre les variables de marché.

Pour être cohérent avec la réalité, le générateur tient compte des liens qui existent entre les différentes variables économiques projetées. Le générateur distingue deux cas, celui où les conditions de marché sont dites « normales » et celui où des événements extrêmes se produisent, comme une forte hausse ou un krach des marchés actions.

4.1) Corrélation des cœurs des distributions :

Dans une situation dite « normale » c'est-à-dire lorsque les modèles présentés précédemment ne subissent aucun saut, la corrélation entre les différentes variables économiques est supposée constante.

Pour modéliser cette corrélation, le générateur utilise la décomposition de Cholesky. D'après le théorème de Cholesky, pour une matrice symétrique définie positive Ω , il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que $\Omega=LL^t$.

La matrice $L = (l_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ se construit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{i,1} = \rho_{i,1} \quad \text{si } j = 1 \\ l_{i,j} = \frac{\rho_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k}}{\sqrt{\rho_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}} \quad \text{si } j > 1 \end{array} \right.$$

où $\rho_{i,j}$ représente la corrélation entre la variable économique i et la variable économique j.

Une fois cette matrice construite, pour obtenir un vecteur W de mouvements Browniens corrélés, il suffit de prendre un vecteur B de mouvements Browniens indépendants et d'effectuer le produit matriciel avec L.

Ainsi le vecteur $W=LB$ tient compte de la corrélation entre les différentes variables.

4.2) Corrélation des queues de distributions :

Lorsqu'un événement extrême se produit sur le cours des actions ou sur les taux, la corrélation entre les variables ne peut plus être considérée comme constante et égale à la corrélation historique. Alors pour tenir compte de ce phénomène, lorsqu'une des variables subie un saut à la hausse ou à la baisse, la probabilité de saut des autres variables change.

III) Une classe d'actifs particuliers : Les obligations convertibles en actions

III.1) Présentation d'une obligation convertible.

Une obligation convertible est une obligation assortie d'une option qui donne la possibilité de convertir l'obligation en une ou plusieurs actions (selon la parité) de la société émettrice. Elle présente toutes les caractéristiques de la sécurité d'une obligation associée aux opportunités de performance de l'action. L'obligation convertible est donc un produit « hybride », intermédiaire entre l'action et l'obligation.

Elle se décompose en une partie obligataire et une partie optionnelle. Sa valeur peut être approchée comme la somme de ces deux composantes.

1.1) Partie obligataire :

Le détenteur d'une convertible est un créancier de la société émettrice avec les avantages et les inconvénients que cela comporte. Si l'émetteur de la convertible ne fait pas défaut et tant que le porteur n'utilise pas son droit de conversion, le détenteur de la convertible est assuré :

- d'un remboursement à l'échéance à un prix déterminé à l'avance ;
- de toucher un coupon régulièrement qui, lui aussi est fixé à l'avance.

Par conséquent le risque supporté par le porteur est limité. Dans le pire des cas (excepté faillite de l'émetteur), le cours de l'obligation convertible chutera, mais le détenteur de la convertible continuera de percevoir les coupons et, à l'échéance, elle sera remboursée au prix convenu.

Le plancher actuariel d'une obligation convertible correspond à la valeur nue de l'obligation. Ce plancher actuariel s'obtient en actualisant les flux fixes de l'obligation, c'est-à-dire les coupons et le prix de remboursement. Cette évaluation s'effectue à l'aide de la formule suivante :

$$P(t) = \sum_{i=1}^{T-t} \frac{C_{i+t}}{\left(1 + r_i + r_{spread}\right)^i} + \frac{N}{\left(1 + r_{T-t} + r_{spread,t}\right)^{T-t}}$$

où

$P(t)$: Valeur nue de l'obligation convertible à la date t

C_i : Coupon pour la période i

r_i : Taux i an donnée par la courbe des taux sans risque

$r_{spread,t}$: Spread de crédit de l'émetteur à la date t

N : Prix de remboursement à l'échéance

T : Maturité de la convertible

Quelque soit l'évolution du cours du sous-jacent, la valeur de marché de l'obligation convertible ne peut pas descendre en dessous de son plancher actuariel. Mais ce plancher n'est pas immobile car il est sensible aux variations de la courbe des taux ainsi qu'au spread de crédit de l'émetteur.

Donc la composante obligataire d'une obligation convertible est une obligation classique qui est aussi le plancher en dessous duquel le cours de l'obligation convertible ne peut chuter.

1.2) Partie optionnelle :

Le porteur d'une obligation convertible a la possibilité, à tout moment, de convertir son obligation en une ou plusieurs actions de la société émettrice. Alors, il possède implicitement une option d'achat sur une ou plusieurs actions de la société émettrice. Cette option offre le droit et non l'obligation de convertir à tout moment l'obligation en action(s). Il s'agit d'un *call* américain.

Le détenteur d'une obligation convertible, n'exercera son droit de conversion uniquement si la valeur de conversion (cours du sous-jacent multipliée par la parité) est supérieure à la valeur de la partie obligataire. Donc, le prix d'exercice du *call* est le plancher actuariel de l'obligation convertible. Or, ce plancher varie en fonction de l'évolution de la courbe des taux

et du spread de crédit de l'émetteur, ainsi le prix d'exercice de l'option peut varier au cours du temps.

Une obligation convertible peut être convertie à tout moment par son détenteur. La stratégie à adopter par l'investisseur pour convertir son obligation, consiste avant tout à définir le moment le plus approprié pour exercer son droit d'option.

La détermination de la stratégie optimale d'exercice des options sur actions, a fait l'objet de nombreux débats. Deux articles parus en 1977 traitent de ce problème.

INGERSOLL³ fut le premier à appliquer la théorie des options à la conversion des obligations convertibles. En l'absence de dividendes et sans modification des termes de conversion, la stratégie optimale selon lui, est d'attendre l'échéance de l'obligation et de la convertir si sa valeur de conversion est supérieure au plancher actuariel de l'obligation à ce moment, c'est-à-dire au prix de remboursement. Selon INGERSOLL, il n'est donc jamais optimal d'utiliser le droit de conversion avant l'échéance de la convertible. Dans ce contexte-ci, la partie optionnelle de l'obligation convertible est représentée par un *call* européen dont le prix d'exercice est le remboursement à l'échéance de l'obligation.

BRENNAN et SCWARTZ⁴, dans un article paru quelques mois après celui de INGERSOLL, apportèrent certaines nuances en considérant la distribution de dividendes sur les actions. Selon les auteurs, il n'est jamais optimal de convertir l'obligation avant son échéance, sauf en cas de changement de base de conversion ou immédiatement avant la distribution de dividendes.

En effet, le paiement du dividende entraîne une diminution du prix de l'action du montant distribué, et donc une diminution de la valeur de conversion de l'obligation convertible. Ainsi, si juste avant le versement du dividende, la valeur de conversion (cours de l'action sous-jacente multipliée par le nombre d'actions obtenues lors de la conversion) de la convertible est supérieure à la valeur anticipée de celle-ci après la distribution du dividende, l'investisseur a intérêt à convertir son obligation.

INGERSOLL distingue un dernier cas de conversion anticipée de l'obligation. L'investisseur a tout intérêt à convertir son obligation, si le dividende actuel de l'action, est supérieur au coupon de l'obligation. Cette stratégie ne tient pas compte du fait que le niveau des

³ J.INGERSOLL, « An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities », The Journal of Finance (Mai 1977)

⁴ M.BRENNAN et E.SCHWARTZ « Convertible Bonds : Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion », The journal of Finance (Décembre 1977)

dividendes futurs est incertain. En effet, la conversion sera avantageuse que si les dividendes actuels de l'action sont supérieurs au coupon de l'obligation et que la valeur actualisée des dividendes futurs anticipés est plus élevée que la valeur actualisée des coupons à venir.

Certaines obligations convertibles incluent une clause de remboursement anticipé par l'émetteur. Cette clause est couramment appelée clause de forçage ou *call* émetteur. Elle donne le droit à l'émetteur de procéder, à partir d'une date déterminée, au remboursement anticipé des obligations convertibles émises.

L'utilisation de cette clause de forçage consiste à forcer les investisseurs à convertir leurs obligations en actions avant l'échéance de l'option.

Nous ne détaillerons pas les stratégies d'exercice de cette clause de forçage, car dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons à des obligations convertibles ne possédant pas une telle clause.

III.2) Modélisation et valorisation d'une obligation convertible.

La valorisation d'une obligation convertible se calcule comme la somme de ces deux composantes:

- la composante obligataire ;
- la composante optionnelle.

2.1) Modélisation et valorisation de la composante obligataire :

La composante obligataire de la convertible est valorisée comme une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques que la convertible (maturité, coupon, nominal...).

La valeur de marché de l'obligation « nue », s'obtient en actualisant les flux futurs aux taux de la courbe des taux en y incorporant le spread de crédit de l'émetteur. Alors, pour simuler le cours d'une obligation convertible, il est impératif de simuler l'évolution de la courbe des taux sans risque, ainsi que le niveau du spread de crédit de l'émetteur. Ces simulations seront effectuées à l'aide du générateur de scénarios économiques présenté précédemment.

Prenons une obligation convertible dont la partie obligataire a les caractéristiques suivantes :

- Maturité 3 ans ;
- Coupon 2,5% ;
- Nominal 100€ ;
- L'émetteur de cette obligation est noté BBB.

Pour calculer la valeur nue de l'obligation convertible au moment de son émission, nous utilisons la formule vue pour le plancher actuariel :

$$P(0) = \sum_{i=1}^T \frac{C_i}{(1 + r_i + r_{spread})^i} + \frac{N}{(1 + r_T + r_{spread,0})^T}$$

Où

$P(0)$: Valeur de marché de la partie obligataire

C_i : Coupon pour la période i

r_i : Taux i an donnée par la courbe des taux sans risque

$r_{spread,0}$: Spread de crédit de l'émetteur à la date de l'émission

N : Prix de remboursement à l'échéance

T : Maturité de la convertible

Dans notre exemple, tous les coupons sont égaux à 2,5€ et le nominal vaut 100€. En prenant la courbe des taux sans risque et un spread de crédit de 1,79% pour la notation BBB nous obtenons l'échéancier de flux suivant :

Année	Flux	Flux actualisé
1	2,5	2,43
2	2,5	2,35
3	102,5	92,02

La valeur de marché de l'obligation nue au moment de l'émission est :

$$P(0) = 2,43 + 2,35 + 92,02 = 96,80\text{€}$$

Après avoir simulé 10 000 scénarios de courbes des taux et des spreads de crédit BBB, nous calculons, pour chaque scénario, la valeur nue de l'obligation un an plus tard. La formule ci-dessous permet d'obtenir ces valeurs pour chaque scénario k.

$$P(1)^k = \sum_{i=1}^{T-1} \frac{C_{i+1}}{(1 + r_i^k + r_{spread}^k)^i} + \frac{N}{(1 + r_{T-1}^k + r_{spread,1}^k)^{T-1}}$$

Où

r_i^k : taux i an du k^{ème} scénario ;

$r_{spread,1}^k$: spread de crédit de l'émetteur BBB du k^{ème} scénario à la date 1.

La valeur nue de l'obligation est estimée pied de coupon. Pour déterminer la valeur de marché de la convertible, nous ajouterons à cette valeur le prix de la partie optionnelle.

2.2) Modélisation et valorisation de la composante optionnelle :

Dans un cas simple, où l'obligation convertible n'a pas de clause de remboursement anticipé par l'émetteur, le droit de conversion peut être modélisé par un *call* américain sur le sous-jacent, avec comme prix, d'exercice le plancher actuariel de l'obligation.

En l'absence de distribution de dividende, le *call* américain inclus dans les obligations convertibles peut être évalué comme un *call* européen dont le prix d'exercice est le remboursement de l'obligation, car il n'est jamais optimal d'exercer l'option avant l'échéance (confère partie III.1.1.2). Ainsi, il y aura conversion ou non uniquement si à l'échéance la valeur de conversion est supérieure au remboursement de l'obligation. Une méthode couramment utilisée pour valoriser des options de types européennes est la formule de BLACK et SHOLES.

En absence de distribution de dividende, la valeur de la partie optionnelle à la date t , est donnée par la formule ci-dessous :

$$C(t) = S(t) \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot N(d_2)$$

Où

$S(t)$: valeur du sous-jacent en t ;

$K(t)$: prix d'exercice en t ;

T : maturité de l'option qui est également la maturité de la partie obligataire et $T-t$ est la durée résiduelle avant l'échéance de la convertible ;

r_f : le taux sans risque ;

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} .$$

Le terme $N(\cdot)$ représente la fonction de répartition d'une variable aléatoire distribuée selon la loi normale centrée réduite.

Lorsque des dividendes sont distribués, il est possible d'adapter les formules de BLACK et SHOLES pour en tenir compte, à condition que l'option soit de type Européen. Elle peut être adaptée de la manière suivante :

$$C(t) = S(t) \cdot e^{-q(T-t)} \cdot N(d_1) - K(t) \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot N(d_2)$$

avec q le taux annuel de dividende,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K(t)}\right) + \left(r_f - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Or, lorsqu'il y a distribution de dividendes nous avons vu qu'il peut être optimal de convertir son obligation en action avant la date d'échéance (confère partie III.1.1.2). La formule de BLACK et SHOLES adaptée pour les dividendes ne fournit plus qu'une approximation de la composante optionnelle.

Dans la suite de ce mémoire, nous ne traiterons que le cas d'obligations convertibles ne versant pas de dividendes. Ainsi, la partie optionnelle sera évaluée par la formule de BLACK et SHOLES dont le prix d'exercice sera le dernier flux de l'obligation (uniquement le remboursement ou remboursement + dernier coupon selon les caractéristiques de la partie obligataire).

Prenons comme exemple un call européen dont le prix d'exercice est de 102,50€ (le dernier flux de la partie obligataire présenté précédemment), le cours du sous-jacent est à 85€ et la maturité du *call* est de 3 ans.

Pour déterminer la valeur de l'option nous devons spécifier quelques hypothèses :

- Le taux sans risque ;
- La volatilité implicite.

Le taux sans risque sera basé sur le taux des OAT 3 ans qui est de 1,87%.

La volatilité implicite choisie est donnée par le VCAC : 21,06%

Nous obtenons donc $C(0) = 8,04€$.

Le prix de l'obligation convertible à la date t sera donc égal à la somme suivante :

$$CV(t) = P(t) + C(t)$$

Ainsi, la valeur de l'obligation convertible est la somme de la partie obligataire et de la partie optionnelle déterminées précédemment. La valeur de la convertible est :

$$96,80 + 8,04 = 104,84€$$

Pour simuler le cours d'une obligation convertible, nous devons donc projeter la valeur du *call* tout au long de la vie de la convertible. Ce qui équivaut à simuler le cours du sous-jacent de l'option. Cette simulation sera effectuée par notre générateur de scénarios économiques. A chaque étape de la valorisation de l'obligation convertible, le *call* est valorisé en tenant compte de la nouvelle valeur du sous-jacent.

III.3) L'évolution de l'obligation convertible en fonction de son sous-jacent.

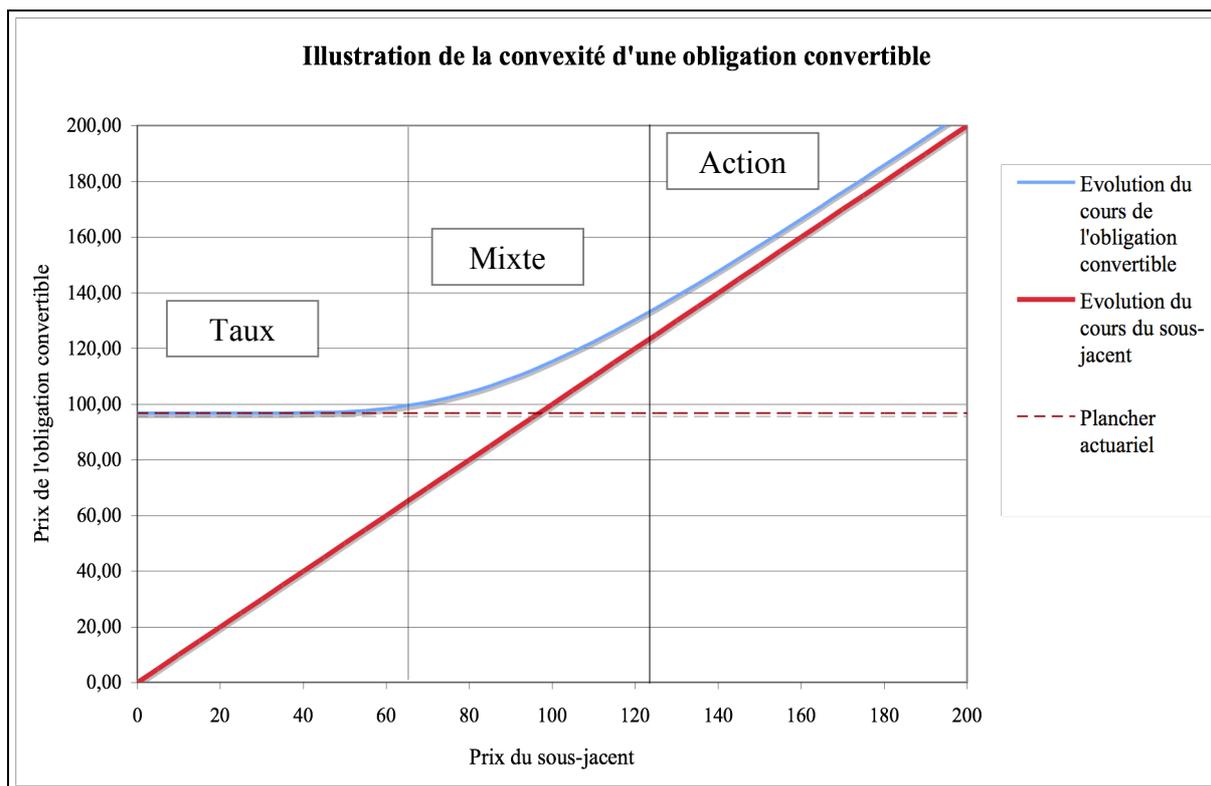
Une obligation convertible est donc un produit « hybride », intermédiaire entre l'action et l'obligation. L'investisseur a l'espoir de profiter de la hausse du cours de l'action en réalisant un profit de conversion. Il est en plus, en partie protégé contre le risque de chute du cours de l'action car il pourra toujours utiliser son titre comme une obligation classique, en percevant les coupons puis le remboursement final. Cette capacité à se protéger contre la baisse du cours de l'action tout en profitant d'une partie de la hausse, s'appelle la convexité.

De son émission à sa maturité, une obligation convertible peut correspondre à trois types de placements différents :

- Obligation convertible de type « taux » ;
- Obligation convertible de type « mixte » ;
- Obligation convertible de type « action ».

Selon l'évolution de son sous-jacent, la convertible passera d'un type de placement à un autre. Il peut même arriver qu'elle revête successivement ces trois formes durant sa vie.

Le graphique suivant décrit l'évolution du cours d'une obligation convertible en une action quand la valeur du sous-jacent augmente linéairement. Nous verrons apparaître la convexité de la convertible ainsi que ses différents profils selon le niveau du cours du sous-jacent par rapport au plancher actuariel. Nous négligeons le risque de crédit qui peut apparaître lorsque le cours de l'action sous-jacente se rapproche de 0.



3.1) Les obligations convertibles de type « taux » :

Une obligation convertible est de type « taux » lorsqu'elle se comporte comme une obligation classique. Cette situation se produit quand le sous-jacent a fortement chuté et se situe très loin du prix d'exercice de l'option. L'option d'achat de la convertible est alors totalement hors de la monnaie, ainsi la valeur de la composante optionnelle est quasiment nulle.

L'espoir de conversion à l'échéance étant très faible, la convertible n'évoluera plus qu'en fonction de la courbe des taux et du spread de crédit de l'émetteur comme une obligation classique.

A l'aide du générateur de scénarios économiques nous avons simulé 10 000 scénarios économiques est donc 10 000 évolutions du cours d'une obligation convertible. Les caractéristiques de la partie obligataire sont les suivantes :

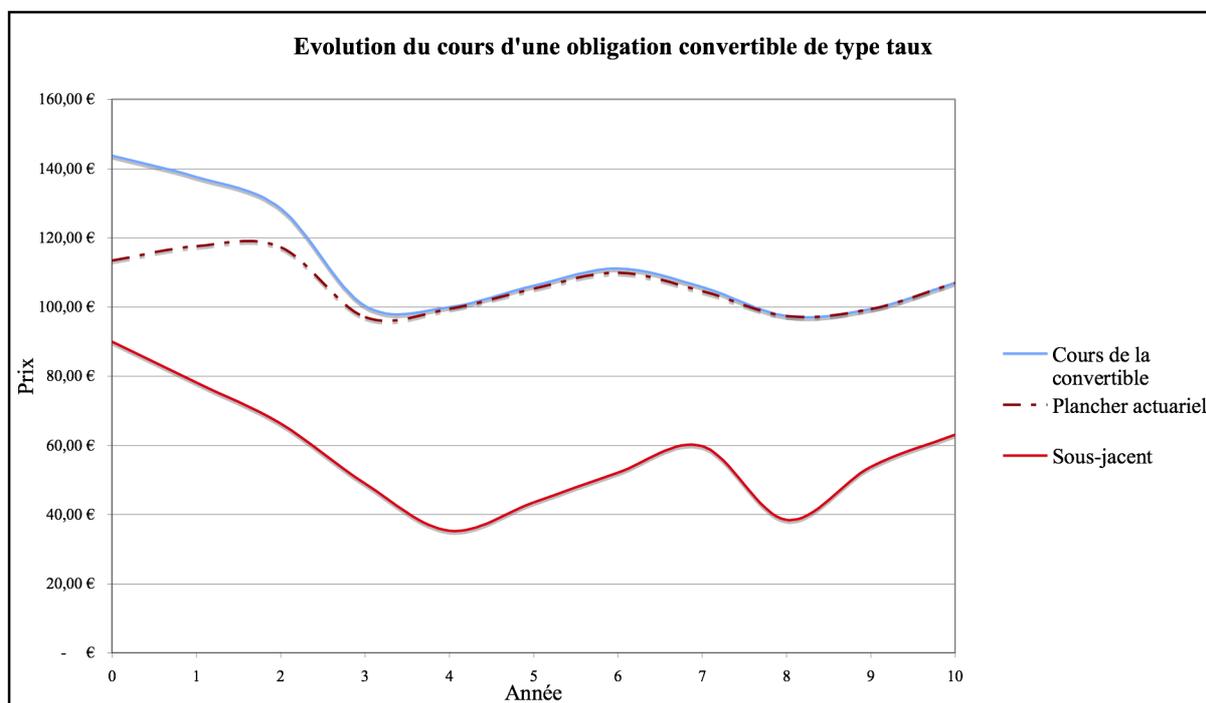
- Maturité 10 ans ;
- Coupon annuel de 7% ;
- Nominal de 100€ ;
- Remboursement 100€ ;
- Notation de l'émetteur BBB.

L'action sous-jacente ne verse pas de dividende et sa valeur au moment de l'émission de la convertible est de 90€. Le prix d'exercice de l'option d'achat est le dernier flux de la partie obligataire 107€ (nominal+dernier coupon). Comme précédemment la partie optionnelle est évaluée par la formule de BLACK et SCHOLES. Le taux sans risque sera basé sur le taux 10 ans de la courbe des taux sans risque : 3,69% . La volatilité implicite choisie est donnée par le VCAC 21,06%.

La stratégie de conversion est la suivante : l'investisseur attendra l'échéance pour convertir ou non l'obligation en action. Si à maturité, le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice alors il utilisera son droit de conversion. Inversement si le cours de l'action est plus faible que le prix d'exercice, il préférera toucher le dernier coupon ainsi que le remboursement de l'obligation.

Pour illustrer l'évolution d'une convertible de type taux nous avons retenu un scénario où le cours du sous-jacent chute brutalement puis se maintient à un niveau bien inférieur au prix d'exercice pour que la composante optionnelle soit négligeable.

Nous obtenons donc le graphique suivant, décrivant l'évolution de la convertible et de son sous-jacent, jusqu'à maturité de l'option.



Au bout de deux ans, l'action sous-jacente s'éloigne tellement du prix d'exercice que la valeur de la partie optionnelle devient nulle. Tant que l'action reste nettement inférieure au

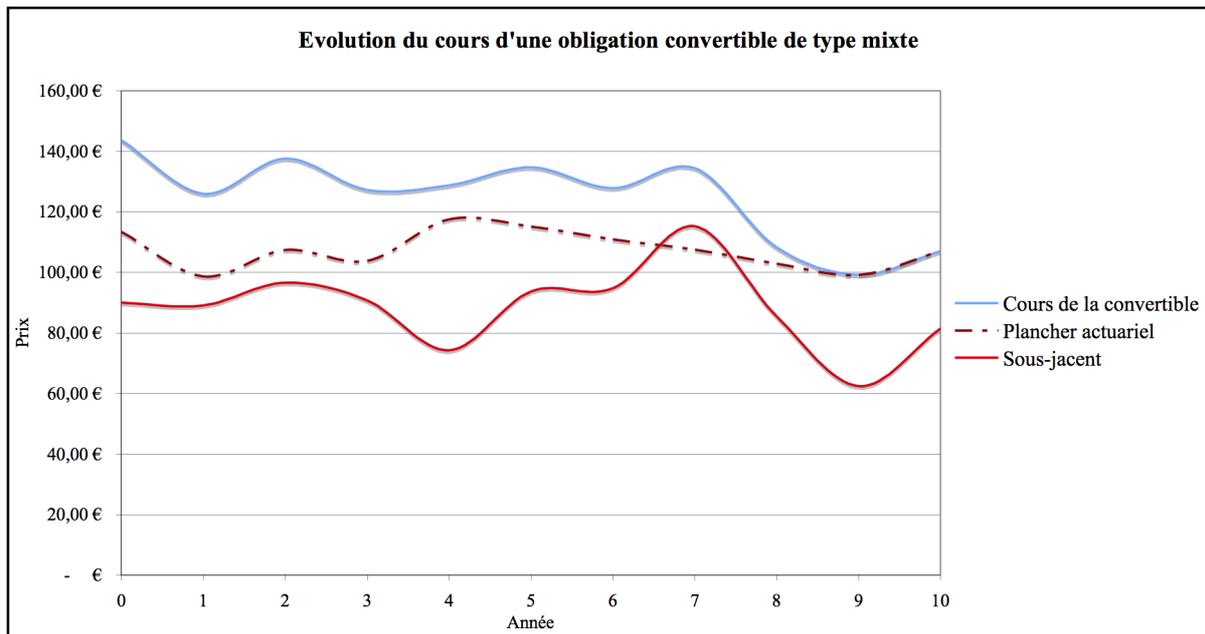
prix d'exercice, ses variations n'ont plus aucun effet sur le cours de la convertible. Ainsi le cours de la convertible se confond avec la valeur de son plancher actuariel et se comporte comme une obligation classique.

3.2) Les obligations convertibles de type « mixte » :

Ce type de convertible est très prisé par les investisseurs. Car la convexité de la convertible est alors à son maximum. De ce fait, le couple rendement risque devient très attractif.

Les obligations convertibles de type « mixte » ont une sensibilité au sous-jacent comprise entre 15% et 75% (une convertible ayant une sensibilité de 50% signifie que si le cours de l'action augmente de 1, alors le cours de la convertible augmentera de 0,5). Toute hausse du sous-jacent se propage rapidement à l'obligation convertible qui, si le mouvement de hausse persiste, tend à suivre le cours de l'action sous-jacente. En cas de baisse de l'action, le « parachute » obligataire se déclenche très vite. Dès que le plancher obligataire est atteint, la baisse de la convertible est interrompue. Ainsi, la double nature de la convertible joue pleinement son rôle.

Pour illustrer cette convexité de la convertible de type « mixte » nous reprenons le même exemple que précédemment en choisissant un scénario où le cours du sous-jacent oscille autour du plancher actuariel.



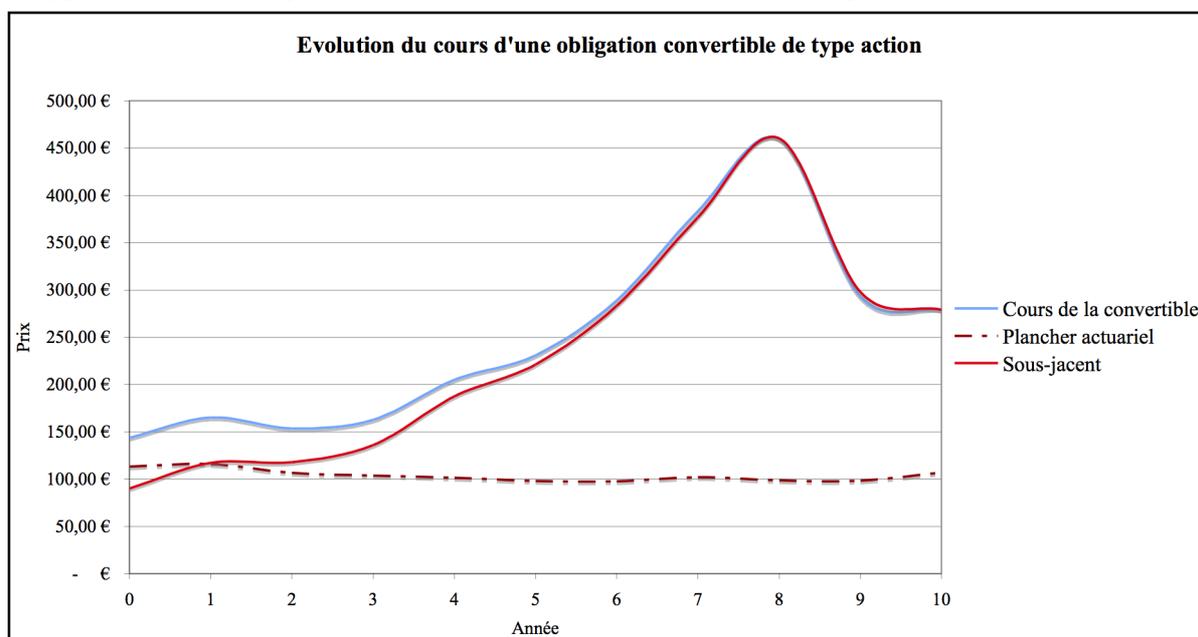
Le cours du sous-jacent étant proche du plancher actuariel, les hausses de l'action sont rapidement captées par la convertible et les baisses sont en parties absorbées.

3.3) Les obligations convertibles de type « action » :

Une convertible est dite de type « action » lorsque le cours de l'action sous-jacente a fortement monté, ce qui rendrait la conversion certaine, alors le cours de l'obligation convertible tend à épouser celui de l'action.

Investir dans une convertible qui est déjà de type « action » est risqué car si le cours de l'action chute fortement, la convertible ne pourra amortir cette baisse puisque son plancher actuariel sera trop éloigné.

Le graphique suivant représente le cours d'une obligation convertible qui devient rapidement de type « action » et épouse totalement les variations de son sous-jacent.



Au bout de 4 années, la convertible suit parfaitement le cours de son sous-jacent. Étant trop éloignée de son plancher actuariel, la baisse brutale du sous-jacent est totalement répercutée sur le cours de la convertible.

Nous avons donc décrit les différents profils que peut revêtir une obligation convertible. Selon son profil, la convertible sera, ou ne sera pas fidèle à l'évolution du cours du sous-jacent. A l'aide des 10 000 simulations que nous avons générées par le générateur de scénarios, nous

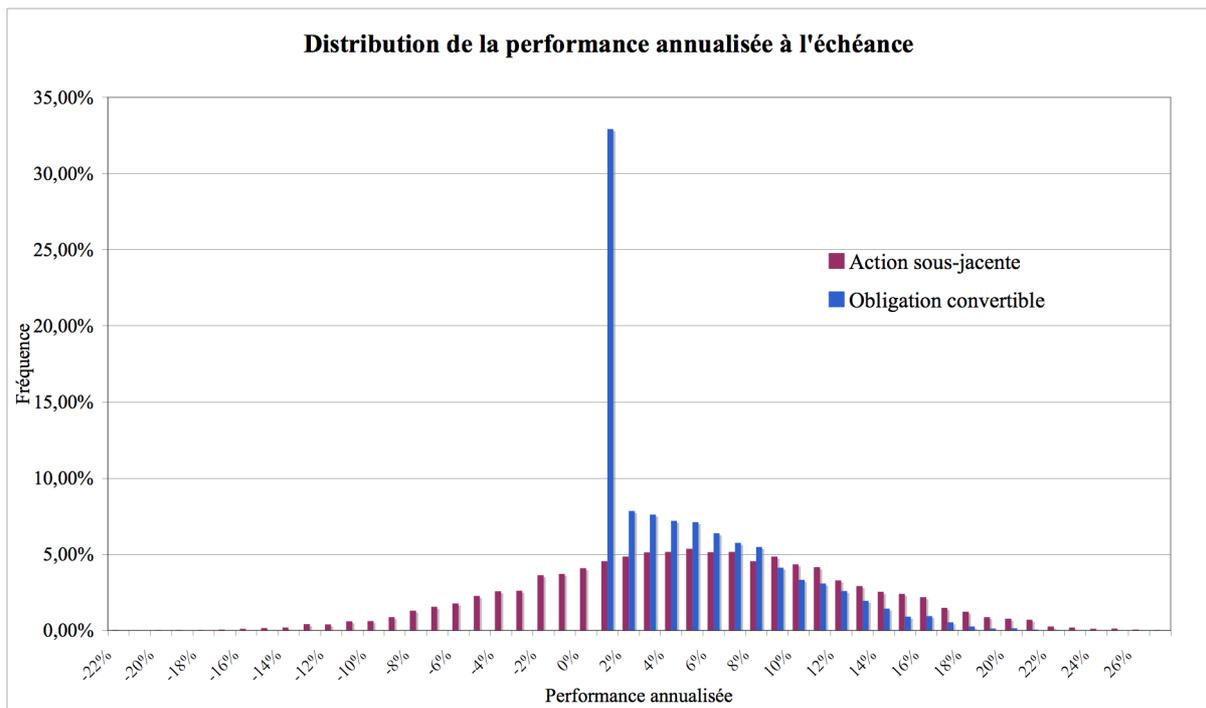
allons comparer la distribution de performance annualisée de la convertible par rapport à celle de l'action.

Rappel des caractéristiques de la convertible:

- Maturité 10 ans ;
- Coupon annuel de 7% ;
- Nominal de 100€ ;
- Remboursement 100€
- Notation de l'émetteur BBB.

L'action sous-jacente ne verse pas de dividende et sa valeur à l'émission de la convertible est de 90€. Le prix d'exercice de l'option d'achat est le dernier flux de la partie obligataire 107€ (nominal+dernier coupon).

Le graphique suivant représente la distribution de performance annualisée de la convertible et de l'action sous-jacente à maturité de la convertible, c'est-à-dire au bout de dix ans.



Dans 30,63% des cas, l'investisseur n'utilise pas son droit de conversion et touche donc le remboursement de l'obligation. Le rendement annualisé perçu par le porteur de la convertible est donc de 1,69%. Dans cette configuration, le rendement est inférieur à une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques, car lors de la souscription de la convertible l'investisseur a payé une prime correspondant à la valeur de la partie optionnelle. Si l'émetteur ne fait pas défaut, le rendement annualisé d'une obligation ayant les mêmes

caractéristiques sera à l'échéance de 4,13%. Dans 49,34% des cas, le rendement annualisé de la convertible est inférieur à celui de l'obligation classique.

Dans 69,37% des cas, le cours de l'action est supérieur au dernier flux de l'obligation. Ainsi, l'investisseur peut convertir son obligation action et capter une partie de la performance de l'action. La performance moyenne annualisée de la convertible est de 6,29% et celle de l'action est de 7,75%.

En négligeant le défaut de l'émetteur, l'obligation convertible est un actif peu risqué puisque dans le pire des scénarios, l'investisseur peut attendre l'échéance de l'obligation et toucher le remboursement. De plus, si le cours de l'action est suffisamment élevé à la maturité de l'obligation, l'investisseur profitera alors de la hausse de l'action en utilisant son droit de conversion. Dans ce cas, la performance de la convertible sera alors bien plus élevée que celle d'une obligation classique.

3.4) Quel « type » de convertible choisir ?

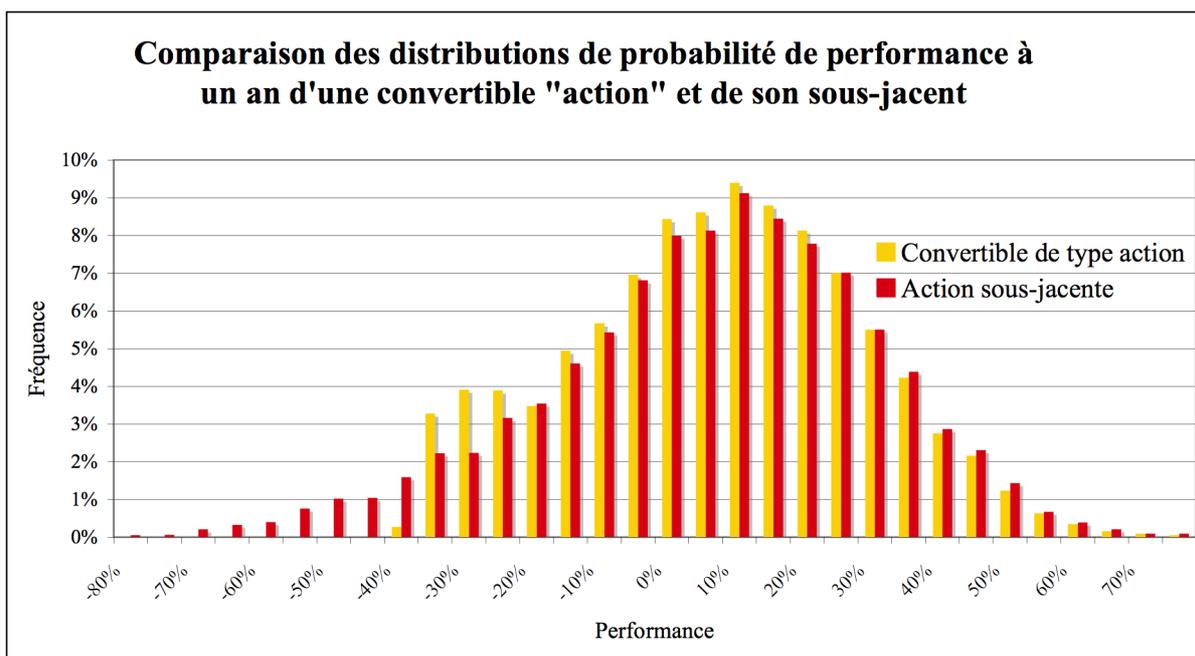
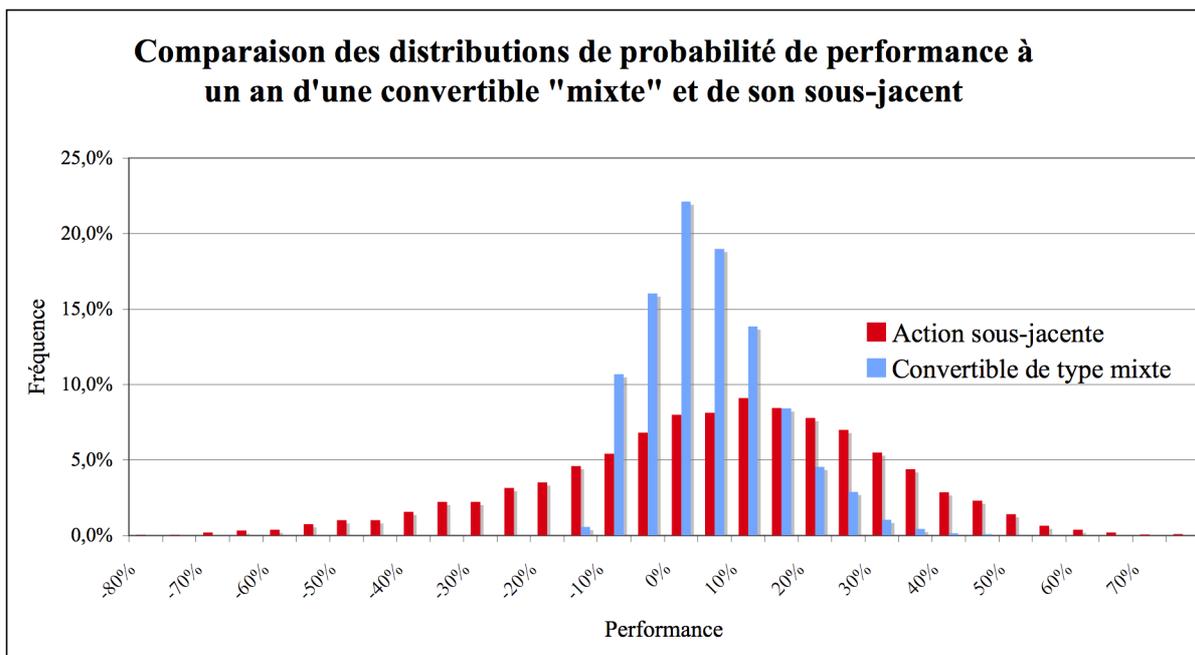
Généralement lors de leurs émissions, les obligations convertibles ont un profil « mixte ». Mais au fil du temps, ce dernier change en fonction de l'évolution du sous-jacent.

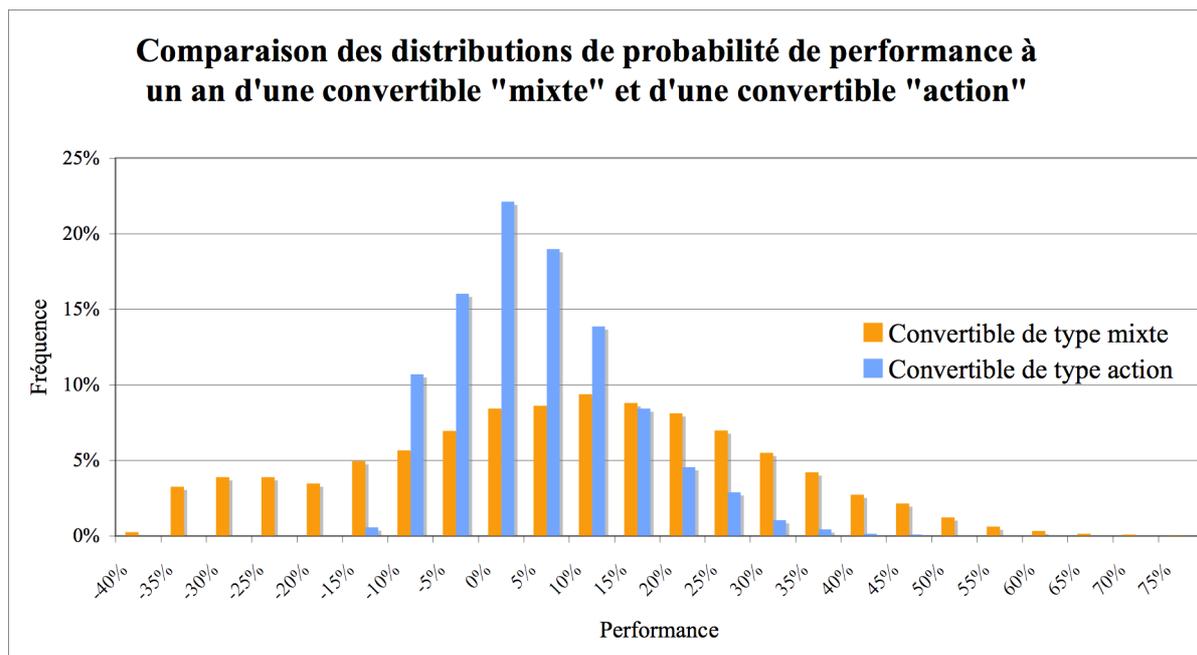
Il est donc important de regarder quel est le profil de l'obligation convertible au moment de l'investissement. Car selon le profil, le couple rendement risque est totalement différent.

Pour illustrer cette différence nous avons représenté la distribution des performances à un an de deux types de convertibles. Chacune des convertibles ont les mêmes caractéristiques exceptée leur sensibilité au sous-jacent. La première a une sensibilité de 42,97%, elle est donc de type « mixte » alors que la sensibilité au sous-jacent de la seconde est de 90,10%, elle est donc de type « action ».

Pour calculer la performance à un an d'une convertible, nous regardons l'évolution du cours de celle-ci entre la date d'achat et un an plus tard.

A l'aide du générateur de scénarios économiques, nous simulons 10 000 scénarios et nous obtenons la distribution de probabilité de la performance à horizon un an de chacune des convertibles. Nous construisons trois graphiques pour comparer les distributions de probabilité de performance de la convertible de type « mixte », de la convertible de type « action » et de leur sous-jacent.





Le plancher actuariel jouant pleinement son rôle, l'obligation convertible de type « mixte » n'enregistre pratiquement pas de perte extrême. En contrepartie, les gains de la convertible de type « mixte » sont modérés par rapport à ceux de l'action. Globalement, la convexité permet à la convertible d'être plus sensible à la hausse du sous-jacent qu'à la baisse. Autrement dit elle aura plus tendance à suivre les performances à la hausse de l'action plutôt que les performances à la baisse.

Dans une moindre mesure, le plancher de la convertible de type « action » limite les pertes extrêmes à un certain seuil. Le plancher actuariel de la convertible de type « action » ne devient utile que si le sous-jacent chute brutalement, dans notre exemple, de l'ordre de 30 à 40%. À l'exception d'une chute brutale et durable de l'action sous-jacente, la convertible de type « action » suit fidèlement le cours de l'action, les distributions de performance sont donc proches pour les deux actifs sauf pour les pertes extrêmes de la convertible, qui sont limitées par le plancher actuariel. Une convertible de type « action » permettra de profiter de la quasi-totalité de la hausse du sous-jacent tout en diminuant le risque de perte extrême grâce à son plancher actuariel.

Le caractère « hybride » de l'obligation convertible se retrouve plus dans les convertibles de type « mixte ». Le plancher actuariel intervient rapidement en cas de chute du sous-jacent, mais l'obligation convertible de type mixte capte quand même une partie de la hausse de l'action lorsque le cours de cette dernière augmente. Le couple performance/risque apparaît comme très compétitif par rapport aux autres classes d'actifs comme les actions ou les obligations.

IV) Le traitement des obligations convertibles en actions sous Solvabilité II

Les obligations convertibles présentent donc un couple « Performance/Risque » très compétitif par rapport aux autres classes d'actifs. Notamment les convertibles de type « mixte » qui par leur convexité, peuvent allier la performance de l'action à la sécurité d'une obligation. Cependant la réforme Solvabilité II va changer l'environnement prudentiel des compagnies d'assurance. La constitution de fonds propres en fonction du risque encouru par la société d'assurance oblige les assureurs à prendre en compte ce paramètre lors de l'allocation d'actifs. Ainsi les assureurs préféreront les classes d'actifs qui seront moins pénalisés en termes de capital réglementaire.

Dans cette partie, nous allons donc nous placer dans le cadre de Solvabilité II où la contrainte principale lors de l'allocation d'actifs sera le niveau des fonds propres exigés par Solvabilité II. Ainsi nous évaluerons le comportement des obligations convertibles dans ce nouvel environnement prudentiel et leur place probable au sein de l'allocation d'actifs des assureurs.

IV.1) SCR'marché de différents types d'obligations convertibles.

Nous allons évaluer le SCR'marché (définie partie I.4.i) associé à différentes classes d'actifs et notamment celle des obligations convertibles.

Pour estimer les SCR'marchés des différents actifs nous ne tiendrons compte ni des effets de diversification avec les autres actifs de l'assureur ni des effets d'absorption par le passif des variations de valeur des actifs.

Le calcul du SCR'marché peut utiliser la formule standard fournie par le QIS 5 ou un modèle interne. Nous allons utiliser ces deux méthodes pour estimer le SCR'marché des actifs suivants :

- Une action;
- Une obligation d'Etat français de maturité 3 ans versant un coupon de 1,5%;
- Une obligation de maturité 3 ans notée BBB et versant un coupon de 2,5% ;
- Une obligation convertible de maturité 3 ans de type «action» (sa sensibilité au sous-jacent est de 90,10%). Cette convertible notée BBB verse un coupon de 2,5%;
- Une obligation convertible de maturité 3 ans de type «mixte» (sa sensibilité au sous-jacent est de 42,97%). Cette convertible notée BBB verse un coupon de 2,5%.

L'approche modèle interne fait appel à un générateur de scénarios économiques. Nous allons simuler les cours de ces différents actifs pour 10 000 scénarios et nous en déduirons leurs distributions de probabilité de performance à horizon un an. Le SCR'marché associé à chacun de ces actifs est déterminé comme la *Value-at-Risk* de la performance au seuil 99,5% à l'horizon d'un an. Ces SCR'marchés calculés par ce modèle seront comparés avec les SCR'marchés des mêmes actifs, calculés à l'aide de la formule standard fournie dans les spécifications techniques du QIS 5 du 6 Juillet 2010.

Dans la directive Solvabilité II, le SCRmarché est un montant. Notre SCR'marché sera exprimé en pourcentage de la valeur de marché de l'actif en question. Cela permettra de comparer le SCR'marché de chaque actif.

1.1) SCR'marché par la formule standard fournie dans le QIS 5 :

Selon la formule standard, le capital requis pour le risque de marché se calcule en agrégeant, au moyen d'une matrice de corrélation, les différents besoins en capitaux liés aux variables de marché qui influent sur le prix des actifs.

a) SCR'marché d'une obligation d'Etat français

Pour les obligations des Etats de l'Espace Economique Européen émises dans la devise de l'Etat membre, le besoin en capital pour le risque de signature est nul. Seul le risque de taux sera pris en compte dans le calcul du SCR'marché.

Le principe est d'estimer la variation du cours de l'obligation dans l'hypothèse d'une modification de la totalité de la courbe des taux. Pour cela nous calculons tout d'abord sa valeur de marché à la date d'aujourd'hui avec les conditions de marché réel.

$$VM = \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{N}{(1+r_T)^T}$$

Où

C : coupon de l'obligation (ici 1,5€) ;

N : nominal de l'obligation (ici 100€) ;

T : maturité de l'obligation (ici 3 ans) ;

r_i : taux i an donné par la courbe des taux sans risque

Nous obtenons une valeur de 98,96 €.

Nous modifions la courbe des taux à l'aide des chocs fournis dans les spécifications techniques du QIS 5. Des chocs de 70%,70% et 64% sont appliqués au taux d'intérêt 1, 2 et 3 ans, puis on calcule la variation de la valeur de marché de l'obligation.

La nouvelle valeur de l'obligation s'obtient par la formule suivante :

$$VM = \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1+r_i(1+h_i))^i} + \frac{N}{(1+r_T(1+h_T))^T}$$

Où h_i est le choc à appliquer au taux i an.

La nouvelle valeur de l'obligation est de 95,61€, soit une variation de -3,38%.

Le SCR'marché obtenu est donc de **3,38%**.

b) SCR'marché d'une obligation *corporate* notée BBB :

Les variables financières qui influent sur le prix d'une obligation *corporate* sont les taux d'intérêt et le spread de crédit de l'émetteur. Pour calculer le SCR'marché de cet actif nous procédons par étapes :

Etape 1 : Calcul de la valeur de marché de l'obligation.

La valeur de marché de l'obligation s'obtient par la formule suivante :

$$VM = \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1 + r_i + r_{BBB})^i} + \frac{N}{(1 + r_T + r_{BBB})^T}$$

Où

C : coupon de l'obligation (ici 2,5€) ;

N : nominal de l'obligation (ici 100€) ;

T : maturité (ici 3 ans) ;

r_i : le taux i an donnée par la courbe des taux sans risque ;

r_{BBB} : le spread de crédit de l'émetteur (ici l'émetteur est noté BBB et $r_{BBB}=1,79\%$).

La valeur de marché de l'obligation ainsi calculée est de 96,80€.

Etape 2 : Calcul du $\text{Marché}_{\text{taux}}$

La méthode de calcul du capital requis pour faire face au risque de taux est le même que pour l'obligation d'Etat. Des chocs de 70%, 70% et 64% sont effectués sur les taux 1, 2 et 3 ans puis on en déduit la variation de la valeur de marché de l'obligation pour déterminer le $\text{Marché}_{\text{taux}}$.

La valeur de l'obligation avec les taux choqués est de 93,63€, soit une variation de -3,28%.

Le $\text{Marché}_{\text{taux}}$ de cette obligation est donc de 3,28%.

Etape 3 : Calcul du $\text{Marché}_{\text{spread}}$

Le besoin en capital pour le risque de signature de cette obligation est déterminé comme suit :

$$\text{Marché}_{\text{spread}} = VM \times \text{Sensi} \times F^{\text{hausse}}(\text{spread})$$

Où

VM est la valeur de marché de l'obligation ;

Sensi sa sensibilité au taux ;

$F^{\text{hausse}}(\text{spread})$ est une fonction de la signature, ici la qualité de la signature de l'émetteur est notée BBB donc $F^{\text{hausse}}(\text{BBB}) = 2,5\%$.

La sensibilité d'une obligation s'obtient par la formule suivante :

$$Sensi = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{i \times F_i}{(1+r)^{1+i}}}{VM}$$

Où

F_i : $i^{\text{ème}}$ flux ;

r : taux actuariel de l'obligation.

Le taux actuariel de l'obligation satisfait l'équation suivante :

$$Ve = \sum_{i=1}^T \frac{F_i}{(1+r)^i}$$

Où Ve est la valeur d'émission de l'obligation, ici $Ve=VM=96,80\text{€}$.

Le taux actuariel ainsi calculé est donc de 1,85%. On en déduit la sensibilité de l'obligation qui est de 2,82.

Ainsi le $\text{Marché}_{\text{spread}}$ est de 7,06%.

Etape 4 : Agrégation des besoins en capitaux.

Le SCR'marché de l'obligation s'obtient en agrégeant le $\text{Marché}_{\text{spread}}$ et le $\text{Marché}_{\text{taux}}$ par une matrice de corrélation fournie dans les spécifications techniques du QIS 5. La corrélation entre ces deux besoins en capitaux est considérée comme nulle. Alors, le SCR'marché de l'obligation est de $\sqrt{7,06\%^2 + 3,28\%^2} = 7,78\%$ (en valeur de marché de l'obligation).

c) SCR'marché d'une obligation convertible de type « mixte » :

Les variables de marchés qui influent sur le prix d'une obligation convertible, sont les taux d'intérêt et les spreads de crédit pour la composante obligataire et, le cours du sous-jacent et la volatilité implicite pour la composante optionnelle.

Le risque lié à la volatilité implicite du sous-jacent n'est pas pris en compte dans la formule standard du QIS 5. Nous déterminerons les besoins en capitaux pour les autres risques.

Nous procédons de la même manière que précédemment pour calculer le $\text{Marché}_{\text{spread}}$ et le $\text{Marché}_{\text{taux}}$ de cette obligation convertible. Toutefois, il faut prendre en compte le risque action que supporte la convertible et calculer son $\text{Marché}_{\text{action}}$.

Etape 1 : Valorisation de l'obligation convertible

La valeur de l'obligation convertible est la somme de sa partie obligataire et de sa composante optionnelle.

La partie obligataire a les mêmes caractéristiques que l'obligation *corporate* précédente. Donc, la valeur de la partie obligataire est de 96,80€.

La valeur de la partie optionnelle se calcule comme un *call* européen par la formule de BLACK et SCHOLES. Le prix d'exercice de l'option est le dernier flux de l'obligation : 102,5€ (coupon + remboursement). Le taux sans risque utilisé est de 1,87% (taux OAT 3 ans) et la volatilité implicite est donnée par le VCAC : 21,06%.

Le cours de l'action sous-jacente est de 85€, ce qui donne une sensibilité au sous-jacent de 42,97%.

La valeur de la partie optionnelle ainsi calculée est de 8,04€.

Ainsi, la valeur de l'obligation convertible de type mixte est de 104,84€.

Etape 2 : Calcul du $\text{Marché}_{\text{Taux}}$

Le capital en représentation du risque de taux est déterminé de la même manière que pour l'obligation *corporate*.

En appliquant les chocs réglementaires aux taux sans risque, la valeur de la partie obligataire chute de 3,28%. Ce qui correspond à une baisse de 3,03% de la valeur de marché totale de l'obligation convertible.

Le $\text{Marché}_{\text{Taux}}$ est de 3,03%.

Etape 3 : Calcul du $\text{Marché}_{\text{spread}}$

De la même manière, nous calculons la sensibilité au taux de l'obligation convertible. La partie optionnelle n'est pas sensible au taux, alors la sensibilité au taux de la convertible sera

inférieure à celle de l'obligation *corporate*. En tenant compte de la pondération entre la partie obligataire et la partie optionnelle nous trouvons alors une sensibilité au taux de 2,61.

Nous en déduisons le $\text{Marché}_{\text{spread}}$ qui est de 6,52%.

Etape 4 : Calcul du $\text{Marché}_{\text{action}}$.

On calcule le $\text{Marché}_{\text{action}}$ en appliquant un choc de -30% sur l'action sous-jacente. Autrement dit, on recalcule la valeur de la convertible en diminuant la valeur du sous-jacent de 30%. La valeur de la partie optionnelle ainsi recalculée est de 1,15€, soit une variation de -6,57% de la valeur de marché de l'obligation convertible.

Donc le $\text{Marché}_{\text{action}}$ de l'obligation convertible de type mixte est de 6,57%.

Etape 5 : Agrégation des besoins en capitaux.

Les différents besoins en capitaux sont agrégés à l'aide de la matrice de corrélation suivante :

	$\text{Marché}_{\text{Taux}}$	$\text{Marché}_{\text{Spread}}$	$\text{Marché}_{\text{Action}}$
$\text{Marché}_{\text{Taux}}$	1	0	0
$\text{Marché}_{\text{Spread}}$	0	1	0,75
$\text{Marché}_{\text{Action}}$	0	0,75	1

Le SCR'marché de l'obligation convertible de type « mixte » est de **12,61%**.

d) SCR'marché d'une obligation convertible de type « action » :

Nous procédons exactement de la même manière que pour le calcul de l'obligation convertible de type « mixte ».

Etape 1 : Valorisation de l'obligation convertible

Les composantes obligataires des convertibles de type « mixte » et de type « action » ont les mêmes caractéristiques. Elles ont donc la même valeur. Ainsi, la valeur de la partie obligataire de la convertible de type « action » est de 96,80€.

La valeur de la partie optionnelle se calcule comme précédemment. Les données sont les mêmes que pour la convertible de type « mixte », excepté le cours du sous-jacent qui est de

145€. La formule de BLACK et SHOLES donne la valeur de la partie optionnelle qui est de 51,00€.

Donc la valeur de l'obligation convertible de type « action » est de 147,80€.

Etape 2 : Marché_{Taux}

Les parties obligataires étant similaires pour les deux convertibles, le calcul du besoin en capital pour le risque de taux est identique. Seule la pondération entre la partie obligataire et la composante optionnelle change.

En tenant compte de cette pondération, le Marché_{taux} est de 2,15%.

Etape 3 : Marché_{spread}

Nous procédons comme pour la convertible de type « mixte ». La sensibilité au taux de la convertible « action » est de 1,85.

Nous remarquons que plus la part de la partie optionnelle augmente, plus la sensibilité au taux diminue, et par conséquent le capital requis pour faire face au risque de spread aussi.

Donc le Marché_{spread} de la convertible de type « action » est de 4,62%.

Etape 4 : Marché_{action}

La valeur de la partie optionnelle passe de 51€ à 16,77€ lors d'une baisse de 30% du cours de l'action sous-jacente. Cela correspond à une baisse de 23,16% de la valeur de la convertible.

Le Marché_{action} est donc de 23,16%.

Etape 5 : Agrégation des besoins en capitaux.

Les besoins en capitaux précédemment calculés et agrégés via la matrice de corrélation présentée préalablement, conduisent à un SCR_{marché} de **26,89%**.

e) SCR'marché d'une action :

Dans le QIS 5, le choc appliqué sur la valeur de l'action est de -30%. Son SCR'marché est donc de **30%**.

1.2) SCR'marché par une approche modèle interne basé sur notre générateur de scénarios :

Solvabilité II définit le SCR comme la *Value at Risk* de la *net asset value* (Actif- Passif) au seuil 99,5%. Ici, nous regardons le niveau de fonds propres intrinsèque d'un actif sans tenir compte du passif ni du reste de l'actif. Pour cela, le SCR'marché est la perte probable au seuil 99,5% à l'horizon 1 an. Pour calculer cette perte probable, nous tiendrons compte des éventuels coupons touchés par l'investisseur.

À l'aide de notre générateur de scénarios économiques, nous allons simuler la distribution de probabilité de la performance à horizon un an de chacun de ces actifs pour 10 000 scénarios. Puis, nous en déduirons la *Value at risk* de la performance au seuil 99,5% à l'horizon 1 an en prenant la 50^{ème} plus mauvaise performance.

a) SCR'marché d'une obligation d'état Français :

En utilisant les différentes évolutions de la courbe des taux données par notre générateur de scénarios économiques, nous calculons les performances à un an pour chaque scénario. La performance calculée au bout d'un an tient compte du coupon perçu par le porteur. Alors pour chaque scénario k nous réévaluons le prix de l'obligation un an plus tard, de la manière suivante :

$$VM(1)^k = \sum_{i=1}^{T-1} \frac{C_{i+1}}{(1+r_i^k)^i} + \frac{N}{(1+r_{T-1}^k)^{T-1}}$$

Où

r_i^k : taux i an simulé par le k^{ème} scénario ;

C : le coupon de l'obligation ;

N : son nominal ;

T : sa maturité.

La performance à un an pour le scénario k est donc évaluée ainsi :

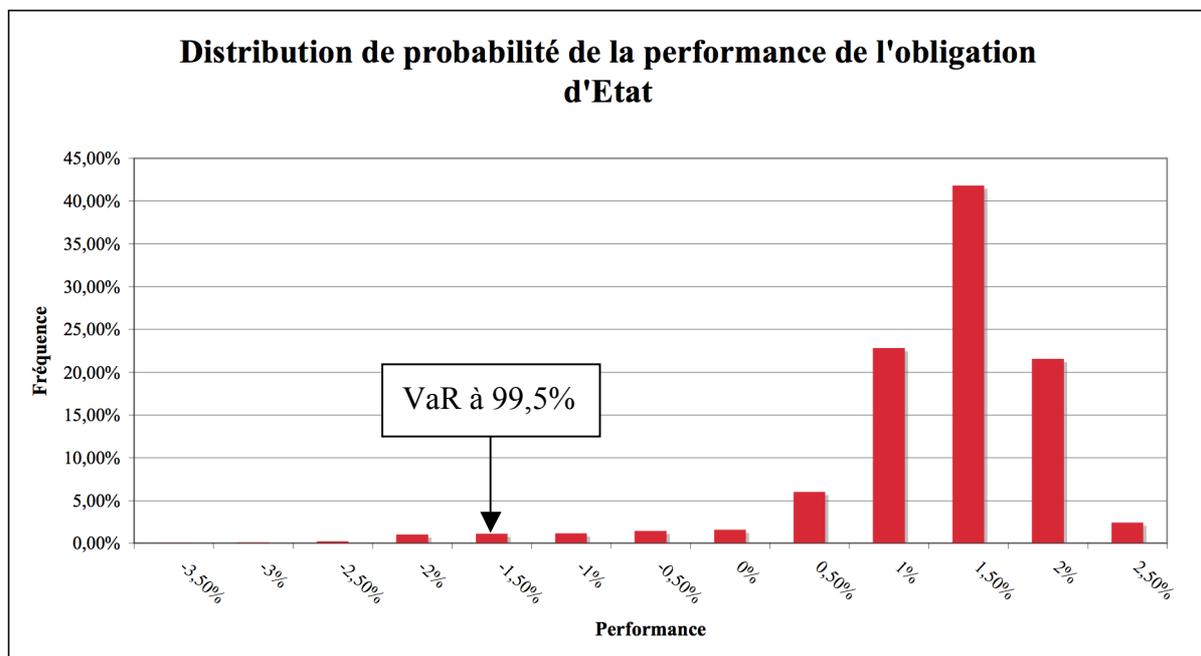
$$Perf1an^k = \frac{VM(1)^k + C_1 - VM}{VM}$$

Avec

C_1 : coupon perçu à la fin de la première année,

VM : valeur de marché de l'obligation calculé à la date d'aujourd'hui dans les conditions de marché réel.

Nous pouvons tracer l'histogramme de la distribution de la performance à un an :

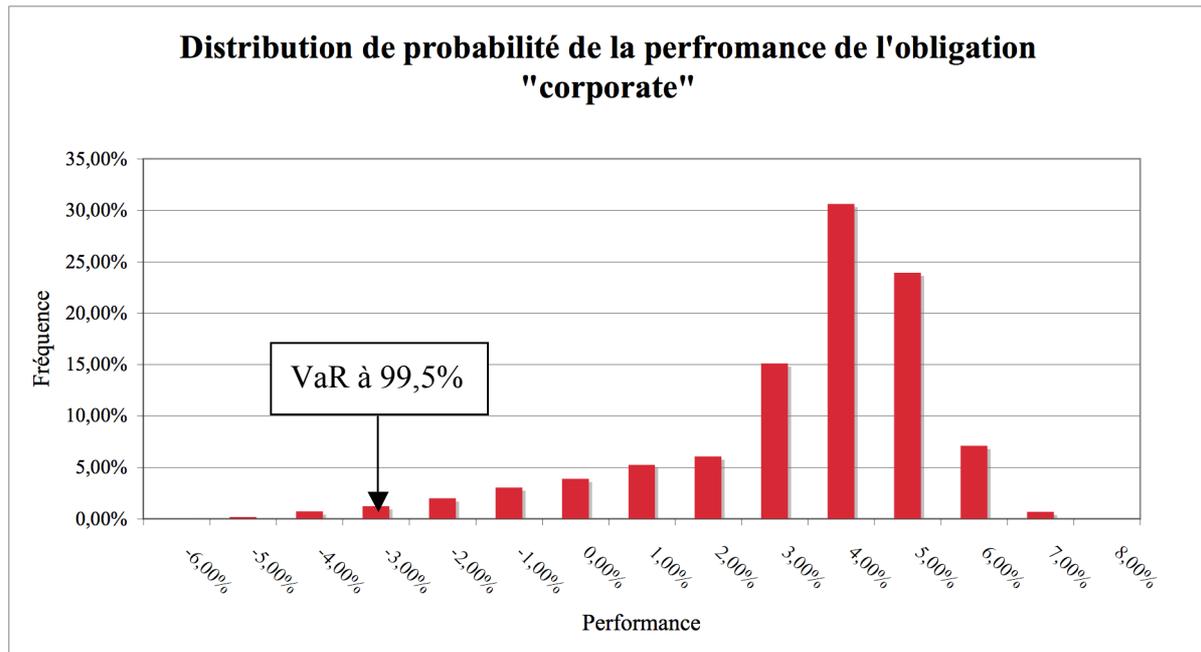


La *Value-at-Risk* à 99,5% pour l'horizon un an est la 50^{ème} plus mauvaise performance sur les 10 000 scénarios.

Son SCR'marché est de **1,83%**.

b) SCR'marché d'une obligation *corporate* :

De la même façon, pour chaque scénario, nous calculons la valeur à un an de l'obligation en tenant compte de l'évolution de la courbe des taux et du spread de crédit de l'émetteur. Nous traçons son histogramme de distribution de performance à 1 an et ainsi nous pouvons en déduire la performance pour chaque scénario et la *Value-at-Risk* à 99,5% pour l'horizon un an.

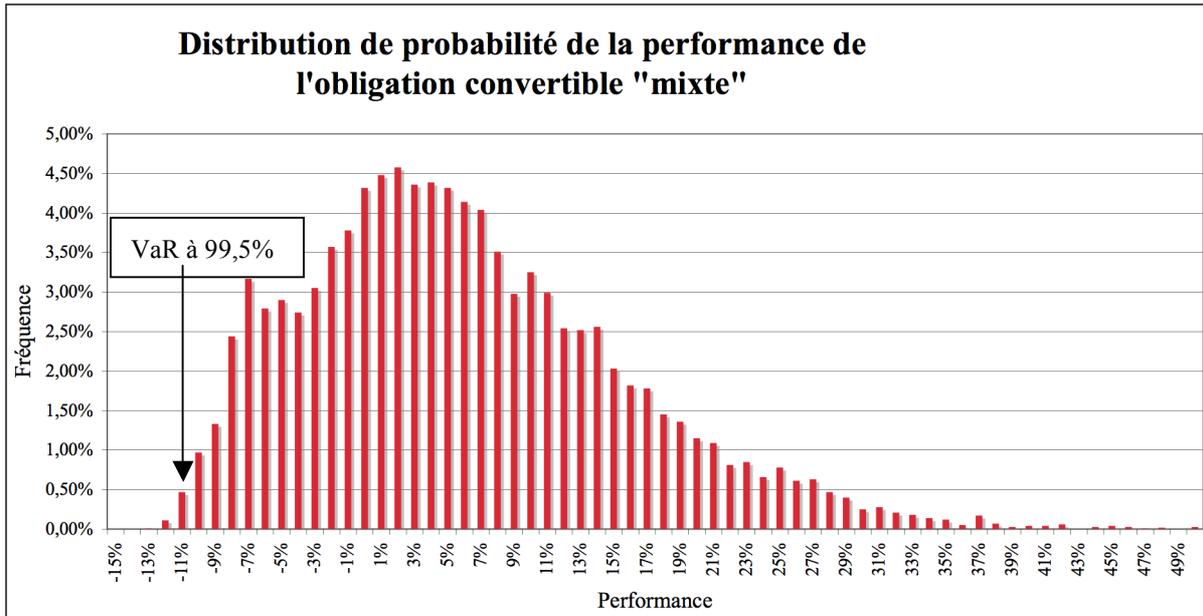


Son SCR'marché est de **3,56%**.

c) SCR'marché d'une obligation convertible de type « mixte » :

En tenant compte de l'évolution de la courbe des taux, du spread de crédit de l'émetteur et du cours du sous-jacent, nous calculons la valeur de l'obligation convertible un an plus tard pour chaque scénario. La méthode de calcul pour la valorisation d'une obligation convertible est explicitée au chapitre III.2.1 et III.2.2.

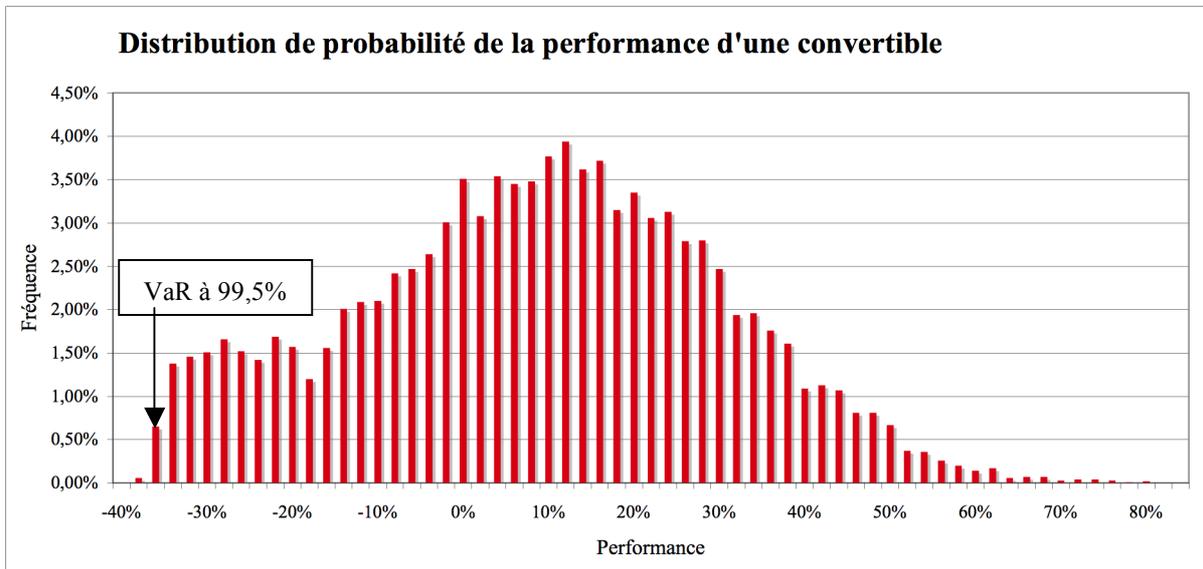
On obtient les différentes performances pour chaque scénario, puis nous traçons la distribution de probabilité de la performance de cet actif.



Le SCR'marché correspondant est de **10,13%**.

d) SCR'marché d'une obligation convertible de type action :

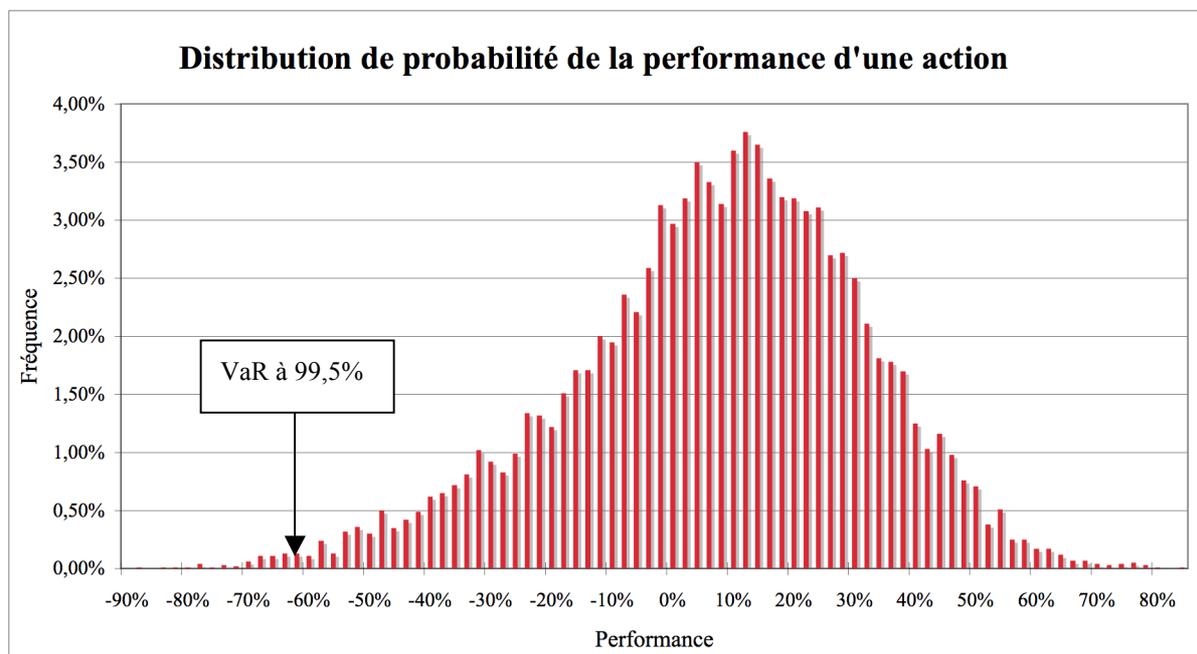
Nous procédons exactement de la même façon que pour la convertible de type « mixte ». Seul le niveau du cours du sous-jacent diffère. La sensibilité au sous-jacent étant plus forte, la convertible de type « action » sera plus exposée à une baisse du cours de l'action.



La *Value-at-Risk* avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an est de **34,32%**.

e) SCR'marché d'une action :

La *Value-at-Risk* à 99,5% pour l'horizon d'un an de l'action s'obtient directement en prenant la 50^e plus mauvaise performance sur les 10 000 scénarios.



Son SCR'marché est de **62,74%**.

IV.2) Optimisation de la composition d'un portefeuille selon le couple « Performance espérée/ SCR'marché ».

Pour suivre à la réforme Solvabilité II, les assureurs devront adapter leur stratégie d'allocation d'actifs de sorte à être « solvable » au sens de Solvabilité II. Ainsi, lors de leur allocation d'actifs, les assureurs devront prendre en compte le coût des fonds propres réglementaires.

Une solution est de constituer un portefeuille d'actifs qui minimise le capital requis pour faire face au risque marché tout en atteignant une performance cible.

Nous revenons donc à la problématique présentée dans la partie I.4. Deux problèmes d'optimisations se présentent, car il y a deux approches différentes pour calculer le SCR'marché.

Nous rappelons les deux problèmes :

Les portefeuilles minimisant le SCR'marché calculé par la formule standard s'obtiennent en résolvant le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w_i} \sqrt{\text{Marché}' * \text{Corr} * \text{Marché}} \\ \text{SC} \\ \sum_{i=1}^n w_i r_i = r \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{array} \right.$$

Où

Marché : vecteur des différents besoins en capitaux ($\text{Marché}_{\text{taux}}$, $\text{Marché}_{\text{spread}}$...) du portefeuille ;

Corr : matrice de corrélation donnée dans les spécifications techniques du QIS 5 ;

r : performance cible du portefeuille et r_i la performance espérée de l'actif i ;

w_i : part de l'actif i dans le portefeuille.

Les portefeuilles qui minimisent le SCR'marché, calculé par une approche modèle interne basée sur notre générateur de scénarios économiques, sont solutions du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w_i} \text{VaR}_{\sum w_i r_i} (99,50\%;1an) \\ \text{SCR} \\ \sum_{i=1}^n w_i r_i = r \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{array} \right.$$

Où $\text{VaR}_{\sum w_i r_i} (99,50\%;1an)$ est la *Value-at-Risk* à l'horizon un an de la performance du portefeuille avec un niveau de confiance de 99,50%. Cette *Value at risk* sera calculée sur la base des 10 000 scénarios économiques simulés par notre générateur de scénarios.

2.1) Performance et SCR'marchés de chaque actif :

Pour résoudre nos problèmes de constructions de portefeuilles, nous devons préalablement estimer les performances moyennes de chacun des actifs. Pour cela nous utilisons la méthode de Monte-Carlo. C'est-à-dire que nous générons 10 000 scénarios économiques, puis nous calculons pour chaque scénario la performance de chaque actif et nous prenons la moyenne de ces performances.

Cette méthode repose sur la loi forte des grands nombres :

Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, intégrables et de moyenne $E(X)$ alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X)$$

Ainsi la performance moyenne pour chaque actif peut être estimée par ce procédé.

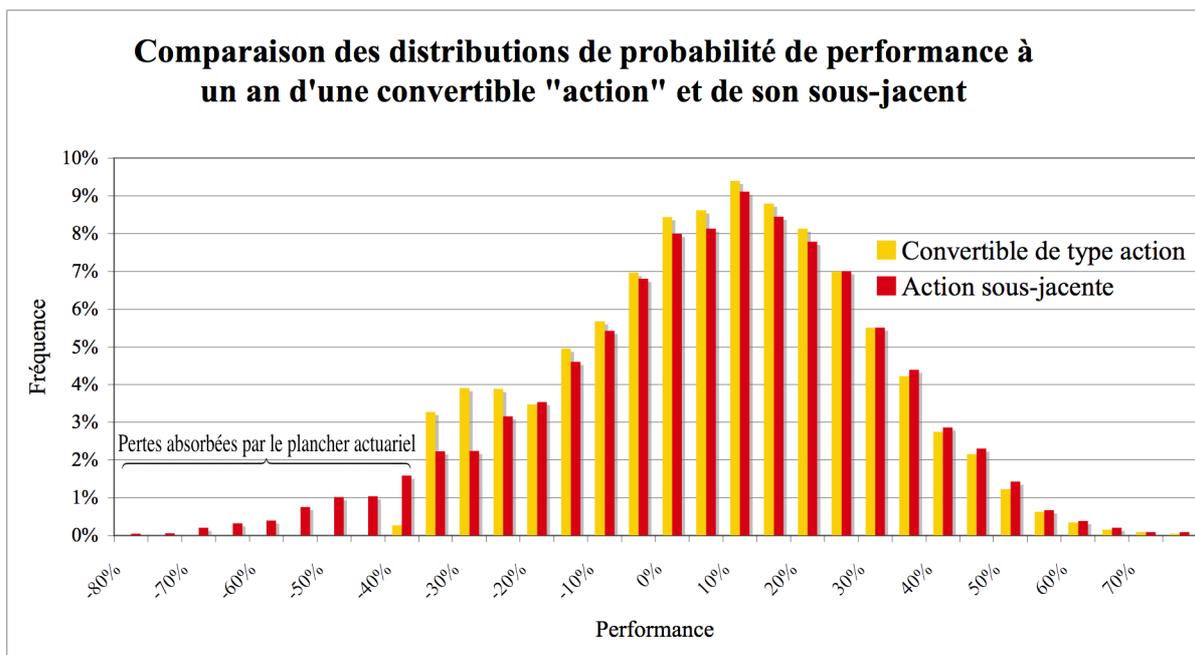
Le tableau suivant présente le SCR'marché de chaque actif selon l'approche utilisée ainsi que la performance espérée à un an.

	Performance attendue	SCR'marché	
		Formule standard	Générateur de scénarios économiques
Obligation d'Etat Français	1,57%	3,38%	1,83%
Obligation <i>corporate</i>	3,88%	8,03%	3,56%
Obligation convertible de type « mixte »	6,37%	12,61%	10,13%
Obligation convertible de type « action »	9,41%	26,89%	34,32%
Action	8,12%	30%	62,74%

En moyenne, la performance de l'obligation convertible de type « action » est supérieure à celle de son sous-jacent. Car le cours de la convertible de type « action » suit l'évolution du cours du sous-jacent tant que ce dernier ne chute pas sous le plancher actuariel de la convertible. Cette chute sous le plancher actuariel de la convertible ne se produit que lorsque le sous-jacent enregistre une très forte baisse. Dans ce cas-là, la convertible absorbe une partie de la baisse. L'obligation convertible de type « action » enregistrera alors les mêmes performances que celle de son sous-jacent, exceptés les pertes extrêmes (à partir d'une performance du sous-jacent inférieur à -40%). Ainsi sa performance moyenne sera plus élevée que celle de son sous-jacent.

Il est à noter, que rare sont les scénarios où la convertible de type « action » a une performance supérieure à l'action, lorsque sa performance est positive. Car la performance de l'action n'est répercutée que sur la partie optionnelle de la convertible et non pas sur toute la convertible.

Nous pouvons visualiser cela en représentant les distributions de performances à un an de la convertible de type « action » est de son sous-jacent :



2.2) Illustration de la méthode de construction de portefeuilles sur deux actifs :

Appliquons les deux méthodes de sélection de titres aux actifs suivants :

- Une action ;
- Une obligation d'Etat Français de maturité 3 ans versant un coupon de 1,5%.

Ne disposant que de deux actifs pour la construction de nos portefeuilles, chaque problème d'optimisation se transforme en un système d'équations à deux inconnues.

Notons ($w_1 ; w_2$) la proportion de l'action et de l'obligation dans le portefeuille. Soient r_1 et r_2 les performances espérées de l'action et de l'obligation d'Etat. Notons r , la performance cible du portefeuille à constituer. La minimisation du SCR'marché (par la formule standard ou par le générateur de scénarios économiques) du portefeuille s'effectue sous les contraintes

suites :
$$\begin{cases} w_1 r_1 + w_2 r_2 = r \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

On obtient donc la répartition suivante en fonction de la performance cible r :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \\ w_2 = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

Pour une même performance cible, la composition des portefeuilles minimisant le SCR'marché sera identique quelque soit l'approche choisie pour le calcul des fonds propres réglementaires.

Les performances attendues des actifs et leurs différents besoins en capitaux calculés par la formule standard sont regroupés dans le tableau suivant :

	Performance espérée à 1 an	Marché _{action}	Marché _{taux}
OAT	1,57%	0%	3,38%
Action	8,12%	30%	0%

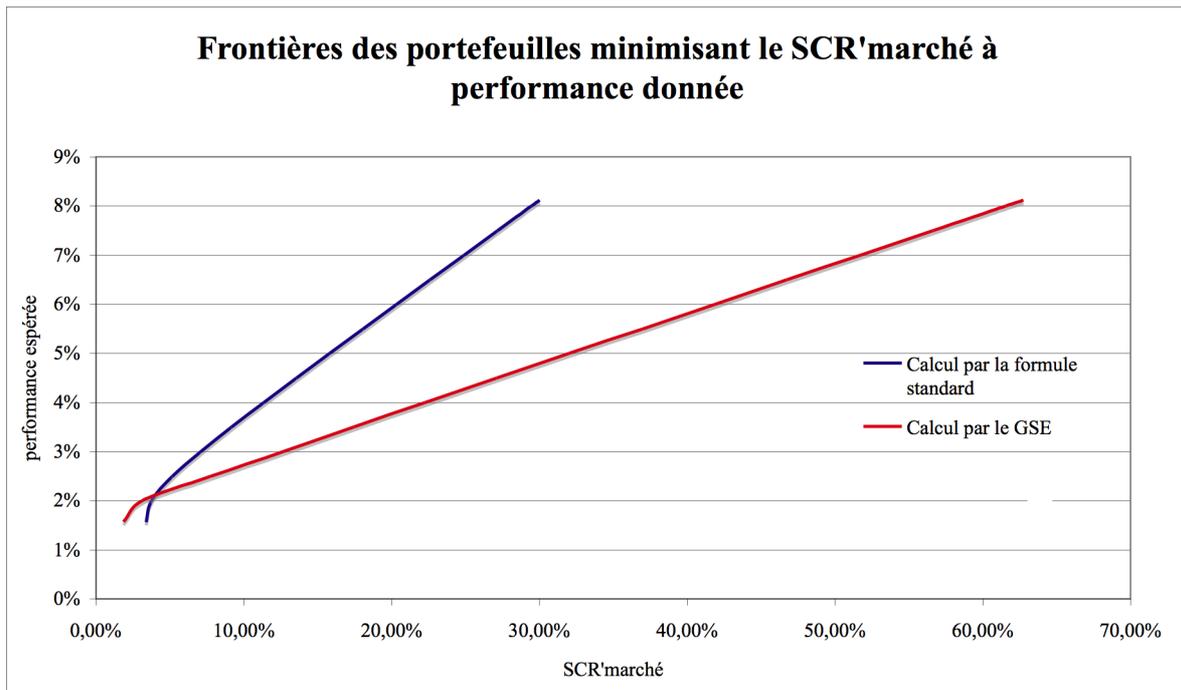
Comme la composition des portefeuilles ne dépend que de la performance cible, la frontière des portefeuilles minimisant le SCR'marché calculé par la formule standard à performance fixée est donnée par la fonction suivante :

$$f(r) = \sqrt{(w_1 SCR_{Taux_1})^2 + (w_2 SCR_{Action_2})^2}$$

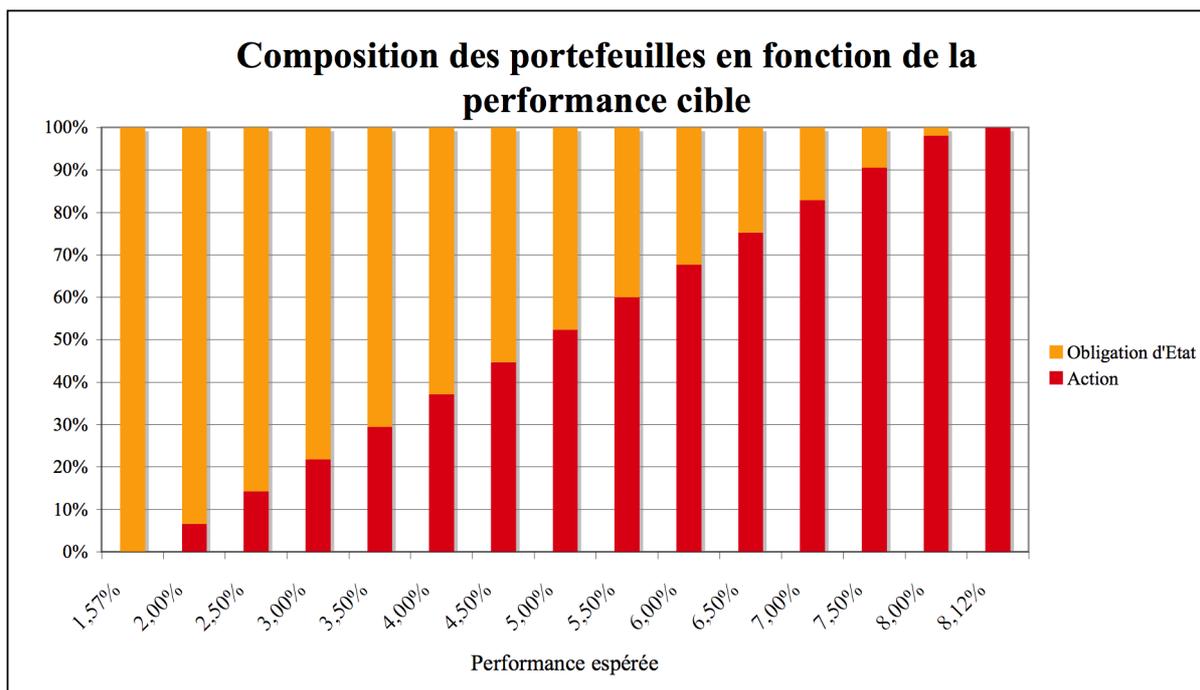
En développant, on trouve :

$$f(r) = \frac{1}{r_2 - r_1} \sqrt{r^2 (SCR_{Taux_1}^2 + SCR_{Action_2}^2) - 2r (r_2 SCR_{Taux_1}^2 + r_1 SCR_{Action_2}^2) + r_1^2 SCR_{Action_2}^2 + r_2^2 SCR_{Taux_1}^2}$$

La répartition entre l'obligation d'Etat et l'action est connue pour chaque performance cible. La frontière des portefeuilles « efficients » dont le SCR'marché est calculé par le générateur de scénarios s'obtient en prenant la VaR à 99,5% de la performance à horizon 1 an de ces portefeuilles pour chaque performance cible.



Voici la composition des portefeuilles en fonction de la performance cible.



Pour une performance cible inférieure à 2,10%, la formule standard est plus exigeante en fonds propres que notre générateur de scénarios. Dès que la part de l'action dépasse les 8%, le

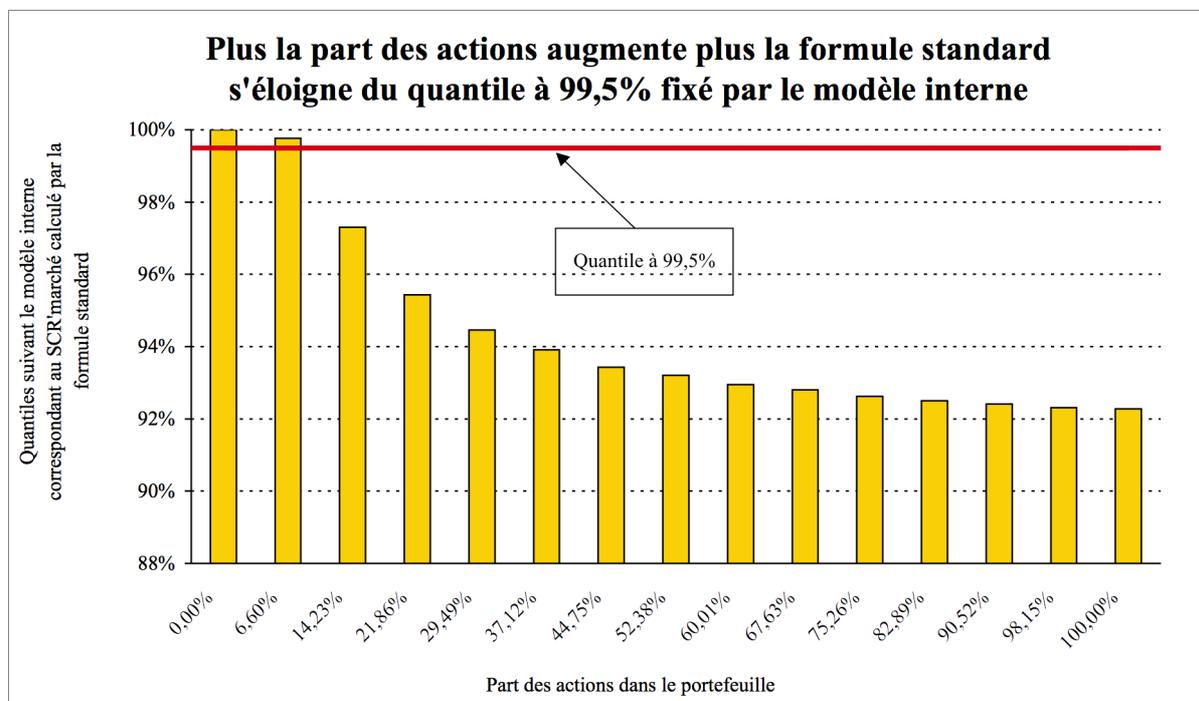
SCR'marché calculé par notre générateur est plus élevé que celui calculé par la formule standard.

La formule standard a été paramétrée de telle sorte que le rendement des actions est supposé suivre une loi normale (Nous détaillerons le calibrage du choc action par la suite). Or, comparer aux données historiques des marchés actions, la loi normale sous-estime les pertes exceptionnelles. Notre générateur de scénarios intègre à la loi normale un processus à sauts à la hausse ainsi qu'à la baisse. Cela permet d'approcher au mieux les queues de distributions du rendement des actions. Et par conséquent de tenir compte des pertes extrêmes. Ainsi notre générateur de scénario pénalisera plus durement les actions en termes de fonds propres que la formule standard.

Comme la part de l'action augmente en fonction du rendement espéré, plus on augmente la performance cible, plus l'écart en exigence de fonds propres entre les deux approches s'accroît. Pour une performance cible de 8%, le SCR'marché exigé par notre générateur de scénarios économiques est deux fois plus élevé que le capital exigé par la formule standard.

La composition des portefeuilles étant la même quelque soit l'approche utilisée pour le calcul des fonds propres, nous pouvons observer les distorsions entre la formule standard et la VaR à horizon 1 an de la performance au seuil 99,5%.

Le graphique suivant met en évidence que plus le portefeuille est investi en action, plus la formule standard s'éloigne de la VaR à 99,5%.



La problématique étant clairement introduite, nous allons appliquer cette stratégie d'allocation d'actifs pour un portefeuille disposant d'un plus large choix d'actifs. Nous avons retenu les quatre actifs suivant :

- Une action;
- Une obligation d'Etat Français de maturité 3 ans versant un coupon de 1,5%;
- Une obligation de maturité 3 ans notée BBB et versant un coupon de 2,5% ;
- Une obligation convertible de maturité 3 ans de type «mixte» (sa sensibilité au sous-jacent est de 42,97%). Cette convertible notée BBB verse un coupon de 2,5%.

Nous avons choisi de garder seulement l'obligation convertible de type « mixte » car c'est le type de convertible le plus prisé par les investisseurs. De plus, en moyenne la convertible de type « action » a un rendement supérieur à son action sous-jacente, ce qui n'arrive que lors de chute brutale et prolongée de l'action. Inclure cette convertible, biaisera les résultats dans le sens où pour obtenir une forte performance, le problème d'optimisation préférera la convertible « action » plutôt que l'action elle même.

Nous allons résoudre les deux problèmes d'optimisation présentés précédemment avec ce choix d'actifs pour la composition du portefeuille. Nous étudierons plus particulièrement la place de l'obligation convertible de type « mixte » au sein de ces portefeuilles.

Pour la résolution de ces deux problèmes d'optimisation, nous utiliserons le SOLVEUR d'Excel.

Parallèlement à la résolution de ce problème d'allocation d'actifs nous réaliserons une étude du couple « Performance/SCR'marché » propre à chaque actif. Ainsi, selon l'approche retenue pour le calcul du SCR'marché nous regarderons la place de l'obligation convertible au sein de l'allocation d'actifs sous Solvabilité II.

2.3) L'allocation d'actifs « optimale » sous la formule standard :

Nous décomposons les différents besoins en capitaux de chaque actif dans le tableau ce qui permettra de calculer le SCR'marché du portefeuille constitué.

	Performance	Marché _{Taux}	Marché _{Spread}	Marché _{Action}
Obligation d'Etat	1,57%	3,38%	0%	0%
Obligation <i>corporate</i>	3,88%	3,28%	7,06%	0%
Convertible « mixte »	6,37%	3,03%	6,52%	6,57%
Action	8,12%	0%	0%	30%

La performance du portefeuille, est la somme pondérée par leur poids dans le portefeuille de la performance de chaque actif. Ce qui est totalement différent pour le SCR'marché du portefeuille qui s'obtient en agrégeant les besoins en capitaux des différents sous risques, par le biais de la matrice de corrélation suivante :

	Marché _{Taux}	Marché _{Spread}	Marché _{Action}
Marché _{Taux}	1	0	0
Marché _{Spread}	0	1	0,75
Marché _{Action}	0	0,75	1

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{w_i} \sqrt{\text{Marché}' * \text{Corr} * \text{Marché}} \\ \text{sc} \\ \sum_{i=1}^n w_i r_i = r \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{array} \right.$$

Exemple du calcul du SCR'marché pour un portefeuille :

Prenons un portefeuille composé de 20% de l'obligation d'Etat, de 30% de l'obligation *corporate*, de 40% de l'obligation convertible et de 10% de l'action.

La performance espérée du portefeuille est une simple somme pondérée :

$$20\%*1,57\%+30\%*3,88\%+40\%*6,37\%+10\%*8,12\%= 4,84\%$$

Le SCR'marché du portefeuille s'obtient en calculant les besoins en capitaux de chaque risque du portefeuille, puis en les agrégeant à l'aide de la matrice de corrélation. Le capital requis pour le risque de taux est la somme pondérée des $\text{Marché}_{\text{taux}}$ par le poids de chaque actif.

$$\text{Marché}_{\text{taux}}= 20\%*3,38\%+30\%*3,28\%+40\%*3,03\%+10\%*0=2,87\%$$

Le $\text{Marché}_{\text{spread}}$ et le $\text{Marché}_{\text{action}}$ s'obtiennent de la même façon.

$$\text{Marché}_{\text{spread}}=4,72\%$$

$$\text{le Marché}_{\text{action}}=5,63\%$$

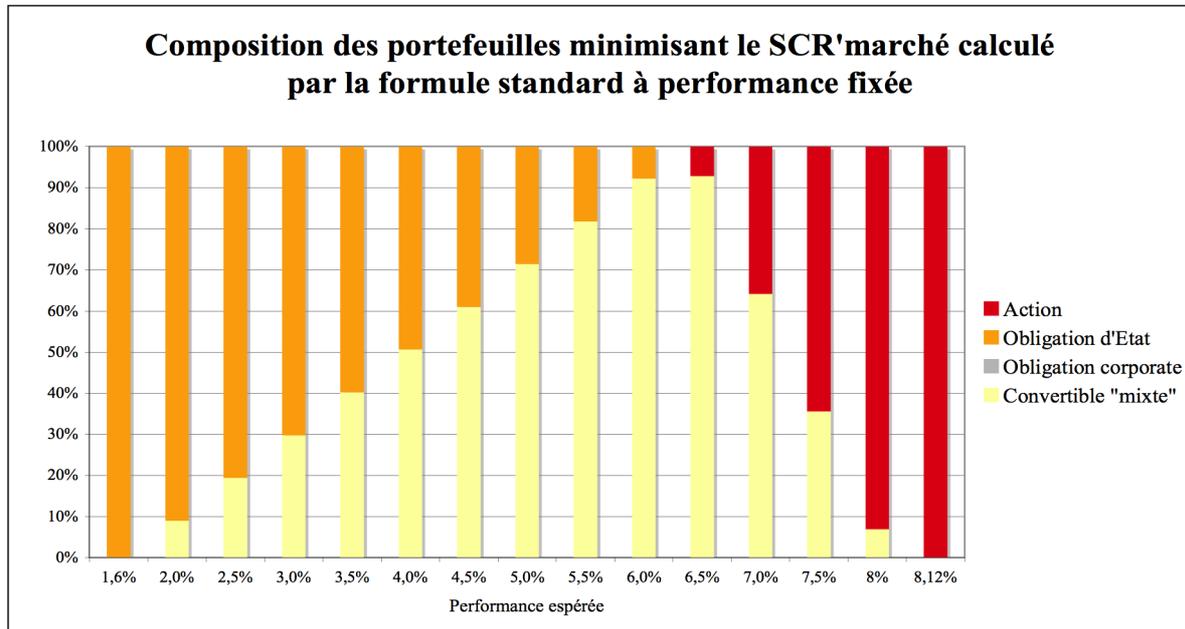
Le SCR'marché est obtenu en agrégeant le vecteur des besoins en capitaux par la matrice de corrélation présentée ci-dessus.

$$\text{SCR} \text{ marché} = \sqrt{2,87\%^2 + 4,72\%^2 + 5,63\%^2 + 1,5 * 4,72\% * 5,63\%} = 10,11\%$$

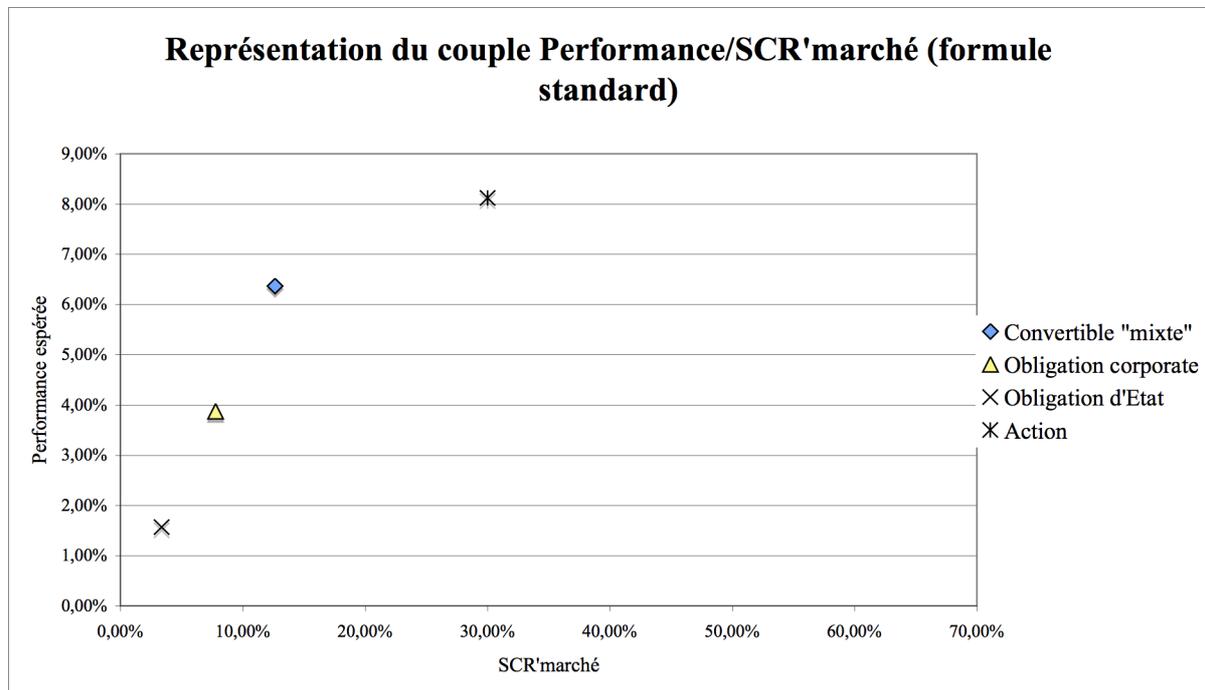
Un assureur détenant ce portefeuille devra mettre l'équivalent de 10,11% de la valeur de marché du portefeuille en fonds propres.

Maintenant nous allons, pour plusieurs performances cibles, constituer le portefeuille minimisant le niveau des fonds propres calculés par la formule standard.

Nous représentons la composition de ces portefeuilles à l'aide de l'histogramme suivant :



Le graphique suivant représente le couple performance/SCR'marché propre à chaque actif.



En plus de la représentation graphique du couple « Performance/SCR'marché », nous déterminons pour chaque actif le rapport entre ces deux caractéristiques.

	Performance/SCR'marché (formule standard)
Obligation d'Etat	46,37%
Obligation <i>corporate</i>	49,82%
Obligation convertible « mixte »	50,54%
Action	27,07%

L'analyse du couple Performance/SCR'marché pour chaque actif nous montre que l'obligation *corporate*, l'obligation convertible et l'obligation d'Etat ont un ratio très proche et a peu près alignés dans le plan Performance/SCR'marché. L'obligation convertible présente un léger avantage par rapport à son ratio.

L'analyse de la composition des portefeuilles minimisant le SCR'marché à performance fixée met en évidence le bon comportement de l'obligation convertible selon ce critère. Malgré un bon ratio « Performance/SCR'marché », l'obligation *corporate* est absente de ces portefeuilles au profit de l'obligation convertible.

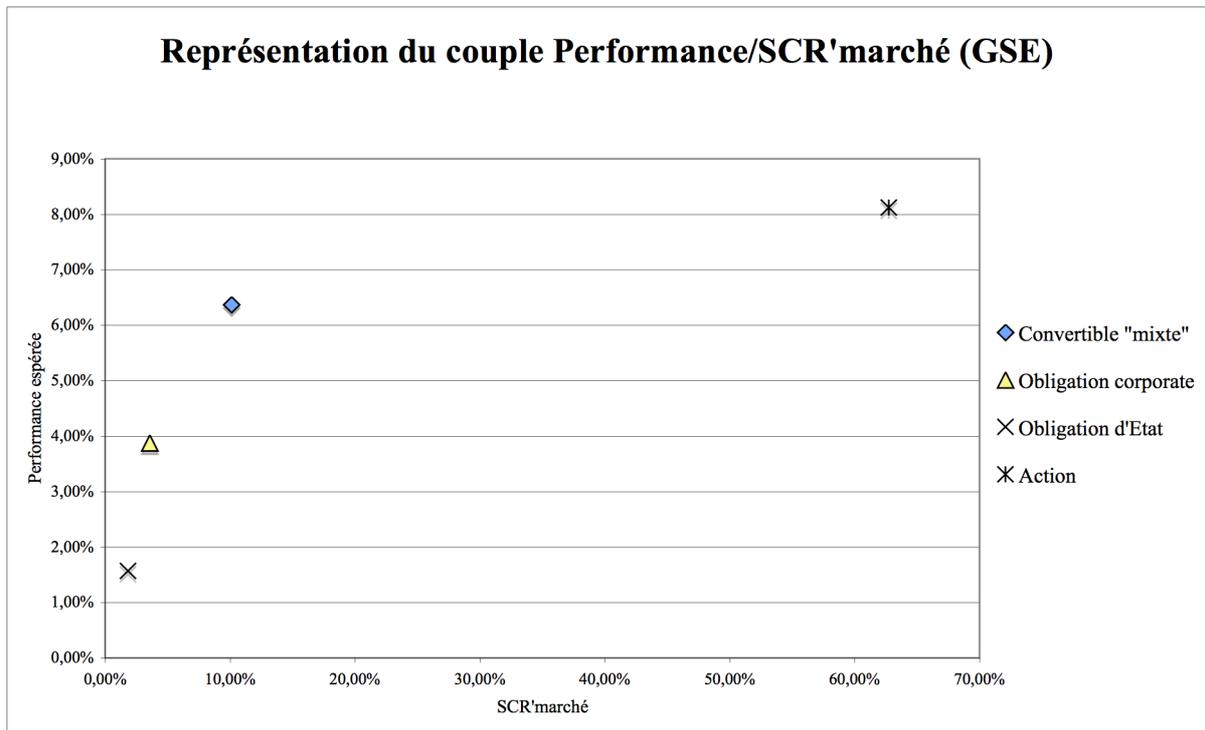
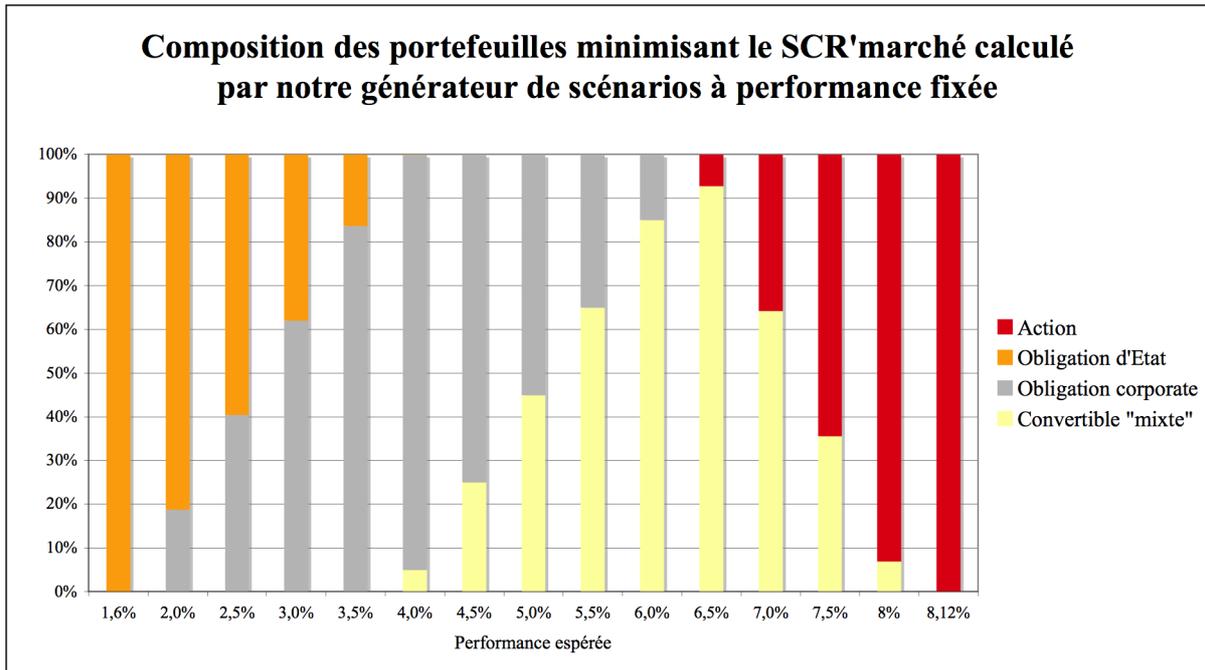
Les perspectives de performance de la convertible étant bien plus élevées que l'obligation BBB, l'objectif de performance peut être satisfait en ayant une forte proportion de l'obligation d'Etat, ce qui permet de maintenir le niveau en fonds propres au plus bas.

Par exemple, prenons un portefeuille dont la performance cible est de 3%, le tableau suivant représente la composition du portefeuille avec le SCR'marché associé.

	Part d'OAT	Part de l'obligation <i>corporate</i>	Part de la convertible	Performance attendue
Portefeuille optimal	70%	0%	30%	3%
Portefeuille test	38%	62%	0%	3%

Maintenant nous calculons leur SCR'marché :

Nous obtenons l'histogramme suivant qui représente la composition des portefeuilles solutions du problème.



	Performance/SCR'marché (GSE)
Obligation d'Etat	85,60%
Obligation <i>corporate</i>	108,94%
Obligation convertible « mixte »	62,91%
Action	12,94%

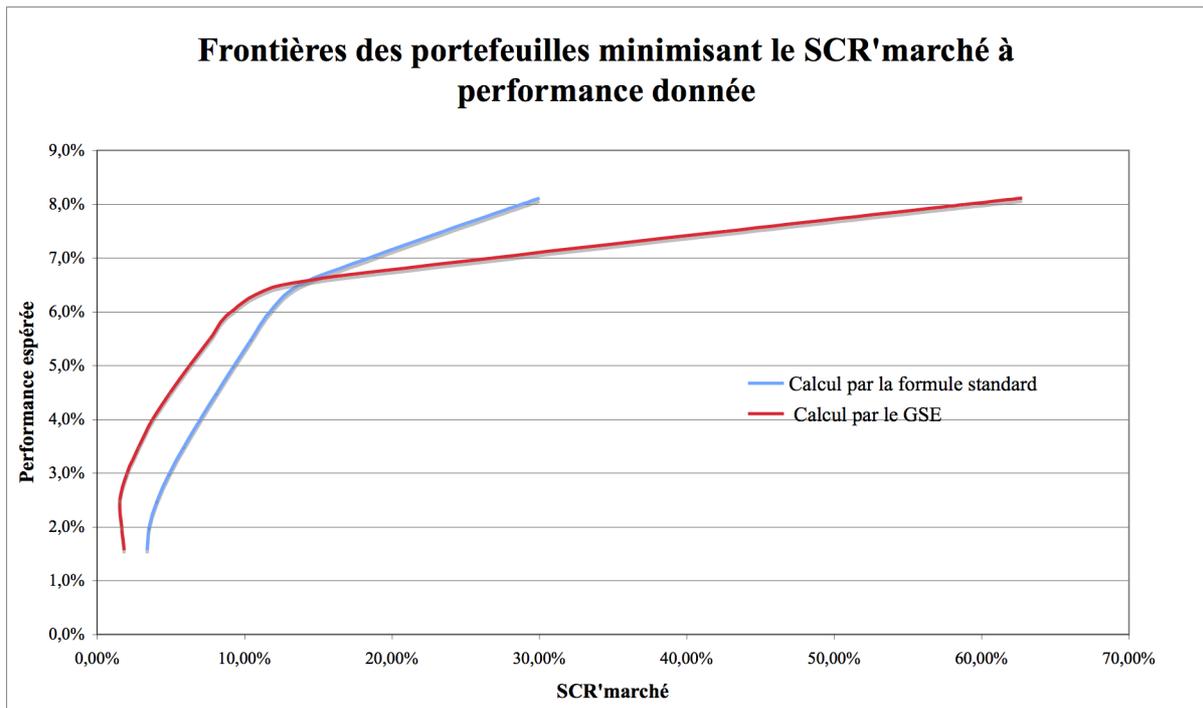
Pour l'approche par modèle interne, le graphique et le ratio « Performance/SCR'marché » mettent en évidence que l'obligation d'état et l'obligation *corporate* se comportent plus favorablement par rapport à la convertible au sens du couple « Performance/SCR'marché ». Le choc action appliqué par le générateur est beaucoup plus sévère que celui appliqué par la formule standard qui est de 30%. Ainsi, la bonne performance de la convertible ne suffit plus pour garder un ratio « Performance/SCR'marché » compétitif.

Cela est confirmé par la présence de l'obligation *corporate* dans les portefeuilles minimisant le SCR'marché calculé par notre générateur pour une performance cible inférieure à 4%.

Cependant pour des performances cibles plus élevés, la convertible reste préférable pour maintenir l'action à son plus bas niveau.

2.5) Lieux géométriques des portefeuilles minimisant le SCR'marché à performance fixée :

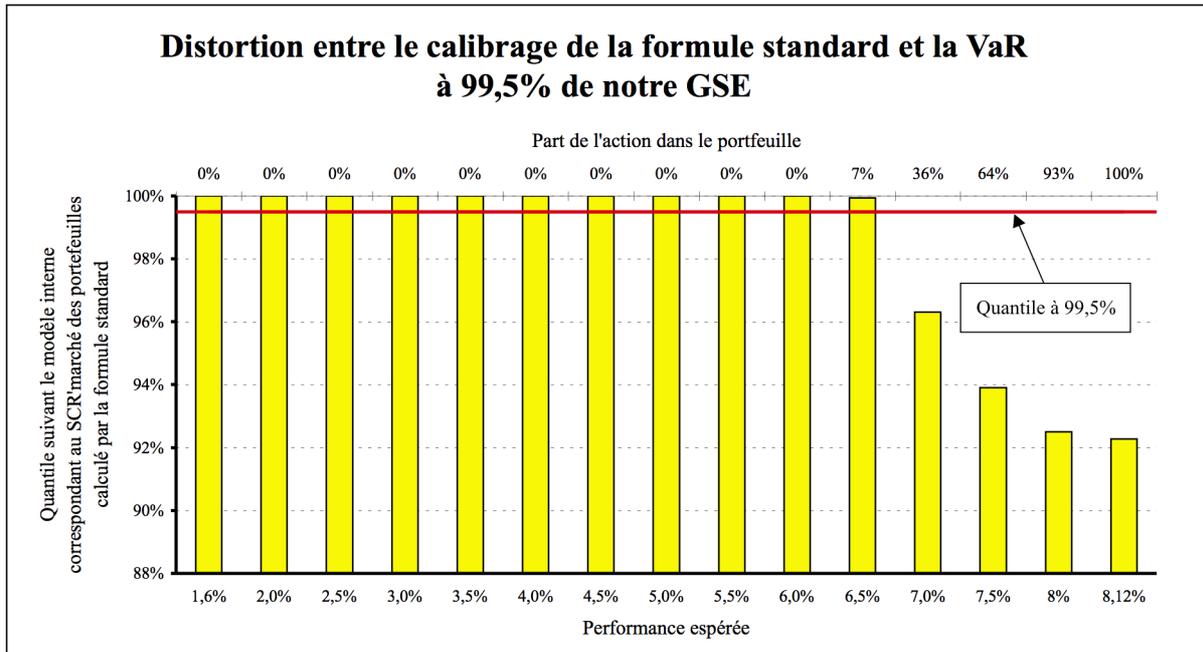
A l'instar des portefeuilles efficients et de la frontière efficiente de la théorie de MARKOWITZ, nous représentons les portefeuilles qui minimisent le SCR'marché en fonction de la performance espérée. Nous obtenons ainsi deux lieux géométriques qui nous permettent de comparer les deux approches de calcul de fonds propres.



Les portefeuilles visant une performance inférieure à 6% sont plus pénalisés en fonds propres par la formule standard que par notre générateur.

Dès que la performance cible devient trop élevée, la présence de l'action est nécessaire pour atteindre l'objectif de rendement. Alors les portefeuilles dont le SCR'marché est calculé par notre modèle interne sont beaucoup plus pénalisés que par la formule standard.

Le graphique suivant met en avant que, plus la part de l'action augmente et plus la formule standard s'éloigne de la VaR à 99,5% de la performance du portefeuille.



Il semble donc que la formule standard soit plus sévère pour les portefeuilles sensibles au taux mais beaucoup moins pour les portefeuilles sensibles aux actions. Nous détaillerons cela dans la prochaine partie.

IV.3) Comparaison entre les SCR'marchés calculés par la formule standard et ceux calculés par l'approche modèle interne .

Dans cette partie, nous allons analyser le calibrage de la formule standard pour quantifier la différence entre les deux méthodes de calcul de fonds propres. Nous rappelons le SCR'marché de chaque actif selon l'approche choisie dans le tableau suivant :

	SCR'marché	
	Formule standard	Générateur de scénarios économiques
Obligation d'Etat Français	3,38%	1,83%
Obligation <i>corporate</i>	7,78%	3,56%
Obligation convertible de type « mixte »	12,61%	10,13%
Obligation convertible de type « action »	26,89%	34,32%
Action	30%	62,74%

3.1) Différences dans l'évaluation du risque de taux et du risque de spread :

Les SCR'marchés de l'Obligation d'Etat, de l'Obligation *corporate* et de l'Obligation Convertible de type « mixte » calculés par la formule standard sont plus élevés que les SCR'marchés calculés par l'approche modèle interne basée sur notre générateur de scénarios économiques. Plus généralement les portefeuilles composés d'actifs sensibles aux taux sont plus pénalisés par la formule standard que par l'approche par notre générateur (confère graphique des portefeuilles « efficaces » partie IV.2.5)

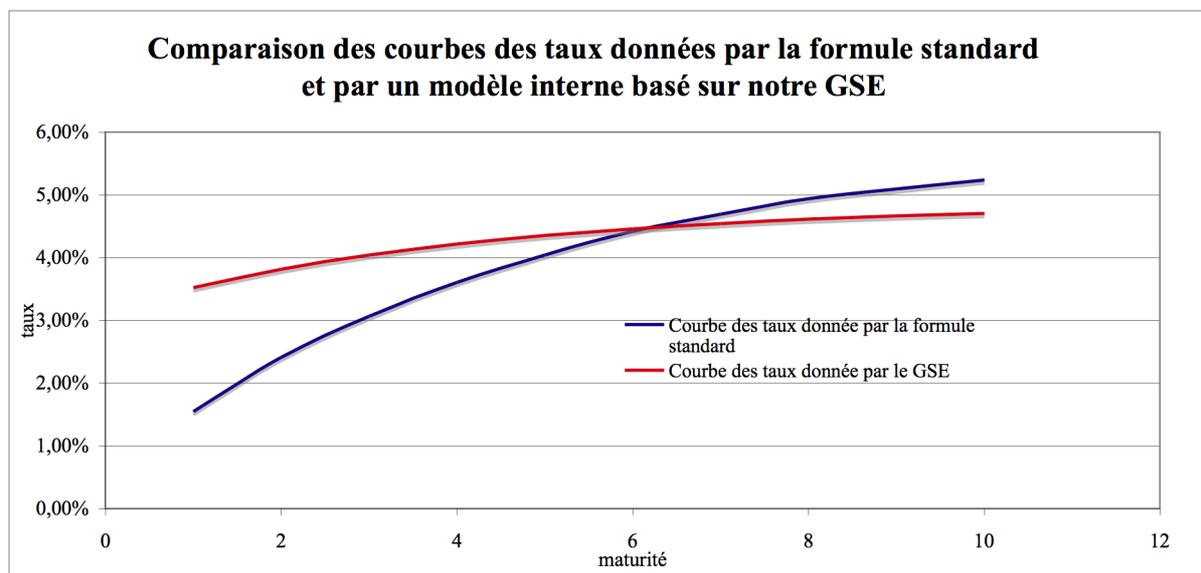
La formule standard applique un choc instantané sur la courbe des taux sans risque, alors que l'approche modèle interne calcule le SCR'marché en estimant la performance à un an tout en tenant compte du ou des coupons touchés par l'investisseur.

Pour comparer ces deux approches, nous calculons la valeur de l'obligation d'Etat à la date d'aujourd'hui en utilisant comme courbe des taux choquées la courbe des taux donnée par le générateur de scénarios économiques correspondant au même scénario que la VaR à 99,5% de la performance d'une obligation d'Etat à l'horizon 1 an. Autrement dit, nous utilisons l'approche employée par la formule standard, c'est-à-dire un choc instantané, mais le choc appliqué sur la courbe des taux est défini par notre générateur de scénarios. Ainsi, à choc égal, nous pouvons comparer les deux approches.

La valeur de l'obligation d'Etat varie de - 6,06%, alors que la variation initialement déterminée par l'approche utilisant notre générateur est de - 1,83%.

Appliquer un choc instantané, comme le fait la formule standard, pénalise donc plus fortement les actifs sensibles au risque de taux.

Ne se plaçant pas à la même date dans l'évaluation de l'obligation, il est difficile de comparer les deux approches. Néanmoins, nous pouvons comparer la courbe des taux, donnée par la formule standard avec la courbe des taux, donnée par le générateur de scénarios économiques correspondant au même scénario que la VaR à 99,5% de la performance d'une obligation d'Etat à l'horizon 1 an.



Notre générateur de scénarios économiques modifie de façon plus sévère les taux de maturité 1 à 6 ans que la formule standard. Effectuer un choc instantané est donc beaucoup plus

pénalisant, car même avec un choc plus sévère appliqué par notre générateur, l'approche formule standard reste plus coûteuse en fonds propres.

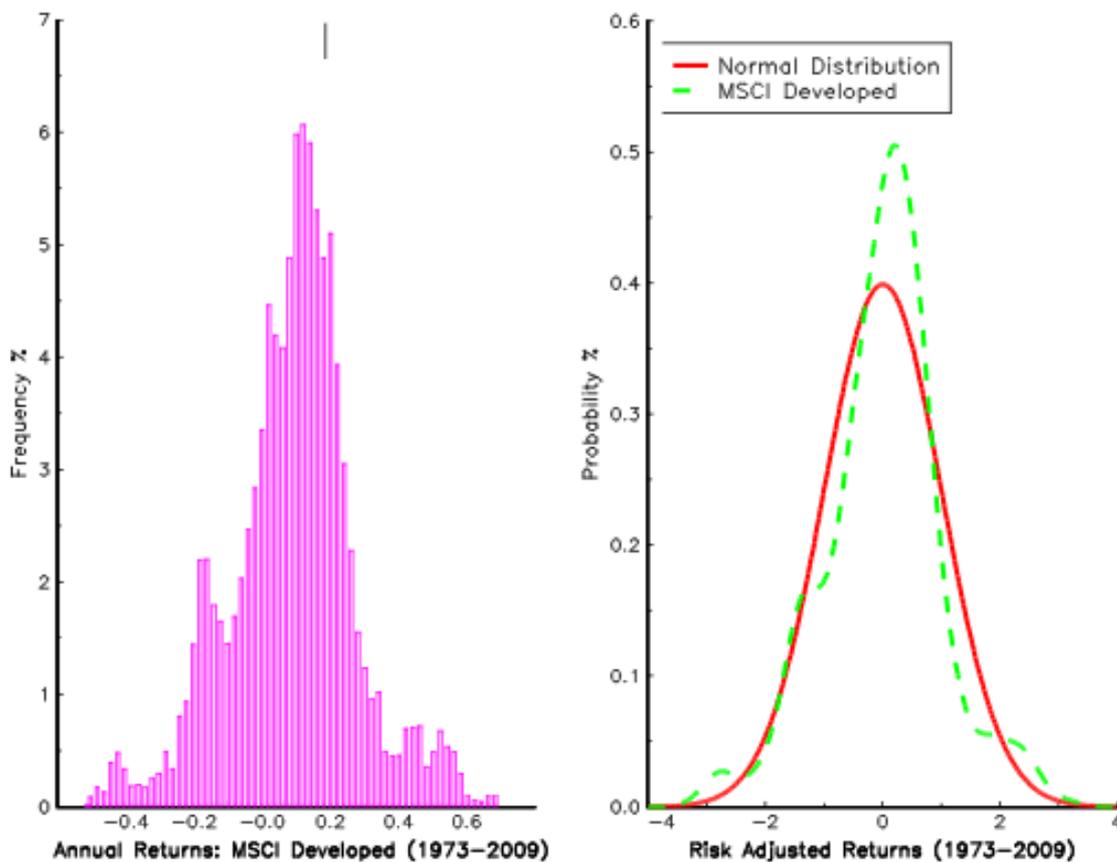
Nous pouvons comparer le coefficient de pénalisation appliqué au spread de crédit BBB par la formule standard avec celui de notre générateur de scénarios économiques.

Le coefficient de pénalisation appliqué au spread de crédit BBB par la formule standard du QIS 5 du 6 Juillet est de 2,5% (équivalent à un choc absolu sur le spread de crédit). Le scénario retenu pour déterminer le SCR'marché (50^{ème} plus mauvaise performance sur 10 000 scénarios) par notre GSE correspond à un choc absolu de +2,41% sur le spread de crédit BBB. La formule standard sera donc légèrement plus sévère sur le spread de crédit BBB que notre générateur de scénarios.

3.2) La sous estimation du risque action par le QIS 5 :

Les deux actifs les plus sensibles aux actions que sont l'obligation convertible de type « action » et l'action, sont plus pénalisés par l'approche modèle interne que par la formule standard. Cela est dû au calibrage de la formule standard.

D'après le *Calibration Paper Solvency II* publié par le CEIOPS, la formule standard a été paramétrée en supposant que le rendement des actions suit une loi normale. Or, comparée aux données historiques des marchés, la loi normale sous-estime les pertes exceptionnelles. Les graphiques suivants sont tirés du *Calibration Paper Solvency II*, ils mettent en évidence que la loi normale sous-estime le risque de perte extrême des actions. La densité de la loi normale est comparée à la densité empirique des rendements annuels du MSCI World Developed index.



Clairement, les queues de distributions de la loi normale sont trop fines pour évaluer prudemment le risque de perte extrême. Le caractère leptokurtique de la densité empirique du MSCI Developed index ne peut être approché par une loi normale.

Dans leur étude sur la calibration du risque action, le CEIOPS fourni une table des percentiles des rendements annuels des différents indices constituant le MSCI World developed et compare les VaR à 99,5% empiriques à celles qui sont calibrées sur la loi normale.

Percentiles	MSCI World	MSCI Americas	MSCI Europe	MSCI Pacific
100.00%	65.58%	50.44%	62.53%	143.86%
99.95%	63.92%	49.98%	59.76%	141.44%
99.50%	56.96%	44.15%	50.39%	129.38%
99.00%	52.44%	40.06%	45.77%	124.77%
97.50%	46.65%	36.73%	37.61%	114.35%
50.00%	9.47%	10.10%	11.45%	3.81%
2.50%	-32.93%	-35.88%	-46.06%	-33.78%
1.00%	-42.05%	-40.25%	-50.92%	-37.59%
0.50%	-44.25%	-42.42%	-52.89%	-38.85%
0.05%	-50.93%	-49.29%	-57.69%	-41.93%
0.00%	-51.94%	-49.93%	-57.95%	-44.03%
Mean	7.43%	8.03%	7.08%	12.03%
St. Deviation	18.16%	17.75%	19.48%	36.21%
Kurtosis	72.01%	22.02%	81.29%	122.08%
Skewness	-17.95%	-66.91%	-81.91%	116.44%
Normal VAR	39.34%	37.69%	43.09%	81.24%
Empirical VAR	44.25%	42.42%	52.89%	38.85%

Le *Calibration Paper Solvency II* du CEIOPS montre clairement que la loi normale sous-estime les pertes extrêmes des actions. Pourtant, le choc de 39% a été retenu pour les actions du type « Global », alors que l'utilisation de données historiques, comme le MSCI world, nous indique que la VaR à 99,5% est de 44,25%. De plus, l'effet d'ajustement symétrique qui est fonction du niveau des marchés abaisse aujourd'hui le choc action à 30%. Alors, la formule standard sous-estimerait le risque action.

Pour éviter cette sous-estimation du risque action, notre générateur de scénarios économiques intègre à la loi normale un processus à sauts à la hausse ainsi qu'à la baisse. Cela permet d'approcher au mieux les queues de distributions du rendement des actions. C'est-à-dire de tenir compte des pertes extrêmes. Ainsi, notre générateur de scénarios pénalisera plus durement les portefeuilles sensibles aux actions en termes de fonds propres que la formule standard.

Conclusion :

Associant les avantages de deux véhicules financiers de risques différents, à savoir une obligation et une action, les obligations convertibles présentent un couple « Performance/Risque » très compétitif. Notamment pour les convertibles dont le profil est dit « mixte », c'est-à-dire lorsque leur convexité est à son maximum. Ainsi, le détenteur d'une convertible peut espérer profiter d'une partie de la hausse de l'action sous-jacente tout en étant protégé par le plancher actuariel en cas de baisse.

La directive Solvabilité II va changer l'attitude des assureurs lors de leurs allocations d'actifs. Le capital réglementaire de solvabilité (SCR) vise à contrôler le risque global de l'assureur auquel contribue l'allocation d'actif.

L'allocation d'actifs influe donc directement sur le niveau des fonds propres. Les assureurs ne pourront plus baser leur allocation d'actifs uniquement sur le critère « Performance/Risque ». Ils devront prendre en compte le coût en fonds propres des actifs qui constitueront leur portefeuille.

Nous avons donc construit notre modèle d'optimisation sous la contrainte de minimisation du niveau des fonds propres en fixant une performance cible. Les deux approches de calcul pour le SCR proposé dans la directive ont été utilisées, c'est-à-dire la formule standard et une approche modèle interne basée sur le générateur de scénarios économiques développé par la société FIXAGE.

L'allocation d'actifs, suivant le critère « Performance/Fonds propres exigés par Solvabilité II » apparaît alors comme favorable aux obligations convertibles de type « mixte ».

Nous avons mis en avant que, l'approche formule standard est plus favorable pour les obligations convertibles qu'une approche modèle interne basée sur notre générateur de scénarios. Cela est en grande partie dû au calibrage du choc appliqué par la formule standard sur les actions. La formule standard suppose que la performance des actions suit une loi normale, ce qui entraîne une sous-estimation du risque de perte extrême. Grâce à sa convexité, la convertible absorbe en partie ce choc. Alors, son couple « Performance/SCR'marché » calculé par la formule standard est très compétitif par rapport aux autres actifs.

Conclusion :

Toutefois, l'utilisation d'un modèle interne, qui détermine le SCR_{marché} comme une VaR à 99,5%, peut être moins favorable aux obligations convertibles, car un modèle interne reflétant au maximum la réalité ne modélisera pas le rendement des actions par une loi normale, mais épaissira les queues de distribution pour coller à l'historique des marchés actions. Ainsi, les actifs sensibles aux actions seront plus pénalisés en fonds propres par une approche modèle interne. Le critère « Performance/SCR_{marché} » sera un peu moins favorable aux obligations convertibles dans ce cas-là.

Cependant, quelque soit l'approche de calcul de fonds propres, le détenteur d'une l'obligation convertible de type « mixte » peut espérer une bonne performance future tout en modérant le coût en fonds propres exigés par Solvabilité II. Alors, pour des performances cibles élevés l'obligation convertible de type « mixte » semble être l'actif le mieux adapté pour atteindre cette performance et limiter le coût en fonds propres.

Bibliographie :

Documents de référence

CEIOPS (2010), *QIS 5 Technical specifications*

CEIOPS (2010), *Calibration paper Solvency II*

PARLEMENT EUROPEEN (2009), *Directive Solvabilité II, textes adoptés au cours de la séance du mercredi 22 avril 2009*

Ouvrages

Bruno COLMANT et Vincent DELFOSSE (2005), *Les obligations convertibles : Mathématique financière et comptabilisation*, Cahiers Financiers

Roland PORTRAIT et Patrice PONCET (2009), *Finance de marché : Instrument de base, produits dérivés, portefeuilles et risques*, Dalloz

Articles

Frédéric PLANCHER et Pierre THEROND (2004), *Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non vie : présentation et mise ne œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité II.*

J.INGERSOLL (1977), *An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities*, The Journal of Finance

M.BRENNAN et E.SCHWARTZ (1977) *Convertible Bonds : Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion*, The journal of Finance

Mémoires d'actuariat

Yi CHEN (2007), *Impact de la réforme Solvabilité II sur l'allocation stratégique d'actifs des compagnies d'assurance non vie*, Mémoire Dauphine