

Mémoire présenté pour la validation de la Formation  
« Certificat d'Expertise Actuarielle »  
de l'Institut du Risk Management  
et l'admission à l'Institut des actuaires  
le

Par : Stéphane ARNAUD

Titre : Optimisation de réassurance par algorithme génétique

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1an  2 ans)  
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : ACTUARIS

Signature et Cachet :

ACTUARIS S.A.S.

13/15 bd de La Madeleine

75001 PARIS

Tél. 01 56 95 07 70 Fax 01 56 89 07 71

Siret 413 611 344 - APE 7022 Z

Statut membre de 100 000 €

Directeur de membre en entreprise :

Nom : Benjamin POUDRET

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)





## Résumé

*Mots-clés : réassurance, optimisation, modélisation, IARD, algorithme génétique, traités, SCR CAT*

En plus de constituer pour l'assureur une protection indispensable contre les événements extrêmes ou les fréquences de sinistres élevées, assurant une certaine stabilité pour un portefeuille donné, la réassurance est désormais de plus en plus perçue comme un outil de pilotage permettant de réduire son besoin en capital, sa volatilité, ou encore de bénéficier de l'effet de diversification sous la norme Solvabilité 2.

La question de l'optimisation de la réassurance se pose donc via deux aspects bien distincts. Du point de vue de la cédante, il devient indispensable de concilier maîtrise de la sinistralité dans un but de maintien du résultat technique et considérations liées à Solvabilité 2.

L'objectif de ce mémoire est ainsi de mettre en place un outil permettant aux assureurs de déterminer la stratégie de réassurance la plus adaptée à un portefeuille IARD donné, se basant sur les traités historiques en place et cherchant à optimiser l'ensemble de leurs paramètres. Cet outil s'intéresse à la fois au résultat technique sur l'ensemble des branches d'activité, et au coût en capital règlementaire.

La modélisation effectuée dans ce mémoire repose sur l'utilisation d'un algorithme évolutionnaire nommé algorithme génétique. Ce dernier consiste en un processus itératif, dans le but de faire évoluer la stratégie de réassurance de la cédante vers un optimal.

## Abstract

*Keywords: reinsurance, optimization, modelling, P&C, genetic algorithm, treaties, SCR CAT*

In addition to providing insurers with essential protection against extreme events or high claims frequencies, ensuring certain stability for a given portfolio, reinsurance is now increasingly perceived as a management tool that reduces their capital requirements and volatility, as well as benefiting from the diversification effect under Solvency 2.

The question of optimizing reinsurance is therefore raised via two very distinct aspects. From the ceding company's point of view, it is becoming essential to reconcile loss control, in order to maintain the technical result, with Solvency 2 considerations.

The objective of this thesis is thus to set up a tool enabling insurers to determine the most appropriate reinsurance strategy for a given P&C portfolio, based on the historical treaties in place and seeking to optimize all their parameters. This tool focuses both on the technical result for all business lines and on the regulatory capital cost.

The modelling performed in this thesis is based on the use of an evolutionary algorithm called a genetic algorithm. It consists of an iterative process, with the aim of developing the insurer's reinsurance strategy towards an optimal one.

## Remerciements

Mes remerciements s'adressent principalement à Benjamin POUDRET, mon tuteur au sein de l'entreprise Actuaris, pour sa disponibilité, son accompagnement, et ses conseils tout au long de l'année.

Je remercie également Anne-Charlotte BONGARD, associée responsable du pôle IARD, pour la confiance accordée durant les années passées au sein de ses équipes ; ainsi que tous les membres du pôle pour leur soutien et leurs différents apports, dont certains se sont avérés déterminants dans le cadre de mes travaux.

Pour son soutien, ses compétences techniques sans faille et sa disponibilité, un grand merci à Joachim LEMAIRE, consultant au sein de l'équipe « Modélisation et Solvabilité 2 » du pôle IARD d'ACTUARIS et source inépuisable de conseils sur l'actuariat en général et la réassurance en particulier.

J'aimerais aussi adresser mes remerciements à l'équipe pédagogique du Centre d'Etudes Actuarielles, pour leur accompagnement tout au long de ma formation, et notamment à Xavier MILHAUD pour son suivi et l'attention portée à ce mémoire.

Il n'est certainement pas simple de reprendre au vol l'encadrement d'un mémoire, mais Christophe DUTANG s'est acquitté de cette tâche avec un professionnalisme et une disponibilité que je tiens à souligner. Un grand merci à lui pour être entré si vite dans le sujet et avoir pu me prodiguer des conseils avisés dans un délai réduit.

Je tiens, enfin, à remercier mes parents Catherine et Philippe ainsi que toute ma famille pour leurs encouragements permanents tout au long de la rédaction de ce mémoire.

## Table des matières

Résumé .....	3
Abstract.....	3
Remerciements.....	4
Introduction .....	7
Chapitre 1 : La réassurance.....	9
1) Généralités sur la réassurance.....	9
1.1) Définition de la réassurance et bref historique.....	9
1.2) Différences avec la coassurance.....	10
1.3) Intérêt de la réassurance pour l'assureur.....	10
2) Différentes formes d'engagements de réassurance.....	10
2.1) Contrat obligatoire et contrat facultatif .....	10
2.2) Réassurance proportionnelle.....	11
2.3) Réassurance non proportionnelle .....	12
2.4) Caractéristiques des traités de réassurance.....	14
Chapitre 2 : Le modèle de réassurance .....	17
1) Généralités.....	17
1.1) Support utilisé.....	17
1.2) Structure générale du modèle.....	17
2) Modélisation détaillée .....	18
2.1) Modélisation de l'inflation.....	18
2.2) Primes brutes pour chaque branche d'activité .....	19
2.3) Sinistralité .....	21
2.4) Modélisation de la réassurance.....	22
2.5) Impact de la réassurance sur le SCR CAT.....	27
2.6) Coût du capital.....	28
2.7) Impact de la réassurance sur le résultat technique .....	30
Chapitre 3 : L'algorithme génétique .....	31
1) Généralités.....	31
2) Intérêt par rapport à d'autres types d'algorithmes.....	31
2.1) Méthodes basées sur le gradient .....	31
2.2) Différentes variantes pour le calcul des directions .....	32
2.3) Méthodes stochastiques .....	34

2.4) Avantages et inconvénients de l'algorithme génétique .....	35
3) Principe de l'algorithme génétique .....	36
3.1) Vocabulaire de base .....	36
3.2) Fonctionnement du processus itératif .....	37
4) Modélisation .....	42
4.1) Données d'entrée .....	42
4.2) Liens entre algorithme génétique et modèle de réassurance.....	43
4.3) Création de la population initiale .....	44
4.4) Evaluation d'une population .....	45
4.5) Création de la génération suivante .....	46
4.6) Convergence de l'algorithme.....	48
Chapitre 4 : Optimisation de réassurance d'un assureur IARD .....	51
1) Hypothèses .....	51
1.1) Caractéristiques de l'assureur IARD.....	51
1.2) Hypothèses d'optimisation .....	52
2) Optimisation d'un traité ou d'une partie des traités.....	53
2.1) Optimisation d'un traité QP.....	53
2.2) Optimisation d'un traité XS sans tenir compte des reconstitutions.....	54
2.3) Optimisation d'un traité XS avec reconstitutions.....	55
2.4) Différentes méthodes d'optimisation de traités XS .....	57
2.5) Optimisation d'un traité SL.....	59
3) Optimisation de l'ensemble des traités.....	60
3.1) Optimisation globale avec 4 traités XS .....	60
3.2) Optimisation globale avec un seul traité XS tous périls .....	61
3.3) Position du traité QP.....	63
4) Etude des différents paramètres de l'algorithme génétique .....	67
4.1) Etudes sur la taille de la population et le nombre de générations .....	67
4.2) Etude sur le taux de croisement.....	68
4.3) Etude sur le taux de mutation .....	70
4.4) Paramètres optimaux pour l'algorithme .....	71
Conclusion.....	73
Table des illustrations .....	74
Bibliographie.....	75

## Introduction

Loin des algorithmes d'optimisation les plus fréquemment utilisés, qui sont en général mono-objectifs et servent ainsi à optimiser une unique grandeur, l'optimisation de réassurance est un problème complexe, qui nécessite la prise en compte d'un grand nombre de variables. Les algorithmes génétiques, inspirés des mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique, permettent de simuler l'évolution d'une population jusqu'à la détermination d'individus optimaux au sens d'une problématique donnée.

La première partie de ce mémoire propose une introduction à la réassurance, détaillant les différents types de traités, ainsi que leurs caractéristiques, que nous chercherons à optimiser par la suite. Ce développement s'avère essentiel pour comprendre les différents calculs et raisonnements sous-jacents à la mise en place d'un traité de réassurance. Le modèle de réassurance, qui est présenté par la suite, découle de l'ensemble de ces principes et se propose de représenter mathématiquement cette relation entre assureur et réassureur.

Dans un second temps, différents algorithmes d'optimisation sont présentés, avant d'en arriver à la description précise de l'algorithme génétique lui-même. Le but est ici de montrer en quoi cet algorithme évolutionnaire est particulièrement adapté pour l'optimisation de réassurance. Nous nous intéresserons ensuite au fonctionnement détaillé de cet algorithme, ainsi qu'aux différentes étapes de modélisation à mettre en place.

Enfin, la méthode sera appliquée à un problème d'optimisation de réassurance sur un portefeuille IARD. Nous procéderons à une optimisation par étapes, cherchant tout d'abord à se concentrer sur certaines caractéristiques des traités, avant d'élargir la problématique à une stratégie entière de réassurance.



# Chapitre 1 : La réassurance

## 1) Généralités sur la réassurance

### 1.1) Définition de la réassurance et bref historique

La réassurance est un concept datant du XIV<sup>ème</sup> siècle. En 1370, deux assureurs vénitiens assuraient alors la marchandise d'un bateau effectuant la liaison entre le port de Gênes et la ville de L'Écluse, aux Pays-Bas. Ils décidèrent de céder le risque à un troisième assureur sur la partie la plus risquée du voyage, entre le détroit de Gibraltar et le golfe de Gascogne. On a retrouvé depuis des contrats de réassurance en Italie, en France et au Royaume-Uni. Mais ceux-ci restent limités à quelques cessions spécifiques et sont surtout présents dans le commerce maritime.

La réassurance moderne et à grande échelle est apparue en Allemagne vers la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, à la suite de la révolution industrielle. Les sociétés d'assurance allemandes avaient de plus en plus de mal à couvrir les usines et autres complexes industriels immenses, surtout en cas d'incendie. Elles ont donc fait appel à des contrats de réassurance. Dès 1852, la Kölnische Rück fut créée en Allemagne pour répondre aux besoins de capacité du secteur industriel allemand en fort développement.

En août 1992, l'ouragan Andrew toucha très fortement la Floride. Il en résulta un besoin impérieux de capacité de protection de réassurance contre les phénomènes naturels aux États-Unis. Ainsi, plusieurs réassureurs nouveaux sont apparus aux Bermudes, le marché bermudien ayant été dès les années 1970 un marché de captives d'assurance principalement à vocation industrielle et à but fiscal et une source de réassurance pour pallier la crise de la responsabilité civile aux États-Unis dans les années 1980. Dès 1993, ce marché a servi à pourvoir les cédantes américaines en capacités de réassurance dommages catastrophes, puis dès le milieu des années 1990, ces réassureurs ont recherché un meilleur équilibre de leurs expositions mondiales en se développant principalement au Japon puis en Asie, et enfin en Europe. Aujourd'hui ces sociétés sont à majorité multi-branches et beaucoup d'entre elles disposent de bureaux ou filiales en Europe ou en Asie.

La réassurance est l'opération par laquelle un assureur cède une partie de ses risques à un réassureur qui en accepte la charge. Du point de vue de l'assuré, la réassurance est invisible, c'est-à-dire que l'assureur est seul responsable des engagements vis-à-vis du preneur d'assurance.

La réassurance est donc l'assurance des assureurs, elle permet de réaliser une vaste compensation des risques dans l'espace et dans le temps.

En pratique, les assureurs cèdent aux réassureurs une fraction des risques qu'ils acceptent sur leur marché, en leur reversant une fraction des primes. Ces cessions se font sous déduction d'une commission qui doit permettre aux assureurs de couvrir leurs frais et de réaliser un profit. La réassurance n'existe donc que par l'assurance, et ne peut revendiquer d'existence propre indépendamment de cette dernière.

Il est à noter que les réassureurs peuvent également se faire couvrir par un autre réassureur (« assurance de la réassurance »), on parle dans ce cas de rétrocession (MLYNARCZYK, [2014]).

## 1.2) Différences avec la coassurance

La coassurance est le partage d'un risque, ainsi que des primes qui correspondent à ce risque, selon un même pourcentage entre différents assureurs. Dans ce cas de figure, chaque assureur est responsable sur sa quote-part et uniquement sur celle-ci. En outre, tous les coassureurs sont liés envers l'assuré, tout se passe donc comme de l'assurance traditionnelle.

La réassurance se distingue donc de la coassurance par le fait que l'assuré connaît l'ensemble de ses coassureurs, alors que l'existence ou l'identité du réassureur n'est pas connue de l'assuré. De plus, la réassurance implique la signature d'une part d'un contrat d'assurance, et d'autre part d'un traité de réassurance, alors que la coassurance implique uniquement la signature d'un contrat d'assurance. Enfin, il n'existe pas nécessairement de solidarité entre les coassureurs. Si un assureur est défaillant et ne peut verser sa quote-part du sinistre, les autres ne sont pas tenus de suppléer à cette défaillance.

## 1.3) Intérêt de la réassurance pour l'assureur

Pour l'assureur, les raisons de se réassurer sont multiples.

Le réassureur jouant le rôle d'assureur de 2<sup>e</sup> niveau, il s'agit tout d'abord de partager les risques et de réduire l'exposition de l'assureur.

Le réassureur peut également être vu comme un apporteur de capitaux. Il se substitue au rôle des fonds propres, permettant à l'assureur d'augmenter sa capacité. Il apporte également des liquidités en cas de gros sinistres.

Enfin, une part non-négligeable du rôle des réassureurs réside dans le conseil aux assureurs. Ces derniers peuvent ainsi faire appel à un réassureur pour définir des plans optimaux de réassurance, obtenir une aide technique sur un domaine de compétence pas totalement maîtrisé en interne, ou encore se faire former sur des sujets techniques.

## 2) Différentes formes d'engagements de réassurance

### 2.1) Contrat obligatoire et contrat facultatif

Un engagement obligatoire est un traité qui couvre l'ensemble d'un portefeuille. L'assureur fait réassurer automatiquement toutes les affaires souscrites répondant à des critères prédéfinis, et le réassureur s'engage obligatoirement à les couvrir selon les modalités convenues. Il doit y avoir convergence sur les aspects techniques au moment de la signature du traité, entre réassureur et cédante.

Exemple : couverture d'un portefeuille de contrats « standards » en prévoyance et santé.

Les contrats obligatoires sont en général utilisés pour des portefeuilles standardisés, contenant un grand nombre de risques individuels. Lorsque l'assureur, a contrario, souhaite couvrir des risques particuliers sortant du champ d'application des traités obligatoires, il a la possibilité de les faire réassurer, contrat par contrat, et le réassureur a de son côté toute liberté d'accepter ou de refuser. Il s'agit en général de la couverture d'un contrat « sur mesure » de type « grand compte ». Les techniciens de la cédante et du réassureur doivent se concerter pour chaque affaire.

Exemple : l'assureur cède au réassureur 30% du coût des dégâts matériels et de l'interruption de production en cas de sinistre sur une plateforme pétrolière en mer du Nord. En contrepartie il lui verse une prime, comme le ferait un assuré « classique ». Le réassureur verse lui une commission de réassurance couvrant les frais d'acquisition de l'assureur

## 2.2) Réassurance proportionnelle

Dans ce type de contrat, le réassureur partage avec l'assureur, dans des proportions définies à l'avance les risques, les cotisations et les charges de sinistres

La réassurance proportionnelle est principalement utilisée par :

- Des assureurs de petite et moyenne taille (diminution du besoin de marge de solvabilité)
- Des assureurs en fort développement
- Des branches à développement rapide comportant des investisseurs techniques

### 2.2.1) La quote-part (QP)

Contrat de réassurance le plus simple à mettre en œuvre et ressemblant à de la coassurance, la quote-part consiste en la cession d'un pourcentage fixe et librement convenu de toutes les polices d'assurances. La répartition entre assureur et réassureur est identique pour les primes comme les sinistres. Son avantage principal est sa grande simplicité de gestion, par contre la quote-part ne protège pas contre l'accumulation de sinistres générés par un même évènement. Ce type de traité, de par son côté générique, est loin d'être adapté à tout type de sinistralité.

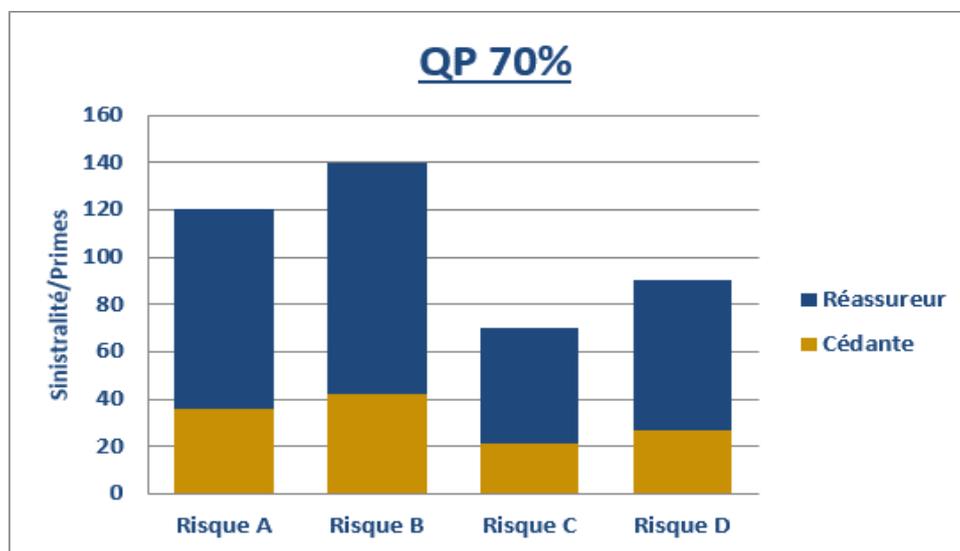


Figure 1 : Exemple de traité QP à 70% de cession

### 2.2.2) L'excédent de plein (XP)

Dans le cadre d'un excédent de plein, l'assureur garde tous les risques en rétention propre à concurrence d'un certain montant de garantie (appelé « plein de rétention »). L'assureur conserve ainsi le même montant de capitaux assurés sur chacun des risques : le plein de conservation, et le réassureur prend à sa charge ce qui dépasse le plein. Le pourcentage conservé / cédé est de fait différent pour chaque risque. Par contre, une fois déterminé, il reste constant.

Les traités en excédent de plein sont en général utilisés en facultatif, pour couvrir un risque bien particulier pouvant causer des pertes importantes.

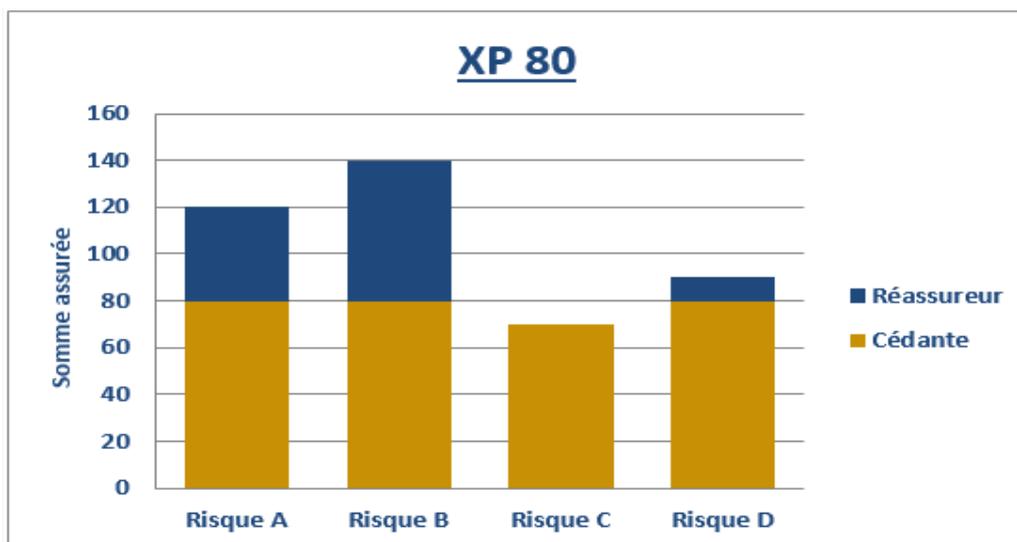


Figure 2 : Exemple de traité XP (Rétention = 80)

### 2.3) Réassurance non proportionnelle

Dans ce type de contrat, le réassureur partage avec l'assureur, dans des proportions définies à l'avance les risques, les charges de sinistres au-delà d'un certain montant convenu à l'avance, et les cotisations de réassurance déconnectées de la cotisation commerciale

#### 2.3.1) L'excédent de sinistre (XS)

Le réassureur prend en charge un sinistre dès lors que celui-ci dépasse le montant de la priorité. Son engagement est limité à la portée. Un traité XS peut être défini par risque ou par événement.

- Par risque : par exemple pour une tête touchée ou un avion accidenté.
- Par événement : par exemple pour une tempête.

Ce type de traité permet à l'assureur de se protéger contre un gros sinistre. Beaucoup de traités XS sont ainsi souscrits dans les branches RC, ou en protection contre certaines catastrophes naturelles. Il ne protège par contre pas de l'accumulation de sinistres.

Lors de la mise en place d'un traité XS, on définit un seuil à partir duquel le réassureur prend en charge un sinistre : c'est la priorité. L'engagement du réassureur est limité à un plafond : c'est la portée. Un traité XS est traditionnellement noté « Portée XS Priorité ».

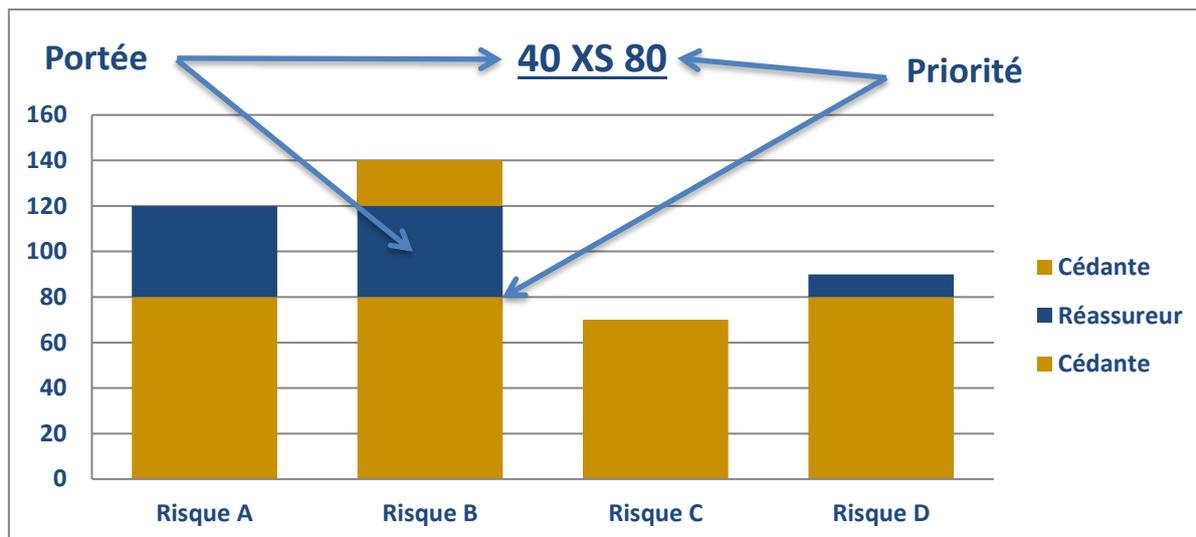


Figure 3 : Exemple de traité XS : 40 XS 80

Lorsque la portée est consommée par un ou plusieurs sinistres, la cédante n'est en principe plus protégée si un sinistre de plus survient. Pour éviter cela, elle a la possibilité de définir un certain nombre de reconstitutions, qui ont pour effet d'offrir à nouveau la portée lorsque celle-ci est entièrement consommée. Certains contrats offrent même un nombre illimité de reconstitutions, mais cela s'avère en général très coûteux pour la cédante.

### 2.3.2) Le Stop-Loss (SL)

La souscription d'un traité Stop-Loss permet à l'assureur de protéger son ratio Sinistres/Primes (S/P). Sur une branche donnée, il va ainsi se fixer un S/P limite, et céder tous les sinistres au-delà de ce S/P seuil. Comme dans le cas du XS, le SL est défini par une priorité et une portée, mais celles-ci sont cette fois-ci exprimées en pourcentage. Le SL peut également être noté « Portée XS Priorité ».

Un traité SL permet de se prémunir contre une dégradation des résultats, quelle qu'en soit la cause. L'assureur s'assure ainsi d'obtenir le résultat voulu, et est protégé contre l'accumulation de sinistres. Ce type de traité présente par contre l'inconvénient d'être particulièrement coûteux pour la cédante.

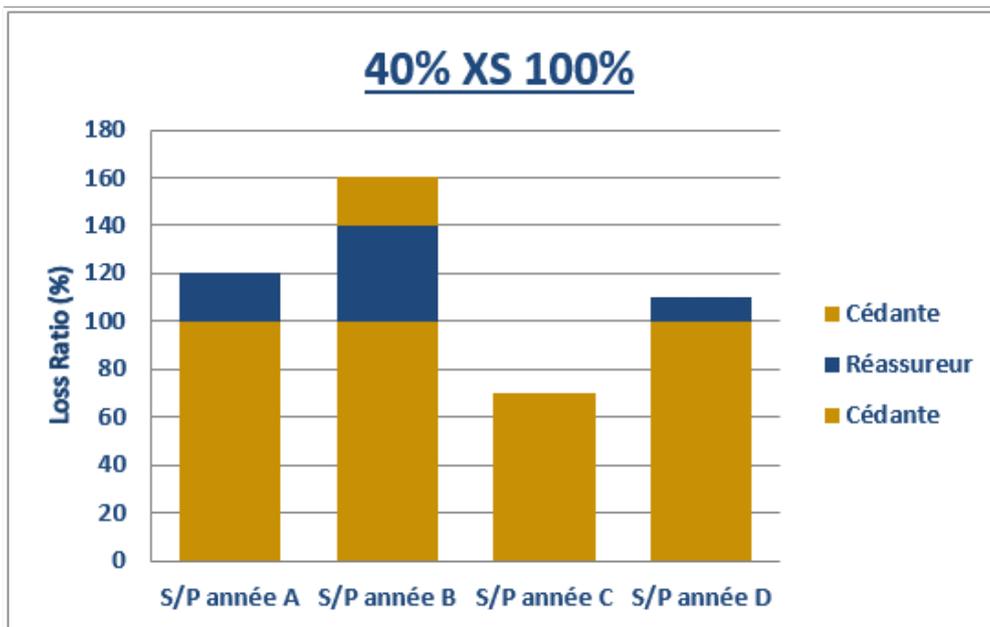


Figure 4 : Exemple de traité SL protégeant un S/P de 1 (40% XS 100%)

## 2.4) Caractéristiques des traités de réassurance

Les traités de réassurance définis ci-dessus sont en général définis par certaines des caractéristiques suivantes :

- Taux de cession

Détermine le niveau d'engagement du réassureur sur un traité

- Taux de commission (fixe, variable, à échelle...)

La commission est versée à l'assureur par le réassureur, afin de couvrir les différents frais inhérents à la gestion des contrats réassurés

- Non-Claim Bonus

Le réassureur rétribue une partie du résultat du traité à l'assureur, dans le cas particulier où aucun sinistre n'a eu lieu pendant une certaine période à définir

- Taux de participation aux bénéfices

Lorsqu'un traité de réassurance s'avère bénéficiaire du point de vue du réassureur, une partie de ce bénéfice est reversée à l'assureur

- Méthodes d'établissement des comptes de réassurance

Principes et paramètres de calcul des provisions

Représentation des provisions chez la cédante (nantissements, dépôts, ...)

➤ Franchise

Comme dans n'importe quel contrat d'assurance, une franchise peut être intégrée à un traité de réassurance. Ce montant restera alors à la charge de l'assureur, par opposition aux sommes au-dessus de la franchise qui seront à la charge du réassureur.

➤ AAD (Annual Aggregate Deductible)

Lorsqu'un AAD est intégré à un traité de réassurance, il s'agit du montant maximum que l'assureur pourra payer en tant que franchise sur une période définie au préalable (très souvent un an). Lorsque ce montant cumulé est atteint, l'ensemble des montants de franchise sur le traité jusqu'à la fin de la période passe à la charge du réassureur.

➤ AAL (Annual Aggregate Limit)

Lorsqu'un AAL est intégré à un traité de réassurance, il s'agit du montant maximum que le réassureur pourra payer (en cumulé) au titre du traité concerné. Au-delà, les montants de sinistre passent à la charge de l'assureur.

➤ Participation aux bénéfices

Le réassureur reverse à l'assureur une partie des bénéfices techniques réalisés sur le traité concerné.



## Chapitre 2 : Le modèle de réassurance

### 1) Généralités

#### 1.1) Support utilisé

L'ensemble des travaux de modélisation a été réalisé sur la plateforme ADDACTIS® Modeling, logiciel développé par les équipes d'ADDACTIS® Software, permettant de modéliser spécifiquement n'importe quelle structure d'entreprise, grâce à sa structure en arborescence. Le logiciel intègre des projections, simulations, corrélations applicables à tout item de données.

Comme illustré ci-dessous, les données d'entrée sont saisies sous Excel, l'ensemble des calculs sont réalisés au sein de la plateforme, et les reportings sont disponibles à la fois sous Excel et directement sur ADDACTIS® Modeling.

Certaines hypothèses sont communes à l'ensemble du modèle. D'une part, un pas de projection d'un an (existence de résultats à  $t=0$  et  $t=1$ ) est considéré. Ainsi, des données initiales peuvent être entrées à  $t=0$ , mais l'ensemble des résultats considérés sont ceux à  $t=1$ , qui représente l'année d'étude. Et d'autre part, le modèle est stochastique et pour chaque étude, N simulations sont réalisées. Les résultats peuvent être considérés simulation par simulation, ou au moyen d'indicateurs de risque (moyenne, écart-type, VAR, T-VAR ...).

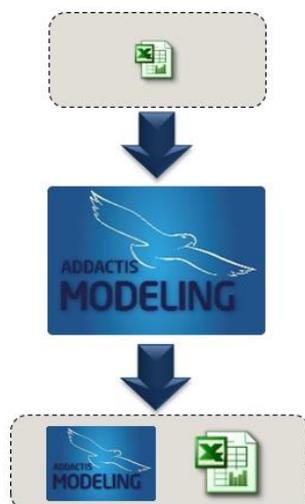


Figure 5 : Entrées et sorties du modèle

#### 1.2) Structure générale du modèle

Dans le but de proposer un modèle s'adaptant à l'activité de chaque assureur, autant de branches d'activité que nécessaire peuvent être incluses, et pour chacune d'entre elles un compte de résultat simplifié est établi, tout à fait indépendamment des autres branches.

En parallèle, l'utilisateur définit une stratégie de réassurance, caractérisée par autant que traités QP, XS et SL que désiré. Ces traités s'appliquent, au choix, à une ou plusieurs branches d'activité, ou à un ou plusieurs périls Solvabilité 2. L'objectif est alors d'évaluer l'impact de cette stratégie de réassurance, tant sur le résultat que sur le SCR CAT.

Cette structure est résumée dans le schéma ci-dessous.

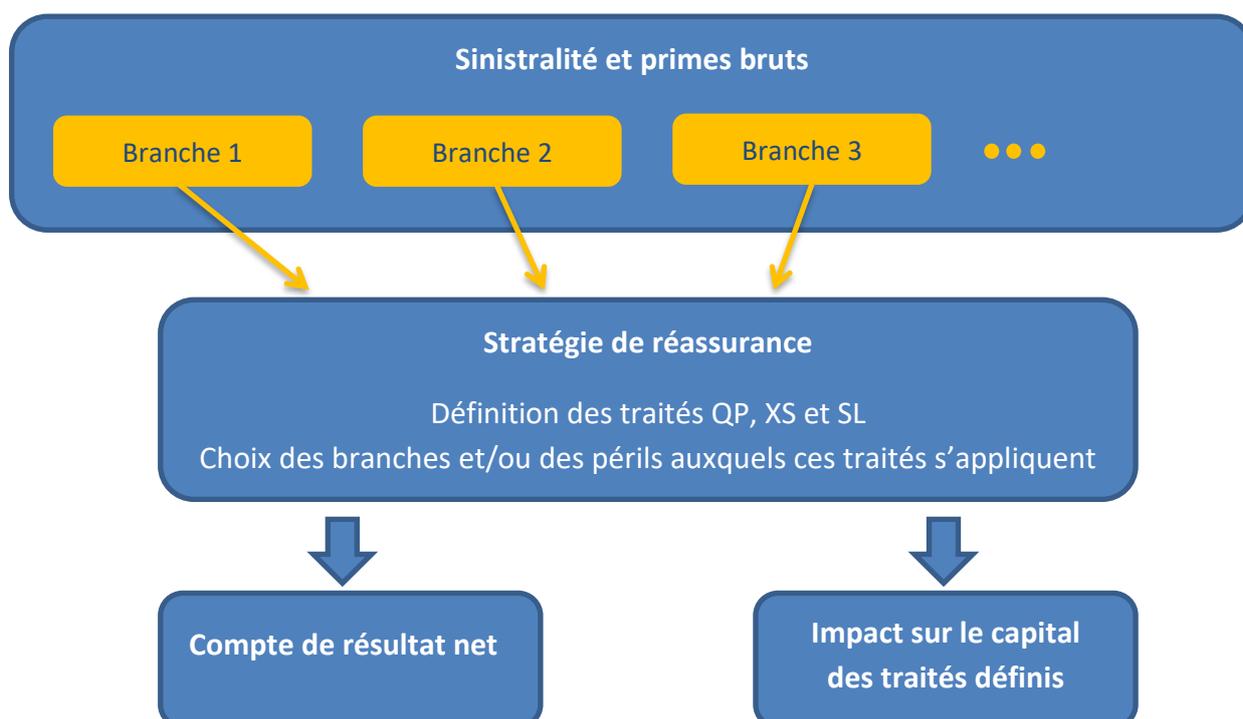


Figure 6 : Structure simplifiée du modèle

## 2.1) Modélisation de l'inflation

### 2.1.1) Processus autorégressif

Les processus autorégressifs sont construits à partir de l'idée que l'observation au temps  $t$  s'explique linéairement par les observations précédentes.

En outre, on appelle processus stationnaire un processus dont les propriétés statistiques, caractérisées par des espérances mathématiques, sont indépendantes du temps.

Un processus autorégressif d'ordre  $p$  est un processus stationnaire défini par la relation

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \dots - \alpha_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

Où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des réels fixés et où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc.

### 2.1.2) Application à l'inflation dans le modèle

Une inflation globale, commune à toutes les branches, est modélisée via un processus AR2. Elle s'écrit ainsi

$$\forall t \in \mathbb{Z}, I_t = \alpha_1 I_{t-1} + \alpha_2 I_{t-2} + \varepsilon_t$$

A partir de cette inflation globale est ensuite calculée une inflation par branche, obtenue en appliquant à l'inflation globale un coefficient de sur-inflation.

## 2.2) Primes brutes pour chaque branche d'activité

Chacun des calculs décrits ci-après est reproduit pour chacune des branches d'activité considérées.

### 2.2.1) Détermination d'un Loss Ratio adapté à la branche d'activité

On détermine tout d'abord un Loss Ratio de marché via un processus autorégressif AR2, c'est-à-dire dérivant des valeurs observées les 2 années précédentes.

Les hypothèses suivantes sont à renseigner par l'utilisateur :

- Loss ratio en  $t=0$ , noté  $LR(t=0)$
- Loss ratio en  $t=-1$ , noté  $LR(t=-1)$
- Moyenne du cycle de Loss Ratios marché, noté  $M$
- Moment du cycle de Loss Ratios marché, noté  $m$
- Retour à la moyenne du cycle de Loss Ratios marché, noté  $r$
- Erreur du cycle de Loss Ratios marché, noté  $s$

Le Loss Ratio marché en  $t=1$  est alors calculé via la formule suivante :

$$LR(t = 1) = LR(t = 0) + (LR(t = 0) - LR(t = -1)) \times m + (LR(0) - M) \times r + \varepsilon$$

Où  $\varepsilon$  suit une loi normale  $N(0,s)$ .

### 2.2.2) Calcul d'un Loss Ratio adapté à la compagnie d'assurance

Le Loss Ratio marché évalué à l'étape précédente est ajusté en moyenne et en amplitude afin d'obtenir un Loss Ratio compagnie.

A ce Loss Ratio compagnie est ensuite appliqué un taux de chargement, reflétant les règles de gestion pour aboutir aux conditions tarifaires effectivement appliquées par la compagnie.

Les hypothèses suivantes sont ainsi à renseigner par l'utilisateur :

- Ajustement de la moyenne du cycle, noté  $Am$
- Ajustement de l'amplitude du cycle, noté  $Aa$
- Taux de chargement  $\alpha$

$$LR_{Compagnie} = (LR_{Marché} + Am + (LR_{Marché} - M) \times Aa) \times (1 + \alpha)$$

On évalue également une dérive du Loss Ratio, calculée comme la différence entre ce LR compagnie non chargé ( $\alpha = 0$ ) et le Loss Ratio marché obtenu en 2.2.1.

$$Dérive = \frac{LR_{Compagnie}}{(1 + \alpha)} - LR_{Marché}$$

### 2.2.3) Evolution du nombre de risques

Le nombre de risques Nbr en t=1 est évalué de manière simple via :

$$Nbr (t = 1) = Nbr (t = 0) + AN(t) - R(t)$$

Où AN désigne les affaires nouvelles et R les résiliations.

Les affaires nouvelles sont simulées selon leur sensibilité à la variation des tarifs :

$$AN (t) = Nbr (t - 1) \times N(\mu_{AN}, \sigma_{AN}) \times (1 + Derive (t) \times Sensibilité_{AN})$$

Où  $N(\mu_{AN}, \sigma_{AN})$  désigne le tirage d'une loi normale calibrée via une moyenne et un écart-type du taux d'affaires nouvelles attendu. La sensibilité est également un paramètre d'entrée du modèle.

Les résiliations sont quant à elle simulées sur le même modèle que les affaires nouvelles :

$$R(t) = Nbr (t - 1) \times N(\mu_{Résil}, \sigma_{Résil}) \times (1 + Derive (t) \times Sensibilité_{R})$$

### 2.2.4) Croissance du portefeuille

On introduit pour calculer la croissance annuelle du portefeuille un taux d'acquisition des risques.

$$Croissance (t) = \frac{Nbr (t) \times Taux_{Acq} + Nbr (t - 1) \times (1 - Taux_{Acq})}{Nbr (t - 1) \times Taux_{Acq} + Nbr (t - 2) \times (1 - Taux_{Acq})}$$

### 2.2.5) Primes émises

On calcule tout d'abord la prime moyenne pour la branche :

$$PM (t) = PM(t - 1) \times (1 + Inflation) \times \frac{LR_{Compagnie} (t - 1)}{LR_{Compagnie} (t)}$$

Les primes émises en t sont ensuite calculées à partir du nombre de risques et de la prime moyenne :

$$PE (t) = Nbr (t) \times PM(t)$$

### 2.2.6) Primes acquises

Les PPNA découlent du taux d'acquisition donné en input :

$$PPNA (t) = PE (t) \times (1 - Taux_{Acq})$$

On en déduit enfin les primes acquises :

$$PA(t) = PE(t) + PPNA(t-1) - PPNA(t)$$

## 2.3) Sinistralité

Les sinistres sont séparés en 3 catégories : sinistres attritionnels, sinistres graves et sinistres exceptionnels.

### 2.3.1) Sinistralité attritionnelle

L'approche choisie est une approche fréquence-sévérité.

Pour modéliser la fréquence on propose à l'utilisateur de choisir entre la loi de Poisson et la loi binomiale négative.

Pour modéliser la sévérité, le choix se fait entre les lois Gamma, Exponentielle, Log-Normale et Weibull.

Les hypothèses à renseigner sont les suivantes :

	Loi	Hypothèses nécessaires
Fréquence	Poisson	Moyenne du nombre de sinistres
	Binomiale Négative	Moyenne du nombre de sinistres Ecart-type du nombre de sinistres
Sévérité	Gamma	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Exponentielle	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Log-Normale	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Weibull	Paramètre d'échelle Paramètre de forme

Tableau 1 : Sinistralité attritionnelle - Hypothèses

L'objectif est ainsi de simuler un montant total de sinistres attritionnels, pour chaque branche d'activité.

### 2.3.2) Sinistralité grave

Là encore, l'approche choisie est une approche fréquence-sévérité.

Pour modéliser la fréquence on utilise systématiquement la loi de Poisson.

Pour modéliser la sévérité, on propose à l'utilisateur de choisir entre les lois de Pareto, Gamma, Pareto généralisée, Log-Normale et Weibull.

On demande à l'utilisateur de renseigner le seuil au-delà duquel les sinistres sont considérés comme graves (ce seuil peut changer suivant la branche d'activité considérée).

En outre, les hypothèses à renseigner sont les suivantes :

	Loi	Hypothèses nécessaires
Fréquence	Poisson	Moyenne du nombre de sinistres
Sévérité	Pareto	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Gamma	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Pareto généralisée	Paramètre de positionnement Paramètre d'échelle Paramètre de forme
	Log-Normale	Moyenne du coût des sinistres Ecart-type du coût des sinistres
	Weibull	Paramètre d'échelle Paramètre de forme

Tableau 2 : Sinistralité grave - Hypothèses

L'objectif est ainsi de simuler un certain nombre de sinistres graves, ainsi que leur montant, pour chaque branche d'activité.

### 2.3.3) Sinistralité exceptionnelle

La notion de « sinistre exceptionnel » a été introduite pour permettre à l'utilisateur d'ajouter manuellement autant de sinistres qu'il le souhaite, dans le cas où il estime que la simulation précédemment définie n'est pas entièrement représentative.

Les sinistres ainsi intégrés au modèle seront par la suite considérés comme des sinistres graves classiques.

La sinistralité exceptionnelle peut par exemple permettre d'introduire quelques sinistres CAT, ou des sinistres graves spécifiques observés par le passé.

## 2.4) Modélisation de la réassurance

### 2.4.1) Définition des traités

Une fois les primes et sinistres modélisés, il s'agit de définir la stratégie de réassurance à appliquer.

Pour cela les hypothèses suivantes ont été prises :

- Les traités considérés sont les QP, XS et SL
- L'utilisateur peut définir autant de traités qu'il le souhaite, dans chacune de ces 3 catégories.
- Concernant les QP, l'utilisateur peut choisir leur moment d'application :
  - o En premier, c'est-à-dire avant les XS et les SL
  - o Après les XS mais avant les SL
  - o Ou en dernier, c'est-à-dire après les XS et les SL

Concernant les XS et les SL, il est supposé que les XS s'appliquent toujours avant les SL.

Les traités s'appliqueront donc en 5 étapes :

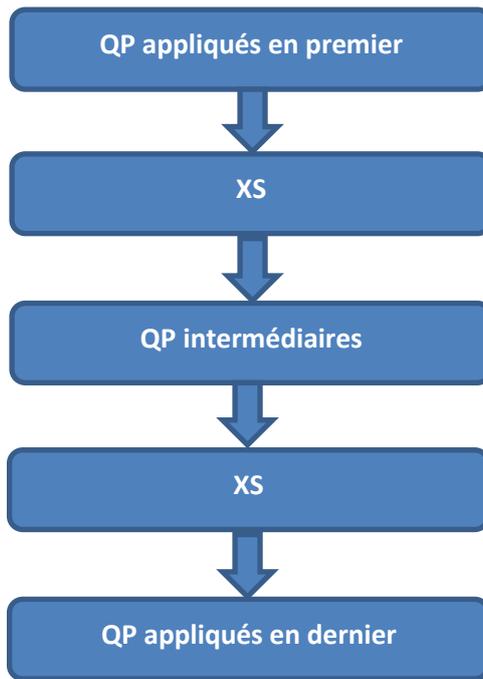


Figure 7 : Ordre d'application des traités de réassurance

Chaque traité défini devra être *mappé*. Il s'appliquera ainsi à un couple « Branche d'activité x Péril S2 ». Un traité pourra également s'appliquer à l'ensemble des branches pour un péril donné ou à l'ensemble des périls pour une branche donnée. En outre les branches d'activités sont définies en amont par l'utilisateur, leur nombre est illimité.

Les périls S2 sont au nombre de 11 :

- Tempête
- Tremblement de terre
- Inondation
- Grêle
- Effondrement
- RC Auto
- Marine
- Aérien
- Incendie
- RC
- Crédit et caution

#### 2.4.2) Gestion des périls S2

Comme nous venons de le voir, un traité peut s'appliquer uniquement à un péril S2 donné.

Or, la sinistralité simulée dans le modèle (cf. plus haut) l'est branche par branche, sans aucune notion de péril S2. Il convient donc, pour chaque branche, de faire le lien avec les périls S2. Pour ce faire, nous utiliserons une table de correspondance, dont un exemple est donné ci-dessous.

Table de correspondance entre segments et périls S2												
Segments	Tempete	Tremblement_de_terre	Inondation	Grele	Effondrement	RC_Auto	Marine	Aerien	Incendie	RC	Credit_Cauton	
RCG_RC	10%	10%	40%	0%	0%	0%	10%	0%	10%	20%	0%	
Auto_RC	10%	0%	0%	0%	0%	80%	0%	0%	10%	0%	0%	
Auto_Dom	20%	10%	10%	27%	3%	0%	0%	0%	30%	0%	0%	
DAB	20%	10%	10%	30%	0%	0%	0%	0%	30%	0%	0%	
Other	10%	10%	10%	10%	10%	0%	10%	10%	10%	10%	10%	

Figure 8 : Exemple de table de correspondance Branche-Péril

Cette notion de table de correspondance permettra ainsi d'allouer aux différents périls l'ensemble des informations provenant des branches d'activité (primes, sinistralité ...)

### 2.4.3) Application des traités QP

Un traité QP est défini par les éléments suivants :

- Taux de QP  $Taux_{QP}$
- Taux de commission
- *Mapping* (péril et branche concernés)
- Position (en premier, entre les XS et les SL ou en dernier)

Le traité ainsi défini s'applique à la rétention. Ainsi, s'il intervient en premier, il s'applique à l'ensemble des primes acquises et des sinistres de la branche / du péril. S'il intervient post-XS, il s'applique à la rétention du XS, et s'il intervient en dernier, à la rétention du SL.

Le calcul des cessions est simple :

$$\begin{aligned} \text{Primes cédées} &= \text{Primes brutes} \times \text{Taux}_{QP} \\ \text{Sinistres cédés} &= \text{Sinistres bruts} \times \text{Taux}_{QP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Primes nettes} &= \text{Primes brutes} - \text{Primes cédées} \\ \text{Sinistres nets} &= \text{Sinistres bruts} - \text{Sinistres cédés} \end{aligned}$$

On calcule également les commissions de réassurance, en appliquant le taux de commission à l'ensemble de l'assiette de primes acquises brutes. Ces commissions de réassurance représentent en pratique une participation du réassureur à l'ensemble des frais (d'acquisition, de gestion ...) supportés par l'assureur. Elles sont donc versées par le réassureur, et prennent donc la forme de contributions positives au compte de résultats de l'assureur.

### 2.4.4) Application des traités XS

Les traités XS interviennent quoi qu'il arrive en deuxième, c'est-à-dire après les QP appliqués en premier. Les montants bruts à considérer pour les XS sont donc les primes et les sinistres nets en sortie des premiers QP.

Un traité XS est défini par les éléments suivants :

- Taux de XS  $Taux_{XS}$
- Taux de commission

- Priorité
- Portée
- Nombre de reconstitutions
- Nombre de reconstitutions gratuites
- Hypothèses de calcul de la prime commerciale
  - o Volatilité
  - o Chargement pour frais
- Mapping (péril et branche concernés)

On prend en outre l'hypothèse que les reconstitutions gratuites sont prioritaires sur les reconstitutions payantes. Par exemple, si 4 reconstitutions dont 2 gratuites sont prévues, et que seulement 3 reconstitutions sont « consommées », on supposera que ce sont les 2 gratuites et une payante qui sont concernées.

Les sinistres cédés sont calculés de la manière suivante :

$$\text{Sinistres cédés} = \text{Taux}_{XS} \times \min(\max(\text{Sinistres bruts} - \text{Priorité}; 0); \text{Portée})$$

Par définition d'un traité XS, on considère ici une sinistralité individuelle et non agrégée. La sinistralité attritionnelle ne sera donc pas concernée par les traités XS, qui ne s'appliquent qu'aux graves et aux exceptionnels.

Les primes cédées ne sont (contrairement à un traité QP) pas immédiates et sont évaluées de la manière suivante :

$$\text{Primes cédées} = \text{Sinistres cédés} \times \text{Volatilité} \times (1 + \text{Chargement pour frais})$$

Ces calculs d'éléments cédés s'appliquent de la même manière aux reconstitutions, à la différence près que le montant brut considéré n'est pas la rétention des premiers QP mais la rétention des tranches consommées par le traité de base et les reconstitutions précédentes.

Le schéma suivant illustre ce principe :

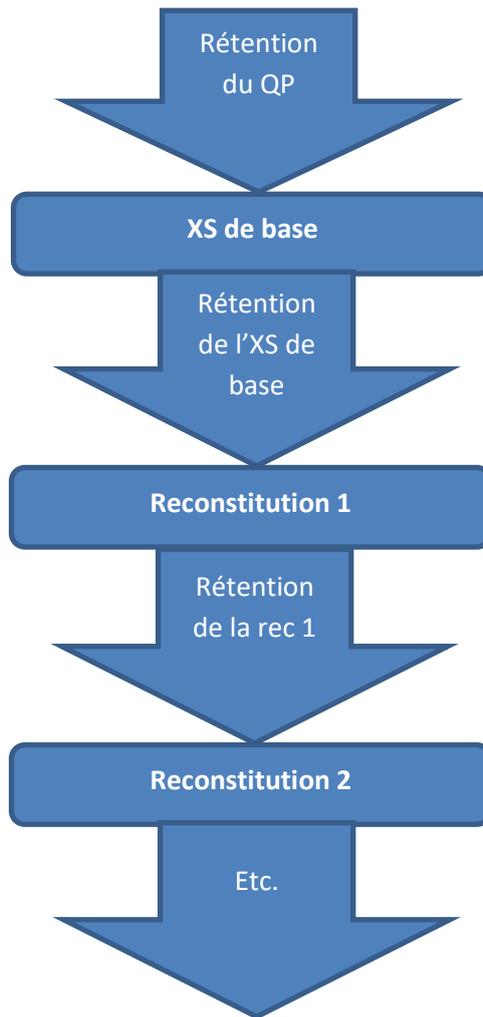


Figure 9 : Application des reconstitutions

#### 2.4.5) Application des traités SL

Les traités SL interviennent quoi qu'il arrive en avant-dernier, c'est-à-dire après les XS et les 2 premiers types de QP. Les montants bruts à considérer pour les SL sont donc les primes et les sinistres nets en sortie des QP intermédiaires.

Un traité SL est défini par les éléments suivants :

- Taux de SL  $Taux_{SL}$
- Taux de commission
- Priorité
- Portée
- Hypothèses de calcul de la prime commerciale
  - o Volatilité
  - o Chargement pour frais
- Mapping (péril et branche concernés)

Un traité SL s'appliquant sur la sinistralité agrégée, il convient tout d'abord de calculer le montant total de sinistres sur la maille (branche x péril) définie pour le traité. A partir de là, la méthodologie est similaire à celle employée pour les traités XS :

$$\text{Sinistres cédés} = \text{Taux}_{SL} \times \min(\max(\text{Sinistres bruts} - \text{Priorité}; 0); \text{Portée})$$

$$\text{Primes cédées} = \text{Sinistres cédés} \times \text{Volatilité} \times (1 + \text{Chargement pour frais})$$

## 2.5) Impact de la réassurance sur le SCR CAT

L'objectif est ici d'évaluer l'impact de l'ensemble des traités de réassurance sur le SCR CAT, de manière simplifiée. Le principe global est, pour chacun des périls S2 (cf. liste en 2.4.1), d'évaluer le montant d'un évènement bicentenaire (le SCR étant une VaR à 99,5%) et d'appliquer à cet évènement l'ensemble des traités de réassurance.

Dans le détail, la méthodologie utilisée suit celle proposée dans les Helper Tabs de l'EIOPA :

- 1) A partir du montant brut de l'évènement bicentenaire mentionné ci-dessus, on génère 2 scénarios contenant chacun 2 évènements en appliquant les coefficients suivants :

	Evènement 1	Evènement 2
Scenario A	0,8	0,4
Scenario B	1	0,2

Tableau 3 : Scénarios CAT

- 2) On calcule, pour chacun des 4 évènements et en suivant la méthodologie présentée en 2.4
  - a. La charge cédée QP
  - b. La charge cédée XS
  - c. La charge cédée SL

On en déduit une charge cédée totale pour chaque évènement.

- 3) On calcule, pour chacun des 2 scénarios A et B, la charge nette totale en considérant les 2 évènements :

$$\begin{aligned} & \text{Charge nette scenario} \\ & = \text{Charge brute Ev1} - \text{Charge cédée Ev1} + \text{Charge brute Ev2} - \text{Charge cédée Ev2} \end{aligned}$$

- 4) La charge nette retenue est le maximum entre la charge nette du scénario A et celle du scénario 2. On obtient ainsi un tableau du type :

Peril S2	Charge brute	Charge nette ScA	Charge nette ScB	Charge nette
Tempête	X1	A1	B1	C1 = max(A1,B1)
Tremblement de terre	X2	A2	B2	C2 = max(A2,B2)
Inondation	X3	A3	B3	C3 = max(A3,B3)
Grêle	X4	A4	B4	C4 = max(A4,B4)
Effondrement	X5	A5	B5	C5 = max(A5,B5)
RC Auto	X6	A6	B6	C6 = max(A6,B6)
Marine	X7	A7	B7	C7 = max(A7,B7)
Aérien	X8	A8	B8	C8 = max(A8,B8)
Incendie	X9	A9	B9	C9 = max(A9,B9)
RC	X10	A10	B10	C10 = max(A10,B10)
Crédit et caution	X11	A11	B11	C11 = max(A11,B11)

Tableau 4 : Calcul de la charge nette

- 5) Les 5 premiers périls correspondant au SCR Cat Nat et les 6 suivants au SCR Man Made, on en déduit les montants suivants :

$$SCR\ Cat\ Nat\ Brut = \sqrt{X1^2 + X2^2 + X3^2 + X4^2 + X5^2}$$

$$SCR\ Cat\ Nat\ Net = \sqrt{C1^2 + C2^2 + C3^2 + C4^2 + C5^2}$$

$$SCR\ Man\ Made\ Brut = \sqrt{X6^2 + X7^2 + X8^2 + X9^2 + X10^2 + X11^2}$$

$$SCR\ Man\ Made\ Net = \sqrt{C6^2 + C7^2 + C8^2 + C9^2 + C10^2 + C11^2}$$

- 6) On peut enfin en déduire l'impact de la réassurance sur le SCR CAT en calculant des montants de SCR CAT brut et SCR CAT net :

$$SCR\ Cat\ Brut = \sqrt{SCR\ Cat\ Nat\ Brut^2 + SCR\ Man\ Made\ Brut^2}$$

$$SCR\ Cat\ Net = \sqrt{SCR\ Cat\ Nat\ Net^2 + SCR\ Man\ Made\ Net^2}$$

## 2.6) Coût du capital

L'impact de la réassurance sur le coût du capital peut se calculer via l'estimation de deux composantes distinctes.

D'une part, une composante Risk Margin représentant une des composantes du coût des risques non diversifiables. Ce coût du capital à 6% est ainsi ajouté à l'espérance actualisée de valeur présente de ces coûts. Nous l'estimerons via le calcul d'une Risk Margin spécifique au SCR CAT.

Et d'autre part, le coût du capital traduisant le frottement fiscal résultant de l'immobilisation du capital réglementaire.

### 2.6.1) Risk Margin

Selon la directive Solvabilité II, la marge de risque représente les coûts potentiels de transfert des obligations d'assurance à un tiers en cas de défaillance d'un assureur. Son calcul se base généralement sur le montant de SCR. Toutefois, dans le cadre de cette étude, nous nous contenterons d'évaluer une Risk Margin résultant uniquement du montant de SCR CAT non-vie.

Pour se faire, nous choisissons d'utiliser la méthode 4 (méthode simplifiée) des spécifications de l'EIOPA. Le coût en capital résultant du SCR CAT sera ainsi :

$$CoCM = \frac{6\%}{1 + r_1} \times \frac{Duration}{1 + r_d} \times SCR\ CAT$$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} r_1 : \text{taux sans risque à un an} \\ r_d : \text{taux sans risque à durée des passifs} \end{array} \right.$

Au vu du périmètre couvert par notre étude, il est délicat de déterminer une valeur de durée des passifs adaptée, nous étudierons donc 3 scénarios de durée : 2 ans, 3 ans et 5 ans.

Les taux sans risque utilisés sont les suivants :

	Référence	Valeur au 25/04/2019
r1: taux sans risque à un an	Bons du trésor à 12 mois	-0.544%
r2 : taux sans risque à 2 ans	OAT 2 ans	-0.545%
r3: taux sans risque à 3 ans	OAT 3 ans	-0.466%
r5: taux sans risque à 5 ans	OAT 5 ans	-0.244%

Il est important de noter que les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire sont basés sur une vision Solvabilité 2 d'une société d'assurance, ce qui implique au jour d'aujourd'hui l'utilisation de taux d'intérêt négatifs. La réalisation de la même étude avec des taux d'intérêt positifs pourrait permettre d'obtenir une vision différente mais tout aussi pertinente.

### 2.6.2) Frottement fiscal

Le SCR (en principe le SCR global, mais comme vu au paragraphe précédent nous nous cantonnerons au SCR CAT non-vie dans le cadre de ce mémoire) étant en pratique un montant de capital que l'assureur se doit d'immobiliser au titre de la directive Solvabilité II, il en résulte un déficit de rendement pour l'assureur par rapport à une situation où ce montant de SCR serait placé au taux sans risque.

On fait en outre l'hypothèse que l'on doit couvrir le SCR par des actifs Tier I et pas par les profits futurs de l'activité d'assurance.

On considère dans le cadre de ce mémoire qu'en régime standard, un ratio de solvabilité à 130% représente un niveau de prudence suffisant pour l'assureur. On considère ainsi 130% du montant de SCR CAT calculé précédemment.

Le taux sans risque à 10 ans étant noté r10, ce déficit de rendement vaut :

$$D = 130\% \times SCR\ CAT \times r10$$

Comme précédemment, la valeur de r10 étant prise au 25/04/2019, on a r10 = 0.371%

Ce déficit D étant à interpréter comme un profit que l'assureur ne fera, on détermine un montant d'impact fiscal ImpF via :

$$ImpF = D \times Taux_{IS}$$

Le taux d'impôt sur les sociétés, noté Taux<sub>IS</sub>, est actuellement sujet à certains ajustements de la part du gouvernement. Au 1<sup>er</sup> janvier 2019, il est passé de 33.33% à 31% pour les bénéficiaires supérieurs à 500 000€, avec pour but de descendre à 28% sur l'ensemble des bénéficiaires au 1<sup>er</sup> janvier 2020, puis 26.5% en 2021 et finalement 25% en 2022. Nous utilisons ainsi dans le cadre de ce mémoire un taux de 31%, tout en gardant en tête qu'il sera très probablement revu à la baisse dans les années à venir.

## 2.7) Impact de la réassurance sur le résultat technique

Une fois la modélisation ci-dessus réalisée, il est possible d'agréger les cessions de réassurance et de visualiser l'impact de l'ensemble des traités de réassurance sur le compte de résultat par branche d'activité, par péril ou au global sur toutes les branches et tous les périls.

Le résultat brut se calcule sans tenir compte de la réassurance :

$$Résultat\ brut = Primes\ brutes - Sinistres\ bruts - CoCM\ (SCR\ CAT\ brut) + ImpF\ (SCR\ CAT\ brut)$$

Le résultat net prend en compte l'ensemble des traités de réassurance :

$$Résultat\ net = Primes\ nettes - Sinistres\ nets + Commissions - CoCM\ (SCR\ CAT\ net) + ImpF\ (SCR\ CAT\ net)$$

On peut également en déduire un ratio combiné brut et un ratio combiné net. En pratique, nous verrons par la suite que c'est cette notion de ratio combiné qui servira de variable d'optimisation.

$$Ratio\ Combiné\ brut = \frac{Primes - Sinistres - CoCM - Risk\ Margin - Tax}{Primes\ brutes}$$

$$Ratio\ Combiné\ net = \frac{Primes - Sinistres - CoCM - Risk\ Margin - Tax - (Primes\ cédées - Sinistres\ cédés)}{Primes\ brutes}$$

## Chapitre 3 : L'algorithme génétique

### 1) Généralités

L'algorithme génétique fait partie de la famille des algorithmes évolutionnaires. La popularité de ce type d'algorithme date de la fin des années 1980 et des recherches portant sur l'intelligence artificielle (GOLDBERG, [1989]).

Cet algorithme permet en théorie de résoudre des problèmes d'optimisation :

- Multi-Variables : Il est possible d'optimiser un problème ayant plusieurs variables pour lesquels nous aurons spécifié un domaine de définition.
- Multi-Objectifs : Il est possible d'optimiser plusieurs objectifs ayant des variables liées et des effets contraires. Dans un problème multi-objectif, le but n'est pas de trouver une solution unique mais plutôt un ensemble de solutions optimales formant une frontière de Pareto.

Il est à noter que dans le cadre de ce mémoire, l'aspect multi-objectif n'est pas indispensable, puisqu'il sera vu plus tard que selon les objectifs de l'utilisateur, il est envisageable de se ramener à un problème uni-objectif. En revanche, l'aspect multi-variable est absolument indispensable.

L'algorithme évolutionnaire et au même titre l'algorithme génétique sont basés sur la théorie de l'évolution de populations. En effet, cet algorithme repose sur un processus évolutif et donc itératif. Au fur et à mesure des itérations, la population de base va évoluer vers un optimal.

L'algorithme génétique fait partie de la famille des méta-heuristiques d'optimisation ; ils visent à résoudre des problèmes d'optimisation complexes et très variés. Ce genre d'algorithmes nécessite un haut niveau d'abstraction. Cependant, il est en général très difficile d'estimer la vitesse de convergence.

### 2) Intérêt par rapport à d'autres types d'algorithmes

#### 2.1) Méthodes basées sur le gradient

Ces méthodes sont des méthodes itératives (NOCEDAL, [2006]). De manière très générale, on obtient l'itération suivante via la formule :

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k \times d_k$$

$\rho_k$  est le pas, et  $d_k$  la direction.

La détermination de cette direction peut se faire de plusieurs manières, que nous détaillerons ci-après.

## 2.2) Différentes variantes pour le calcul des directions

### 2.2.1) Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode consiste à construire une approximation d'un zéro de la fonction d'une variable réelle  $f(x)$  en considérant son développement de Taylor au premier ordre :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

On trouve alors un zéro de la fonction en résolvant l'équation :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

On obtient alors un point  $x_1$  qui a de bonnes chances d'être plus proche du vrai zéro de  $f$  que le point  $x_0$  précédent. On peut ainsi espérer améliorer l'approximation par itérations successives.

Cette méthode est en général très efficace, mais nécessite que la dérivée première de la fonction  $f$  soit calculée. Dans notre cas, le problème s'avère beaucoup trop complexe (JEMINET, [2012]) pour que cela soit réalisable.

### 2.2.2) Méthodes quasi-Newton

Les méthodes quasi-Newton sont des méthodes numériques utilisées pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Le problème que résout une méthode quasi-Newton est  $f(x) = 0$ , avec  $f$  fonction réelle multidimensionnelle dont on ne connaît pas forcément l'expression analytique.

Les itérations des méthodes quasi-Newton sont de la forme suivante :

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \cdot B_k \cdot f(x_k)$$

$\rho_k$  est un coefficient déterminé pour optimiser la convergence, et  $B_k$  une matrice mise à jour à chaque itération.

Historiquement, la première méthode quasi-Newton appliquée à l'optimisation fut la méthode de Davidon-Fletcher-Powell. La matrice  $B_k$  représente ici une approximation de l'inverse de la matrice hessienne (matrice carrée des dérivées partielles secondes) de la fonction à minimiser.

Partant de l'itération  $k$ , la matrice  $B_{k+1}$  est évaluée via la formule de Davidon-Fletcher-Powell :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{s_k \cdot s_k^t}{s_k^t \cdot y_k} - \frac{B_k \cdot y_k \cdot y_k^t \cdot B_k}{y_k^t \cdot B_k \cdot y_k}$$

Avec  $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$  et  $s_k = x_{k+1} - x_k$

Cette méthode donne des résultats satisfaisants, mais dans la pratique elle est aujourd'hui en général remplacée par la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) qui est encore plus efficace.

Selon BOUAZIZ [2013], la méthode BFGS s'obtient à partir de la formule de la méthode DFP en intervertissant les rôles de  $s_k$  et de  $y_k$ . La formule obtenue permet de mettre à jour une approximation de la matrice hessienne elle-même et non de son inverse comme dans le cas de la méthode DFP. On obtient ainsi :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k \cdot y_k^t}{y_k^t \cdot s_k} - \frac{B_k \cdot s_k \cdot s_k^t \cdot B_k}{s_k^t \cdot B_k \cdot s_k}$$

Avec  $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$  et  $s_k = x_{k+1} - x_k$

En pratique, la matrice hessienne n'a pas besoin d'être recalculée à chaque itération de l'algorithme. Cependant, la méthode suppose que la fonction peut être approchée localement par un développement limité quadratique autour de l'optimum.

Les étapes de résolution via la méthode BFGS sont les suivantes :

1. Choisir  $x_0$  quelconque et une matrice hessienne approchée  $B_0$  définie positive quelconque (par exemple  $B_0 = I$ )
2. A l'itération  $k$ , calculer  $d_k = -H_k^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$ . On appelle cette valeur  $d_k$  la direction de déplacement.
3. Déterminer le pas optimal  $d_k$  et poser  $x_{k+1} = x_k + d_k \cdot \alpha_k$ . On a ainsi  $s_k = d_k \cdot \alpha_k$
4. Calculer  $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$
5. En déduire  $B_{k+1} = B_k + \frac{y_k \cdot y_k^t}{y_k^t \cdot s_k} - \frac{B_k \cdot s_k \cdot s_k^t \cdot B_k}{s_k^t \cdot B_k \cdot s_k}$
6. Incrémenter  $k \rightarrow k+1$  et retourner à l'étape 2, sauf si le critère d'arrêt défini est vérifié. Pour ce dernier on peut par exemple définir  $g_k$  via l'équation  $y_k = g_{k+1} - g_k$  et retenir  $\|g_{k+1}\| < \epsilon$

La méthode BFGS s'avère très efficace lorsque la fonction à optimiser est linéaire, mais montre certaines limites dans le cas contraire. En effet, dans le cas d'une fonction non-linéaire, il faut procéder à des réinitialisations périodiques (par exemple toutes les  $n$  itérations) pour des raisons de convergences. Ce point est rédhibitoire dans le cadre de ce mémoire, le modèle ayant vocation à être entièrement automatisé et les réinitialisations semblant difficiles à intégrer à la modélisation.

### 2.2.3) Méthode de descente du gradient

Cette méthode consiste à minimiser la fonction en  $f$  en utilisant son gradient, c'est-à-dire en déterminant un minimum local. On part d'un point  $x_0$  donné par l'utilisateur, et on descend le long de la plus grande pente locale.

On a ainsi une direction de descente :

$$d_k = -\nabla f(x_k), \text{ telle que } \nabla f(x_k)^T d_k < 0.$$

Il convient également de définir un pas pour la descente :

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}_+} f(x_k + \alpha d_k)$$

Cela donne :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \text{ avec } f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Le critère d'arrêt de l'algorithme est donné par la condition :  $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  est un seuil de précision choisi au préalable.

La méthode de descente du gradient nécessite ainsi que la fonction  $f$  soit différentiable, ce qui n'est pas le cas dans notre problème d'optimisation : le nombre de reconstitutions pour un traité XS est une variable discrète, qui rend la fonction discontinue.

Pour résumer, les méthodes basées sur le gradient présentent deux inconvénients majeurs : elles sont coûteuses en temps de calcul, et surtout ne convergent que si la fonction à minimiser est lisse (au moins  $C^2$ ). Ainsi si la fonction est discontinue ou non dérivable, elles ne sont pas adaptées.

## 2.3) Méthodes stochastiques

### 2.3.1) Méthode du recuit simulé

Cette méthode, méta-heuristique, s'inspire d'un procédé appliqué dans le domaine de la métallurgie, visant à minimiser l'énergie d'un système en alternant les phases de refroidissement et de réchauffage. Le principe de l'algorithme est le suivant (la fonction à minimiser correspond à l'énergie) :

- Une « température »  $T = T_0$  de départ est choisie, ainsi qu'un état initial correspondant à « énergie »  $E = E_0$ .
- Un nouvel état est généré aléatoirement dans le voisinage de l'état initial, correspondant à un nouveau niveau d'énergie  $E_1$ , entraînant ainsi une variation  $\Delta E$  de l'énergie du système. Si cette variation est négative (i.e. elle fait diminuer l'énergie du système), le nouvel état remplace automatiquement l'ancien. Sinon, ce nouvel état est accepté avec une probabilité  $e^{-\Delta E/T}$ .
- La dernière étape consiste à faire baisser la température selon une certaine loi de décroissance, qui contribue à faire baisser la probabilité d'acceptation d'un état augmentant l'énergie du système.

L'algorithme s'arrête lorsqu'un certain seuil inférieur est atteint par la température ou que le système se fige.

Malgré le fait que cet algorithme converge, sous certaines conditions, vers un minimum global, il présente certains inconvénients : les nombreux paramètres qui le composent nécessitent un calibrage qui peut s'avérer complexe ; citons par exemple le choix de la température initiale et de sa loi de décroissance, ou encore celui des critères d'arrêt. De plus, les temps de calculs de ce genre d'algorithme peuvent rapidement devenir élevés.

### 2.3.2) Méthode des colonies de fourmis

Cette méthode est tirée d'un comportement observé chez les fourmis, lorsqu'elles parcourent un chemin séparant leur colonie d'une source de nourriture. Si plusieurs chemins sont possibles, celles-ci vont avoir tendance à choisir le chemin

le plus court pour relier ces deux points. Ce comportement se construit grâce aux phéromones déposées au sol par les fourmis lors de leur parcours. Ces phéromones guident les fourmis suivantes et s'évaporent au cours du temps. En l'occurrence, les chemins les plus longs vont devenir de moins en moins marqués en phéromones, du fait d'une évaporation plus importante que sur le chemin le plus court. Au fur et à mesure que le phénomène se renforce, les fourmis vont être de plus en plus nombreuses à sélectionner le chemin le plus court.

Ce comportement a été exploité pour résoudre des problèmes d'optimisation, tel que celui du voyageur du commerce. La méthode s'exporte plus globalement aux problèmes d'optimisation combinatoire, présentant donc un caractère discret, avec un nombre fini de valeurs possibles assimilables aux chemins.

Cet algorithme n'est donc pas directement applicable à notre problème d'optimisation, majoritairement composé de variables continues, ce qui implique un nombre infini de solutions. D'autres algorithmes, qui s'inspirent de celui des colonies de fourmis, s'appliquent à l'optimisation continue en introduisant par exemple le concept de vecteur de directions. Ils s'avèrent cependant très complexes à mettre en œuvre.

## 2.4) Avantages et inconvénients de l'algorithme génétique

### 2.4.1) Avantages

Ces différentes considérations nous ont donc conduits à préférer un algorithme génétique pour notre problème d'optimisation, avantageux par la simplicité de ses mécanismes et son adéquation avec le traitement de problèmes complexes.

L'algorithme génétique, à l'inverse des méthodes traditionnelles de résolutions numériques comme celles de type gradient, n'est pas basé sur une approche analytique mais sur une approche itérative et méta-heuristique. C'est un algorithme d'ordre zéro, il n'utilise que les valeurs de la fonction étudiée. Ainsi, peu d'information est nécessaire pour son utilisation : l'espace de recherche possible et un critère d'efficacité.

De plus, dans la modélisation de notre problème d'optimisation, il est très compliqué d'obtenir une expression analytique de  $f = RC\ net$ , que l'on cherche à minimiser, en fonction des variables du problème : cette expression dépend notamment des différents sinistres survenus au cours de l'exercice. Cela rend difficilement applicables les méthodes se basant sur une définition analytique de  $f$ .

La nature des variables de notre problème d'optimisation, certaines étant discrètes et certaines continues, interdit en outre, comme vu précédemment, l'utilisation de certains algorithmes.

Pour terminer, le critère d'efficacité (i.e. la fonction  $f$  à minimiser) est facilement modifiable par l'utilisateur. Il peut donc aisément faire évoluer le problème d'optimisation sans se préoccuper de certaines propriétés de  $f$  comme, par exemple, son caractère différentiable ou non. L'algorithme génétique pourra toujours être appliqué.

## 2.4.2) Inconvénients

Tout d'abord, les algorithmes génétiques sont coûteux en temps de calcul, puisqu'ils manipulent plusieurs solutions simultanément. C'est le calcul de la fonction de performance qui est le plus pénalisant, et on optimise généralement l'algorithme de façon à éviter d'évaluer trop souvent cette fonction.

Ensuite, l'ajustement d'un algorithme génétique peut s'avérer délicat. L'un des problèmes les plus caractéristiques est celui de la dérive génétique, qui fait qu'un bon individu se met, en l'espace de quelques générations, à envahir toute la population. On parle dans ce cas de convergence prématurée, qui revient à lancer à une recherche locale autour d'un minimum... qui n'est pas forcément l'optimum attendu.

Un autre problème peut surgir lorsque les différents individus se mettent à avoir des performances similaires : les bons éléments ne sont alors plus sélectionnés, et l'algorithme ne progresse plus. Dans notre cas, ce problème n'a jamais été observé, il semblerait qu'un nombre suffisant d'individus par génération permette de l'éviter.

Enfin, on peut noter qu'il n'y a, en théorie, pas de garantie quant à l'obtention de la solution optimale au problème posé en un temps fini. On peut néanmoins relativiser ce dernier point dans le sens où il semble s'appliquer à des problèmes bien plus complexes que notre optimisation de réassurance.

## 2.4.3) Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous résume les avantages et inconvénients relatifs au choix de l'algorithme génétique :

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"><li>- Utilisable lorsque la fonction <math>f</math> à minimiser n'est ni définie, ni dérivable, ni différentiable</li><li>- Calibrage relativement simple</li><li>- Mécanismes aisés à comprendre</li><li>- Tolère des variables discrètes et/ou continues</li><li>- Critère d'arrêt simple à définir et à mettre en place</li><li>- Fonction <math>f</math> à minimiser facilement adaptable</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Pas de garantie quant à l'obtention de la solution optimale au problème posé en un temps fini</li><li>- Utilisation coûteuse en temps de calculs</li><li>- Risque de convergence vers un extremum local</li><li>- Risque de non progression en raison d'un grand nombre d'individu équivalents</li></ul>

Tableau 5 : Avantages et inconvénients relatifs au choix de l'algorithme génétique

## 3) Principe de l'algorithme génétique

### 3.1) Vocabulaire de base

Dans ce genre d'algorithmes, une analogie forte existe entre la biologie et l'optimisation mathématique. Il convient donc de rappeler quelques termes de génétique et leur signification d'un point de vue théorique :

- Chromosome : Le chromosome va représenter une variable. Pour chaque variable du problème d'optimisation, un chromosome différent est utilisé. En effet, il est primordial de ne pas mélanger les chromosomes entre eux car chaque variable possède son domaine de définition et sa propre signification.
- Individu : C'est un ensemble de chromosomes. L'individu a autant de chromosomes que le problème d'optimisation a de variables. Ainsi, un individu est un ensemble de variables relatives au problème d'optimisation à traiter.
- Population : C'est un ensemble d'individus. En général, nous parlons de population pour faire référence à l'ensemble des solutions que nous faisons évoluer dans le temps.
- Sélection – Croisement - Mutations : Ce sont des opérations génétiques permettant de faire évoluer notre population d'individus et de la faire converger vers une solution optimale.
- Génération : Nous parlons de générations lorsque nous faisons référence à un cycle d'évolution ou à une itération. Ainsi, lorsque nous définissons le nombre maximum de générations autorisées, c'est en fait le nombre d'itérations maximales que nous définissons.

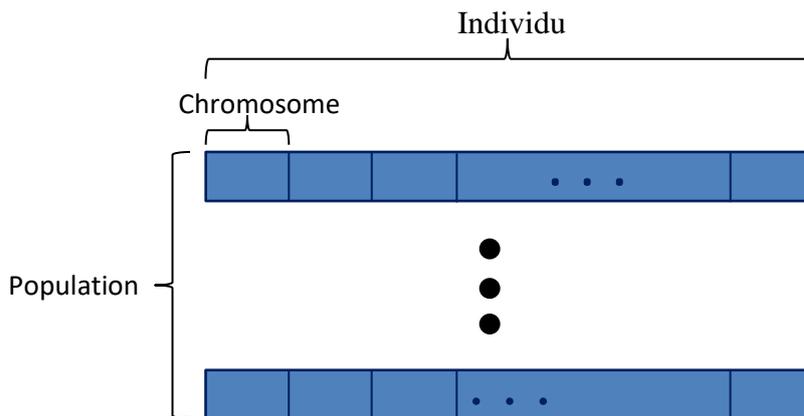


Figure 10 : Vocabulaire de base de l'algorithme génétique

### 3.2) Fonctionnement du processus itératif

L'algorithme génétique est un processus itératif au cours duquel une population initiale va évoluer au cours du temps et converger vers une solution optimale.

### 3.2.1) Population initiale

Tout d'abord, un domaine de définition est attribué à chaque variable et une population initiale  $P(0)$  est générée de manière aléatoire à partir de ce domaine de définition.

### 3.2.2) Opérateurs génétiques

Ensuite, on applique les trois opérateurs génétiques permettant de faire évoluer la population :

- Opérateur de Sélection : Cet opérateur permet de sélectionner les individus de la génération précédente  $P(t-1)$  afin de créer une nouvelle population  $Q(t)$ . Il existe plusieurs méthodes de sélection, celle-ci dépend fortement du type d'algorithme génétique implémenté.
- Opérateur de Croisement : C'est l'opérateur le plus important dans un algorithme génétique. C'est par cette opération qu'il est possible d'obtenir des individus (solutions) novateurs surtout si le nombre de variables est important. En effet, le but de cet opérateur est de croiser les chromosomes (variables) de certains individus entre eux de manière aléatoire.

Cette opération consiste à prendre les individus deux à deux et à mélanger (croiser) les variables de ces individus par une combinaison linéaire.

Ce croisement est opéré de manière aléatoire avec une probabilité  $p$  sur chaque jeu de variables. Cette probabilité joue un rôle central dans la convergence et doit dépendre du nombre de variables dans le problème d'optimisation. Elle doit être décroissante lorsque le nombre de variables augmente. À titre d'exemple, une valeur usuelle pour cette probabilité est la suivante :

$$p = \frac{1}{\text{Nb de variables}}$$

Elle peut également diminuer avec le nombre d'itérations afin de réduire le nombre de croisements lorsque l'on s'approche de la solution finale.

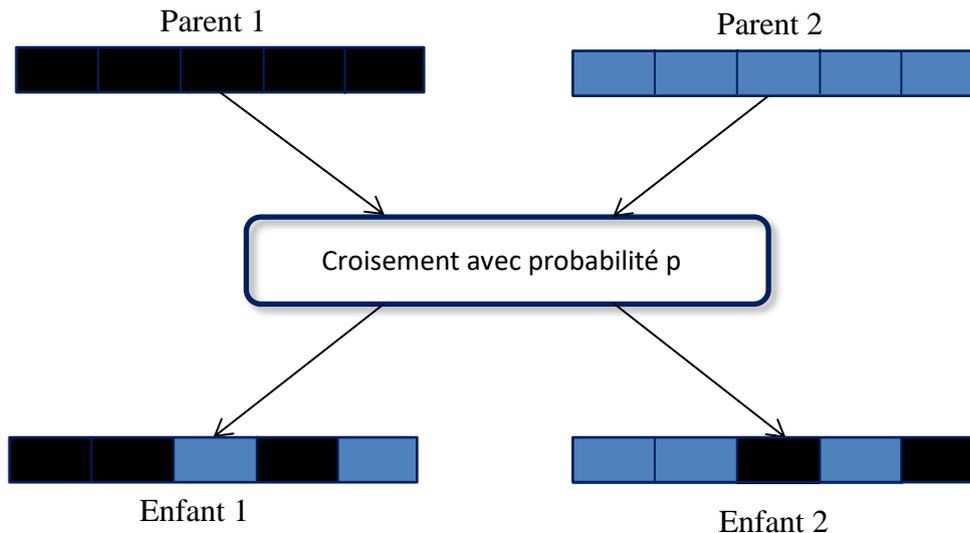


Figure 11 : Schéma de l'opérateur de croisement

- Opérateur de Mutation : Pour chaque individu de la population, cet opérateur consiste à perturber la valeur de certaines variables de manière aléatoire. Il est important de noter que les variations doivent être faibles et relatives à la taille du domaine de définition de chaque variable.

Pour chaque individu et chaque variable, il s'agit de perturber la solution avec une probabilité, notée  $p_m$ . Cette probabilité doit rester faible, afin d'assurer la convergence de l'algorithme.

On choisit une mutation gaussienne dont les paramètres s'adaptent au domaine de définition de chaque variable. Notons  $X_i$  la valeur de la variable  $i$  pour un individu  $X$  donné, l'opérateur de mutation s'écrit de la manière suivante :

$$X_i \rightarrow \max(BI_i, \min(X_i + \frac{BS_i - BI_i}{2} \times U[-1; 1], BS_i)) \text{ avec une probabilité } p_m$$

Avec :

$BS_i$  : Borne supérieure du domaine de définition de la variable  $i$

$BI_i$  : Borne inférieure du domaine de définition de la variable  $i$

Et où  $U$  désigne le tirage d'une loi uniforme.

### 3.2.3) Evaluation

Une fois la nouvelle population  $Q(t)$  ainsi conçue, il est nécessaire de l'évaluer. Pour chaque individu de la population, un score est ainsi attribué. Les individus sont ensuite classés. Dans le cadre d'un problème uni-objectif, la méthode de sélection par rang consiste à prendre les  $n$  meilleurs individus de la population précédente afin de constituer la prochaine population  $P(t+1)$ .

La phase d'évaluation est traditionnellement la plus coûteuse en temps de calcul. L'algorithme génétique est donc particulièrement adapté aux problèmes où le temps de calcul des fonctions d'évaluation est faible.

Après avoir fusionné et classé ces individus, il est ensuite nécessaire de trouver un critère d'arrêt pertinent afin de savoir si la convergence est atteinte (MONIN, [2014]) :

- S'il n'y a pas convergence, nous incrémentons le numéro de la génération ;  $t=t+1$  et recommençons le processus d'évolution.
- Si la convergence est atteinte, l'algorithme s'arrête et nous récupérons une solution unique dans un problème uni-objectif. Cette solution sera l'individu possédant le meilleur score ; c'est-à-dire la solution maximisant ou minimisant la fonction objective selon la nature du problème.

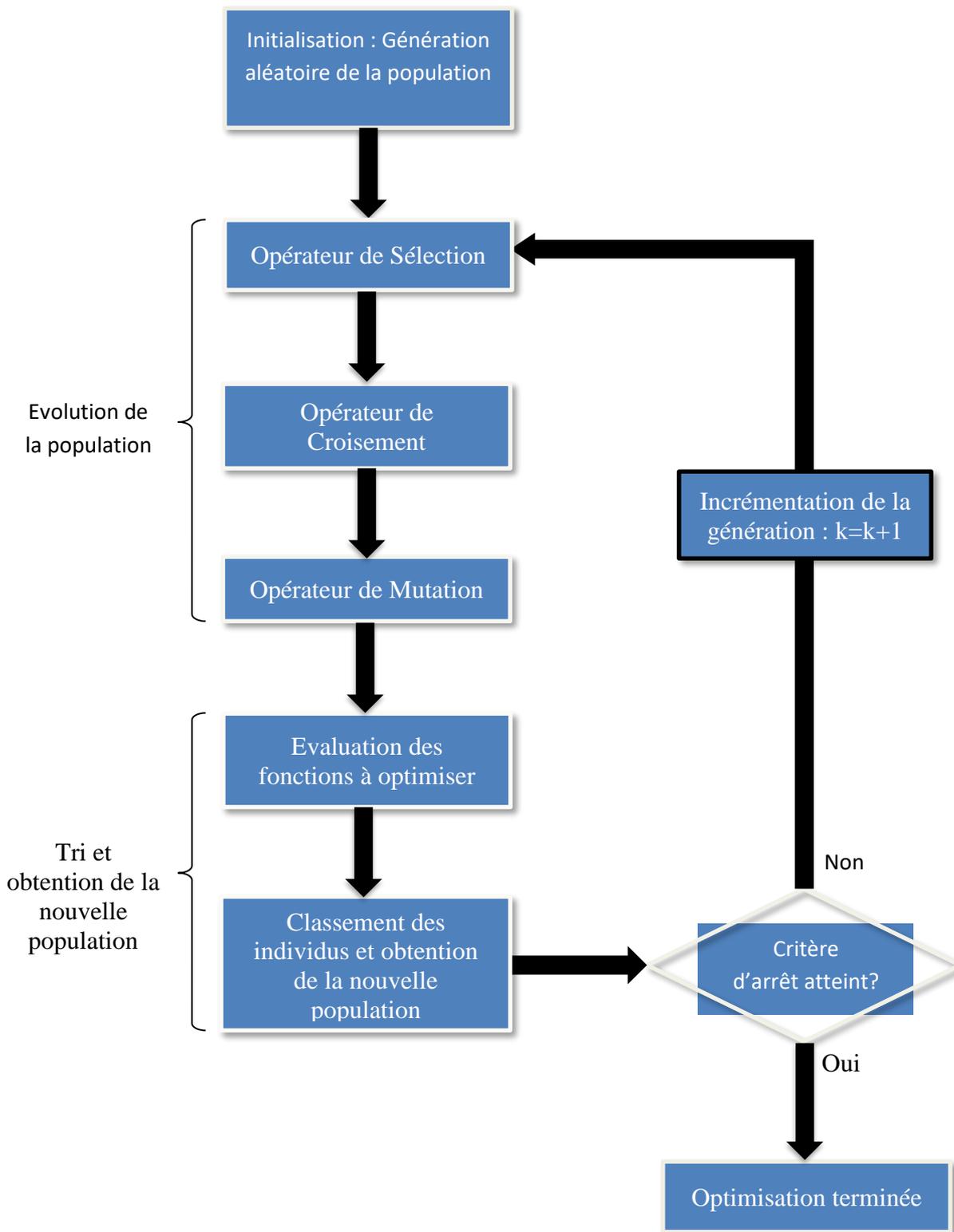


Figure 12 : Schéma itératif de l'algorithme génétique

## 4) Modélisation

### 4.1) Données d'entrée

#### 4.1.1) Paramètres de l'algorithme génétique

L'utilisateur du modèle d'optimisation doit renseigner les 4 paramètres suivants :

La taille de la population détermine le nombre d'individus qui sera créé à chaque génération. Plus le nombre d'individu est conséquent, moins le modèle aura besoin de générations pour converger. Par contre, un nombre important d'individus entraîne automatiquement une augmentation non négligeable des temps de calcul.

Le nombre maximal de générations détermine le nombre de générations, c'est-à-dire le nombre de fois que les processus de sélection, croisement et mutation seront appliqués pour recréer de nouveaux individus. En cas de présence d'un critère d'arrêt, le modèle peut bien entendu converger et donc stopper le *run* avant d'avoir atteint de nombre maximal de générations

Le taux de croisement désigne la probabilité, pour chaque chromosome d'un individu, de subir un croisement lors du processus du même nom.

Enfin, le taux de mutation désigne la probabilité, pour chaque chromosome d'un individu, de subir une mutation lors du processus du même nom. Ce taux de mutation doit rester très faible (1% est un bon ordre de grandeur, sans quoi la convergence du modèle n'est pas garantie).

#### 4.1.2) Fonction à optimiser

La fonction à optimiser dépend du nombre de traités sélectionnés par l'utilisateur. De manière générale, elle est de la forme

$$O(x_1, x_2, \dots, x_N) = \text{Ratio Combiné net}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Où les  $x_i$  sont les paramètres de réassurance.

Ces variables sont détaillées au paragraphe suivant.

Un traité QP implique une variable à optimiser, un traité XS 4 et un traité SL 3.

Le nombre de variables à optimiser est donc défini par  $N = Q + X + S$ , où :

Q est le nombre de traités QP à optimiser.

X est le nombre de traités XS à optimiser.

S est le nombre de traités SL à optimiser.

#### 4.1.3) Variables à optimiser

Le modèle d'optimisation se base sur le modèle de réassurance précédemment présenté, il doit donc y avoir une cohérence entre les inputs des 2 modèles. L'hypothèse qui a ici été retenu est la suivante : une fois l'ensemble des traités

définis dans les inputs du modèle de réassurance, l'utilisateur doit définir en input du modèle d'optimisation quels traités, parmi les traités existants, il souhaite optimiser.

Pour chaque type de traité, seulement certaines variables peuvent être optimisées, et il se doit de les doter d'une borne inférieure et d'une borne supérieure. Le tableau suivant récapitule l'ensemble des variables pouvant être optimisées :

Traité	Variable à optimiser	Borne inférieure	Borne supérieure	Nombre entier ?
QP	Taux de QP	0	100%	Non
XS	Priorité	0	BS1	Non
	Portée	0	BS2	Non
	Taux de XS	0	100%	Non
	Nombre de reconstitutions	0	10	Oui
SL	Taux de SL	0	100%	Non
	Priorité	0	BS3	Non
	Portée	0	BS4	Non

Tableau 6 : Variables à optimiser

Les bornes supérieures pour les portées et priorités, notées BS1, BS2, BS3 et BS4 dans le tableau ci-dessus, peuvent tout simplement être définies en choisissant une valeur très élevée (100 000 000 000), cela n'empêchera en rien la convergence du modèle. Par contre, pour accélérer cette dernière, il sera opportun de fixer une valeur maximale plus faible, par exemple de l'ordre du sinistre maximal observé pour les XS, et de la sinistralité totale pour les SL.

Bien entendu, on ne cherche pas à optimiser le nombre de reconstitutions gratuites, puisque le modèle l'estimera forcément égal au nombre de reconstitutions. Des tests ont par contre été réalisés pour vérifier que c'était bien le cas.

Enfin, le choix de 10 reconstitutions au maximum est arbitraire, selon les branches on peut vouloir autoriser plus ou moins de reconstitutions. S'il s'avère que le modèle converge vers le nombre maximal de reconstitutions, on pourra être amené à en autoriser plus.

#### 4.2) Liens entre algorithme génétique et modèle de réassurance

La figure suivante récapitule les connections entre les deux modèles. L'optimisation de réassurance se fait en pratique via un certain nombre d'itérations du modèle de réassurance, qui contient lui-même un sous-modèle « Segment », simulant une sinistralité pour chacune des branches d'activité de l'assureur.

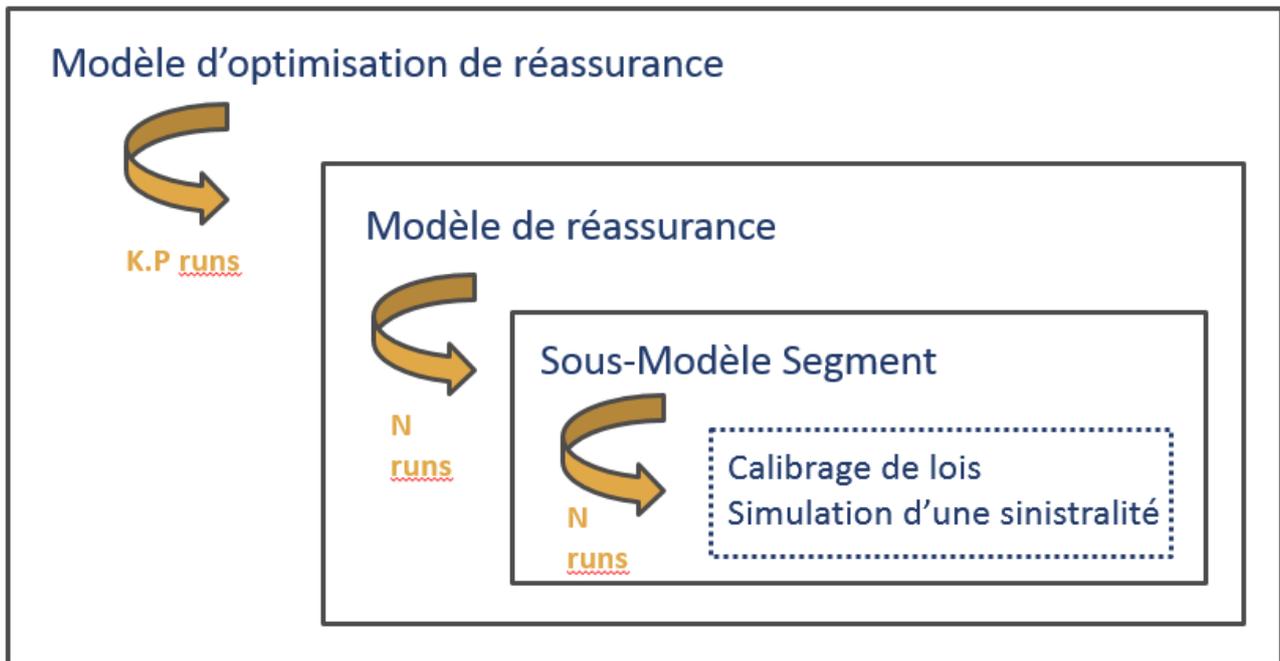


Figure 13 : Liens entre les différents modèles

N désigne ici le nombre de simulations (nous verrons plus loin que nous avons procédé via une approche de Monte Carlo à 10 000 simulations), K le nombre d'individus et P le nombre de générations.

### 4.3) Création de la population initiale

A chaque génération, la population (ensemble d'individus) prend la forme d'une matrice dont le nombre de lignes représente le nombre d'individus, et le nombre de colonnes représente le nombre de variables à optimiser :

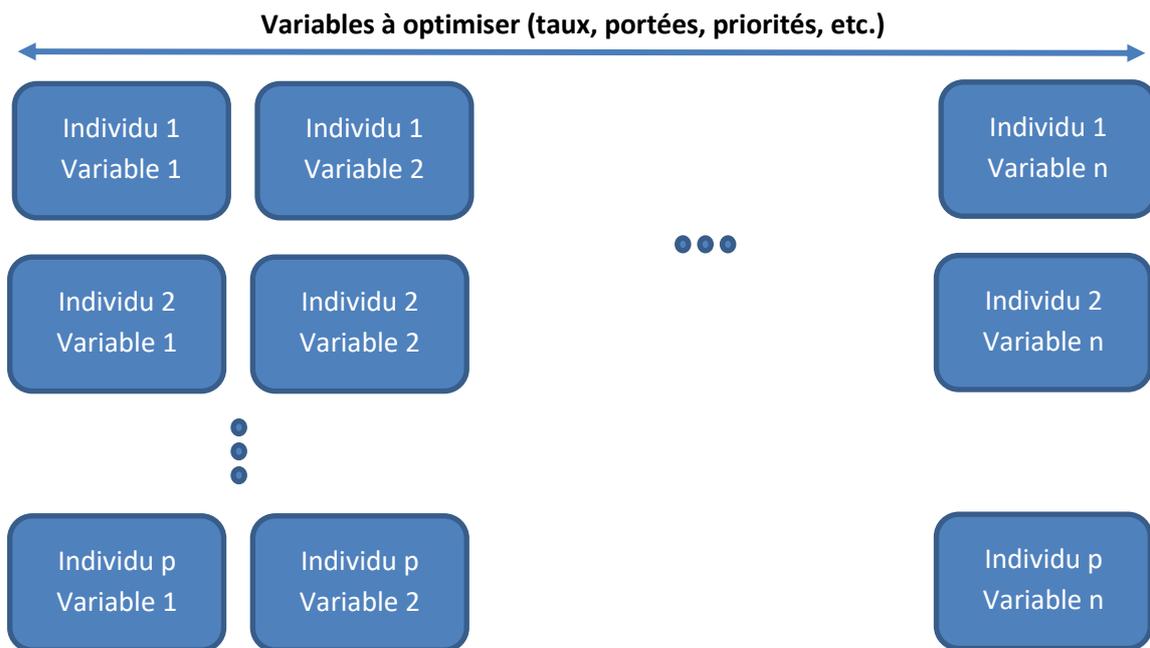


Figure 14 : Une population sous forme matricielle

Cela étant mis en place, chaque individu se verra attribuer l'ensemble de ses variables par tirage aléatoire uniforme d'un nombre réel (ou entier dans le cas du nombre de reconstitutions) compris entre la borne inférieure et la borne supérieure définies pour la variable.

La population initiale, également appelée première génération, est ainsi constituée.

#### 4.4) Evaluation d'une population

Une fois la population initiale constituée, il convient de l'évaluer afin de déterminer quels en sont les « meilleurs » individus. Pour ce faire, pour chaque individu sont réalisées les étapes suivantes :

- Application des  $n$  variables dont est constitué l'individu aux variables d'entrées correspondantes du modèle de réassurance. Ainsi, les taux, portées, priorités, etc. des traités à optimiser seront remplacés par les valeurs que contient l'individu.
- *Run* du modèle de réassurance avec ces inputs spécifiques
- Obtention du ratio combiné net, la valeur de sortie qui sera utilisée pour évaluer l'individu, via une approche de Monte Carlo sur 10 000 simulations
- Evaluation de l'individu. Etant donné que l'on cherche à maximiser le ratio combiné, on considère le résultat de la fonction à optimiser décrite en 4.1.2, que l'on injecte dans le modèle d'optimisation à partir du modèle de réassurance.

Chaque individu est dès lors caractérisé par un score, et plus ce score est élevé, plus l'individu sera considéré comme « bon » du point de vue de notre processus d'optimisation. On obtient donc en sortie du processus d'évaluation un classement des individus, de 1 à  $p$ .

On notera que la méthodologie est ici présentée pour la population initiale, mais le processus d'évaluation sera strictement identique pour l'ensemble des générations suivantes.

#### 4.5) Création de la génération suivante

A chaque fois qu'une génération est évaluée, l'objectif de l'algorithme est de constituer une nouvelle génération, « globalement meilleure » que la génération précédente.

Nous chercherons donc dans ce paragraphe à constituer une génération  $k+1$  à partir d'une génération  $k$ . Pour rappel, ces deux générations sont constituées de  $p$  individus, eux-mêmes constitués de  $n$  variables.

Pour cela, 3 opérateurs seront appliqués aux individus de la génération  $k$  : opérateur de sélection, opérateur de croisement et opérateur de mutation.

##### 4.5.1) Opérateur de sélection

Pour créer le premier individu de la génération  $k+1$ , le processus est le suivant :

- Parmi les  $p$  individus de la génération  $k$ , 2 individus sont tirés au sort aléatoirement
- Les scores de ces 2 individus sont comparés
- Le premier individu de la génération  $k+1$  correspondra à l'individu, parmi les 2 précédemment tirés au sort, qui possède le score le plus élevé

Ces 3 étapes sont ensuite répétées pour créer le 2<sup>ème</sup> individu, le 3<sup>ème</sup>, et ainsi de suite jusqu'au  $p^{\text{ème}}$ . Les nouveaux individus allant constituer la base de la génération  $k+1$  sont ainsi sélectionnés.

##### 4.5.2) Opérateur de croisement

Si l'opérateur de sélection permet de récupérer les « meilleurs » individus de la génération précédente, l'opérateur de croisement a lui pour but de mélanger les chromosomes de ces individus. Certains des nouveaux individus ainsi générés seront donc plus performants, puisque composés des meilleurs chromosomes de chacun des 2 individus qui les composent. A l'inverse, certains individus générés par l'opérateur de croisement constitueront une régression, puisque composés des plus mauvais chromosomes. Ce dernier point n'est néanmoins pas un problème puisqu'après évaluation, seuls les meilleurs individus seront sélectionnés pour constituer la génération  $k+2$ .

Considérons pour l'exemple la première variable du premier individu, en sortie de l'opérateur de sélection. Il s'agit d'un taux de QP, que l'on note  $QP_1$ , devant être compris entre 0 et 100% par hypothèse.

Cette variable a une probabilité de subir l'opérateur de croisement égale au taux de croisement défini en input (cf. plus haut). On tire donc un nombre aléatoire  $S$  compris entre 0 et 1 et :

- Si  $S \geq$  Taux croisement, aucun croisement n'a lieu pour cette variable, elle reste identique
- Au contraire, si  $S <$  taux croisement, un croisement aura lieu.

On considère alors la valeur de la même variable de l'individu suivant (ici, le 2<sup>ème</sup>), que l'on note  $QP_2$ , et on remplace  $QP_1$  par une nouvelle valeur calculée comme suit :

$$QP_1^{new} = QP_1^{old} + S \times (QP_2^{old} - QP_1^{old})$$

On vérifie que :

$$QP_1^{new} = QP_1^{old} \times (1 - S) + S \times QP_2^{old}$$

$$\text{Donc } 0 \leq QP_1^{new} \leq 1 - S + S$$

$$\text{Et } 0 \leq QP_1^{new} \leq 1$$

La nouvelle valeur de  $QP_1$  obtenue est bien contenue entre les 2 bornes de définition.

De même, on définit directement :

$$QP_2^{new} = \begin{cases} QP_2^{old} + S \times (QP_1^{old} - QP_2^{old}) & \text{si } S \geq \text{Taux croisement} \\ QP_2^{old} & \text{si } S < \text{Taux croisement} \end{cases}$$

On procède ensuite de la même manière pour les variables de 2 à  $n$  qui constituent les 2 premiers individus.

Dans le cas des variables entières (nombre de reconstitutions), la nouvelle valeur obtenue sera arrondie au plus proche pour obtenir une nouvelle valeur entière.

Les 2 premiers individus croisés sont ainsi définis, on passe alors directement aux 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> individus pour lesquels on reproduit les mêmes étapes, et ainsi que de suite jusqu'à avoir traité toute la génération.

On notera ainsi qu'il est recommandé de définir un nombre pair d'individus par génération. Toutefois, si ce nombre est impair, le fonctionnement de l'algorithme n'est pas altéré, si ce n'est que le dernier individu n'est pas croisé et reste donc identique.

### 4.5.3) Opérateur de mutation

Enfin, l'opérateur de mutation consiste à perturber la valeur de certaines variables de manière aléatoire. Le nombre de mutations réalisées sur une génération doit néanmoins rester faible, afin de ne pas contrarier la convergence globale de l'algorithme. On fixe ici une probabilité de mutation (notée  $p$ ) à 1%.

Comme pour l'opérateur de croisement, considérons pour l'exemple la première variable du premier individu, en sortie de l'opérateur de croisement. Il s'agit d'un taux de QP, que l'on note  $QP_1$ , devant être compris entre 0 et 100% par hypothèse.

Cette variable a une probabilité de subir l'opérateur de mutation égale au taux de mutation  $p$  défini en input. On tire donc un nombre aléatoire  $S$  compris entre 0 et 1 et :

- Si  $S \geq p$ , aucune mutation n'a lieu pour cette variable, elle reste identique
- Si  $S < p$ , la nouvelle valeur de  $QP_1$  sera calculée de la manière suivante :

$$QP_1^{new} = \max(LB; \min(QP_1^{old} + \frac{(UB - LB)}{2} \times U(-1; 1); UB))$$

Avec :

LB : borne inférieure du domaine de définition de la variable

UB : borne supérieure du domaine de définition de la variable

$U(-1; 1)$  : nombre aléatoire compris entre -1 et 1 résultant du tirage d'une loi uniforme

Il est immédiat que par construction, la nouvelle valeur  $QP_1^{new}$  sera comprise entre LB et UB.

On procède ensuite de la même manière pour les variables de 2 à  $n$  qui constituent le premier individu.

Le premier individu muté est ainsi défini, il reste alors à reproduire les mêmes étapes pour les individus de 2 à  $p$  qui constituent la génération.

## 4.6) Convergence de l'algorithme

### 4.6.1) Principe général

Une fois les 3 opérateurs définis ci-dessus appliqués à la génération  $k$ , on obtient une génération  $k+1$ . Celle-ci est alors évaluée suivant la méthodologie détaillée en 4.3.

Une fois une génération construite et évaluée, l'algorithme fonctionne de la manière suivante :

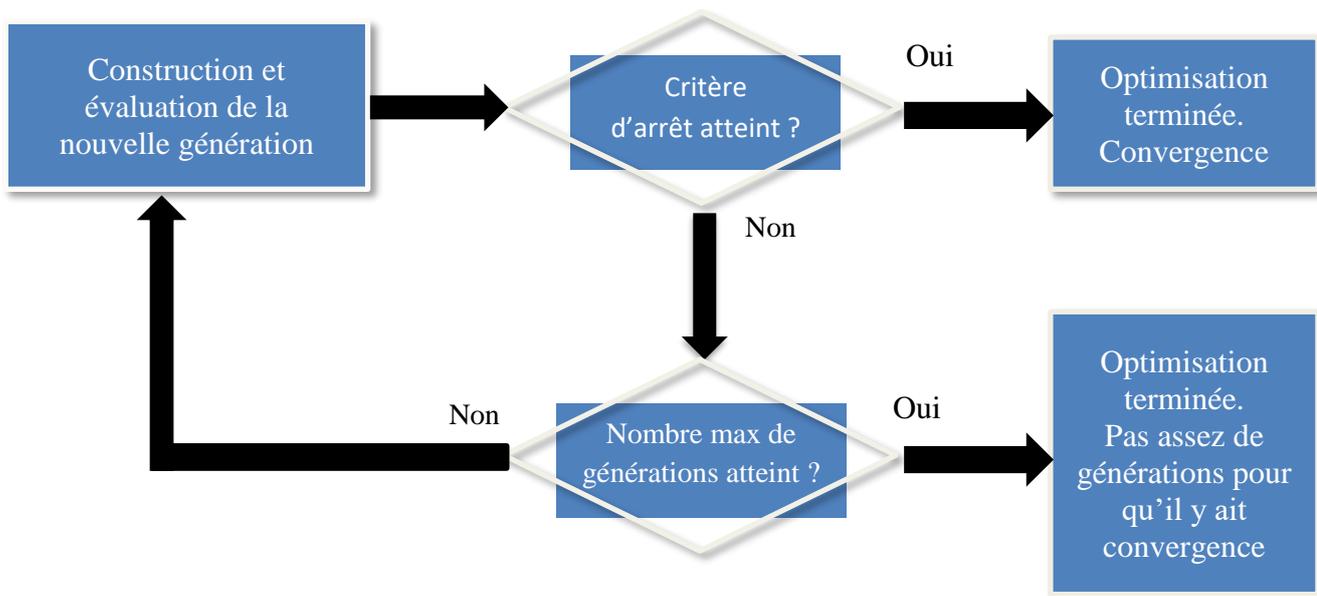


Figure 15 : Critère d'arrêt et nombre maximal de génération

Le nombre maximum de générations autorisé est paramétré par l'utilisateur.

#### 4.6.2) Critère d'arrêt

A chaque génération (composée de  $p$  individus contenant chacun  $n$  variables), on applique un critère d'arrêt afin de déterminer s'il y a eu, ou non, convergence.

Pour ce faire :

- Pour la première variable, on compare toutes les valeurs de cette variable pour les  $p$  individus. Si l'écart n'est jamais supérieur à un seuil de convergence (choisi par l'utilisateur, on peut par exemple stipuler un seuil de  $10^{-3}$ ), on « valide » la première variable et on passe à la 2<sup>ème</sup>
- On reproduit les mêmes tests pour la 2<sup>ème</sup> variable, et ainsi de suite jusqu'à la  $n^{\text{ème}}$ .
- Si l'ensemble des variables sont validées, on considère que le critère d'arrêt est vérifié et donc qu'il y a eu convergence. Sinon (et si le nombre maximal de générations n'est pas atteint, comme expliqué plus haut), il faut construire la génération suivante.

#### *4.6.3) Sortie de l'algorithme*

A partir du moment où il y a eu convergence, tous les individus composant la dernière génération sont extrêmement proches. L'algorithme sélectionne alors l'individu possédant la meilleure évaluation, ce dernier constituera la sortie du modèle.

On obtient ainsi un vecteur de  $n$  variables, correspondant aux  $n$  paramètres de réassurance à optimiser.

## Chapitre 4 : Optimisation de réassurance d'un assureur IARD

### 1) Hypothèses

#### 1.1) Caractéristiques de l'assureur IARD

Dans cette étude, nous considérerons un assureur IARD constitué d'une branche d'activité auto.

##### 1.1.1) Couverture de réassurance

La couverture de réassurance complète de cet assureur IARD est la suivante :

Nom du traité	Type	Segment(s)	Péris(s)
QP1*	QP	Auto	Tous périls
XS1	XS	Auto	Tous périls
XS2		Auto	Tempête
XS3		Auto	Grêle
XS4		Auto	Inondation
XS5		Auto	RC Auto
SL1	SL	Auto	Tous périls

Tableau 7 : Couverture de l'assureur IARD

\*Dans un premier temps nous considérons que le traité QP intervient en premier, c'est-à-dire avant les XS et les SL.

Les hypothèses suivantes sont prises quant à la table de correspondance entre segments et périls :

Segments	Tempête	Tremblement de terre	Inondation	Grêle	Effondrement	RC Auto	Marine	Aérien	Incendie	RC	Crédit Caution
Auto	20%	0%	20%	20%	0%	40%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 8 : Correspondance entre segments et périls

##### 1.1.2) Sinistralité et volumes de primes

Concernant les données d'entrée du modèle, nous utiliserons le package « CASdatasets », qui contient de nombreux jeux de données actuarielles. Ces données sont en relation avec l'ouvrage CHARPENTIER [2014].

Les 3 jeux de données suivants seront utilisés :

- fremotor1freq : fréquence de sinistres auto
- fremotor1sev : coût de sinistres auto
- fremotor1prem : primes auto par assure

### 1.1.3) Résultats avant réassurance

Les données citées dans le paragraphe précédent nous permettent de simuler une sinistralité et d'établir un compte de résultat simplifié. Nous prenons pour hypothèses 5% de frais d'acquisition et 5% de frais de gestion de sinistres.

Le portefeuille ainsi obtenu a les caractéristiques suivantes :

Elément	Montant (€)
Primes acquises	9 307 827
Frais d'acquisition	465 391
Sinistres	8 245 328
Frais de gestion de sinistres	412 266
Résultat	184 841
S/P	97,9%
SCR CAT	1 241 044

Tableau 9 : Portefeuille initial

Comme décrit en 2.6, on propose 3 scénarios de duration des passifs pour le calcul du coût en capital :

Duration	2 ans	3 ans	5 ans
Taux sans risque à duration	-0,545%	-0,466%	-0,244%
CoCM	150 560	225 841	376 401
ImpF	1 855	1 855	1 855
<b>Ratio combiné</b>	<b>99,6%</b>	<b>100,4%</b>	<b>102,2%</b>

Le résultat est donc légèrement excédentaire. La mise en place d'une stratégie de réassurance va avoir pour but de l'améliorer et ainsi de diminuer le Ratio Combiné.

### 1.2) Hypothèses d'optimisation

Les variables à optimiser pour chacun des 3 types de traités sont les suivantes :

Traité	Variable à optimiser	Borne inférieure	Borne supérieure	Nombre entier ?
QP	Taux de QP	0	100%	Non
XS	Priorité	0	100 000 000	Non
	Portée	0	100 000 000	Non
	Taux de XS	0	100%	Non
	Nombre de reconstitutions	0	10	Oui
SL	Taux de SL	0	100%	Non
	Priorité	0	100 000 000	Non
	Portée	0	1 000 000 000	Non

Tableau 10 : Variables de l'étude

## 2) Optimisation d'un traité ou d'une partie des traités

Dans cette partie, nous fixerons un certain nombre de paramètres, afin d'optimiser seulement un traité, ou une partie de la stratégie de réassurance. Les paramètres par défaut des traités seront les suivants :

Traité	Variable à optimiser	Valeur par défaut
QP	Taux de QP	20%
XS	Priorité	100 000
	Portée	400 000
	Taux de XS	20%
	Nombre de reconstitutions	0
SL	Taux de SL	20%
	Priorité	10 000 000
	Portée	40 000 000

Tableau 11 : Paramètres par défaut des traités

### 2.1) Optimisation d'un traité QP

On choisit ici d'optimiser un traité QP, portant sur l'ensemble des périls et l'unique segment auto. Les autres traités sont pour le moment absents.

	Paramètre(s) optimisé(s)
Traité(s) optimisé(s)	Taux
QP1	12,1%

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance	162 671	1 060 118	99,4%	100,1%	101,5%

Tableau 12 : Optimisation du QP

Le résultat diminue ainsi d'environ 12%, ce qui correspond tout à fait à l'effet attendu. En outre, ce taux de cession permet réduit le SCR d'environ 15%. Nous constatons donc que la simple optimisation d'un traité QP n'a certes pas d'effet positif sur le résultat, mais permet d'améliorer le ratio combiné dans des proportions non négligeables. Sans surprise, on constate que plus la durée moyenne du passif est élevée, plus l'impact est conséquent.

## 2.2) Optimisation d'un traité XS sans tenir compte des reconstitutions

On choisit ici d'optimiser le traité XS1, portant sur tous les périls et un unique segment. On ne cherche pas à optimiser le nombre de reconstitutions, ce qui signifie qu'on considère un nombre illimité de reconstitutions. Les autres traités sont pour le moment absents.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)		
	Taux	Priorité	Portée
XS1	62,0%	83 442	139 574

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance	232 740	1 117 548	99,4%	100,2%	101,7%

Tableau 13 : Optimisation du traité XS1 hors reconstitutions

Ces résultats d'optimisation sur le traité XS « Tous périls » traduisent une forte concentration de sinistres sur la tranche déterminée par le modèle. La cession de ces sinistres entraîne ainsi une amélioration significative du résultat (+ 26%). Le ratio combiné s'améliore également. L'impact sur le SCR CAT est en outre non négligeable (- 10%).

On réalise ensuite la même étude sur les traités XS2, XS3, puis XS4, portant respectivement sur la tempête, la grêle et l'inondation. Là encore, le nombre de reconstitutions est considéré illimité. A chaque fois un seul traité est optimisé, les autres sont absents.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)		
	Taux	Priorité	Portée
XS2	63,4%	84 916	137 005
XS3	65,1%	86 110	133 871
XS4	60,8%	79 452	126 070

Traité(s) optimisé(s)		Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
XS2	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance	195 096	1 217 858	99,6%	100,4%	102,1%
XS3	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance	193 442	1 203 120	99,5%	100,4%	102,0%
XS4	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance	197 651	1 220 613	99,6%	100,4%	102,1%

Tableau 14 : Optimisation des traités XS2, XS3 et XS4 hors reconstitutions

Le résultat semble ici étroitement lié à la table de correspondance entre segments et périls. En effet, il semblerait que l'impact d'une optimisation de traité portant sur un seul péril équivaut à environ 20% (tant en termes d'amélioration du résultat, que de diminution du SCR) de l'impact de l'optimisation « tous périls ». Ces 20% coïncident étroitement avec l'hypothèse de répartition que l'on rappelle ci-dessous :

Segments	Tempête	Tremblement de terre	Inondation	Grêle	Effondrement	RC Auto	Marine	Aérien	Incendie	RC	Crédit Caution
Auto	20%	0%	20%	20%	0%	40%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 15 : Table de correspondance entre segments et périls

Cette optimisation séparée des traités XS a un impact très limité sur le ratio combiné.

Par contre, cela laisse présager d'un résultat plus satisfaisant si les traités XS sont optimisés simultanément (cette étude sera menée plus loin).

### 2.3) Optimisation d'un traité XS avec reconstitutions

On choisit ici d'optimiser le traité XS1, portant sur tous les périls et un unique segment. Contrairement au paragraphe précédent, on se donne ici la possibilité d'optimiser le nombre de reconstitutions. Les autres traités sont pour le moment absents.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS1	60,9%	85 821	131 068	8

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance– reconstitutions illimitées	232 740	1 117 548	99,4%	100,2%	101,7%
Après réassurance – optimisation des reconstitutions	238 371	1 116 289	99,4%	100,2%	101,7%

Tableau 16 : Optimisation du traité XS1 avec reconstitutions

L'impact sur le résultat (et par suite sur le S/P) est assez limité, mais nous constatons tout de même que le fait de pouvoir limiter le nombre de reconstitutions permet d'améliorer ces indicateurs. En pratique, l'algorithme va converger vers un plan de reconstitutions parfaitement adapté à la sinistralité du portefeuille. Cela n'améliorera pas la cession de sinistres par rapport à des reconstitutions illimitées, mais cela ne la détériorera pas. Par contre, une amélioration se fera sentir au niveau des primes cédées, puisque le montant demandé par le réassureur pour un nombre réduit de reconstitutions sera moindre. Ceci explique la légère amélioration du résultat.

En revanche, l'impact sur le SCR CAT semble négligeable.

Il est intéressant de noter que le taux, la portée et la priorité restent sensiblement proches de ce qui avait été déterminé pour un nombre illimité de reconstitutions. Cela semble plutôt rassurant quant à la pertinence des paramètres optimisés.

On réalise ensuite la même étude sur les traités XS2, XS3, puis XS4, portant respectivement sur la tempête, la grêle et l'inondation. Là encore, le nombre de reconstitutions est considéré comme un paramètre pouvant être optimisé. A chaque fois un seul traité est optimisé, les autres sont absents.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS2	62,6%	84 128	133 615	1
XS3	65,5%	83 537	135 990	2
XS4	60,0%	80 411	128 125	2

Traité(s) optimisé(s)		Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
XS2	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance – recs illimitées	195 096	1 217 858	99,6%	100,4%	102,1%
	Après réassurance – optimisation des recs	197 004	1 218 927	99,6%	100,4%	102,1%
XS3	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance – recs illimitées	193 442	1 203 120	99,5%	100,4%	102,0%
	Après réassurance – optimisation des recs	194 527	1 205 889	99,5%	100,4%	102,0%
XS4	Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
	Après réassurance – recs illimitées	197 651	1 220 613	99,6%	100,4%	102,1%
	Après réassurance – optimisation des recs	198 136	1 219 902	99,6%	100,4%	102,1%

Tableau 17 : Optimisation des traités XS2, XS3 et XS4 avec reconstitutions

Nous retrouvons ici la combinaison de deux résultats observés précédemment. D'une part, prendre en compte les reconstitutions permet d'améliorer le résultat et le S/P, même si cela reste léger. D'autre part, comme déjà vu plus haut, le bénéfice de l'optimisation semble de l'ordre de grandeur de 20% du bénéfice obtenu lors de l'optimisation « tous périls ». Ces 20% coïncident étroitement avec l'hypothèse de répartition prise dans la table de correspondance entre segments et périls.

On peut également constater que le nombre de reconstitutions a considérablement diminué par rapport à l'optimisation « tous périls ». Pour comprendre ce résultat il convient de considérer la manière dont est traité un sinistre avant l'application des traités XS. On a, pour rappel, la table de correspondance segment-péril suivante :

Segments	Tempête	Tremblement de terre	Inondation	Grêle	Effondrement	RC Auto	Marine	Aérien	Incendie	RC	Crédit Caution
Auto	20%	0%	20%	20%	0%	40%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 18 : Table de correspondance entre segments et périls

Si l'on a, par exemple, un sinistre de 100 000 à traiter, il serait tentant de considérer qu'il s'agit en fait de 4 sinistres, un sinistre tempête de 20 000, un sinistre grêle de 20 000, un sinistre inondation de 20 000, et un sinistre RC auto de 40 000. Cette approche fonctionne pour un traité proportionnel, mais s'avère fautive lorsque l'on cherche à modéliser un XS. En effet, si l'on considère par exemple une tranche 50 000 xs 50 000, notre sinistre de 100 000 doit être impacté par cette tranche à hauteur de 50 000. Or, si l'on considérait la division 20 000 / 20 000 / 20 000 / 40 000 évoquée ci-dessus, ce ne serait évidemment pas le cas. Pour remédier à ceci, on ne raisonne pas en montant mais en probabilité d'appartenance, comme montré ci-dessous.

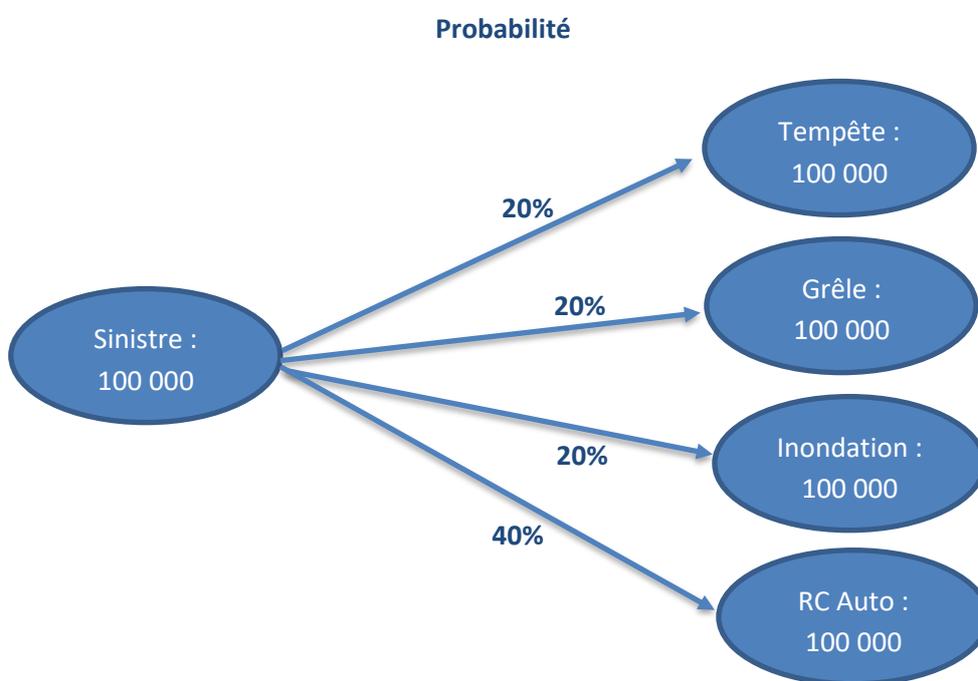


Figure 16 : Gestion d'un sinistre pour une tranche XS

## 2.4) Différentes méthodes d'optimisation de traités XS

On souhaite ici comparer les deux possibilités d'optimisation suivantes, et déterminer la plus efficace :

Optimisation A : sur le segment Auto, on optimise un seul traité portant sur l'ensemble des périls.

Optimisation B : sur le segment Auto, on optimise n traités, portant chacun sur l'un des n périls considérés dans l'étude.

Ayant démontré précédemment qu'il était pertinent de considérer les reconstitutions comme paramètre d'optimisation, on choisit de les inclure dans l'étude.

### Optimisation A :

Les résultats sont ceux obtenus précédemment, que l'on rappelle ci-dessous.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS1	60,9%	85 821	131 068	8

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance – optimisation des reconstitutions	238 371	1 116 289	99,4%	100,2%	101,7%

Tableau 19 : résultats de l'optimisation A

### Optimisation B :

On introduit un traité XS5, portant sur le péril Man Made « RC auto ». L'ensemble des périls considérés dans la table de correspondance entre segments et périls est ainsi couvert :

Péril	Type	Traité concerné	Pourcentage de correspondance
Tempête	Cat Nat	XS2	20%
Grêle	Cat Nat	XS3	20%
Inondation	Cat Nat	XS4	20%
RC Auto	Man Made	XS5	40%

Tableau 20 : Périmètre de l'optimisation B

On obtient les résultats suivants :

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS2	61,9%	84 774	134 178	1
XS3	63,4%	82 729	133 994	2
XS4	61,1%	81 885	129 012	2
XS5	58,4%	80 376	122 827	4

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance – optimisation des reconstitutions	235 195	1 025 768	99,3%	100,0%	101,4%

Tableau 21 : résultats de l'optimisation B

Première constatation, le nombre de reconstitutions nécessaires pour le traité XS5 est largement supérieur aux autres traités. La probabilité (cf. figure 16) qu'un sinistre soit attribué à cette tranche étant deux fois supérieure, il s'agit d'un résultat cohérent.

On obtient finalement le comparatif suivant :

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance – optimisation A	238 371	1 116 289	99,4%	100,2%	101,7%
Après réassurance – optimisation B	235 195	1 025 768	99,3%	100,0%	101,4%

Tableau 22 : comparaison des optimisations A et B

Nous pouvons ainsi constater que l'optimisation B, où 4 traités sont considérés séparément, ne permet pas d'améliorer le résultat obtenu (ce dernier est même légèrement inférieur).

En revanche, le SCR CAT a sensiblement diminué par rapport à l'optimisation 1 (- 8%). Il semblerait ainsi que le SCR CAT étant calculé non pas à partir d'une sinistralité répartie comme montré en figure 16, mais à partir d'évènements bicentenaires aux montants fixés, proposer un traité XS par péril permet de l'impacter de manière plus satisfaisante qu'un seul traité XS couvrant l'ensemble des périls.

Choisir une segmentation plus fine des traités n'a donc pas d'impact sur le résultat, mais permet par contre de diminuer le ratio combiné dans des proportions non négligeables. La seconde méthode paraît donc recommandée.

## 2.5) Optimisation d'un traité SL

On choisit ici d'optimiser un traité SL, portant sur l'ensemble des périls et l'unique segment auto. Les autres traités sont pour le moment absents.

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)		
	Taux	AAD (priorité)	AAL (portée)
SL1	13,0%	177 430	8 086 275

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Après réassurance	161 072	1 125 118	99,4%	100,2%	101,8%

Tableau 23 : optimisation du SL

L'optimisation d'un traité SL de ce type portant sur l'ensemble des périls et considéré seul, c'est-à-dire en dehors de tout autre traité, n'a pas grand sens. L'algorithme détermine ainsi une tranche de cession (pour rappel, on travaille ici sur l'ensemble de la sinistralité cumulée, et non pas sinistre par sinistre comme dans le cas du XS) très large, constituée par l'ensemble de la sinistralité, ce qui revient à rapprocher le traité SL d'un traité QP.

On peut toutefois noter que le montant (AAD + AAL) coïncide étroitement avec la sinistralité brute qui est de 8 245 328.

Le résultat après réassurance, est, comme dans le cas du traité QP vu plus haut, diminué d'un montant correspondant au taux de cession, et le S/P n'est pas amélioré. Le ratio combiné est toujours significativement amélioré, mais cette amélioration s'avère moins probante que dans le cas du traité QP.

### 3) Optimisation de l'ensemble des traités

#### 3.1) Optimisation globale avec 4 traités XS

On rappelle les traités mis en place. Ayant déterminé précédemment que l'optimisation via la mise en place des traités XS2, XS3, XS4 et XS5 offrait de meilleurs résultats que l'optimisation résultant du traité XS1, on choisit de ne pas conserver ce dernier.

Nom du traité	Type	Segment(s)	Péris(s)
QP1	QP	Auto	Tous périls
XS2	XS	Auto	Tempête
XS3		Auto	Grêle
XS4		Auto	Inondation
XS5		Auto	RC Auto
SL1	SL	Auto	Tous périls

Tableau 24 : optimisation globale

L'optimisation va cette fois-ci porter sur l'ensemble de ces traités, reconstitutions incluses dans le cas des XS, en considérant dans un premier temps que le traité QP intervient en premier, suivi des XS et enfin du SL. Les XS n'interviennent donc pas sur l'ensemble de la sinistralité mais sur la rétention du QP, idem pour le SL qui intervient sur la rétention des XS.

On obtient les résultats suivants :

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
QP1	15,4%			
XS2	61,2%	76 763	121 986	1
XS3	66,1%	77 826	126 061	2
XS4	62,9%	74 982	120 984	1
XS5	59,7%	73 091	115 793	3
SL1	31,4%	1 956 349	510 735	

Tableau 25 : optimisation globale - résultats

On peut noter que les priorités et les portées des XS diminuent par rapport à l'optimisation réalisée sur les traités XS seuls. Considérant que cette fois-ci le traité QP intervient en amont et que l'on considère donc des montants de sinistres inférieurs en entrée des XS, cela semble tout à fait cohérent.

De même, le nombre de reconstitutions nécessaires a tendance à diminuer, ce qui traduit la cession d'une partie de la sinistralité dans le traité QP.

En revanche, les taux de XS restent sensiblement les mêmes : une fois un sinistre pris en compte dans une tranche, il n'y a pas de raison d'en céder une moindre part.

Le SL intervient mais sur une tranche relativement fine, le coût élevé de ce type de traité explique ce résultat.

Cette optimisation est notée optimisation globale 1. On récapitule les différentes études via le tableau suivant :

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Optimisation du QP seul	162 671	1 060 118	99,4%	100,1%	101,5%
Optimisation des XS seuls – un seul XS tous périls	238 371	1 116 289	99,4%	100,2%	101,7%
Optimisation des XS seuls – 4 traités distincts	235 195	1 025 768	99,3%	100,0%	101,4%
Optimisation du SL seul	161 072	1 125 118	99,4%	100,2%	101,8%
<b>Optimisation globale 1</b>	<b>264 880</b>	<b>917 845</b>	<b>99,1%</b>	<b>99,8%</b>	<b>101%</b>

Tableau 26 : récapitulatif des études

Cette optimisation globale permet d'obtenir de meilleurs résultats que les optimisations individuelles réalisées précédemment.

Par rapport à l'absence de réassurance, le résultat est augmenté de 43,3%, et les ratios combinés sont les plus bas obtenus (diminution entre 0,5 points et 1,2 points selon la durée)

### 3.2) Optimisation globale avec un seul traité XS tous périls

Dans ce cas de figure, les traités mis en place sont les suivants :

Nom du traité	Type	Segment(s)	Péris(s)
QP1	QP	Auto	Tous périls
XS1	XS	Auto	Tous périls
SL1	SL	Auto	Tous périls

Tableau 27 : traités mis en place pour l'optimisation globale avec un seul traité XS tous périls

On cherche ici à vérifier le résultat obtenu plus haut, à savoir que l'optimisation avec un seul XS « tous périls » est moins performante que l'optimisation pour une segmentation plus fine des XS (un traité XS par péril).

On obtient les résultats suivants :

Traité(s) optimisé(s)	Paramètre(s) optimisé(s)			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
QP1	16,1%			
XS1	64,7%	80 112	119 351	7
SL1	34,0%	1 874 562	523 406	

Tableau 28 : résultats de l'optimisation globale avec un seul traité XS tous périls

Par rapport à l'optimisation globale 1, on peut observer que les paramètres du QP et du SL restent sensiblement les mêmes. De même, le taux, la priorité et la portée du XS sont comparables. En revanche, le nombre de reconstitutions est différent, mais correspond environ à la somme de l'ensemble des reconstitutions nécessaires pour les 4 traités individuels.

Cette optimisation est notée optimisation globale 2. On récapitule les différentes études via le tableau suivant :

	Résultat (€)	S/P	SCR CAT (€)
Avant réassurance	184 841	97,9%	1 241 044
Optimisation du QP seul	162 671	97,9%	1 060 118
Optimisation des XS seuls – un seul XS tous périls	238 371	96,1%	1 116 289
Optimisation des XS seuls – 4 traités distincts	235 195	96,2%	1 025 768
Optimisation du SL seul	161 072	97,9%	1 125 118
Optimisation globale 1	264 880	95,2%	1 007 254
<b>Optimisation globale 2</b>	<b>265 359</b>	<b>95,2%</b>	<b>1 084 316</b>

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
Optimisation du QP seul	162 671	1 060 118	99,4%	100,1%	101,5%
Optimisation des XS seuls – un seul XS tous périls	238 371	1 116 289	99,4%	100,2%	101,7%
Optimisation des XS seuls – 4 traités distincts	235 195	1 025 768	99,3%	100,0%	101,4%
Optimisation du SL seul	161 072	1 125 118	99,4%	100,2%	101,8%
<b>Optimisation globale 1</b>	<b>264 880</b>	<b>917 845</b>	<b>99,1%</b>	<b>99,8%</b>	<b>101%</b>
<b>Optimisation globale 2</b>	<b>242 359</b>	<b>978 127</b>	<b>99,2%</b>	<b>99,9%</b>	<b>101,3%</b>

Tableau 29 : récapitulatif des études n°2

Ces résultats correspondent à ceux observés précédemment : le fait de n'optimiser qu'un seul XS tous périls conduit aux mêmes conclusions en ce qui concerne le résultat. En revanche la réduction des ratios combinés est moins conséquente.

Dans notre cas l'optimisation globale 1 est préférable.

En complément du tableau, la figure ci-dessous résume la performance de chacun des types d'optimisation. Cette dernière est évaluée suivant une échelle de 1 à 5, 5 étant la performance maximale observée.

### Performance des différentes optimisations réalisées

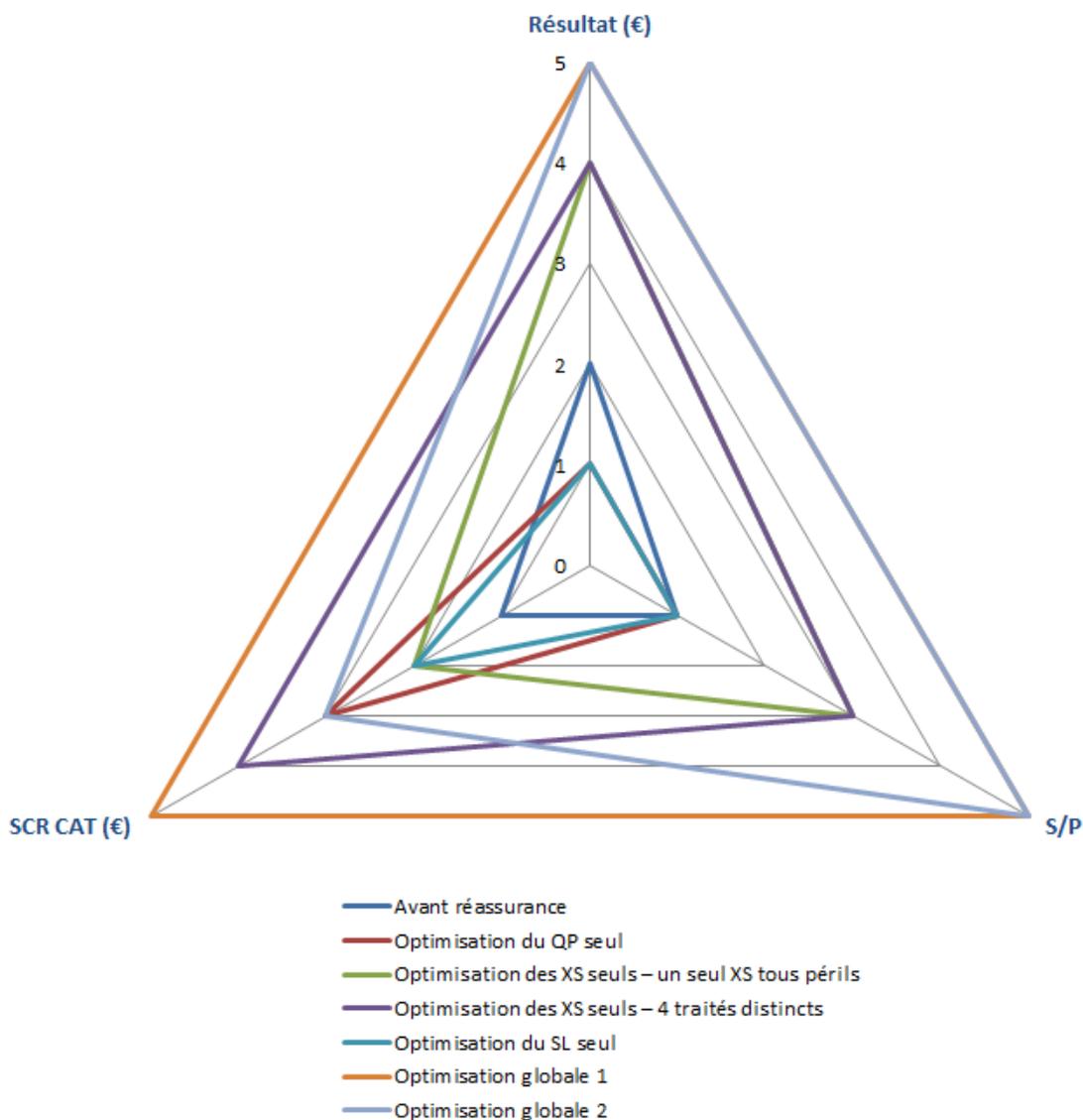


Figure 17 : Performance des différentes optimisations réalisées

### 3.3) Position du traité QP

On cherche ici à déterminer la position optimale du traité QP. Trois options sont possibles, en premier, entre les XS et le SL, ou en dernier.

Il est important de noter que cette notion de position du traité QP est un paramètre que l'utilisateur peut modifier à l'intérieur du modèle de réassurance (cf. Partie 2, 2.4), mais elle n'a pas été retenue comme variable optimisable en raison de la difficulté de modélisation qui aurait été engendrée par ce choix.

On va donc se contenter de réaliser trois *runs* bien distincts du modèle d'optimisation, et les comparer.

Etant donné qu'il s'agit du plus performant, c'est le modèle d'optimisation 1 qui sera retenu. On propose à partir de ce modèle les 3 options suivantes :

Modèle	Position du QP
Optimisation 1a	En premier
Optimisation 1b	Entre les XS et le SL
Optimisation 1c	En dernier

Tableau 30 : positions possibles du traité QP

En pratique, l'optimisation 1a a déjà été détaillée dans le paragraphe précédent, en voici les résultats :

Optimisation 1a				
Traité(s) optimisé(s)	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
QP1	15,4%			
XS2	61,2%	76 763	121 986	1
XS3	66,1%	77 826	126 061	2
XS4	62,9%	74 982	120 984	1
XS5	59,7%	73 091	115 793	3
SL1	31,4%	1 956 349	510 735	

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
<b>Optimisation globale 1a</b>	264 880	917 845	99,1%	99,8%	101%

Tableau 31 : rappel des résultats de l'optimisation 1a

Voici ce que l'on obtient pour l'optimisation 1b :

Optimisation 1b				
Traité(s) optimisé(s)	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS2	61,9%	83 875	136 285	2
XS3	63,4%	83 102	132 930	2
XS4	61,1%	80 928	127 869	2
XS5	58,4%	82 792	121 739	4
QP1	3,9%			
SL1	31,4%	1 956 349	510 735	

Tableau 32 : optimisation 1b

Les portées et priorités des XS redeviennent comparables à ce qui avait été obtenu en 2.3, lorsque seuls les traités XS étaient considérés. Le SL est quant à lui très proche des résultats obtenus en 3.1.

En revanche, le traité QP, ainsi placé, devient presque inutile.

On obtient finalement, pour l'optimisation 1b :

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
<b>Optimisation globale 1b</b>	<b>233 307</b>	<b>1 034 548</b>	<b>99,3%</b>	<b>100%</b>	<b>101,4%</b>

Tableau 33 : résultats de l'optimisation 1b

Cette optimisation est donc moins performante que l'optimisation 1a. La position pré-XS du traité QP semble ainsi dans notre cas essentielle, afin d'être capable de limiter la sinistralité entrant dans ces XS.

Partant de ce principe, on peut anticiper que l'optimisation 1c ne devrait pas non plus permettre de gagner en performance. Vérifions :

Traité(s) optimisé(s)	Optimisation 1c			
	Taux	Priorité	Portée	Nombre de reconstitutions
XS2	61,6%	82 759	135 273	2
XS3	63,9%	83 899	130 708	2
XS4	60,5%	80 269	128 120	2
XS5	59,7%	81 116	122 652	4
SL1	29,9%	1 927 457	520 840	
QP1	2,1%			

Tableau 34 : optimisation 1c

On obtient des résultats comparables à l'optimisation 1b pour les traités XS et SL. Et de même, le traité QP, ainsi placé, devient presque inutile.

On obtient finalement, pour l'optimisation 1c :

	Résultat (€)	S/P	SCR CAT (€)
Avant réassurance	184 841	97,9%	1 241 044
<b>Optimisation 1c</b>	<b>229 825</b>	<b>96,4%</b>	<b>1 039 621</b>

	Résultat (€)	SCR CAT (€)	RC (duration 2 ans)	RC (duration 3 ans)	RC (duration 5 ans)
Avant réassurance	184 841	1 241 044	99,6%	100,4%	102,2%
<b>Optimisation globale 1c</b>	<b>229 825</b>	<b>1 039 621</b>	<b>99,3%</b>	<b>100%</b>	<b>101,5%</b>

Tableau 35 : résultats de l'optimisation 1c

En conclusion, faire intervenir le traité QP avant l'ensemble des autres traités permet d'obtenir les meilleurs résultats.

La figure ci-dessous compare les performances des optimisations 1a, 1b et 1c. Cette dernière est évaluée suivant une échelle de 1 à 5, 5 étant la performance maximale observée.

### Performance des optimisations 1a, 1b et 1c

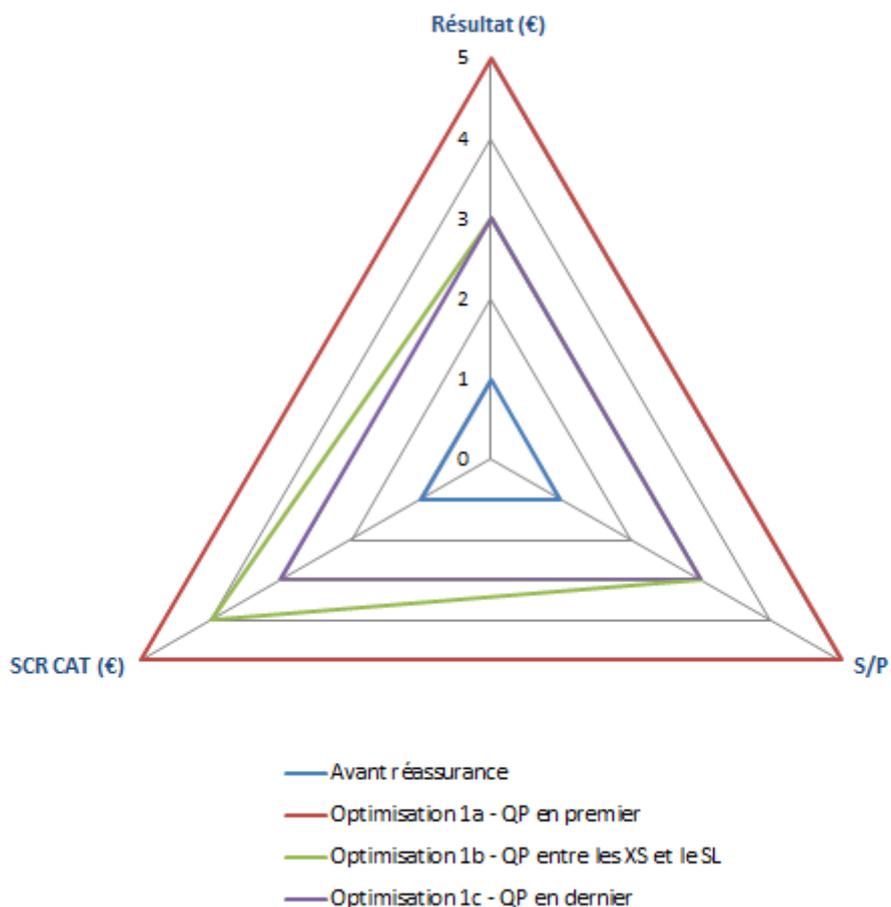


Figure 18 : Performance des optimisations 1a, 1b et 1c

## 4) Etude des différents paramètres de l'algorithme génétique

Les variables caractérisant l'algorithme génétique sont résumées dans le tableau suivant :

Variable	Descriptif	Valeur par défaut
Taille de la population	Nombre d'individus créés à chaque génération	50
Nombre de générations	Nombre de générations de nouveaux individus créées, dans le cas où le critère d'arrêt n'est pas utilisé	10
Taux de croisement	Probabilité, pour chaque chromosome d'un individu, de subir un croisement	50%
Taux de mutation	probabilité, pour chaque chromosome d'un individu, de subir une mutation	1%

Tableau 36 : résumé des variables caractérisant l'algorithme génétique

L'objectif de cette partie sera de réaliser une étude pour chacun de ces paramètres, les autres étant fixés à leur valeur de défaut. On se place dans le cas de l'optimisation globale présentée en 3.1), qui consiste en une optimisation d'un traité QP, 4 traités XS et un traité SL.

### 4.1) Etudes sur la taille de la population et le nombre de générations

Pour cette étude on utilise le critère d'arrêt, ce qui revient faire tourner le modèle jusqu'à ce qu'il y ait convergence.

On cherche à optimiser la vitesse de convergence, ce qui revient à obtenir le meilleur ratio entre le nombre de générations nécessaire à la convergence et le nombre d'individu par génération. On s'intéresse donc au nombre de générations nécessaire en fonction de la taille de la population.

On obtient les résultats suivants :

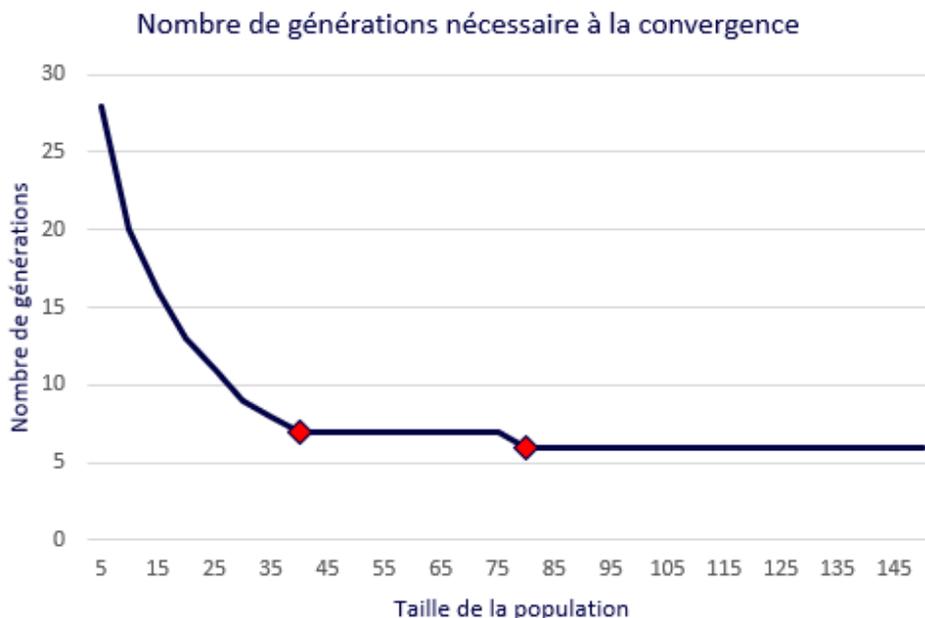


Figure 19 : Nombre de générations nécessaire à la convergence

Bien entendu, une taille de population très faible nécessitera un grand nombre de générations. A l'inverse, passé un certain nombre, augmenter le nombre d'individus n'aura plus d'impact sur la convergence, qui nécessitera de toute façon un nombre minimal de générations. Ici, le figure 17 montre que le modèle requiert un minimum de 6 générations pour converger, indépendamment de la taille de la population. Une possibilité pourrait donc être de considérer la taille minimale de population permettant de converger en 6 générations, soit ici une population de 80 individus. Néanmoins, comme le montre la courbe, une population de 40 individus semble également très intéressante car il ne lui faudra qu'une génération de plus pour converger.

Pour départager ces 2 solutions, on va s'intéresser au temps de convergence. La figure ci-dessous représente l'évolution de celui-ci, en fonction de la taille de la population, le temps obtenu pour 40 individus faisant office de base et valant 1 :

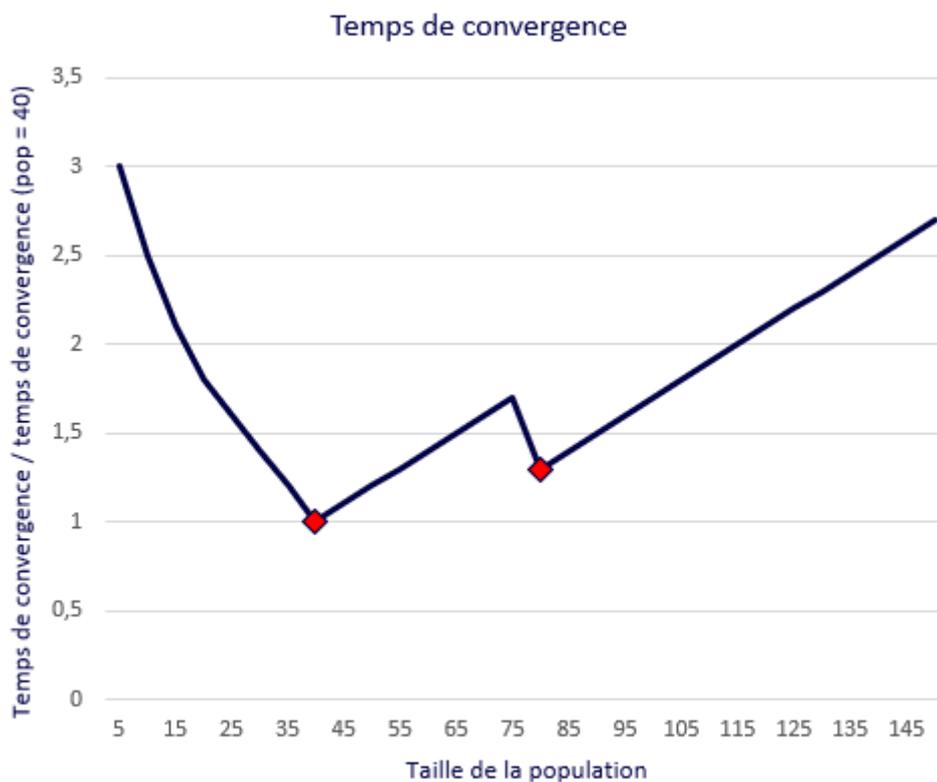


Figure 20 : Temps de convergence en fonction de la taille de la population

L'intuition initiale est donc la bonne, la convergence avec 40 individus s'avère plus rapide qu'avec 80, même si elle nécessite une génération de plus.

#### 4.2) Etude sur le taux de croisement

Le taux de croisement est un paramètre déterminant car c'est essentiellement lui qui donne à l'algorithme génétique sa capacité à créer une nouvelle génération d'individus. Intuitivement, un taux de croisement trop bas entraîne un

renouvellement insuffisant des individus, mais un taux de croisement trop élevé risque d'accroître les temps de calcul et/ou le nombre de générations nécessaires à la convergence.

L'objectif est ici de déterminer le taux de croisement optimal permettant la convergence la plus rapide. On va donc étudier le temps de convergence en fonction du taux de croisement, le temps obtenu pour un taux de 50% faisant office de base et valant 1 :

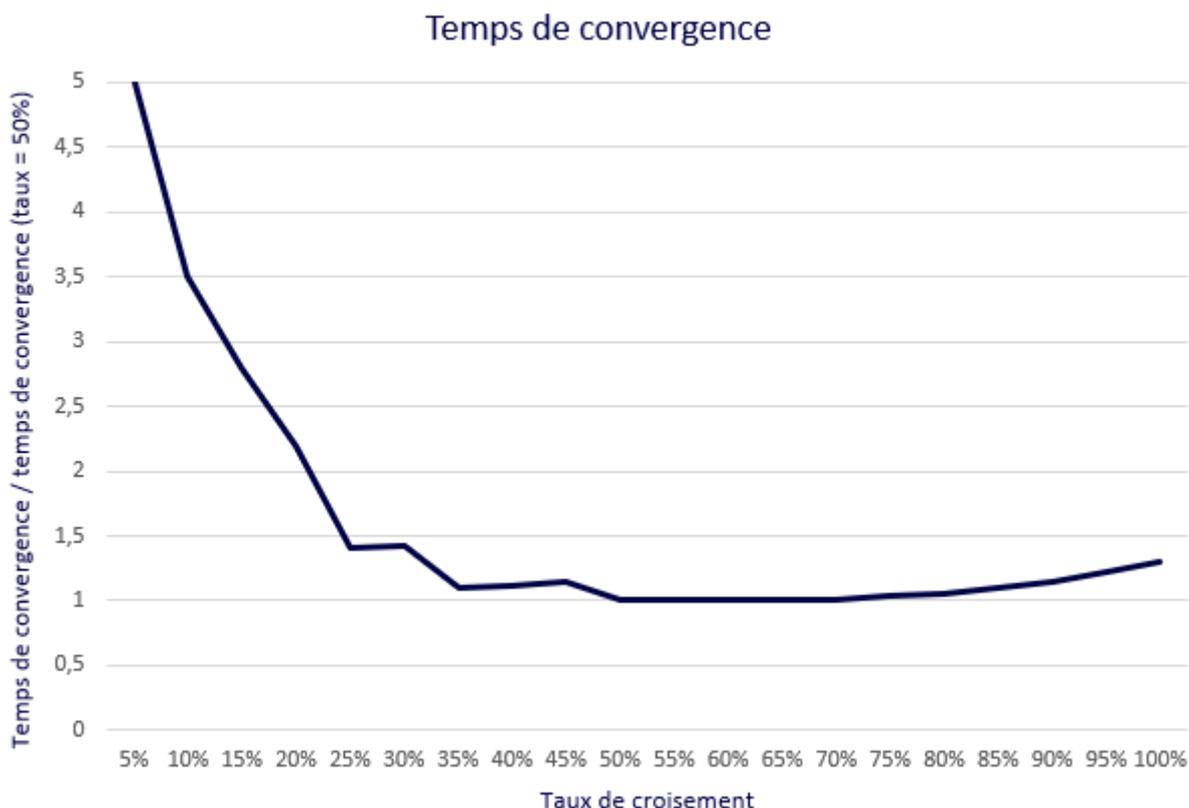


Figure 21 : Temps de convergence en fonction du taux de croisement

La forme générale de la courbe est la forme attendue : en-dessous de 50%, plus le taux diminue et plus la convergence est lente, de manière flagrante. Dans ce cas on observe une croissance du temps de convergence par paliers : chaque augmentation est due à la nécessité d'ajouter une ou plusieurs générations. Les paliers ne sont pas exactement constants, car à nombre de générations égal, un taux de croisement de 40% demandera légèrement plus de calculs qu'un taux de 35% (légère croissance observée sur le graphique).

Par contre, au-delà de 50%, l'augmentation n'est pas aussi franche. Elle ne traduit plus la nécessité d'augmenter le nombre de générations, mais simplement le fait qu'un taux de croisement plus élevé nécessite plus de calculs. On observe ainsi qu'entre 50% et 70%, les temps de convergence sont très proches.

50% reste la meilleure option avec un pas de 5%, mais si l'on affine l'étude entre 45% et 50% on obtient la courbe suivante :

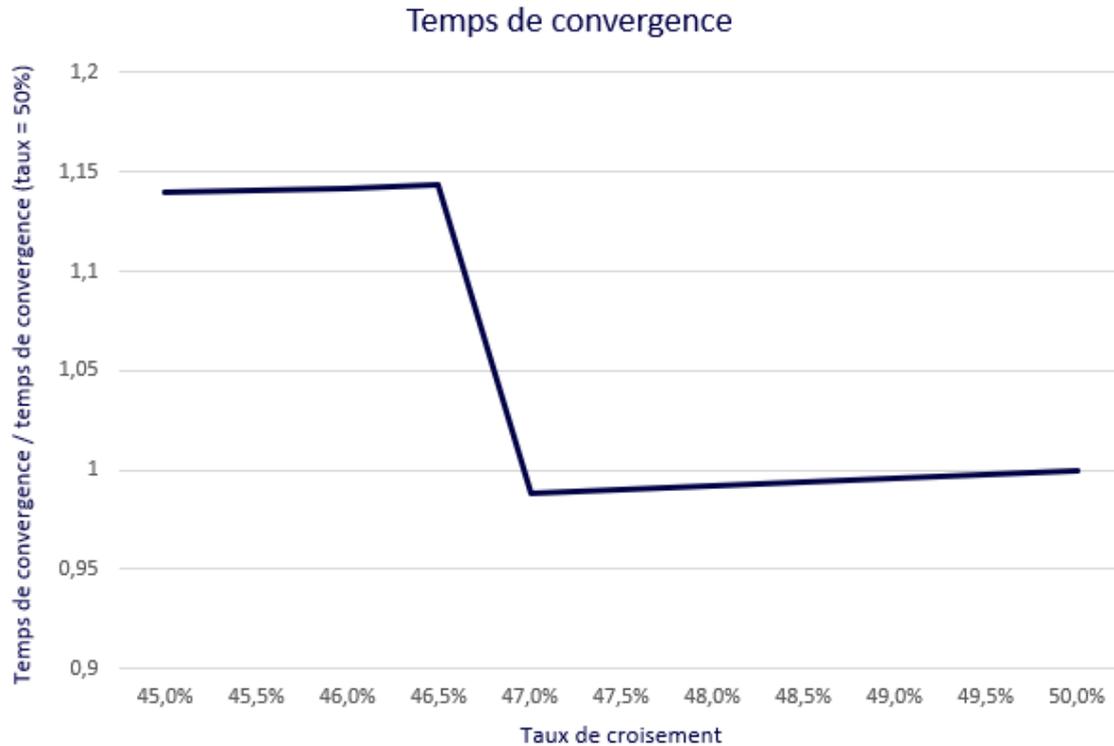


Figure 22 : Temps de convergence en fonction du taux de croisement, zoom sur la zone [45% - 50%]

On s’aperçoit alors que la valeur optimale pour le taux de croisement n’est plus 50% mais 47% : il s’agit de la plus petite valeur permettant de conserver le même nombre de générations nécessaire à la convergence. En-dessous de cette valeur, une génération de plus est nécessaire, ce qui entraîne une augmentation nette de temps de convergence.

### 4.3) Etude sur le taux de mutation

Le rôle de l’opérateur de mutation est d’éviter que l’algorithme ne « fasse fausse route » en convergeant vers un extremum local. Le taux de mutation n’a donc pas pour but d’accélérer la vitesse de convergence ou de diminuer le nombre de générations nécessaires, bien au contraire. On s’attend ainsi à ce qu’une augmentation de ce taux entraîne un temps de convergence plus long. Il est également probable qu’au-delà d’un certain taux, la convergence ne soit plus possible.

On étudie ici le temps de convergence en fonction du taux de mutation, le temps obtenu pour un taux de 0% faisant office de base et valant 1 :

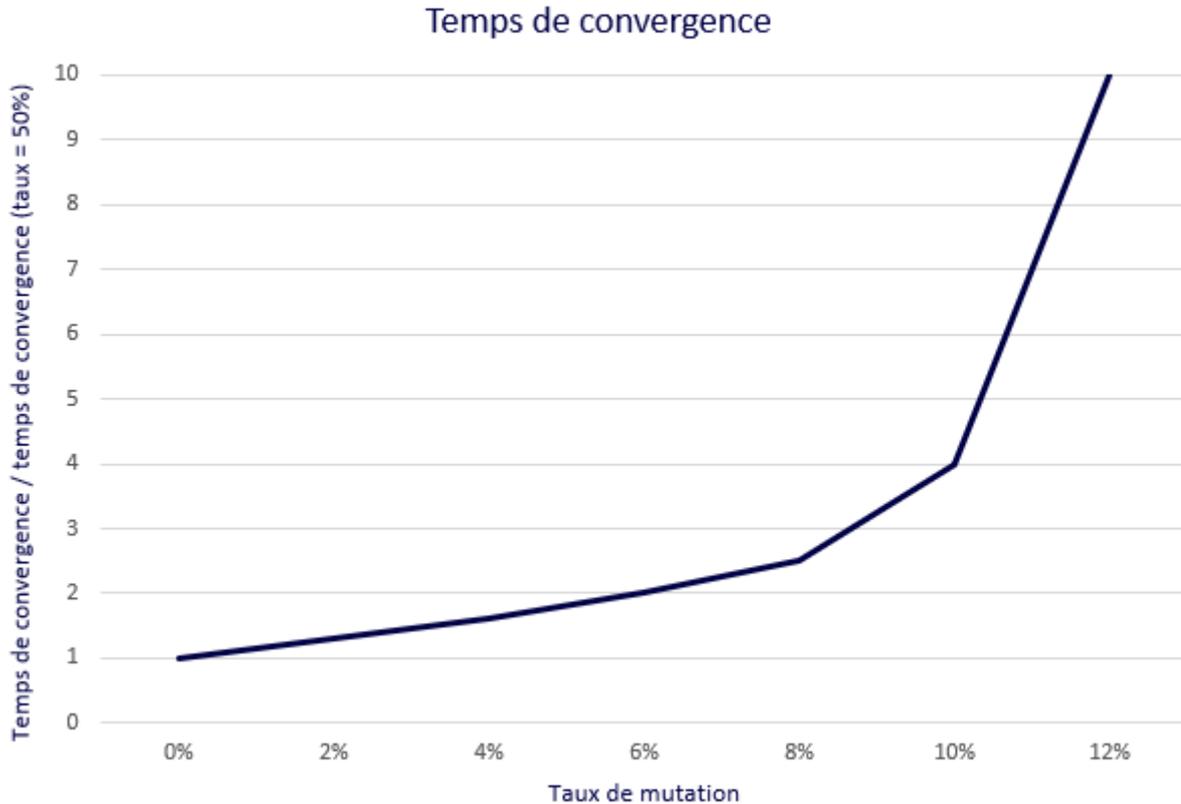


Figure 23 : Temps de convergence en fonction du taux de mutation

Au-delà de 12%, la convergence devient impossible, ou tout du moins beaucoup trop lente pour être évaluée. L'intuition initiale était donc la bonne : l'augmentation du taux de mutation entraîne nécessairement l'augmentation du temps de convergence. Ceci étant, il ne convient pas d'en conclure que 0% est la valeur optimale : un faible taux de mutation reste nécessaire au bon fonctionnement de l'algorithme.

#### 4.4) Paramètres optimaux pour l'algorithme

Les études réalisées précédemment nous ont ainsi permis de déterminer les paramètres les plus adaptés à notre optimisation de réassurance.

La taille de population optimale est de 40 individus.

Le taux de croisement optimal est de 47%.

Enfin, l'étude concernant le taux de mutation ne permet pas d'être aussi catégorique quant à une valeur optimale. D'une part nous avons pu déterminer qu'une valeur non nulle entre 0% et 8% était adaptée, et d'autre part pour minimiser le temps de convergence il convient de choisir une valeur assez faible. 1% semble finalement constituer une bonne option.



## Conclusion

Nous avons pu constater, via une approche théorique puis une application sur un portefeuille IARD, que les spécificités de l'algorithme génétique étaient tout à fait adaptées à notre problématique d'optimisation de réassurance.

Nous avons ainsi pu assimiler un ensemble de paramètres inhérents aux traités traditionnels de réassurance à une population, peuplée d'un certain nombre d'individus, et faire évoluer cette population jusqu'à l'individu optimal. Celui-ci représente la meilleure stratégie de réassurance à mettre en place au regard d'une problématique prenant en compte le résultat technique de l'assureur et le capital règlementaire requis au titre du risque catastrophe non-vie sous Solvabilité 2.

D'un point de vue pratique, cette méthodologie permettrait à tout assureur IARD de piloter de manière optimale sa politique de réassurance, sans forcément remettre en question les traités historiques en place, mais en ajustant leurs paramètres afin qu'ils coïncident au mieux avec les besoins et objectifs globaux de la compagnie. Compte tenu des performances tout à fait acceptables observées, un tel processus pourrait être mis en place à chaque renouvellement annuel.

Les résultats obtenus dans ce mémoire laissent entrevoir diverses possibilités d'optimisation, allant d'un travail très fin sur un paramètre d'un traité en place, à la remise en question complète d'une stratégie de réassurance. La modélisation effectuée, via la prise en compte d'un pas de projection, peut même être étendue à un raisonnement prospectif afin d'évaluer l'impact d'une stratégie donnée sur plusieurs années, ou encore de déterminer la meilleure stratégie à mettre en place compte-tenu d'objectifs pluriannuels.

Enfin, l'algorithme génétique s'étant avéré tout à fait adapté à cette problématique d'optimisation de réassurance, tout laisse à penser qu'une optimisation sur le même principe pourrait être proposée dans le cadre d'autres travaux actuariels. Un assureur pourrait ainsi l'utiliser avec un modèle ALM, afin d'optimiser sa stratégie d'allocation d'actifs. Dans un autre registre, l'optimisation d'un SCR a été abordée dans ce mémoire, et la méthode pourrait être étendue au SCR non-vie global, via des travaux similaires sur les risques de prime et de réserve. Ceci étant, on peut souligner que l'utilisation en assurance-vie semble plus complexe, dans le sens où le grand nombre de simulations requis risque fort d'entraîner des temps de calcul beaucoup trop élevés pour que la modélisation soit réellement exploitable.

## Table des illustrations

Figure 1 : Exemple de traité QP à 70% de cession .....	11
Figure 2 : Exemple de traité XP (Rétention = 80).....	12
Figure 3 : Exemple de traité XS : 40 XS 80 .....	13
Figure 4 : Exemple de traité SL protégeant un S/P de 1 (40% XS 100%) .....	14
Figure 5 : Entrées et sorties du modèle .....	17
Figure 6 : Structure simplifiée du modèle .....	18
Figure 7 : Ordre d'application des traités de réassurance.....	23
Figure 8 : Exemple de table de correspondance Branche-Péril.....	24
Figure 9 : Application des reconstitutions .....	26
Figure 10 : Vocabulaire de base de l'algorithme génétique .....	37
Figure 11 : Schéma de l'opérateur de croisement.....	39
Figure 12 : Schéma itératif de l'algorithme génétique .....	41
Figure 13 : Liens entre les différents modèles.....	44
Figure 14 : Une population sous forme matricielle .....	45
Figure 15 : Critère d'arrêt et nombre maximal de génération .....	49
Figure 16 : Gestion d'un sinistre pour une tranche XS .....	57
Figure 17 : Performance des différentes optimisations réalisées .....	63
Figure 18 : Performance des optimisations 1a, 1b et 1c .....	66
Figure 19 : Nombre de générations nécessaire à la convergence.....	67
Figure 20 : Temps de convergence en fonction de la taille de la population.....	68
Figure 21 : Temps de convergence en fonction du taux de croisement .....	69
Figure 22 : Temps de convergence en fonction du taux de croisement, zoom sur la zone [45% - 50%] .....	70
Figure 23 : Temps de convergence en fonction du taux de mutation.....	71

## Bibliographie

- BOUAZIZ, K. [2013] « Etude de la convergence d'une combinaison de familles du gradient conjugué », 48-53.
- CHARPENTIER A. [2014] « Computational Actuarial Science with R », 76-88.
- GOLDBERG, D. [1989] « Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning », 59-88.
- JEMINET, J. [2012] « Optimisation de la réassurance non proportionnelle en arrêt de travail », 49-60.
- MALINGE, D. [2013] « Optimisation d'un portefeuille de réassurance non-vie : l'exemple du Property & Casualty, 14-29.
- MLYNARCZYK, E. [2014] « Technique et pratique de la réassurance », 17-97.
- MONIN, C. [2014] « Optimisation multi objectif de l'allocation stratégique par un algorithme génétique», 23-44.
- NOCEDAL, J. [2006] « Numerical optimization », 100-162.