

MEMOIRE D'ACTUARIAT

Mise en œuvre d'un calcul de *best estimate*

Elie IFERGAN

Université Paris-Dauphine
Master 2 Actuariat 2012-2013

Tuteur de mémoire : Frédéric PLANCHET

Résumé

Mots clés : Solvabilité 2, Best estimate, Interactions Actif/Passif, Taux d'actualisation, Modèle de Hull et White (1990), Spread, Juste valeur.

Dans le cadre de l'évaluation des passifs sous Solvabilité 2, le secteur assurantiel met en place un ensemble d'outils dédié au calcul des provisions techniques à même de respecter les nouvelles règles prudentielles. Ces outils sont basés sur des modèles mathématiques permettant de valoriser en *fair value* les engagements contractés à l'égard des assurés. De plus, le principe de cohérence avec les valeurs de marché introduit par la directive nécessite l'utilisation des marchés financiers comme références aux calibrages des modèles mathématiques pour le calcul des actifs et des passifs. De ce fait, le bilan économique est soumis aux aléas des marchés financiers mais aussi au degré de précision avec lequel les méthodes d'estimation ont été paramétrées et calibrées.

Notre étude consiste dans un premier temps à analyser les imperfections de calculs de *best estimate* en mesurant les biais induits par les approximations numériques des modèles théoriques utilisés. Puis, dans un second temps nous nous focaliserons sur la volatilité des ratios de solvabilité causée en partie par la volatilité du *best estimate*. Tout au long de cette étude nous tenterons de proposer des solutions adéquates aux problématiques posées à même de répondre aux objectifs de la directive.

Abstract

Keywords : Solvency 2, Best estimate, Asset & liability interactions, Discount rate, Hull and White's model (1990), Spread, Fair value.

In the context of liabilities valuation under Solvency 2, the insurance industry is setting up tools dedicated to the assessment of technical provisions in order to meet the new prudential rules. These tools are based on mathematical models which allow determining contractual obligations in fair value. Moreover, the principle of market consistency introduced by the directive requires to use financial markets as references to mathematical models at the date of assets and liabilities valuation. Thus, the balance sheet is subject to the variation of the financial markets but also to the degree of accuracy with which the estimation methods have been configured and calibrated.

In a first step, our study analyzes the shortcomings of best estimate calculations by measuring the bias induced by the numerical approximations of the theoretical models used. Then, in a second step we focus on the volatility of the solvency ratios in part due to the volatility of the best estimate. Throughout this study we try to propose appropriate solutions to the issues in order to be in line with the objectives of the prudential framework.

Synthèse

Le *best estimate* est de fait sensible à la paramétrisation des méthodes numériques et au calibrage des hypothèses économiques en entrée de modèle. Cette présente étude propose d'analyser les biais de discrétisation et d'échantillonnage des modèles stochastiques pour le calcul d'un *best estimate* en cas d'interactions Actif/Passif puis de méditer autour des méthodes de valorisation proposées pas Solvabilité 2 et particulièrement sur le choix de la courbe d'actualisation pour l'évaluation des engagements.

I. Degré de précision du calcul d'un *best estimate*

Le calcul d'un *best estimate* est effectué en pratique par simulation en univers risque neutre afin de remplir la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ce calcul découle de la formule suivante vers laquelle il est censé converger :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha} \otimes \mathbb{Q}^f} \left(\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times X(t) \right)$$

où $\delta(t)$ correspond au processus d'actualisation et $X(t)$ aux flux aléatoires du Passif.

Notons que ce calcul peut être simplifié lorsqu'il n'y a pas d'interactions Actif/Passif. Il suffit alors d'utiliser directement la courbe des taux zéro-coupon observable sur les marchés financiers à la place du processus d'actualisation.

Cependant, les méthodes numériques utilisées pour évaluer le montant des provisions techniques nécessitent de choisir le nombre de simulations et le pas de discrétisation. Il faut cependant distinguer le pas de temps utilisé pour la projection des flux de celui utilisé pour l'approximation du coefficient d'actualisation à travers la projection du taux court noté r . C'est la sensibilité du *best estimate* à cette dernière discrétisation que nous analysons.

a. Mesure des biais de discrétisation et de convergence sur le prix d'un zéro-coupon

Nous calculons dans un premier temps les erreurs occasionnées par ce schéma de valorisation sur le calcul d'un zéro-coupon $P(0, T)$ où :

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T r(u) du \right) \right]$$

Ce prix est approché numériquement par l'estimateur suivant :

$$\widehat{P}_N(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{r}^i(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) \right)$$

où N est le nombre de simulations, \tilde{r} la version discrétisée de r et p le nombre d'intervalles de discrétisation entre 0 et T

A l'aide du modèle de Hull et White et d'un schéma de discrétisation exacte pour l'approximation du taux court, il est possible de calculer l'espérance et la variance de cet estimateur. Nous pouvons alors en déduire le biais de discrétisation « technique » et le biais de convergence. Notons que pour les besoins de cette étude les taux *forward* intervenant dans le modèle de Hull et White ont été calibrés à partir de la courbe zéro-coupon au 31/12/2011 fournie par l'EIOPA (dans le cadre de l'exercice LTGA) et du modèle de Svensson.

Il s'avère que le biais de discrétisation « technique » est sensible au pas de discrétisation choisi. A titre d'exemple, l'erreur relative mesurée sur le prix d'un zéro-coupon avec un pas de temps uniforme annuel est de - 0,649 % tandis qu'avec un pas de temps quotidien cette erreur passe à - 0,0024 %. De plus, la vitesse de convergence de cet estimateur est lente quand bien même le pas de discrétisation serait fin. Il est à noter que cette lenteur s'accroît lorsque la maturité du zéro-coupon augmente.

L'accumulation de ces biais permet alors de quantifier l'erreur relative totale qui peut être obtenue par cet estimateur. Il est d'ailleurs intéressant de constater sur la figure ci-dessous l'importance du nombre de trajectoires de taux court qu'il faut simuler pour diminuer cette erreur et obtenir un résultat plus précis même lorsque le pas de temps choisi est quotidien.

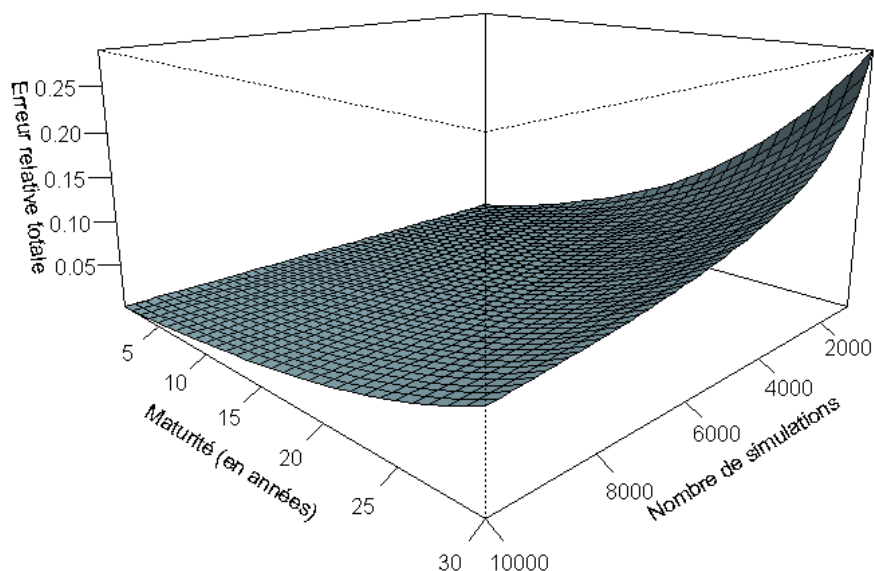


Figure 1 Surface de l'erreur relative totale en fonction de la maturité et du nombre de simulations pour un pas de temps quotidien

b. Illustration des biais sur le calcul d'un best estimate

Nous souhaitons à présent illustrer la sensibilité du *best estimate* au pas de discrétisation pour la projection du taux court et au nombre de simulations stochastiques. Rappelons que le taux court intervient à la fois pour le calcul du coefficient d'actualisation mais aussi dans la modélisation des flux à l'Actif notamment via Black et Scholes pour les actions (pour approcher la dérive) et via Hull et White pour les obligations. Il s'agit alors de mesurer l'accumulation des erreurs en comparant les écarts de convergence en fonction du paramétrage des méthodes de calculs.

Pour cela, nous commençons d'abord par recalculer la valeur du *best estimate* d'un contrat en unités de compte à l'aide d'un modèle ALM simplifié. Notons que dans ce cas la valeur du *best estimate* est déjà connue et qu'elle correspond à la valeur initiale de l'investissement égale dans notre cas à 1 €. Puis, nous calculons le *best estimate* dans le cadre d'un « vrai » modèle ALM où cette fois la valeur théorique est inconnue. Notons que le *best estimate* est calculé à l'aide du schéma suivant où D correspond au nombre d'années de projection des flux du Passif :

$$Best\ estimate = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{t=1}^D \delta^j(t) \times Flux^j(t) \right)$$

Les résultats obtenus avec le modèle ALM simplifié montrent l'intérêt de choisir un pas de temps fin sous réserve d'effectuer un grand nombre de simulations afin de limiter l'erreur d'échantillonnage. Ces résultats sont d'ailleurs homogènes avec ceux obtenus à l'aide du « vrai » modèle ALM, ce qui permet de confirmer notre analyse.

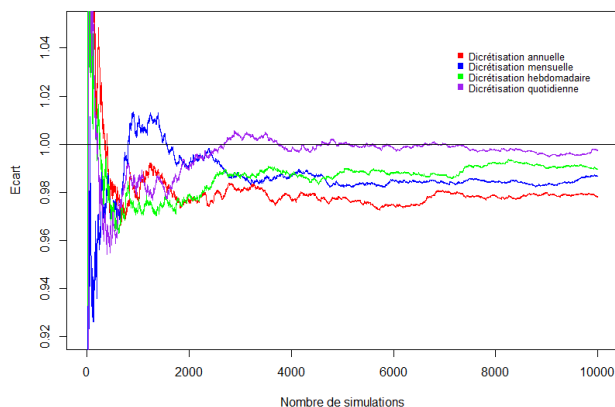


Figure 2 Ecart de convergence (modèle ALM simplifié)

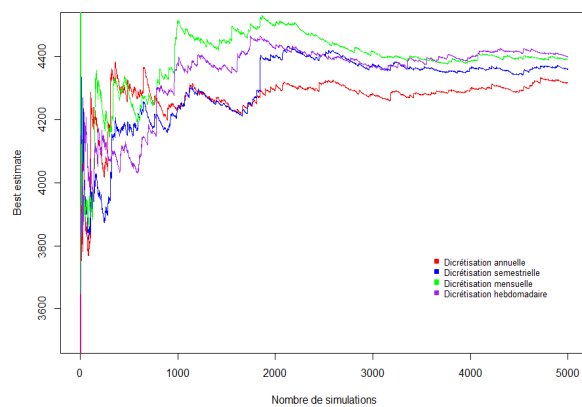


Figure 3 Ecart de convergence (« vrai » modèle ALM)

Ainsi, ces figures montrent que pour un nombre de simulation donné, le *best estimate* peut converger vers une valeur qui n'est pas la bonne parce que le pas de discrétisation choisi pour la discrétisation du taux court n'est pas assez fin.

II. Choix des hypothèses économiques pour le calcul d'un best estimate

Outre la sensibilité du *best estimate* aux imperfections des modèles, l'évaluation des composantes du bilan en *fair value* rend difficilement appréciable sa lecture à court terme. En effet, le concept de valorisation initialement proposée par Solvabilité 2 introduit une volatilité artificielle dans les bilans économiques provoquant de ce fait l'instabilité des ratios de solvabilité. Il convient alors de s'interroger sur les causes et conséquences de cette volatilité tout en essayant de trouver des solutions adaptées pour stabiliser les bilans prudentiels.

a. Constat de l'instabilité des marchés financiers et des bilans prudentiels

Les formes d'instabilité que peuvent prendre les fluctuations des cours de bourse, notamment en cas de marché stressé, met en relief les limites des méthodes de valorisations préconisées par Solvabilité 2 et basées sur le concept de « juste valeur ». En effet, lors de tensions passagères sur les marchés financiers, les valeurs de marché peuvent se déconnecter rapidement des valeurs fondamentales compromettant de ce fait une évaluation juste des actifs.

Ce contexte permet de constater que l'évaluation du bilan économique prend en compte des risques auxquels les assureurs ne sont pas exposés et qui tendent à sous-estimer leur ratio de couverture. D'une part les actifs sont valorisés à leur valeur de marché. Ils sont donc soumis au risque de *spread*, lequel traduit leurs risques de crédit, de défaut et de liquidité. Or, pour les actifs détenus jusqu'à maturité, les risques de crédit et de liquidité n'ont pas lieu d'être pris en compte dans leur évaluation, leur but étant seulement de couvrir les *cash-flows* du Passif. Ces derniers étant actualisés au taux sans risque, une augmentation du risque de *spread* à l'Actif peut alors entraîner à tort une remise en cause de la qualité d'adossement Actif/Passif. D'autre part, la fluctuation des taux zéro-coupon nécessaires à l'évaluation des engagements amplifie ce phénomène d'instabilité en entraînant la volatilité du *best estimate*. Cette volatilité se reporte alors sur le montant des fonds propres pouvant mettre en péril l'exigence de marge de solvabilité requise (SCR).

b. Réflexion autour des solutions

Le constat de la volatilité des bilans prudentiels a conduit dans un premier temps le régulateur à proposer dans le QIS5 la prime d'illiquidité. Cette prime, correspondant à un ajustement de la courbe d'actualisation des passifs, était destinée à retranscrire dans le bilan économique la part d'illiquidité des passifs à l'instar de l'évaluation des actifs sur les marchés financiers. Cependant cette première solution s'est révélée inadaptée au contexte prudentiel : elle remet en cause le principe de cohérence avec les valeurs de marché et incite à une consommation excessive de capital la première année conduisant

ainsi à une remise en cause de la solvabilité future des organismes d'assurance. L'EIOPA a donc proposé d'autres solutions dans l'exercice LTGA, faisant suite au QIS5 :

- La Prime contra-cyclique, destinée à ajuster la courbe des taux zéro-coupon en cas de marché stressé permettant aux assureurs de retrouver leur ratio de couverture initial et leur épargnant se débarrasser de certains actifs, évitant ainsi d'accentuer les tensions sur les marchés financiers par des comportements pro-cycliques ;
- Les primes d'adossment « Classique » et « Etendue », permettant de tenir compte de l'adéquation Actif/Passif dans l'évaluation des engagements, la version « Classique » ayant un périmètre d'application plus restreint et une exigence d'adéquation plus soutenue que la version « Etendue » en fonction des différentes formes que ces dernières peuvent prendre ;
- L'extrapolation des taux au-delà du *Last liquid point* jusqu'à l'*Ultimate forward rate* afin de réduire sensiblement l'impact de la volatilité des taux de long terme ;
- Les mesures transitoires, consistant à utiliser une moyenne des taux d'actualisation de Solvabilité 1 et Solvabilité 2 par pondération progressive en vue de faciliter les évolutions réglementaires.

Notons que toutes ces solutions s'accroissent autour de l'ajustement de courbe d'actualisation des passifs. Néanmoins, parmi ces solutions, seulement la prime d'adossment « Classique », l'extrapolation des taux et les mesures transitoires ont été adoptés. D'ailleurs le régulateur parle désormais d'un nouvel ajustement, le « redresseur de volatilité », censé parer aux défauts de la prime contra-cyclique tout en ayant le même objectif.

Il est intéressant de constater l'ampleur des débats autour de cette problématique. Alors que sous Solvabilité 1 le bilan est géré de manière comptable à travers l'évaluation des actifs en valeur d'achat et l'actualisation des engagements à l'aide d'un « taux prudent », il semble que la vision économique suggérée par Solvabilité 2 ne semble pas à ce stade présenter l'avantage escomptée. D'ailleurs, les solutions proposées par le régulateur compliquent la tâche des assureurs en alourdissant un modèle d'évaluation déjà mal adapté.

Ainsi, nous nous sommes proposés de tester l'impact d'un lissage des taux (cf. KARAM et al [2013]) en entrée de modèle sur la valeur du *best estimate* et le ratio de couverture. Cette méthode présente l'avantage d'être simple et permet de garder une vision économique dans l'évaluation des engagements : elle consiste à utiliser une moyenne glissante des taux zéro-coupon à la date des calculs, sur un horizon choisi à l'avance, au lieu de la courbe issue du marché à cette même date.

L'illustration de ce procédé d'évaluation à l'aide d'un modèle ALM montre que cette méthode permet de stabiliser le montant du *best estimate* et de réduire la volatilité du ratio de solvabilité. Néanmoins, cette technique peut s'avérer inadaptée compte tenu des évolutions conjoncturelles sur l'horizon choisi et de la structure du portefeuille.

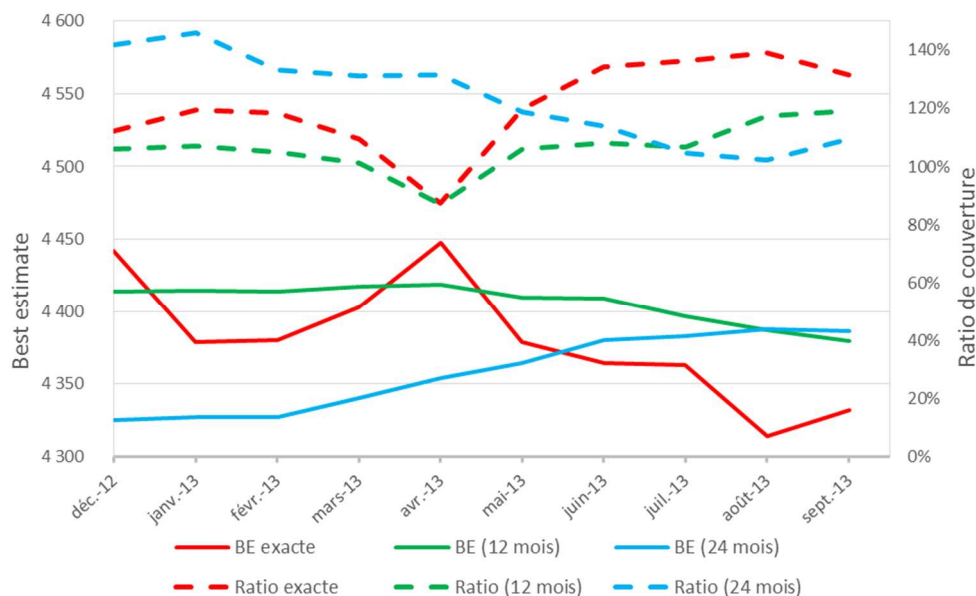


Figure 4 Illustration de l'impact d'un lissage des taux sur la valeur du *best estimate* et le ratio de couverture.

En conclusion, le montant de *best estimate* et le ratio de couverture sont sensibles à la précision de paramétrage des méthodes numériques et au choix des hypothèses économiques. Ainsi, les organismes d'assurance devront tenir compte des erreurs d'approximation dans l'évaluation des engagements en fonction de leur contrainte de temps de calcul. De plus, le régulateur devra trouver des solutions adaptées à l'industrie à même de répondre aux objectifs de la directive afin de supprimer la volatilité des bilans économiques.

Synthesis

The best estimate is sensitive to the parameterization of numerical methods and to the calibration of economic assumptions in model input. The present study proposes in one hand to analyze biases of discretization and sampling of stochastic processes used in best estimate valuation with interactions between assets and liabilities and in other hand to discuss about valuation methods proposed by Solvency 2 and especially on the choice of yield curve for liabilities valuation.

I. Valuation accuracy of best estimate

The calculation of a best estimate is made in practice by simulation in risk neutral world in order to meet the condition of absence of arbitrage opportunities. This calculation is derived from the following formula to which it is supposed to converge:

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left(\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times X(t) \right)$$

where $\delta(t)$ is the discounting process and $X(t)$ denotes the insurance liability cash flows. Note that this calculation can be simplified when there is no interactions between assets and liabilities. Then we can directly use the risk free yield curve from the financial markets instead of the discounting process.

However, the numerical methods used to assess the amount of technical provisions require to choose the number of simulations and the discretization step. We must distinguish the time step used for flow projections that used for the approximation of the discount factor through the projection of the short rate r . It is the impact of this last discretization on the best estimate that we analyze.

a. Quantification of discretization and convergence biases on a zero-coupon pricing

First, we assess errors caused by this valuation scheme on the calculation of a zero-coupon $P(0, T)$ where:

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T r(u) du \right) \right]$$

This price is numerically approximated by the following estimator:

$$\widehat{P}_N(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{r}^i(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) \right)$$

where N is the number of simulations, \tilde{r} the discretization version of r and p the number of intervals of discretization between 0 and T

If we use the Hull and White's model and an exact discretization scheme for the approximation of the short rate, it is possible to calculate the mean and variance of this estimator. Then we can deduce the bias of "technical" discretization and the bias of convergence. For the purposes of this study, forward rates involved in the model of Hull and White were calibrated from the zero-coupon yield curve at 12/31/2011 provided by EIOPA (in LTGA) and Svensson's model.

It appears that "technical" discretization bias is sensitive to the discretization step chosen. For example, the relative error measured on the price of a zero-coupon with a uniform annual time step is -0.649 % and with a uniform daily time step this error drops at -0.0024 %. In addition, the speed of convergence of this estimator is slow even though the discretization step would be very small. Moreover, this speed is much slower when the maturity of the zero-coupon increases.

The accumulation of these biases allows to quantify the total relative error of this estimator. The figure below shows the large number of short rates trajectories that we have to simulate in order to reduce this error and get a more accurate result even with a daily time step.

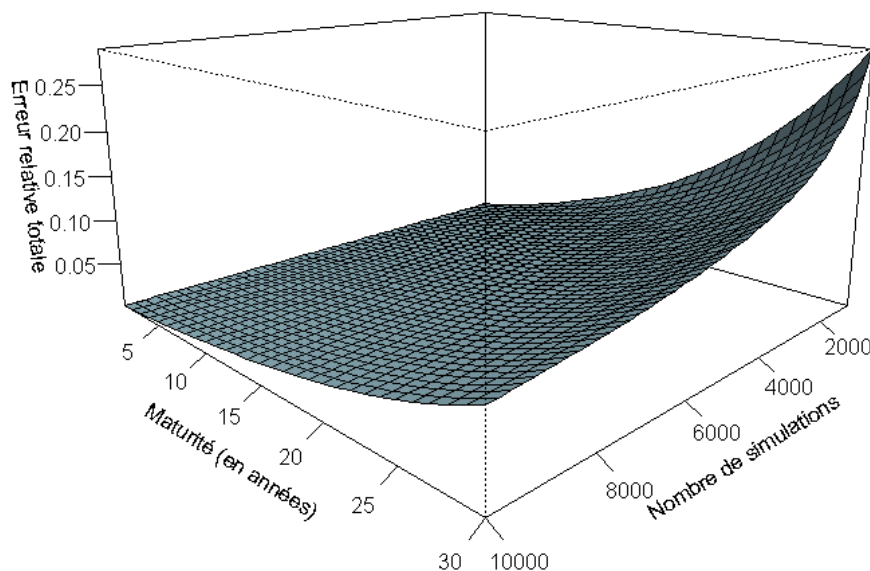


Figure 3 Surface of the total relative error depending on the maturity and the number of simulations for a daily time step

b. Illustration of biases on the best estimate valuation

Now we want to illustrate the sensitivity of the best estimate at the step discretization for the projection of the short rate and at the number of stochastic simulations. Note that the short rate is involved in discount factor assessment but also in assets modeling, particularly through Black and Scholes' model for equities (in approximation of drift) and through Hull and White's model for bonds. Then, the aim is to measure the accumulation of errors by comparing the differences of convergence depending on the configuration of the processes.

To do this, we begin by recalculating the value of the best estimate of a unit-linked contract with a simplified ALM model. Here the value of the best estimate is already known and it corresponds to the initial value of the investment in this case equal to 1 €. Then, we calculate the best estimate under of a "true" model ALM where the theoretical value is unknown. Note that the best estimate is calculated using the following diagram where D is the number of projection years of liability cash flows:

$$Best\ estimate = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{t=1}^D \delta^j(t) \times Cash\ flows^j(t) \right)$$

The results obtained with the simplified ALM model show the benefit to choose a small time step on condition to perform a large number of simulations in order to reduce sampling error. These results are also consistent with those obtained using the "true" ALM model, which confirms our analysis.

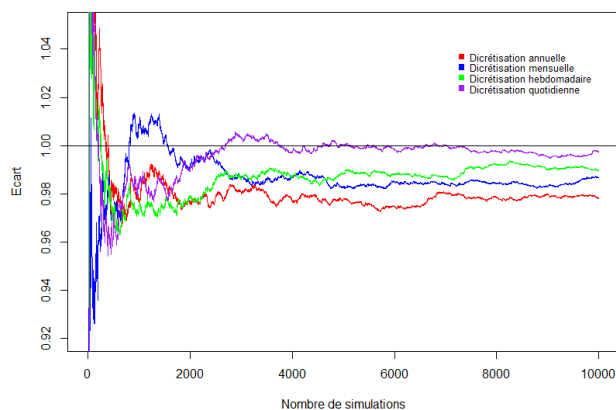


Figure 4 Convergence gap (simplified ALM model)

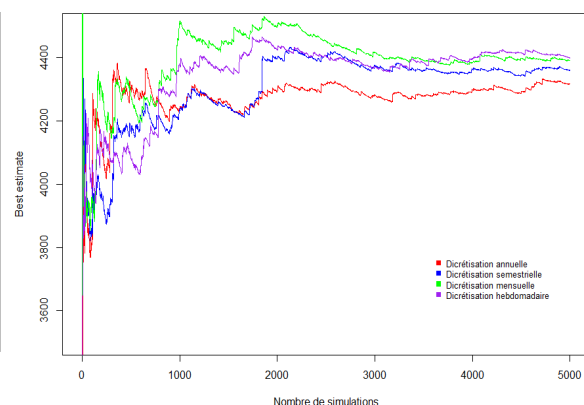


Figure 3 Convergence gap ("true" ALM model)

Thus, these figures show that for a given number of simulation, the best estimate may converge to a value that is not good because the discretization chosen for the short rate is not fine enough.

II. Choice of economic assumptions for best estimates valuation

In addition to the best estimates sensitivities of imperfections models, fair valuation of the balance sheet makes difficult to appreciate its reading in the short term. Indeed, the concept of valuation first proposed by Solvency 2 introduces artificial volatility in the economic balances thereby causing instability of solvency ratios. Then, it is necessary to examine the causes and consequences of this volatility while trying to analyze solutions in order to stabilize the prudential balance sheets.

a. Instability of financial markets and prudential balance sheets

Forms of instability which may take the fluctuations in stock prices, especially in the case of stress market, highlights the limitations of valuation methods recommended by Solvency 2 and based on the concept of "fair value" Indeed, during temporary strains in financial markets, market values can quickly break away from fundamental values thereby compromising a fair valuation of assets.

This context shows that the assessment of balance sheet takes into account risks that insurers are not exposed and tend to underestimate their solvency ratio. On the one hand, assets are valued at their market value. They are therefore subject to spread risk, which reflects their credit, default and liquidity risks. However, with a hold-to-maturity strategy, credit and liquidity risks have no need to be taken into account in their assessments because their goal is only to cover the liability cash flows. But they are discounted with the risk-free yield curve, and an increase of spread risk on the asset side can lead to a mismatching between assets and liabilities. On the other hand, fluctuation of interest rate curve amplifies this phenomenon and leads to volatility assessments of technical provisions. Then, this volatility reached the amount of capital that could endanger the Solvency Capital requirement (SCR).

b. Thinking about solutions

This important volatility assessments led at first the regulator to propose in the QIS5 the illiquidity premium. This premium corresponding to an adjustment of the interest rate curve, was intended to transcribe in the balance sheet the part of illiquidity of the liabilities following the example of assets valuation on financial markets. However this first solution showed itself unsuitable for the prudential context: it contradicts market-consistent actuarial valuation and gives wrong incentives for an over-aggressive consumption weakening the future insurers' solvencies (cf. WÜTRICH [2011]) Thus, EIOPA have proposed other solutions in the LTGA, following upon to the QIS5:

- The Countercyclical Premium, intended to adjust the yield curve in case of stress market allowing insurers to find their initial cover ratio and preventing them to

sell assets, so avoiding increasing the tensions on financial markets with procyclical behavior ;

- The Classic and Extended matching adjustments, allowing to take into account the adequacy between assets and liabilities in the evaluation of the obligations, the Classic version having a more restricted scope of applicability and a requirement of adequacy more steady than the Extended version according to the various forms which this latter can take
- The extrapolation of the risk-free interest term structure beyond last liquid point until the ultimate forward rate in order to reduce the impact of the long-term rates volatility ;
- The transitional measures, consisting in using an average of the interest rates of Solvency 1 and Solvency 2 by progressive weighting in order to facilitate the statutory evolutions.

All these solutions focus on the adjustment of yield curve. Nevertheless, among these solutions, only the Classic matching adjustment, the extrapolation of the rates and the transitional measures were adopted. Moreover the regulator speaks now about a new adjustment, the Volatility Balancer supposed to counter the defects of the Countercyclical Premium while having the same objective.

It is interesting to notice the scale of the debates around this problem. While under Solvency 1 the balance sheet is managed with an accounting way through the valuation of assets in purchase price and discounting of commitments with a "prudential rate", it seems that the economic vision suggested by Solvency 2 does not seem the advantage expected. Moreover, the solutions proposed by the regulator complicate the task of insurers by complicating an already badly adapted model of evaluation.

Based on this, we have tested the impact of a smoothing yield curve (cf. KARAM and al [2013]) in model input on the value of the best estimate and the solvency ratio. This method presents the advantage to be simple and allows to keep an economic vision in the evaluation of the commitments: it consists in using a moving average of interest rate curve at the date of calculations, on a horizon chosen in advance, instead of the interest rate curve from the market at the same date.

The illustration of this process of evaluation with an ALM model shows that this method allows to stabilize the amount of the best estimate and to reduce the volatility of the solvency ratio. Nevertheless, this technique can be unsuitable considering the cyclical evolutions on the chosen horizon and portfolio structure.

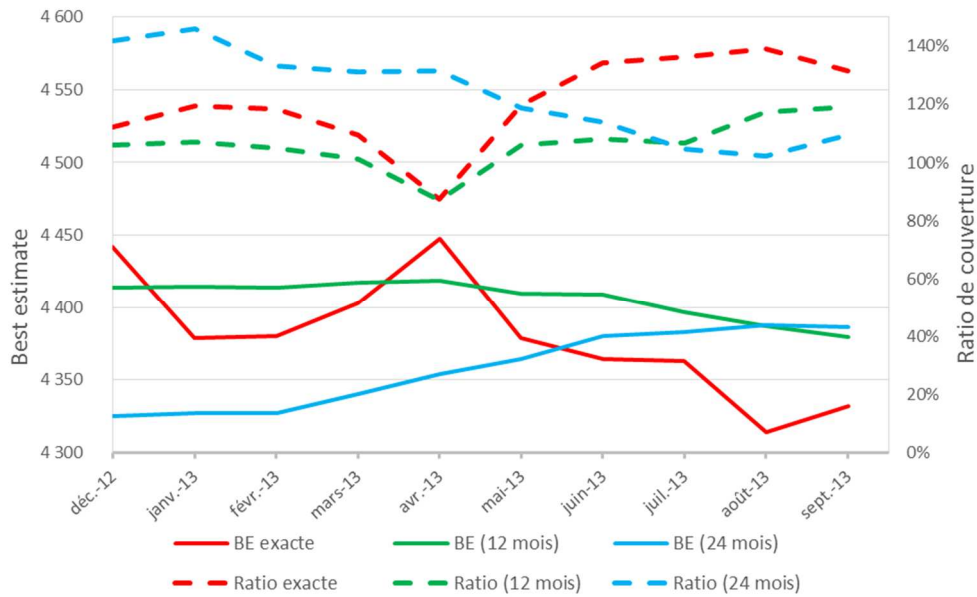


Figure 4 Illustration of the impact of a smoothing interest rate curves on best estimate and solvency ratio.

In conclusion, best estimates and solvency ratios are sensitive to the precision of mathematical methods configuration and to the choice of the economic assumptions. So, the insurers will have to take into account errors of approximation in the evaluation of technical provisions according to their time constraint of calculation. Furthermore, the regulator will have to find solutions adapted to the industry and to be in line with the objectives of the new framework in order to stabilize the volatility of balance sheets assessments.

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé durant mon parcours scolaire et mon intégration professionnelle. Je les invite à trouver ici l'expression de ma gratitude et de ma considération.

L'élaboration de ce mémoire doit beaucoup aux équipes de PRIM'ACT pour leur générosité d'esprit et leur précieux conseils. Je tiens particulièrement à exprimer toute ma reconnaissance à Frédéric Planchet, associé chez PRIM'ACT et tuteur de mon mémoire, pour m'avoir guidé et éclairé tout au long cette étude ainsi qu'à Aymric Kamega, Manager chez PRIM'ACT, pour toutes ces remarques constructives.

Je suis également très reconnaissant envers Marc Juillard pour m'avoir fourni les outils ALM sur le logiciel R nécessaires pour compléter les illustrations de ce mémoire ainsi qu'envers Wassim Youssef pour sa disponibilité et l'aide qu'il m'a apportée pour implémenter ces outils.

Je tiens aussi à remercier Emmanuel Lépinette, professeur à l'université Paris-Dauphine et tuteur académique de mon mémoire, pour son expertise et son soutien pédagogique.

Enfin, mes remerciements s'adressent à l'ensemble du corps professoral du Master Actuariat de l'université Paris-Dauphine pour son excellente formation actuarielle.

Sommaire

INTRODUCTION.....	19
PARTIE 1 : MODELISATION DE PROJECTION DES FLUX ET CALCULS DE BEST ESTIMATE ..	21
I. Approximation du coefficient d'actualisation	23
I.a. Contexte	23
I.b. Le modèle de taux de Hull et White	25
I.b.1. Modélisation du taux sans risque instantané.....	25
I.b.2. Modélisation du taux <i>forward</i> instantané et prix du zéro-coupon.....	26
I.b.3. Calibration de la courbe des taux <i>forward</i>	26
I.c. Le processus de discrétisation.....	29
I.c.1. Discrétisation d'Euler.....	29
I.c.2. Discrétisation exacte	30
I.c.3. Discrétisation d'Euler versus discrétisation exacte.....	31
I.d. Biais de discrétisation et vitesse de convergence.....	32
I.d.1. Le biais de discrétisation « technique »	32
I.d.2. Vitesse de convergence.....	36
I.d.3. Erreur relative totale.....	39
II. Best estimate d'un contrat en unités de compte.....	42
II.a. Calcul théorique du <i>best estimate</i>	42
II.b. Calcul numérique du <i>best estimate</i>.....	44
III. Application au calcul concret d'un <i>best estimate</i>.....	47
III.a. Présentation du portefeuille.....	47
III.b. Valorisation du <i>best estimate</i>.....	48
III.b.1. Modélisation de l'Actif.....	48
III.b.2. Modélisation du Passif.....	49
III.b.3. Application et résultats	52
PARTIE 2 : HYPOTHESES ECONOMIQUES ET EVALUATION COHERENTE AVEC LES VALEURS DE MARCHÉ	59
IV. Constat de la volatilité inhérente au cadre conceptuel	61
IV.a. Instabilité des marchés financiers.....	63

IV.a.1.	De l'efficacité informationnelle...	63
IV.a.2.	... aux idées keynésiennes	64
IV.b.	Réglementation et valorisation	66
IV.b.1.	Le principe de « cohérence avec le marché »	66
IV.b.2.	Evaluation en <i>fair value</i> et risque de <i>spread</i>	67
V.	Solutions proposées par le régulateur	69
V.a.	Retour sur le QIS5	69
V.b.	L'exercice LTGA	70
V.b.1.	La Prime contra-cyclique	70
V.b.2.	Le Matching Adjustment	72
V.b.3.	Extrapolation de la courbe des taux et mesure de transition	74
V.b.4.	Résultats du LTGA	75
VI.	Solutions envisageables	77
VI.a.	« Solvabilité 1 »	77
VI.a.1.	Le bilan comptable	77
VI.a.2.	Le taux d'actualisation	78
VI.a.3.	Règles des placements et liaisons Actif/Passif	79
VI.a.4.	L'exigence de marge de solvabilité	80
VI.b.	Valorisation du Passif après lissage des taux	81
VI.b.1.	Moyenne des taux zéro-coupon	81
VI.b.2.	Méthode de calcul du SCR	82
VI.b.3.	Présentation des résultats	85
	CONCLUSION	88
	BIBLIOGRAPHIE	90
	ANNEXE	93

INTRODUCTION

Les nouvelles règles prudentielles introduites par Solvabilité 2 modifient les principes d'évaluation du bilan des organismes d'assurance. Dorénavant, aussi bien les actifs que les passifs devront être valorisés à leur juste valeur et le principe de cohérence avec les valeurs de marché est désormais la nouvelle norme d'évaluation.

Dans ce contexte, les méthodes de calculs de *best estimate* font intervenir de nombreuses approximations et hypothèses, le régulateur n'ayant pas défini de manière précise la détermination de l'ensemble des paramètres des modèles utilisés pour l'évaluation des provisions techniques. Il s'avère cependant en pratique que ces modèles présentent des imperfections, les résultats produits par ces modèles étant assez sensibles au paramétrage et au calibrage des hypothèses économiques effectués en amont des calculs.

C'est dans cet environnement de mise en place d'outils dédiés aux nouvelles méthodes d'estimation que nous avons choisi de focaliser notre étude autour des taux d'actualisation nécessaires au calcul du *best estimate*.

D'une part, l'actualisation des engagements dépendant de risques financiers, notamment en cas d'interactions Actif/Passif, exige d'approcher les coefficients d'actualisation au moyen de plusieurs scénarios économiques. Le *best estimate* est de ce fait soumis aux erreurs de discrétisation et d'échantillonnage de ces scénarios.

D'autre part, le choix de la courbe des taux zéro-coupon utilisée en entrée de modèle fait débat. Le principe de cohérence avec les valeurs de marché implique d'utiliser les taux zéro-coupon observables sur les marchés financiers à la date des calculs. Cette méthode d'évaluation des passifs introduit une volatilité au bilan qui rend difficilement appréciable le montant des engagements mais aussi le ratio de solvabilité des compagnies d'assurance à court terme.

Afin de mieux cerner les enjeux liés aux écarts générés par les imperfections de modèle, nous analyserons dans un premier temps le mode opératoire d'un calcul de *best estimate*. Nous commencerons d'abord par mesurer les erreurs de discrétisation et d'échantillonnage sur le calcul d'un prix d'un zéro-coupon. Ensuite nous illustrerons ces biais sur le calcul d'un *best estimate* avec un modèle ALM simplifié puis à l'aide d'un « vrai » modèle ALM.

Dans un second temps, nous reviendrons sur les causes de la volatilité des marchés financiers et les incidences occasionnées sur les différentes composantes du bilan

économique des organismes d'assurance. Nous analyserons au travers de cette étude les récentes propositions d'évolutions réglementaires. Enfin nous illustrerons une méthode de réduction de volatilité, différente de celles suggérées par le régulateur, consistant à utiliser une moyenne glissante des taux d'actualisation en entrée de modèle sur un horizon plus ou moins long fixé à l'avance.

PARTIE 1 : Modélisation de projection
des flux et calculs de *best estimate*

I. APPROXIMATION DU COEFFICIENT D'ACTUALISATION

I.a. Contexte

Le mécanisme¹ de calcul d'un *best estimate* fait intervenir trois éléments : les flux, le processus d'actualisation et la probabilisation. La provision *best estimate* s'exprime alors par :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left(\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times X(t) \right)$$

où :

- $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^a)$ et $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, \mathbb{Q}^f)$ représentent deux espaces probabilisés filtrés pour le risque assurance et le risque financier respectivement ;
- $(\delta(t) = \exp(-\int_0^t r(u)du), t \geq 1)$ représente le processus d'actualisation ;
- $(X(t), t \geq 1)$ représente les flux (aléatoires).

Notons que dans la plupart des modèles la probabilisation des événements est effectuée dans un univers risque-neutre afin de remplir la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage et d'utiliser ainsi le taux sans risque comme processus d'actualisation. D'ailleurs en l'absence d'interaction Actif/Passif, lorsque $X(t)$ ne dépend pas des aléas financiers, l'expression précédente se simplifie et on retrouve l'actualisation classique à l'aide de la courbe des taux zéro-coupon initiale :

$$\begin{aligned} BE &= \sum_{t \geq 1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}(\delta(t)) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}(X(t)) \\ &= \sum_{t \geq 1} P(0, t) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}(X(t)) \end{aligned}$$

avec $P(0, t)$ le prix d'une obligation sans coupon définie par la valeur en 0 d'une unité monétaire qui sera payé en t .

En pratique le calcul du *best estimate* est effectué par simulation :

$$\begin{aligned} BE_N &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^A \frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{(1 + R_n(0, t))^t} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left(\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times X(t) \right) \end{aligned}$$

¹ La présente étude s'appuie sur PLANCHET [2013] et en reprend les notations et certains passages.

Ce schéma est cohérent avec les valeurs de marché. Si on l'applique à n'importe quel actif, on devrait obtenir le prix observé de cet actif. Cependant, le prix de marché observé est de fait différent de sa valeur théorique. Il convient alors de s'interroger sur les causes de ces imperfections de modélisation afin d'avoir une idée de la précision avec laquelle les résultats sont obtenus.

Le calcul d'un *best estimate* nécessite ainsi de connaître les coefficients d'actualisation aux dates de projection des flux. Pour cela, le temps est discrétisé avec un pas de temps uniforme $\theta = \frac{t}{p}$ sur l'intervalle $[0, t], p \in \mathbb{N}$.

On obtient alors la discrétisation $\{t_0 = 0 < t_1 = \theta < t_2 = 2\theta \dots < t_p = p\theta = t\}$. Ainsi, pour calculer le coefficient d'actualisation à l'instant t , on utilise l'approximation suivante :

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right) \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^p \tilde{r}(t_i) \times (t_i - t_{i-1})\right)$$

avec \tilde{r} la version discrétisée de r , puisque r n'est connue qu'aux points de la discrétisation.

Généralement θ correspond à un pas de temps mensuel ou annuel. Cette approximation génère mécaniquement un certain nombre d'erreurs. En outre, il est important de préciser que la discrétisation « technique » utilisée ici pour approcher $\delta(t)$ ne doit pas être confondue avec la discrétisation utilisée pour la projection des flux.

Du fait de cette approximation, on a :

$$P(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t)] \neq \tilde{P}(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^p \tilde{r}(t_i) \times (t_i - t_{i-1})\right)\right]$$

De plus, les espérances des valeurs actuelles des flux sont obtenues par des approximations par simulation, ce qui génère des erreurs supplémentaires. Ainsi pour les zéro-coupon, on a l'approximation suivante :

$$P_N(0, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp\left(-\int_0^t r_k(u)du\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)\right]$$

Ces différentes approximations et hypothèses sous-jacentes conduisent à des écarts entre le prix théorique et le prix reconstitué par simulation. Il est donc nécessaire de distinguer dans ce type d'approximation, d'une part le biais causé par la discrétisation « technique » utilisée pour approcher le processus continu par un processus discret et d'autre part le biais de convergence lié à l'utilisation d'une méthode par simulation.

Afin de mieux cerner les enjeux liés aux écarts générés par les imperfections de modèle, nous allons nous focaliser sur le modèle de taux de Hull et White² à un facteur. Rappelons que la logique de cohérence avec les valeurs de marché introduite par Solvabilité 2 conduit à privilégier les modèles utilisant la courbe des taux initiale comme paramètre ce que respecte en ce sens le modèle de Hull et White.

I.b. Le modèle de taux de Hull et White

I.b.1. Modélisation du taux sans risque instantané

On se place dans le cadre du modèle de Hull et White dans le but de modéliser le taux court instantané afin de reconstruire les projections de la courbe des taux zéro-coupon nécessaire à l'actualisation des flux. Ce modèle revient à spécifier dans l'univers risque neutre la dynamique suivante pour le taux court³ :

$$dr(t) = k(b(t) - r(t))dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

avec :

- $b(t) = \partial_2 f(0, t) + k \times f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2$ l'ajustement de retour à la moyenne ;
- $k \in \mathbb{R}_+$ la vitesse de retour à la moyenne ;
- $\sigma \in \mathbb{R}_+$ la volatilité ;
- $W_t^{\mathbb{Q}}$ le mouvement brownien.

Cette équation différentielle stochastique possède une unique solution :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW_s^{\mathbb{Q}}$$

On en déduit que $r(t) \sim \mathcal{N}\left(f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t), L(t)\right)$ avec $K(t) = \frac{1 - e^{-kt}}{k}$ et

$$L(t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-2k(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt}).$$

Dans ce type de modèle le taux *forward* instantané $f(0, t)$ est supposé directement observé sur le marché de la même manière que le prix du zéro-coupon $P(0, t)$.

Il est cependant utile de signaler que les taux *forward* instantanés $f(0, t), t \geq 0$ et les prix des zéro-coupon $P(0, t), t \geq 0$ sont construits à partir des données du marché et dire qu'ils sont « observés » à la date des calculs est un abus de langage.

² Cf. HULL et WHITE [1990]

³ Cf. PLANCHET [2011]

I.b.2. Modélisation du taux forward instantané et prix du zéro-coupon

Le modèle de Hull et White suppose que le taux *forward* suit la dynamique suivante dans un monde neutre au risque :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)}) dt + \sigma e^{-k(T-t)} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

On obtient ainsi en intégrant :

$$f(t, T) = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)t})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} dW_s^{\mathbb{Q}}$$

Par conséquent, le modèle de Hull et White permet d'obtenir une formule fermée pour calculer les prix des zéro-coupon grâce à la relation $P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\}$, ce qui nous donne :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left[- \frac{K^2(T-t)}{2} L(t) + K(T-t)(f(0, t) - r(t)) \right]$$

I.b.3. Calibration de la courbe des taux forward

Afin de pouvoir estimer le taux court terme $r(t)$, il nous faut au préalable construire la courbe des taux *forward*. Pour cela, nous allons retenir le modèle à quatre facteurs de forme et deux facteurs d'échelle proposé par Svensson (modèle de Nelson et Siegel augmenté) connu pour sa bonne flexibilité⁴. Dans ce modèle le taux *forward* est exprimé comme suit :

$$f(t, T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{T-t}{\tau_1} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \mu_4 \frac{T-t}{\tau_2} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)$$

Puisque le taux zéro-coupon s'obtient par la formule $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} f(t, s) ds \end{aligned}$$

⁴ Cf. SVENSSON [1994]

Ainsi,

$$R(t, T) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)}{\frac{T-t}{\tau_1}} + \mu_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)}{\frac{T-t}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) \right] + \mu_4 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)}{\frac{T-t}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right) \right]$$

En posant $\tau = T - t$, $\varphi(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ et $\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$ l'expression peut se réécrire :

$$R(t, t + \tau) = \mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_4 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

Nous calibrons les paramètres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \tau_1$ et τ_2 à partir de la courbe des taux sans risque (à $t = 0$) publiée par l'EIOPA dans le cadre de l'exercice LTGA⁵. Cette courbe correspond à la courbe des taux zéro-coupon au 31/12/2011. Elle a notamment été diminuée de 35 points de base afin de corriger le biais introduit par le risque de crédit lié aux taux *swaps*. Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme d'optimisation BFGS⁶ qui entre dans la catégorie des algorithmes de type quasi-Newton. On décide par ailleurs d'utiliser l'écart quadratique comme critère de minimisation entre la courbe des taux modélisée et la courbe des taux initiale fournie par l'EIOPA sur les 30 premières maturités.

En conséquence,

$$\begin{aligned} & (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \tau_1, \tau_2) \\ & = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{\tau=1}^{30} \left(R^{EIOPA}(0, \tau) - \left(\mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_4 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right) \right) \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

⁵<https://eiopa.europa.eu/consultations/qis/insurance/long-term-guarantees-assessment/technical-specifications/index.html>

⁶ Cf. BROYDEN [1970], FLETCHER [1970], GOLDFARD [1970] et SHANNO [1970]

Les résultats de l'estimation sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	Estimations
μ_1	0,02619842
μ_2	-0,01767412
μ_3	-3,598536
μ_4	3,571408
τ_1	0,7483335
τ_2	0,7411634

Tableau I.1 Estimation des paramètres du modèle de Nelson Siegel Svensson

Nous obtenons alors une « fonctionnelle » de la courbe des taux zéro-coupon :

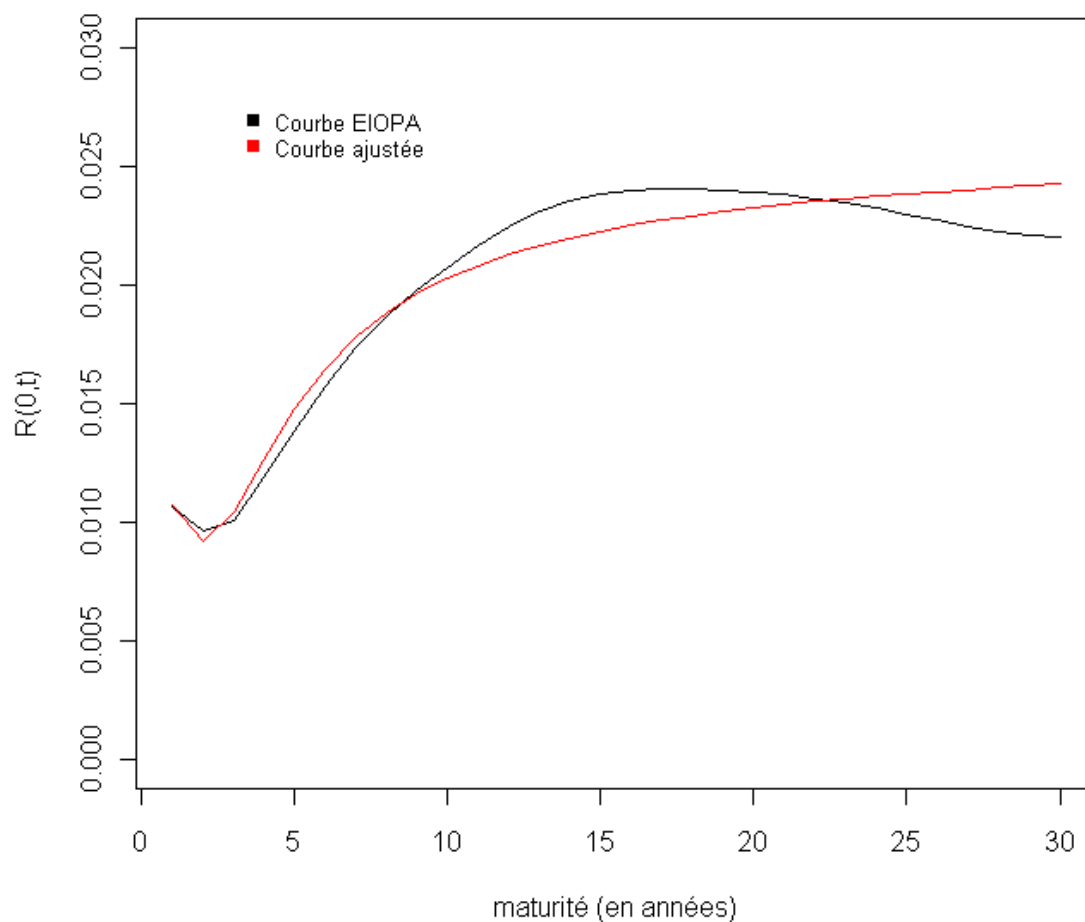


Figure I.1 Estimation de la courbe des taux zéro-coupon par la méthode de Nelson Siegel Svensson

On note que l'ajustement n'est pas bon au-delà de 10 ans. Dans la suite de ce travail, on utilise la courbe ajustée qui fournit une courbe continue, alors que la courbe EIOPA ne fournit que quelques points. Toutefois, dans une application réelle, il faudrait retenir une autre méthode d'interpolation de la courbe, par exemple des *splines* cubiques ou des ajustements Nelson-Siegel « locaux ».

I.c. Le processus de discrétisation

Nous tentons à présent d'illustrer, dans le cadre de la projection du modèle de taux court, les biais de discrétisation occasionnés qui dépendent à la fois du processus discret utilisé pour approcher le processus continu mais aussi du pas de discrétisation utilisé pour la projection et qui sera utilisé pour définir les dates de mouvement des flux.

Afin de quantifier et de comparer les erreurs relatives de la projection en fonction des processus de discrétisation utilisés, nous focalisons notre étude sur l'analyse de deux méthodes de discrétisation : la discrétisation d'Euler versus la discrétisation exacte.

Pour cela, le temps est discrétisé avec le même pas de temps uniforme que celui défini plus haut ($\theta = \frac{t}{p}$). Nous avons donc choisi de prendre un même pas de discrétisation pour la projection du taux court et pour l'approximation du calcul de l'intégrale associée au coefficient d'actualisation. Ainsi, toutes les valeurs de la version discrétisée du taux court seront utilisées afin de calculer de manière plus précise le coefficient d'actualisation.

I.c.1. Discrétisation d'Euler

A partir de l'équation vérifiée par le taux court dans le modèle de Hull et White :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

et en reprenant les notations précédentes, le processus peut être approché de la manière suivante :

$$r_p(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \sum_{i=1}^p e^{-k(t-t_i)} (W_{t_i}^{\mathbb{Q}} - W_{t_{i-1}}^{\mathbb{Q}})$$

Compte tenu des propriétés du mouvement brownien, on obtient :

$$r_p(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \sum_{i=1}^p e^{-k(t-t_i)} \sqrt{t_i - t_{i-1}} \times \varepsilon_i$$

où les ε_i sont indépendants et identiquement distribués et suivent une loi normale centrée réduite.

Puisque $t = p \times \theta$ et $t_i = i \times \theta$, on en déduit la relation :

$$r_p(p\theta) = f(0, p\theta) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kp\theta})^2 + \sigma\sqrt{\delta}e^{-kp\theta} \sum_{i=1}^p e^{-k(i-1)\theta} \varepsilon_i$$

Bien que ce schéma de discrétisation n'introduise pas de biais au niveau de l'espérance du taux court ($\mathbb{E}^Q[r_p(p\theta)] = \mathbb{E}^Q[r(p\theta)]$), il en introduit cependant un au niveau de la variance :

$$V^Q(r_p(p\theta)) = V^Q(r(p\theta)) \times C_\theta$$

$$\text{où } C_\theta = \frac{2k\theta}{e^{2k\theta} - 1}$$

Par ailleurs $C_\theta \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$, par conséquent le pas de temps θ doit être assez fin pour que C_θ se rapproche de 1. Dans le cas contraire, lorsque l'on utilise un pas de temps relativement grand pour des contraintes de temps de calcul, il faut corriger le biais de variance par la discrétisation suivante :

$$\tilde{r}_p(p\theta) = f(0, p\theta) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kp\theta})^2 + \frac{\sigma\sqrt{\delta}e^{-kp\theta}}{\sqrt{C_\theta}} \sum_{i=1}^p e^{-k(i-1)\theta} \varepsilon_i$$

I.c.2. Discrétisation exacte

A partir de l'équation vérifiée par le taux court au point $t \in \mathbb{R}$ dans le modèle de Hull et White, le processus peut être approché comme suit:

$$r(t + \theta) - e^{-k\theta}r(t) = f(0, t + \theta) - e^{-k\theta}f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} (K^2(t + \theta) - e^{-k\theta}K^2(t)) + \sigma e^{-k\theta} \int_t^{t+\theta} e^{-k(t-s)} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Par la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien, on en déduit le processus de discrétisation exacte suivant :

$$r(t + \theta) = e^{-k\theta}r(t) + f(0, t + \theta) - e^{-k\theta}f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} (K^2(t + \theta) - e^{-k\theta}K^2(t)) + \sqrt{L(\theta)} \times \varepsilon$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On pourra notamment remarquer qu'aucun biais n'est introduit dans la loi de $r(t + \theta)$ dans ce schéma.

I.c.3. Discrétisation d'Euler versus discrétisation exacte

Nous illustrons à présent la distribution de la valeur absolue des écarts relatifs générés entre le prix théorique et le prix reconstitué par simulation d'un zéro-coupon de maturité 10 ans en fonction de chacune des méthodes de discrétisation du taux court décrites précédemment. Nous prenons pour cela un pas de discrétisations annuel ($\theta=1$) et nous initialisons les paramètres suivants :

- $r_0 = 0,01$ le taux court initial
- $k = 0,12$ le coefficient de viscosité
- $\sigma = 0,05$ la volatilité du processus de taux court

Notons que l'utilisation d'un pas de temps annuel conduit relativement à d'importants écarts et constitue par conséquent un mauvais choix si l'on souhaite obtenir des résultats précis. Il faut donc faire un autre choix en pratique.

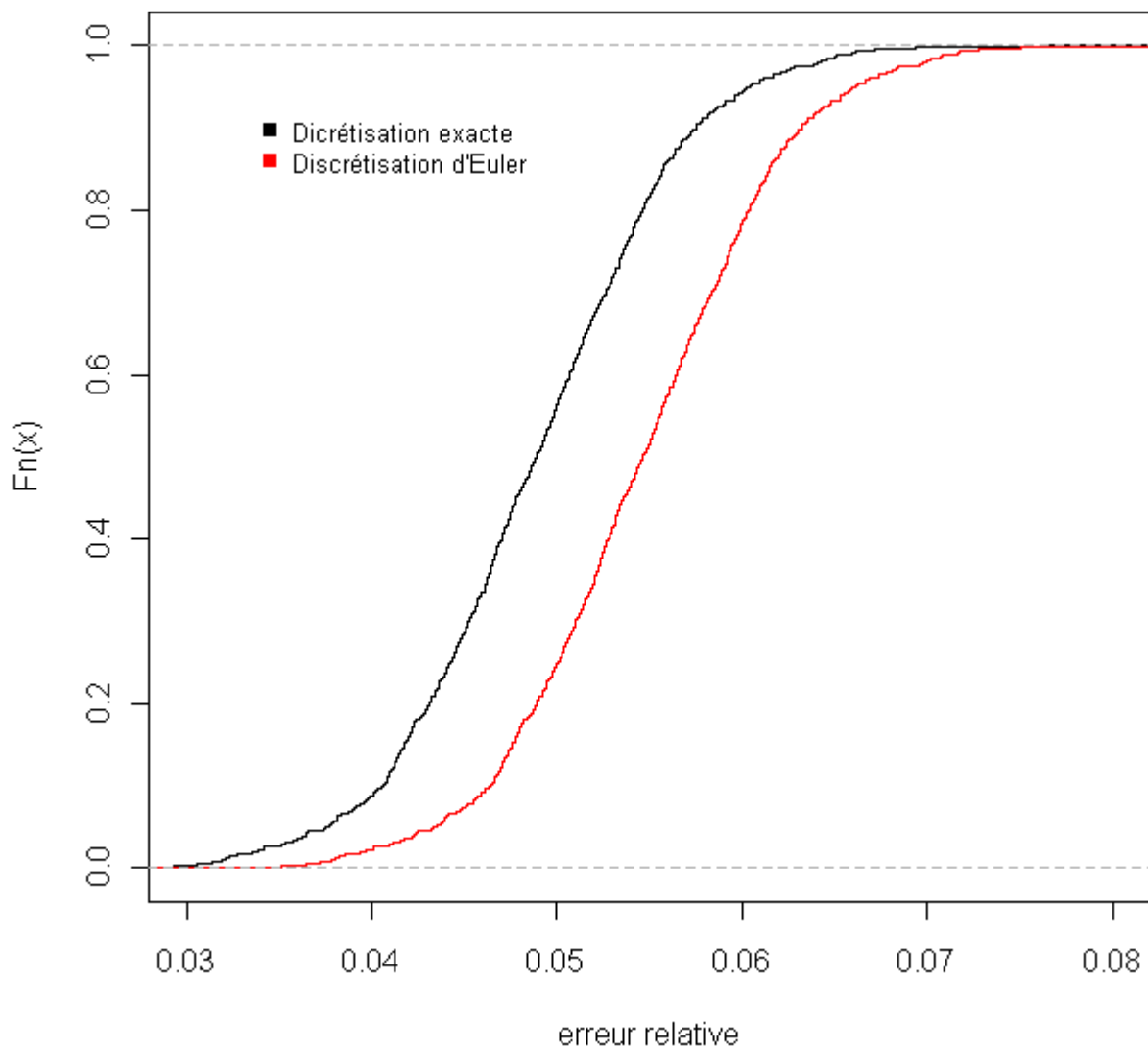


Figure I.2 Répartition de l'erreur relative pour une maturité de 10 ans

Ce graphique montre que la discrétisation exacte est préférable à celle d'Euler, l'erreur relative provoquée par cette dernière étant plus élevée.

Ainsi, nous allons dans la suite de notre étude retenir la discrétisation exacte comme méthode de discrétisation du taux court afin de mesurer de manière plus précise les biais occasionnés par les différentes approximations du facteur d'actualisation⁷.

I.d. Biais de discrétisation et vitesse de convergence

I.d.1. Le biais de discrétisation « technique »

Le prix exact d'un zéro-coupon de maturité $t = T$ est donné par la formule suivante :

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T r(u) du \right) \right]$$

Ce prix est approché numériquement par l'estimateur :

$$\widehat{P}_N(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{r}^i(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) \right)$$

Où N correspond au nombre de simulation de trajectoires du taux court.

Définition

Le biais de discrétisation « technique » relatif est défini par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\widehat{P}_N(0, T)] - P(0, T)}{P(0, T)}$$

Du fait de la linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\widehat{P}_N(0, T)] = \tilde{P}(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) \right) \right]$$

Ce qui permet d'exprimer le biais de la manière suivante :

$$\mathbf{B} = \frac{\tilde{P}(0, T) - P(0, T)}{P(0, T)}$$

⁷ Pour approfondir les questions de discrétisation voir DE WINIE [1998] ou GIET [2003].

Dans le cadre du modèle de taux de Hull et White à un facteur, lorsque le taux court est approché par la méthode de discrétisation exacte avec un pas de temps uniforme θ , la formule analytique du biais relatif de discrétisation « technique » est :

$$B(\theta) = \frac{\exp\left(-\theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j)\right] + \frac{\theta^2}{2} L(\theta) G(\theta)\right) - P(0, T)}{P(0, T)}$$

où :

$$G(\theta) = \frac{1}{(1 - e^{-k\theta})^2} \left[p - 2 \left(\frac{1 - e^{-kT}}{e^{k\theta} - 1} \right) + \left(\frac{1 - e^{-2kT}}{e^{2k\theta} - 1} \right) \right]$$

Pour le montrer, il suffit de calculer $\widetilde{P}^\theta(0, T) = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[\exp(-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times (t_j - t_{j-1}))]$ en déterminant préalablement la loi de $\exp(-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times (t_j - t_{j-1}))$ où $t_j - t_{j-1} = \theta \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $p\theta = T$.

Rappelons que le modèle de Hull et White implique que le taux court instantané suit une loi normale :

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t), L(t)\right)$$

De plus, la méthode de discrétisation exacte utilisée pour projeter le taux court est sans biais et peut s'exprimer de la manière suivante $\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket$:

$$\tilde{r}(t_j) = f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) + \sqrt{L(\theta)} \sum_{q=1}^j e^{-(j-q)k\theta} \varepsilon_q$$

où les ε_q sont indépendants et identiquement distribués et suivent une loi normale centrée réduite.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) &= \sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta \\ &= \sum_{j=1}^p \theta \times \left[f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) + \sqrt{L(\theta)} \sum_{q=1}^j e^{-(j-q)k\theta} \varepsilon_q \right] \\ &= \theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right] + \theta \sqrt{L(\theta)} \sum_{j=1}^p \sum_{q=1}^j e^{-(j-q)k\theta} \varepsilon_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right] + \theta \sqrt{L(\theta)} \sum_{q=1}^p \left(\sum_{j=0}^{p-q} e^{-jk\theta} \right) \varepsilon_q \\
 &= \theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right] + \frac{\theta \sqrt{L(\theta)}}{1 - e^{-k\theta}} \sum_{q=1}^p (1 - e^{-(p-q+1)k\theta}) \varepsilon_q
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta \sim \mathcal{N} \left(\theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right], \theta^2 L(\theta) G(\theta) \right)$$

où

$$G(\theta) = \frac{1}{(1 - e^{-k\theta})^2} \sum_{q=1}^p (1 - e^{-(p-q+1)k\theta})^2$$

Après quelques calculs on obtient :

$$G(\theta) = \frac{1}{(1 - e^{-k\theta})^2} \left[p - 2 \left(\frac{1 - e^{-kT}}{e^{k\theta} - 1} \right) + \left(\frac{1 - e^{-2kT}}{e^{2k\theta} - 1} \right) \right]$$

On peut à présent calculer aisément $\widetilde{P}^\theta(0, T)$ du fait que $\exp(-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta)$ suit une loi log-normale :

- d'espérance : $e^{-\theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right] + \frac{\theta^2}{2} L(\theta) G(\theta)}$
- de variance : $e^{-2\theta \left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j) \right] + \theta^2 L(\theta) G(\theta)} (e^{\theta^2 L(\theta) G(\theta)} - 1)$

Nous pouvons à présent mesurer ce biais en fonction de la finesse du pas de discrétisation. Pour cela nous représentons graphiquement le biais de discrétisation « technique » relatif en fonction de p qui représente le nombre d'intervalles de la discrétisation entre 0 et T . Plus p est grand, plus fin est le pas de temps θ et meilleure est l'approximation.

En outre, pour calculer le prix exact du zéro-coupon $P(0, T)$, nous utilisons la courbe des taux ajustée par la méthode de Nelson-Siegel-Svensson afin d'être cohérent avec l'utilisation, dans la définition du biais, des taux *forward* calibrés via cette méthode (cf. I.b.3). Par ailleurs, nous reprenons les valeurs de T, k et σ données au paragraphe I.c.3 que nous rappelons ici :

- $T = 10$
- $k = 0,12$
- $\sigma = 0,05$

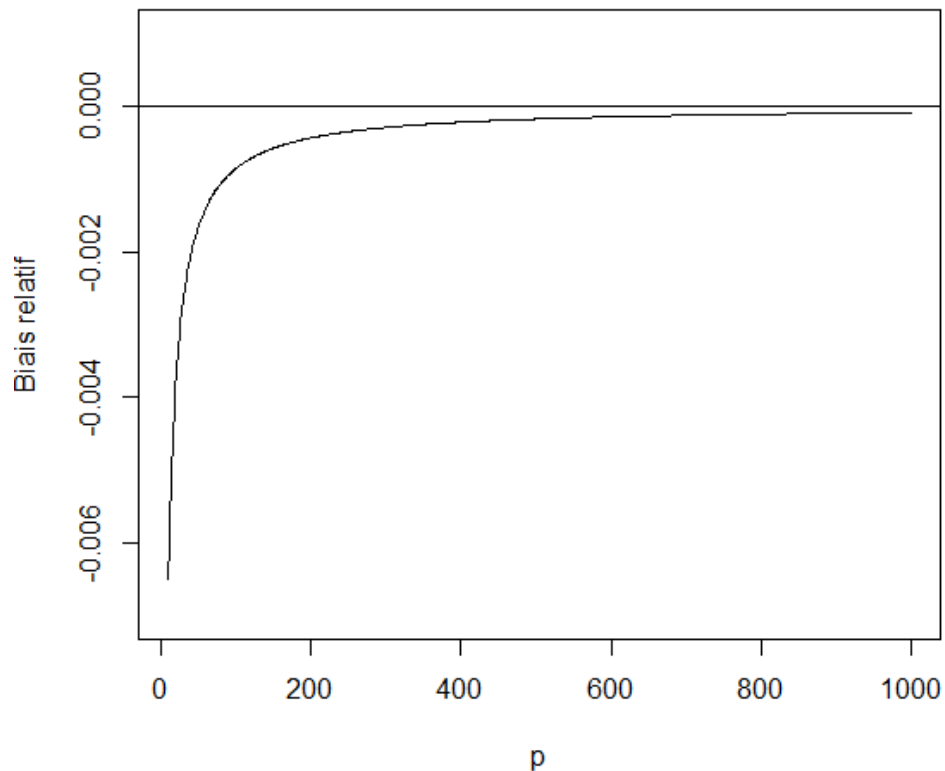


Figure I.3 Biais relatif en fonction du nombre d’intervalles de discrétisation pour une maturité de 10 ans

On observe la convergence du biais vers 0 lorsque le pas de temps diminue (*i.e* p augmente). A titre de comparaison, nous présentons dans le tableau ci-dessous la valeur du biais relatif pour quelques pas de discrétisation et différentes maturités :

Pas de temps θ	Biais relatif		
	$T = 10$	$T = 20$	$T = 30$
Annuel	- 0,649 %	- 0,578 %	- 0,484 %
Mensuel	- 0,071 %	- 0,071 %	- 0,070 %
Hebdomadaire	- 0,017 %	- 0,017 %	- 0,017 %
Quotidien	- 0,0024 %	- 0,0024 %	- 0,0024 %

Tableau I.2 Estimation du biais relatif en fonction du pas de temps choisi et pour différentes maturités

Ces résultats mettent en avant l'importance du pas de discrétisation retenu sur les écarts générés par les méthodes d'approximations numériques. En outre, on s'aperçoit que les biais relatifs sont égaux pour différents niveaux de maturité à partir d'un pas de temps assez fin fixé.

Si on généralise ce principe au calcul d'un *best estimate*, on s'aperçoit rapidement que le choix du pas de temps est crucial dans la mesure où il peut entraîner des écarts relatifs plus ou moins grands. Dans notre cas, les biais étant négatifs, l'utilisation des coefficients d'actualisation approximatés sous-estimerait la valeur du *best estimate*. Néanmoins, il semble qu'à partir d'un pas de temps mensuel, l'écart s'atténue sensiblement.

I.d.2. Vitesse de convergence

Nous voulons à présent déterminer la vitesse de convergence de l'estimateur empirique $\widehat{P}_N^\theta(0, T)$, l'objectif étant d'obtenir le nombre de simulations nécessaires pour un degré de précision du résultat voulu à l'avance.

D'après la loi des grands nombres, si $\tilde{r}^1, \dots, \tilde{r}^N$ sont indépendants et identiquement distribués alors on a \mathbb{Q} presque sûrement :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{P}_N^\theta(0, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{r}^i(t_j) \times (t_j - t_{j-1}) \right) = \widetilde{P}^\theta(0, T)$$

Notons que l'estimateur ne converge pas vers la valeur que l'on cherchait initialement, c'est-à-dire $P(0, T)$, à cause du biais de discrétisation « technique » défini précédemment.

De plus, d'après le Théorème Central Limite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\widehat{P}_N^\theta(0, T) - \widetilde{P}^\theta(0, T)}{\sqrt{V^\mathbb{Q}(\widehat{P}_N^\theta(0, T))}} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (\mathcal{L})$$

Ainsi, nous pouvons déterminer l'intervalle de confiance asymptotique pour $\widetilde{P}^\theta(0, T)$ avec un niveau de confiance de $(1 - \alpha) \%$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \left(\widetilde{P}^\theta(0, T) \in \left[\widehat{P}_N^\theta(0, T) - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V^\mathbb{Q}(\widehat{P}_N^\theta(0, T))}, \widehat{P}_N^\theta(0, T) + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V^\mathbb{Q}(\widehat{P}_N^\theta(0, T))} \right] \right) = (1 - \alpha) \%$$

Où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -quantile d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On peut d'ailleurs calculer explicitement la variance de $\widehat{P}_N^\theta(0, T)$:

$$V^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{P}_N^\theta(0, T)\right) = \frac{1}{N} V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)$$

Ainsi,

$$V^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{P}_N^\theta(0, T)\right) = \frac{1}{N} e^{-2\theta\left[\sum_{j=1}^p f(0, t_j) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t_j)\right] + \theta^2 L(\theta) G(\theta)} \left(e^{\theta^2 L(\theta) G(\theta)} - 1\right)$$

Nous souhaitons à présent mesurer la sensibilité de la largeur relative de l'intervalle de confiance en fonction du niveau de confiance voulu, du nombre de trajectoires de taux court simulées, du pas de discrétisation choisi et de la maturité du zéro-coupon. Nous commençons tout d'abord par définir la largeur relative de l'intervalle de confiance :

$$\ell(\alpha, \theta, N, T) = q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{P}_N^\theta(0, T)\right)}}{\widetilde{P}^\theta(0, T)}$$

On a ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}\left(\left|\frac{\widehat{P}_N^\theta(0, T) - \widetilde{P}^\theta(0, T)}{\widetilde{P}^\theta(0, T)}\right| \leq \ell(\alpha, \theta, N, T)\right) = (1 - \alpha) \%$$

- **Sensibilité de ℓ au niveau de confiance**

Pour θ, N et T fixés, la largeur de l'intervalle de confiance augmente avec le niveau de confiance. En effet, $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ augmente lorsque α diminue.

Ainsi, $\frac{\partial \ell}{\partial (1-\alpha)} > 0$.

- **Sensibilité de ℓ au nombre de simulations**

Pour α, θ et T fixés, nous avons immédiatement le résultat suivant : $\frac{\partial \ell}{\partial N} < 0$.

Un nombre de simulations élevé permet d'obtenir un résultat plus précis et un intervalle de confiance meilleure. La convergence est en $O(N^{-\frac{1}{2}})$. A titre d'exemple, pour diviser par 10 la taille de l'intervalle de confiance, il faut multiplier N par 100.

- Sensibilité de ℓ au pas de discrétisation

Pour α, N et T fixés, la largeur de l'intervalle de confiance diminue lorsque θ diminue. On a donc $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} > 0$.

On présente la valeur de $\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widetilde{P}^{\theta}(0, T)}$ en fonction de certains pas de temps usuels dans le tableau suivant :

Pas de temps θ	$\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widetilde{P}^{\theta}(0, T)}$
Annuel	0,718
Mensuel	0,675
Hebdomadaire	0,672
Quotidien	0,671

Tableau I.3 Estimation de $\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widetilde{P}^{\theta}(0, T)}$ en fonction du pas θ pour $T = 10$

Ces résultats montrent qu'à partir d'un pas de temps mensuel, la largeur de l'intervalle de confiance devient de moins en moins sensible au rétrécissement du pas de discrétisation.

- Sensibilité de ℓ à la maturité

La largeur de l'intervalle de confiance augmente avec la maturité du zéro-coupon pour α, θ et N fixés : $\frac{\partial \ell}{\partial T} > 0$.

A titre de comparaison, pour $T = 20$ et $T = 30$, on obtient les valeurs suivantes

de $\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widetilde{P}^{\theta}(0, T)}$ en fonction de θ :

Pas de temps θ	$\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widehat{P}^{\theta}(0, T)}$	
	$T = 20$	$T = 30$
Annuel	2,029	4,858
Mensuel	1,944	4,661
Hebdomadaire	1,939	4,648
Quotidien	1,937	4,645

Tableau I.4 Estimation de $\frac{\sqrt{V^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\sum_{j=1}^p \tilde{r}(t_j) \times \theta}\right)}}{\widehat{P}^{\theta}(0, T)}$ en fonction du pas θ pour $T = 20$ et $T = 30$

Ce type de résultat montre que pour un niveau de confiance et une largeur fixés à l'avance, il faut ajuster le nombre de simulations en fonction de T afin d'obtenir une même précision de résultat pour toutes les maturités.

L'ensemble de ces résultats permet de constater la vitesse de convergence de la valeur empirique vers la valeur théorique du zéro-coupon en fonction du choix des paramètres et du degré de précision voulu.

Par exemple, pour un niveau de confiance de 95 %, une maturité de 10 ans, un pas de discrétisation quotidien et une largeur relative de l'intervalle de confiance de 0,5 % il faut simuler 70 000 trajectoires de taux court.

I.d.3. Erreur relative totale

Rappelons que notre objectif est d'approcher le prix exact d'un zéro-coupon de maturité T qui peut être exprimé comme suit :

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)\right]$$

En pratique, cette espérance est calculée numériquement par l'estimateur suivant :

$$\widehat{P}_N^{\theta}(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp\left(-\sum_{j=1}^p \tilde{r}^i(t_j) \times \theta\right)$$

Nous avons montré que cette approximation génère mécaniquement un certain nombre d'erreurs en distinguant le biais de discrétisation « technique » et le biais de convergence. Nous pouvons à présent quantifier l'erreur totale relative à l'aide de ces biais.

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{P}_N^\theta(0, T) - P(0, T) \right| &= \left| \widehat{P}_N^\theta(0, T) - \widetilde{P}^\theta(0, T) + \widetilde{P}^\theta(0, T) - P(0, T) \right| \\ &\leq \left| \widehat{P}_N^\theta(0, T) - \widetilde{P}^\theta(0, T) \right| + \left| \widetilde{P}^\theta(0, T) - P(0, T) \right| \\ &\leq \ell(\alpha, \theta, N, T) \widetilde{P}^\theta(0, T) + |B(\theta)| P(0, T) \end{aligned}$$

Or $\widetilde{P}^\theta(0, T) = (1 + B(\theta))P(0, T)$, on a ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \left(\left| \frac{\widehat{P}_N^\theta(0, T) - P(0, T)}{P(0, T)} \right| \leq \ell(\alpha, \theta, N, T)(1 + B(\theta)) + |B(\theta)| \right) = (1 - \alpha) \%$$

L'expression de l'erreur relative totale étant maintenant connue, nous décidons de mesurer cette erreur en fonction de la maturité des zéro-coupon et du nombre de simulations pour un pas de temps quotidien et un niveau de confiance de 95 % :

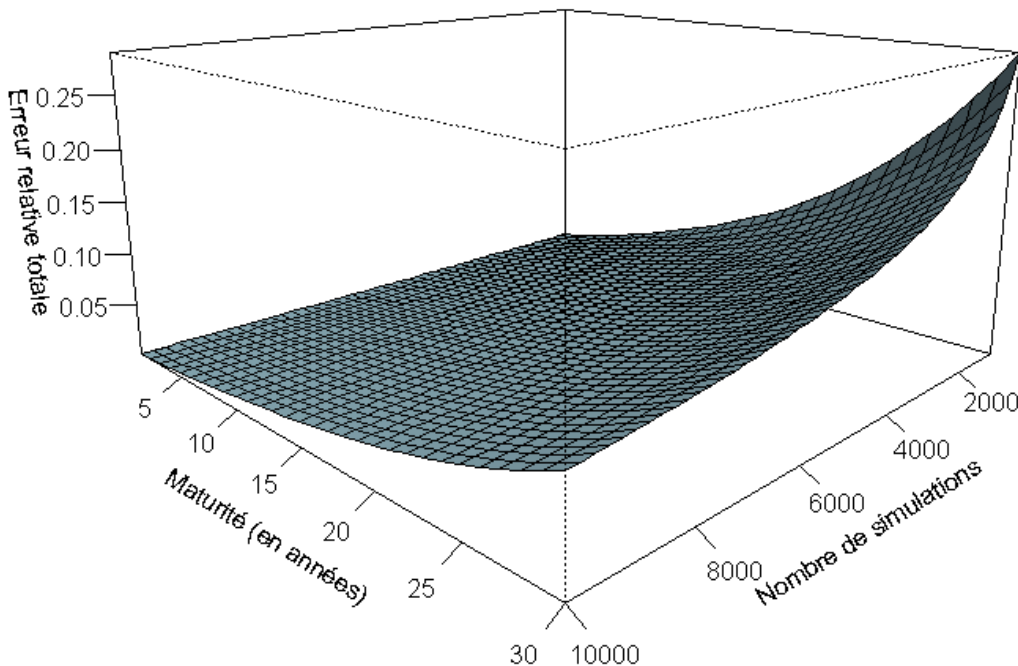


Figure I.4 Surface de l'erreur relative totale en fonction de la maturité et du nombre de simulations

Ainsi, quand bien même le pas de discrétisation serait relativement fin (quotidien) et au vu d'un nombre de simulations raisonnable compte tenu des contraintes de temps de calculs, une erreur relative significative subsisterait entre la valeur de marché d'un zéro-coupon et la valeur approchée numériquement par simulation.

A ce stade de notre étude, nous pouvons généraliser ce résultat au calcul d'un *best estimate*. La valorisation des provisions techniques nécessite effectivement de faire des choix en termes de paramétrage des modèles. Que se soient le nombre de simulations, le pas de discrétisation « technique » ou encore la discrétisation utilisée pour la projection des flux, le choix des valeurs de ces différents paramètres exige un arbitrage en fonction du degré de précision des résultats que l'on se fixe. Cependant, l'erreur d'échantillonnage devrait être plus faible que pour le calcul d'un zéro-coupon (flux simple à une date unique), la mutualisation temporelle permettant d'augmenter, toutes choses égales par ailleurs, la stabilité de l'estimateur⁸.

Nous tentons à présent d'illustrer à travers le calcul d'un *best estimate* d'un contrat en unités de compte ces différents biais.

⁸ Cf. PLANCHET [2013]

II. BEST ESTIMATE D'UN CONTRAT EN UNITES DE COMPTE

Nous allons illustrer sur un cas pratique de calcul d'un *best estimate* dans le cadre d'un modèle ALM simplifié les biais de discrétisation et de convergence décrits précédemment. L'objectif est de mettre en évidence leur importance respective et de montrer comment faire des choix raisonnables en termes de pas de discrétisation et de nombre de trajectoire à utiliser. Les résultats de cette illustration pourront être généralisés au principe de calcul d'un *best estimate* à l'aide d'un générateur de scénario économique risque-neutre dans le but de déterminer des valeurs cohérentes avec le marché.

II.a. Calcul théorique du *best estimate*

Considérons un contrat d'épargne investi dans un actif $S(t)$. \mathbb{Q}^f étant la probabilité risque neutre, $\delta(t)S(t)$ est une martingale sous \mathbb{Q}^f où $\delta(t)$ est le facteur d'actualisation défini précédemment. En outre on suppose que l'assuré peut racheter une fraction de son investissement chaque année entre la date initiale et l'échéance T et qu'au terme du contrat l'assuré récupère la valeur de la part. La valeur de départ du *best estimate* d'un tel contrat est égale au montant de l'actif initial $S(0)$ ⁹.

En effet, en considérant le processus des taux de rachat $\{q_t, t = 1, \dots, T\}$ exprimé en fraction de la valeur de l'actif tel que $q_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [1_{\{\tau=t\}} | F]$ où τ est la variable aléatoire indiquant la date de rachat et F la filtration générée par les trajectoires de l'actif financier, la valeur du *best estimate* peut être exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} BE_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left(\sum_{t=1}^T \delta(t) S(t) 1_{\{\tau=t\}} \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} \left(\sum_{t=1}^T \delta(t) S(t) 1_{\{\tau=t\}} \mid F \right) \right) \\ &= \sum_{t=1}^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [\delta(t) S(t) q_t] \end{aligned}$$

Par ailleurs, le processus des taux de rachat vérifie la contrainte $\sum_{t=1}^T q_t = 1$ du fait que la valeur de la part est totalement rachetée à échéance.

Par conséquent, si la valeur de la part est indépendante du processus des taux de rachat on obtient le résultat recherché grâce à la propriété de martingale de $\delta(t)S(t)$:

$$BE_0 = \sum_{t=1}^T q_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [\delta(t) S(t)] = \sum_{t=1}^T q_t S(0) = S(0)$$

⁹ Cf. PLANCHET [2012]

La valeur de BE_0 est identique même lorsque les taux de rachats sont dépendants de l'environnement financier. En effet, supposons que q est adapté à la même filtration que S , on a alors :

$$\begin{aligned} BE_0 &= \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t \delta(t) S(t)] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_T \delta(T) S(T)] \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t \delta(t) S(t)] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[\left(1 - \sum_{t=1}^{T-1} q_t \right) \delta(T) S(T) \right] \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t (\delta(t) S(t) - \delta(T) S(T))] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [\delta(T) S(T)] \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [\delta(T) S(T)] = S(0)$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t (\delta(t) S(t) - \delta(T) S(T))] = 0 \forall t \in \llbracket 1; T-1 \rrbracket$.

En effet, du fait que q_t est F_t -mesurable et que $\delta(t) S(t)$ est une \mathbb{Q}^f -martingale on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t (\delta(t) S(t) - \delta(T) S(T))] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} (q_t (\delta(t) S(t) - \delta(T) S(T)) | F_t) \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left(q_t \left(\delta(t) S(t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} (\delta(T) S(T) | F_t) \right) \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [q_t (\delta(t) S(t) - \delta(t) S(t))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BE_0 = S(0)$$

On peut à présent étendre cette propriété au calcul d'un *best estimate* dans le cadre d'un modèle ALM général. On peut effectivement considérer que l'investissement initial est placé dans plusieurs actifs de marché ce qui revient à supposer qu'il est investi dans une unité de compte $S(t)$ telle que $\delta(t) S(t)$ est une martingale sous \mathbb{Q}^f . Par conséquent, l'espérance sous la probabilité risque neutre des flux servis actualisés est égale au montant du capital initialement investi.

Ainsi, dans ce type de modèle il est inutile d'avoir recours à des méthodes de calculs numériques pour calculer la valeur économique des provisions techniques. Cependant, dans la suite de notre étude, nous ferons comme si cette propriété était ignorée et nous recalculerons BE_0 par simulation afin de mesurer les écarts de convergence en fonction du paramétrage des méthodes de calculs. .

II.b. Calcul numérique du best estimate

Dans cette illustration, on considère un capital initial de 1 € investi sur 10 ans et réparti entre β % sur un actif risqué $X(t)$ et $(1 - \beta\%)$ sur un zéro-coupon de maturité 10 ans.

L'actif risqué est modélisé à l'aide du modèle de Black et Scholes :

$$X(t) = X(0) \times \exp\left(\int_0^t r(t)dt - \frac{v^2}{2}t + vB(t)\right)$$

où :

- v est la volatilité de l'actif fixée à 16 %
- $B(t)$ est un mouvement brownien
- $X(0) = 1$ est le prix initial de l'actif

Par ailleurs, dans le cadre du modèle de Hull et White, nous disposons d'une formule fermée pour calculer le prix du zéro-coupon à la date t :

$$P(t, 10) = \frac{P(0,10)}{P(0,t)} \exp\left[-\frac{K^2(10-t)}{2}L(t) + K(10-t)(f(0,t) - r(t))\right]$$

De plus, le processus des taux de rachat est modélisé de la manière suivante pour $\forall t \in \llbracket 1; T - 1 \rrbracket$:

$$q_t = 2 \% + 5 \% 1_{\{\beta \% \times X(t) + (1 - \beta \%) \times \frac{P(t,10)}{P(0,10)} < 0,8\}}$$

En outre, au terme du contrat l'assuré récupère la valeur de la part : $q_T = 100$ %.

Ainsi, dans notre modèle, l'assuré rachète 2 % de sa part chaque année. Ce taux représente le taux de rachat structurel y compris les sorties dues aux décès. Ce taux passe à 7 % si la part est en moins-value latente de plus de 20 %.

Notons que dans cet exemple, nous avons décidé d'exprimer q_t en fonction de l'épargne résiduelle et non en fraction de la valeur de la part comme dans la partie précédente afin de reprendre les notations usuelles par souci de clarté.

Le calcul consiste alors à projeter des trajectoires du couple $(S(t), r(t))$ et à recalculer, le long de ces trajectoires, les flux servis à l'assuré et à les actualiser avec le facteur approché $\delta(t) \approx \exp(-\sum_{i=1}^p r(t_i) \times \theta)$ où les taux courts ont été calibrés à l'aide du modèle de Hull et White.

Par ailleurs, $X(t)$ devra aussi être approché via l'approximation de la dérive :

$$X(t) \approx X(0) \times \exp\left(\sum_{i=1}^p r(t_i) \times \theta - \frac{v^2}{2}t + vB(t)\right)$$

Afin de garder une certaine homogénéité avec le choix du pas de discrétisation utilisé pour la projection du taux court, nous utiliserons le même pas de temps pour l'approximation de la dérive. Par ailleurs, étant donné que les trajectoires du mouvement brownien ne dépendent pas de θ , il est préférable de ne simuler qu'une seule fois ces trajectoires qui seront associées à toutes les trajectoires de taux court projetées quel que soit le pas de discrétisation utilisé afin de supprimer de notre illustration graphique la volatilité due à l'échantillonnage du mouvement brownien. Cette approche facilitera la comparaison des convergences du *best estimate* en fonction de θ . En outre, cette illustration suppose que le mouvement brownien n'est pas corrélé au taux court.

Notons que la discrétisation pour la projection des flux est faite quant à elle avec un pas de temps annuel.

On peut alors calculer le *best estimate* de la manière suivante :

$$Best\ estimate = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{t=1}^{10} \delta^j(t) \times Flux^j(t) \right)$$

où N représente le nombre de simulation.

La figure suivante représente, pour $\beta \% = 20 \%$, la convergence du calcul du *best estimate* en fonction du nombre de trajectoires du couple $(S(t), r(t))$ simulées et en fonction du pas de discrétisation « technique » utilisé pour la projection du taux court.

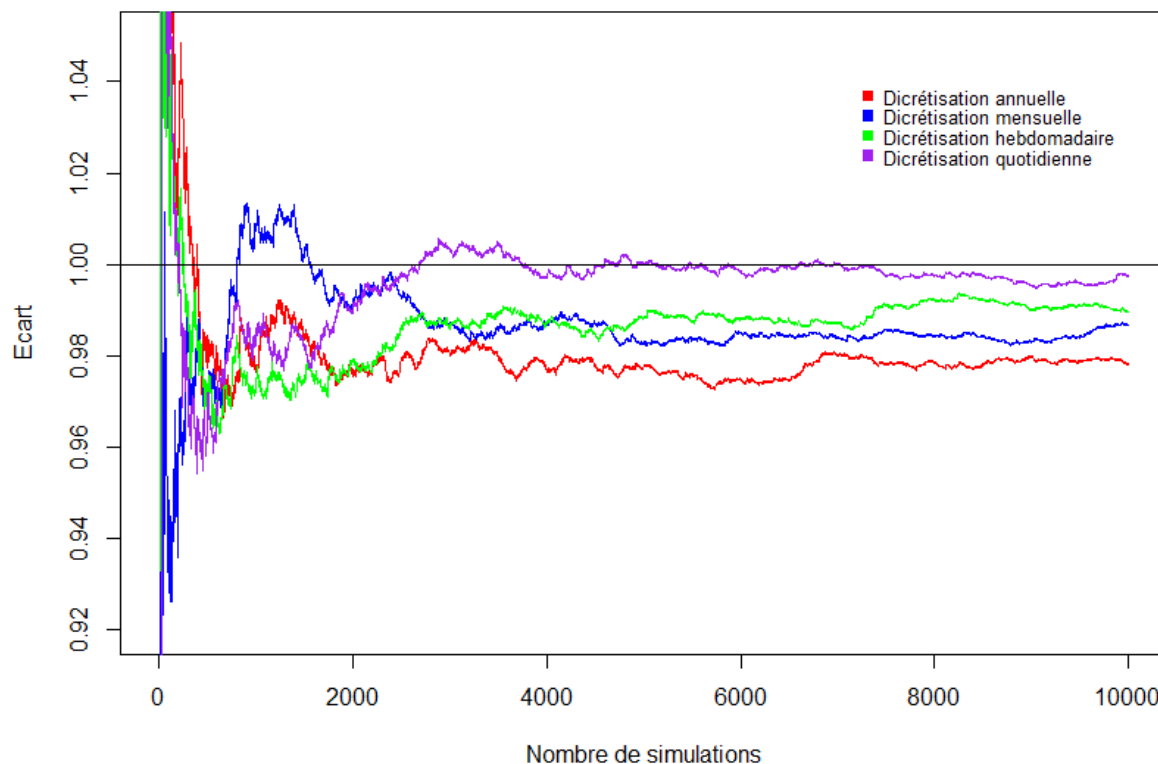


Figure II.1 Valeur de la somme des flux futurs actualisés par simulation en fonction de θ et pour $\beta\%=20\%$

Ce graphique permet de mettre en relief l'intérêt pratique du choix du pas de discrétisation « technique ». En effet, on constate que la convergence de calcul du *best estimate* vers la valeur théorique est plus rapide et plus précise lorsque θ est plus fin. Cependant, l'avantage du choix d'un pas de discrétisation plus fin n'est remarquable que si le nombre de simulations est suffisamment important pour réduire la volatilité de l'échantillonnage. Sur l'exemple présenté, on constate ainsi une bonne stabilisation des résultats à partir de 4 000 trajectoires simulées environ. De plus, le nombre de lois gaussiennes à simuler pour la projection du taux court augmente lorsque le pas de discrétisation diminue. A titre d'exemple, la projection d'une trajectoire de taux court sur 10 ans avec un pas de discrétisation annuel nécessite la simulation de 10 variables aléatoires gaussiennes tandis qu'il faudrait en simuler 3 650 avec un pas de discrétisation quotidien. Ces chiffres sont ensuite à multiplier par le nombre de trajectoires souhaité afin d'obtenir le nombre total de variables aléatoires gaussiennes nécessaires pour simuler les trajectoires de taux court. Par conséquent, le choix du nombre de simulations de trajectoires revêt une importance capitale dans la mesure où il permet, lorsque celui-ci est élevé, de contribuer à la précision des résultats obtenus d'autant plus que le pas de discrétisation « technique » est fin.

Ainsi, le choix d'un pas de discrétisation « technique » fin ne présente un intérêt pratique seulement si le nombre de simulations est élevé. Il convient alors de s'interroger sur la nécessité d'une telle mise en œuvre compte tenu des contraintes de temps de calcul des assureurs.

L'étape suivante de notre étude est d'affiner notre analyse dans le cadre d'un « vrai » modèle ALM projetant des comptes sociaux sans formule explicite en mesurant la sensibilité du *best estimate* au pas de discrétisation et au nombre de simulations choisis en entré du modèle.

III. APPLICATION AU CALCUL CONCRET D'UN BEST ESTIMATE

Ce chapitre décrit dans le cadre d'un modèle ALM réaliste la manière dont pourrait être améliorée la méthode de calcul d'un *best estimate* en affinant le pas de discrétisation « technique » compte tenu de l'erreur d'échantillonnage et des contraintes de temps de calcul. Cette étude vise à compléter les résultats obtenus aux chapitres précédents en apportant des informations plus concrètes en termes de précision de calcul. Il est cependant utile de rappeler ici que la valeur théorique du *best estimate* est inconnue contrairement au cas simple présenté dans le chapitre II.

III.a. Présentation du portefeuille

Nous nous focaliserons pour cette étude sur un portefeuille fictif d'assurance vie de maturité 30 ans présentant des interactions Actif/Passif à travers la participation aux bénéfices (PB) reversés aux assurés à hauteur de 90 % des résultats financiers. Rappelons que le code des assurances définit la participation minimale aux résultats financiers à 85 %¹⁰.

L'Actif est composé d'obligations, d'actions, de produits immobiliers et monétaires. Le tableau ci-dessous présente le montant de chaque ligne d'actif en valeur comptable et en valeur de marché hors fonds propres. En effet, ces derniers n'étant pas concernés par la participation aux bénéfices, nous ne prenons en compte que les actifs en représentation des engagements réglementaires pour la projection des flux financiers. Ils représentent cependant 13 % de la valeur totale des actifs hormis la réserve de capitalisation s'élevant à 150 K €.

	Valeur comptable	Valeur de marché
Obligations	342	428
Monétaire	513	641
Actions	2 223	2 779
Immobilier	342	428
Total	3 420	4 275

Tableau III.1 Actifs en valeur comptable et en valeur de marché hors fonds propres en k €

¹⁰ Art. A 331-4

Ainsi, 65 % de l'investissement initial est alloué aux obligations, 10 % aux produits monétaires, 10 % aux actions et 15 % à l'immobilier.

Le Passif pour sa part est constitué essentiellement d'engagements contractés à l'égard des assurés que l'on distingue en fonction de l'ancienneté dans le portefeuille. Ainsi, nous considérons que le montant total des provisions mathématiques (PM) est égal à 3000 k € fractionnées en parts égales sur 30 années d'ancienneté, les PM associées à la $j^{\text{ème}}$ année d'ancienneté étant égales à 100 k €. De cette façon nous ferons vieillir le portefeuille d'assurés sans prendre en compte de nouveaux assurés potentiels. Par ailleurs le compte de participation aux bénéficiaires (CPB) est initialement égal à 270 k €.

III.b. Valorisation du best estimate

L'étape de calcul du *best estimate* nécessite de faire des choix en termes de modélisation aussi bien du côté de l'Actif qu'au niveau du Passif. En outre, ces choix effectués en amont de la projection des flux dépendent à la fois de la structure de l'Actif du portefeuille et du comportement des assurés.

Rappelons que le *best estimate* à la date 0 est calculé en univers risque neutre. Les modèles utilisés sont donc définis sous la probabilité \mathbb{Q} .

III.b.1. Modélisation de l'Actif

Afin de modéliser la structure de l'Actif du portefeuille jusqu'à maturité, nous simulons chaque classe d'actif pour chaque année de projection.

Pour cela, le modèle de Black et Scholes est utilisé pour les actions et l'immobilier. Nous considérons que la volatilité respective de ces actifs est de 10% et qu'il n'y a pas de dividende pour les actions ni de loyer pour les produits immobiliers.

Les produits obligataires sont composés de 60 % d'obligations d'Etat et de 40 % d'obligations *corporate*. Nous considérons que le portefeuille obligataire comporte 8 obligations d'Etat (avec un taux de coupon de 2 %) et 8 obligations *corporate* (avec un taux de coupon de 4 %). Nous considérons que ces obligations ont été émises au pair avec une maturité initiale de 8 ans. De plus, toutes les obligations d'Etat $O_i^E, i \in \llbracket 1,8 \rrbracket$ ont la même valeur comptable (VC) mais des maturités résiduelles différentes et progressives, l'obligation i ayant une maturité résiduelle de i années. Il en est de même pour les obligations *corporate* $O_i^C, i \in \llbracket 1,8 \rrbracket$.

Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1,8 \rrbracket$

$$VC(O_i^E) = 0,6 \times \frac{342}{8} = 25,65 \text{ K €}$$

$$VC(O_i^C) = 0,4 \times \frac{342}{8} = 17,10 \text{ K €}$$

Tout au long de la projection, le portefeuille obligataire est vieilli. En outre, lorsqu'une obligation arrive à maturité, sa valeur de remboursement est réinvestie dans le portefeuille obligataire. Les coupons qui tombent chaque année sont quant à eux réinvestis dans les produits monétaires. Notons que les taux de coupon des nouvelles obligations sont modélisés à l'aide du modèle de Hull et White tout comme la valeur de marché des obligations.

Enfin, les produits monétaires sont capitalisés au cours de la projection.

III.b.2. Modélisation du Passif

Dans cette illustration, les flux au Passif sont modélisés par les taux de rachat et les taux de décès des assurés.

Les sorties dues aux décès sont supposées constantes et égales à 0,30 % des engagements, toutes années d'ancienneté confondues.

Les taux de rachat peuvent se décomposer en deux types de taux : les taux de rachat structurel RS et les taux de rachat conjoncturel RC . La figure ci-dessous représente la loi de rachat structurel que nous avons retenue en fonction de l'ancienneté du contrat. De plus, au bout de 30 ans d'ancienneté l'assuré rachète la totalité de sa part.

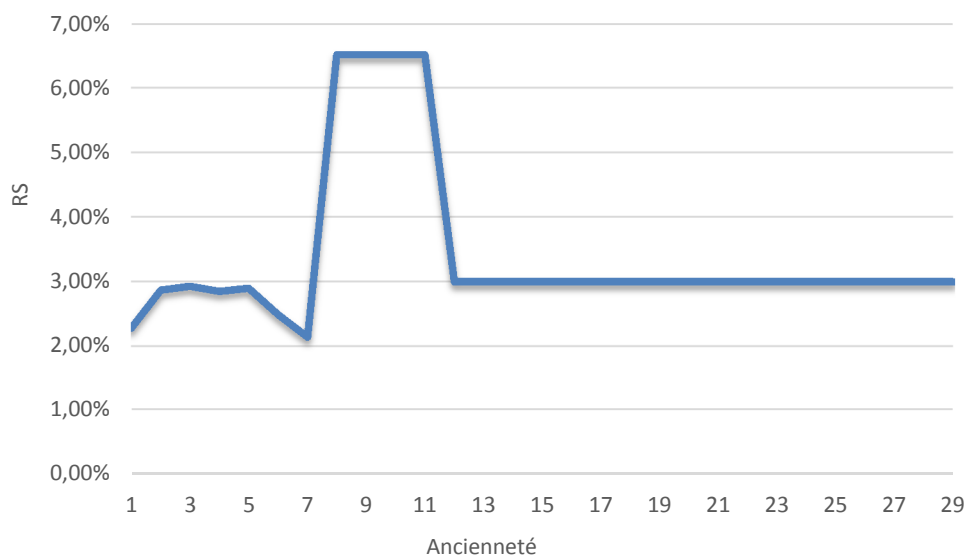


Figure III.1 Loi de rachat structurel

Par ailleurs, le taux de rachat conjoncturel RC , pour une année donnée, correspond à l'écart entre le taux servi τ et le taux attendu TA de l'année précédente. Notons que le taux attendu a été modélisé en prenant le taux court.

Ainsi,

$$RC(\tau) = \begin{cases} RC_{\max} & \text{si } \tau - TA < \alpha \\ RC_{\max} \frac{(\tau - TA - \beta)}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq \tau - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq \tau - TA < \gamma \\ RC_{\min} \frac{(\tau - TA - \gamma)}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq \tau - TA < \delta \\ RC_{\min} & \text{si } \tau - TA \geq \delta \end{cases}$$

Les valeurs des paramètres ci-dessus sont affichées dans le tableau suivant :

α	β	γ	δ	RC_{\min}	RC_{\max}
-5 %	-1 %	0,5 %	3 %	-5 %	30 %

Tableau III.2 Paramètres de la modélisation des rachats conjoncturels

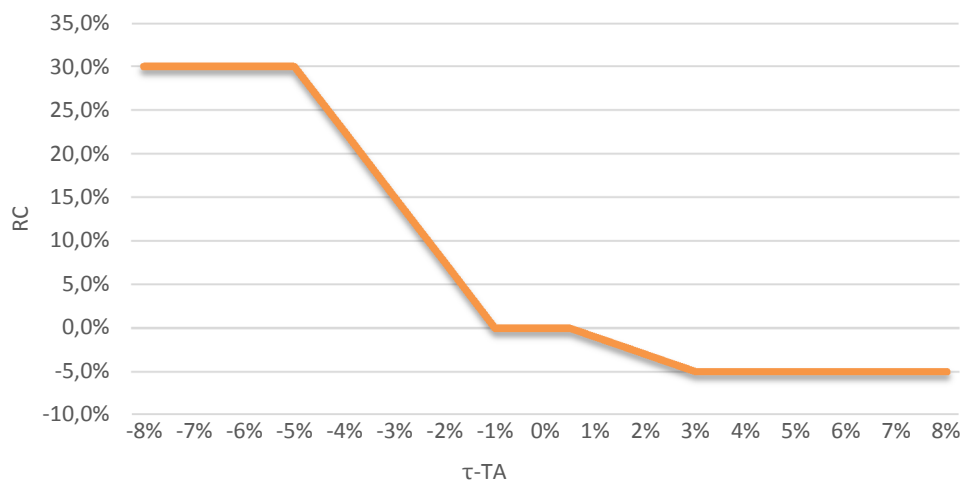


Figure III.2 Loi de rachat conjoncturel

Le taux servi correspond au taux de revalorisation de l'épargne des assurés. Il est modélisé au moyen des mécanismes de la gestion Actif/Passif propres au modèle ALM et dépend à la fois des résultats financiers, du compte de participation aux bénéficiaires, du taux sans risque R , du Taux Minimum Garanti (TMG) et du taux de chargement de gestion. Afin de simplifier notre modélisation, nous fixons ici le taux de chargement de gestion à 0%. Cependant, en pratique le taux servi est calculé net de chargement de gestion. De même, nous retenons un TMG nul.

Nous allons à présent décrire la manière dont le taux servi est modélisé dans notre étude. Dans un premier temps, le compte de PB est augmenté de 90 % des résultats financiers lorsque ces derniers sont positifs. Rappelons que pour une année donnée ici, les résultats financiers correspondent à la somme des tombées de coupons, des intérêts monétaires, des mouvements de la réserve de capitalisation et des écarts générés sur le portefeuille d'actifs suite au dégagement des flux au passif et de la réallocation du portefeuille (en vue d'atteindre l'allocation stratégique).

Dans un second temps, le taux servi est calculé en fonction de deux écarts notés respectivement E_{min} et E_{max} :

$$E_{min} = (Revalo_{min} - R) \text{ et } E_{max} = (Revalo_{max} - R),$$

avec

$$Revalo_{min} = TMG + \frac{CPB}{PM}$$

$$Revalo_{max} = TMG + \frac{90 \% \times PVL + CPB}{PM}$$

où

- PVL correspond aux plus-values latentes des actions et des produits immobiliers.
- PM correspond aux provisions mathématiques globales avant paiement des prestations.

On a alors :

$$\tau = \begin{cases} f(E_{max}) & \text{si } E_{min} < \beta \\ \max(TMG, R) & \text{si } \beta \leq E_{min} < \gamma \\ \max(TMG, R + \gamma) & \text{si } E_{min} \geq \gamma \end{cases}$$

avec

$$f(E_{max}) = \begin{cases} Revalo_{max} + \min(0,5 \%, \beta - E_{max}) & \text{si } E_{max} < \beta \\ \max(TMG, R) & \text{si } \beta \leq E_{max} < \gamma \\ \max(TMG, R + \gamma) & \text{si } E_{max} \geq \gamma \end{cases}$$

Ainsi, lorsque le compte de PB ne suffit pas à atteindre le taux servi, des plus-values latentes sont réalisées. De plus, rappelons que nous avons choisi de retenir un TMG nul. Notons qu'un TMG nul modélise l'effet cliquet. Ce dernier correspond à une garantie qui assure au souscripteur le montant de son épargne dans le temps. Par conséquent, son épargne ne peut pas diminuer.

Par ailleurs, nous supposons dans le cadre de notre illustration que les frais de prestations sont inexistantes. Le best estimate est donc seulement égal à la somme des flux de prestation actualisés.

III.b.3. Application et résultats

Nous pouvons à présent valoriser le *best estimate* de ce portefeuille à partir des données fournies précédemment. Il nous faut pour cela choisir une courbe des taux zéro-coupon afin d'en déduire les taux *forward* associés pour projeter les taux courts nécessaires au calcul des coefficients d'actualisation pour chaque scénario économique. Nous décidons de reprendre la courbe publiée par l'EIOPA dans le cadre de l'exercice LTGA correspondant aux taux zéro-coupon au 31/12/2011. Nous reprenons également les mêmes paramètres du modèle de taux de Hull et White choisis au chapitre I pour la modélisation du taux court.

Par ailleurs, les taux *forward* sont approchés ici par la méthode des différences finies contrairement aux chapitres précédents où ils étaient calculés à l'aide du modèle de Nielson Siegel Svensson. En effet, grâce à la relation $P(0, T) = \exp\left[-\int_0^T f(0, s)ds\right]$, on peut utiliser l'approximation suivante pour h petit :

$$f(0, T) = -\frac{\ln P(0, T + h) - \ln P(0, T)}{h}$$

$$= \frac{(T + h) \times R(0, T + h) - T \times R(0, T)}{h}$$

En pratique, nous retenons $h = 1$ ce qui correspond à un pas de temps annuel, car les taux zéro-coupon à notre disposition correspondent uniquement à des maturités annuelles. Cependant, lorsque nous projeterons le taux court avec un pas de temps plus fin, nous calculerons les taux *forward* par une interpolation linéaire bien qu'une méthode par *splines* aurait été préférable (mais pas nécessaire ici compte tenu des objectifs de l'étude).

De plus, le modèle ALM tient compte des facteurs de corrélation entre les actions, l'immobilier, le taux sans risque et l'inflation. Les coefficients de corrélation que nous avons retenus pour notre étude sont présentés dans le tableau ci-dessous.

	Actions	Immobilier	Taux sans risque	Inflation
Actions	100%	-7%	6%	-13%
Immobilier	-7%	100%	10%	35%
Taux sans risque	6%	10%	100%	-24%
Inflation	-13%	35%	-24%	100%

Tableau III.3 Matrice de corrélation des résidus

Nous pouvons à ce stade de notre modélisation faire varier le pas de temps pour la projection du taux court et ainsi approcher les coefficients d'actualisation. La projection des flux est faite quant à elle avec un pas de temps annuel.

Néanmoins, à l'Actif la modélisation des flux tient aussi compte de tous les taux courts ayant été projetés et des variables aléatoires gaussiennes ayant été générés compte tenu de la corrélation entre le taux court et les actifs concernés. En effet, dans un premier temps nous générons une matrice de lois normales centrées réduites, indépendantes et identiquement distribuées, à trois dimensions (nombre de corrélations, nombre de simulations, nombre d'intervalles de discrétisation sur les années de projection). Ensuite, à partir de cette matrice et de la matrice de Cholesky (issue de la matrice de corrélation), nous construisons la matrice des résidus projetés à trois dimensions. Ce sont ces résidus notés $\varepsilon^A, \varepsilon^I, \varepsilon^{Tx}, \varepsilon^{If}$ (respectivement pour les actions, l'immobilier, le taux sans risque et l'inflation) qui seront utilisés dans les modèles mathématiques.

Ainsi, pour chaque année de projection $t \in [1,30]$, les cours des actions $A(t)$ et de l'immobilier $I(t)$ sont modélisés comme suit :

$$A(t) = A(t-1) \times \exp\left(\sum_{i=(t-1)/\theta+1}^{t/\theta} (r(t_i) - 0,1^2) \theta + 0,1\sqrt{\theta} \times \varepsilon_i^A\right)$$

$$I(t) = I(t-1) \times \exp\left(\sum_{i=(t-1)/\theta+1}^{t/\theta} (r(t_i) - 0,1^2) \theta + 0,1\sqrt{\theta} \times \varepsilon_i^I\right)$$

Les bases de notre modélisation étant à présent fixées, le *best estimate* peut être calculé pour chaque scénario économique $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$ en quatre étapes, lesquelles sont répétées pour chaque année de projection $t \in \llbracket 1, 30 \rrbracket$:

- **1^{ère} Etape**

Lors de cette première étape, les flux financiers sont projetés. En outre, le portefeuille obligataire est vieilli et les tombées de coupons sont réinvesties dans les produits monétaires.

- **2^{ème} Etape**

Dans un premier temps, les flux de prestation correspondant aux rachats structurels F_{RS} , aux rachats conjoncturels F_{RC} et aux décès F_{DC} sont calculés pour chaque année d'ancienneté $j \in \llbracket t, 30 \rrbracket$ des contrats présents dans le portefeuille.

Ainsi, si l'on note $PM^j(t)$ les provisions mathématiques de début d'année associées aux contrats d'ancienneté j , on a :

$$F_{RS}^j(t) = PM^j(t) \times RS(j)$$

$$F_{DC}^j(t) = PM^j(t) \times (1 - RS(j)) \times 0,30 \%$$

$$F_{RC}^j(t) = PM^j(t) \times (1 - RS(j)) \times (1 - 0,30 \%) \times RC(\tau_{t-1})$$

Pour l'année t , le total des flux de prestation avant revalorisation est donc égal à :

$$\sum_{j=t}^{30} F_{RS}^j(t) + F_{DC}^j(t) + F_{RC}^j(t)$$

Dans un second temps, les valeurs de marché et comptable des actifs sont ajustées suite aux désinvestissements après paiement des flux.

- **3^{ème} Etape**

Après le calcul de la valeur de marché des actifs, on investit et on désinvestit le portefeuille d'actifs en fonction des plus ou moins-values latentes afin d'atteindre l'allocation cible. Dans notre illustration, nous choisissons de garder la même allocation qu'au départ tout au long de la projection.

- **4^{ème} Etape**

La participation aux bénéfices est alors calculée à partir des résultats financiers déduits des étapes précédentes. Le montant total des flux de prestation ainsi que l'ensemble des PM sont revalorisés en fonction du taux servi τ_t . Rappelons qu'il n'y a pas de PM au titre des contrats d'ancienneté supérieure à 30 ans car à échéance les contrats sont totalement rachetés. De plus, le fait qu'il n'y ait pas de nouveaux assurés dans le portefeuille implique qu'il n'y a pas de contrats d'ancienneté inférieur à t années, par conséquent il n'y a pas de PM au titre de tels contrats.

On a donc :

$$\text{Flux de prestation}(t) = \left(\sum_{j=t}^{30} F_{RS}^j(t) + F_{DC}^j(t) + F_{RC}^j(t) \right) \times (1 + \tau_t)$$

$$PM^{j+1}(t+1) = \left(PM^j(t) - F_{RS}^j(t) - F_{DC}^j(t) - F_{RC}^j(t) \right) \times (1 + \tau_t) \quad \forall j \in \llbracket t, 29 \rrbracket$$

Notons que le compte de PB est alors diminué du montant des PB distribuées. Ce compte est d'ailleurs augmenté des possibles réalisations de plus-values latentes sur les actions et les produits immobiliers en vue d'atteindre le taux servi.

Le *best estimate* est alors égal à :

$$\text{Best estimate} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left(\sum_{t=1}^{30} \delta^l(t) \times \text{Flux de prestation}^l(t) \right)$$

Nous calculons à présent le *best estimate* sur 5 000 scénarios en fonction de différents pas de temps. Le nombre de simulations retenu et l'horizon de projection étant relativement élevés, un pas de temps hebdomadaire est le pas de temps le plus fin que l'on peut utiliser sur R. En effet, plus le pas de temps est fin, plus le nombre de variables aléatoires indépendantes à générer est élevé. Nous décidons alors de comparer la convergence du *best estimate* induite par le choix d'un pas de temps annuel, semestriel, mensuel ou hebdomadaire. Les résultats sont présentés dans la figure ci-dessous.

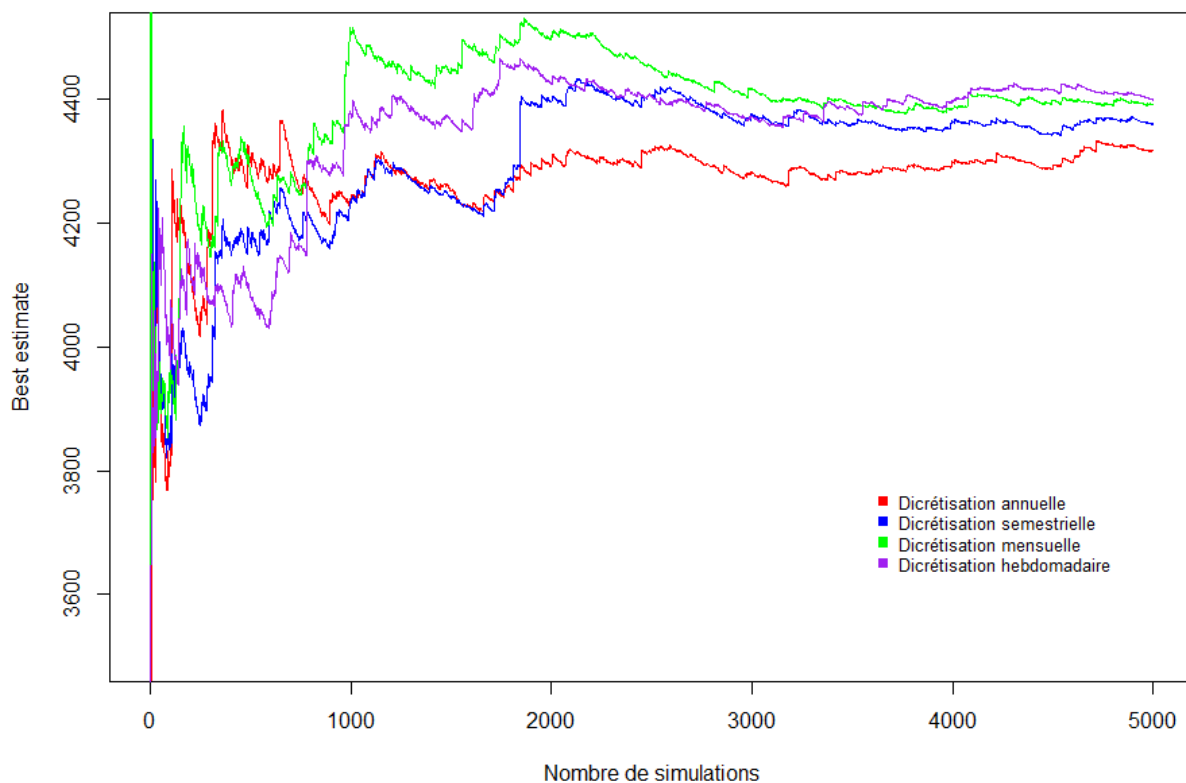


Figure III.3 Convergence du *best estimate* en fonction du pas de discrétisation

La valeur théorique du *best estimate* nous est inconnue. Afin de mesurer l'erreur commise par nos calculs, en considérant que l'utilisation d'un pas de temps plus fin permet de se rapprocher de la valeur exacte, il s'avère ici qu'un pas de temps relativement élevé conduit à une sous-estimation de la valeur du *best estimate*.

Par ailleurs, on observe que la convergence du *best estimate* est lente mais un nombre relativement important de scénarios reste tout de même nécessaire compte tenu de l'erreur d'échantillonnage. En outre, ces résultats confirment notre analyse précédente

sur le modèle ALM simplifié, les écarts de convergence obtenus en fonction des différentes discrétisations étant similaires.

Nous représentons dans le tableau ci-dessous le bilan en normes Solvabilité 2 en fonction des différents pas de temps choisis.

Actif		Passif				
		Pas de temps	1 an	6 mois	1 mois	1 semaine
Actions	484	Fonds propres	498	478	446	439
Immobilier	726	Best estimate	4 340	4 360	4 392	4 399
Obligations	3 144					
Monétaire	484					
Total :	4838	Total :	4838			

Tableau III.4 Bilan S2 en fonction du pas de discrétisation

Il est intéressant de constater la sensibilité du bilan au pas de discrétisation lié au facteur d'actualisation. Pour un nombre de simulation donné, il s'avère que le *best estimate* peut converger vers une valeur qui n'est pas la bonne, qui est de plus sous-estimée, car le taux court n'a pas été discrétisé assez finement.

Ainsi, l'étude des approximations numériques à l'aide du modèle de taux de Hull et White a permis de mettre en évidence les erreurs occasionnées par le paramétrage des modèles mathématiques. D'une part, l'analyse du biais de discrétisation « technique » dans le cadre de l'approximation des prix des zéro-coupon a justifié l'avantage du choix d'un pas de temps relativement petit compte tenu du degré de précision du résultat recherché. D'autre part, l'étude de la vitesse de convergence de l'estimateur d'un zéro-coupon a montré l'importance du nombre de simulations qu'il faudrait effectuer d'autant plus que la maturité est élevée en vue d'obtenir une erreur totale relativement faible quand bien même le pas de discrétisation utilisé serait fin.

L'illustration de ces biais sur le calcul d'un *best estimate* d'un contrat en unités de compte a confirmé cette analyse : le choix d'un pas de discrétisation plus fin permet de se rapprocher de la valeur théorique du *best estimate* sous réserve d'effectuer un nombre de simulations assez important pour limiter l'erreur d'échantillonnage. Par ailleurs, l'illustration sur un portefeuille d'assurance vie à l'aide d'un « vrai » modèle ALM a permis de valider cette étude en apportant des résultats cohérents à ceux trouvés en termes de sensibilité du *best estimate* au paramétrage du modèle.

Cependant, au-delà des erreurs de discrétisation évoqués dans cette partie, le calcul du *best estimate* dépend d'hypothèses économiques fortement liées au principe de cohérence avec les valeurs de marché introduit par Solvabilité 2. Le choix de la courbe des taux zéro-coupon pour l'actualisation des passifs fait notamment partie des enjeux

auxquels les assureurs doivent faire face pour mettre en place les nouvelles règles prudentielles. C'est l'objet de la seconde partie de notre étude.

PARTIE 2 : Hypothèses économiques
et évaluation cohérente avec les
valeurs de marché

IV. CONSTAT DE LA VOLATILITÉ INHÉRENTE AU CADRE CONCEPTUEL

La directive Solvabilité 2 modifie les principes d'évaluation du bilan avec le passage en *Full Fair Value*. C'est une généralisation du principe de *Fair Value* (Juste Valeur) qui s'applique aussi bien aux actifs qu'aux passifs du bilan¹¹. La juste valeur est le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre parties bien informées, consentantes et agissant dans des conditions de concurrence normale. Ce concept consiste donc à réaliser une évaluation économique des actifs et des passifs, c'est-à-dire à leur donner une valeur de marché. Il a pour objectif de donner une image plus juste de la valeur de l'entreprise en rapprochant la valeur comptable de la valeur de marché.

De ce fait, le bilan économique se trouve très sensible aux aléas des marchés financiers. D'une part, la valeur des actifs oscille régulièrement avec une appréciation instable des plus ou moins-values latentes, le dispositif de valorisation considérant qu'elles ont été réalisées instantanément. D'autre part, cette instabilité se répercute aussi au Passif qui est assez sensible aux hypothèses économiques nécessaires au calcul des *best estimate* d'autant plus que l'évaluation des passifs nécessite l'utilisation des taux zéro-coupon pour l'actualisation des engagements. Ces taux étant volatiles¹², il en est de même pour l'ensemble du Passif.

Partant de ce constat, il est utile de s'intéresser aux causes et aux conséquences de l'instabilité des marchés financiers afin de mieux cerner les enjeux liés à la solvabilité des compagnies d'assurance.

¹¹ Directive 2009/138/CE, Chapitre IV, section 1, article 75

¹² On peut constater cette volatilité en comparant (*figure IV.2*) les courbes des taux historiques publiées par le Comité de Normalisation Obligatoire : <http://www.cnofrance.org/fr/courbes-des-taux-zero-coupon.cfm>

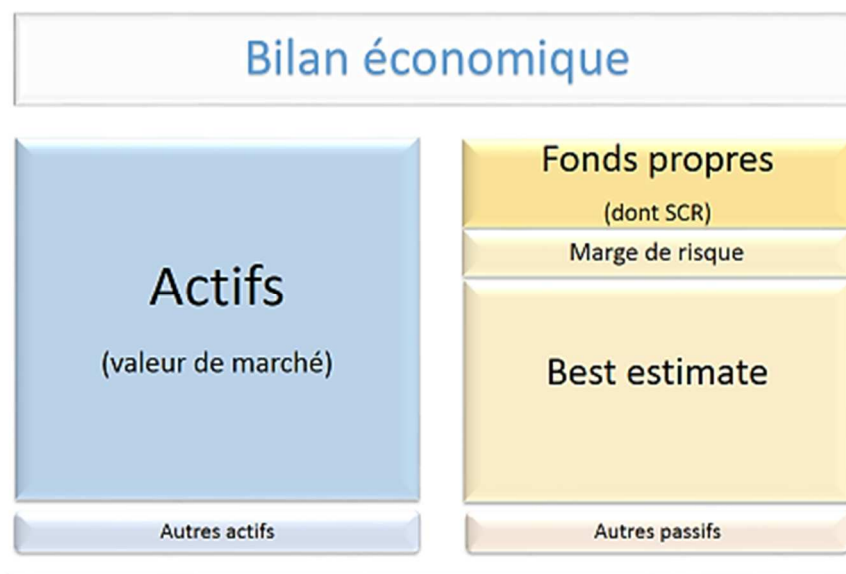


Figure IV.1 Bilan sous Solvabilité 2

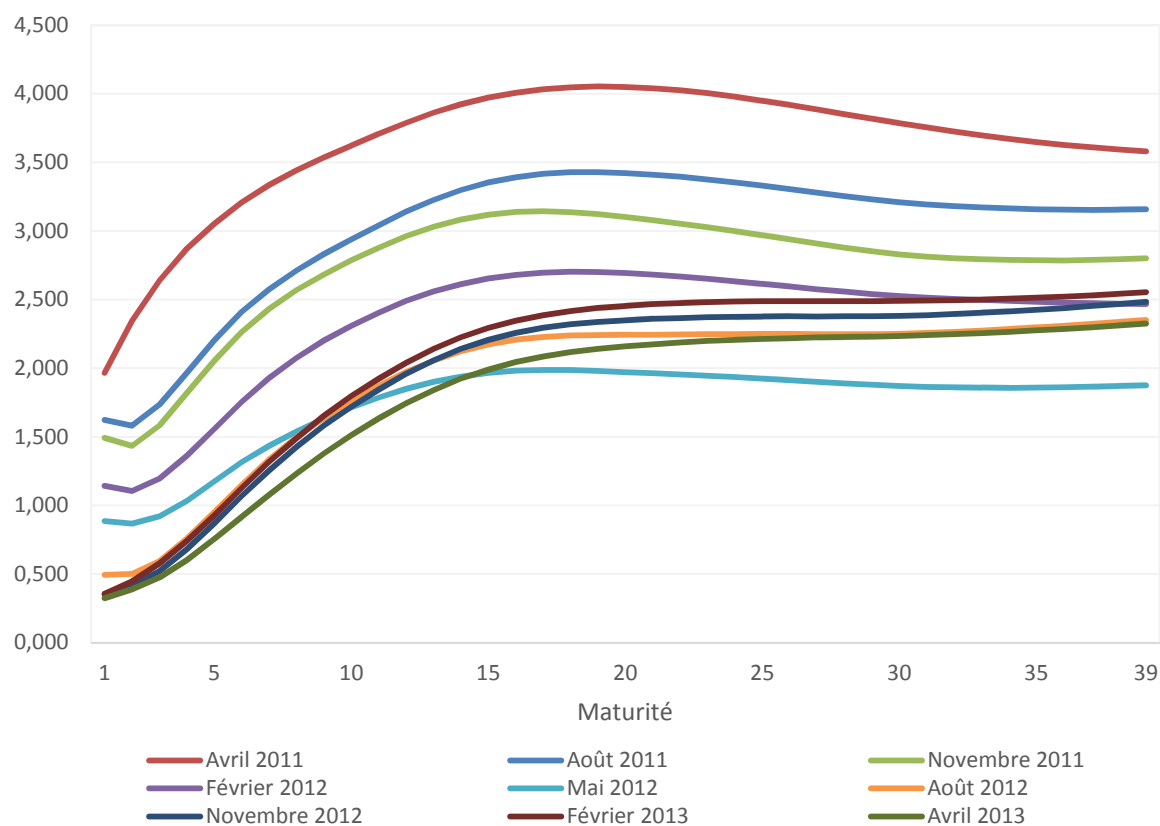


Figure IV.2 Evolution des taux zéro-coupon d'avril 2011 à avril 2013 (CNO)

IV.a. Instabilité des marchés financiers

IV.a.1. De l'efficacité informationnelle...

Les marchés financiers sont censés représenter la valeur « réelle » des actifs à travers leur prix d'équilibre. Cette théorie s'est établie en partant du principe qu'un marché financier est semblable à n'importe quel autre marché de bien. Cependant, avec la financiarisation croissante de l'économie et l'apparition de bulles financières telle que l'on a pu le constater durant la récente crise financière, la question de l'efficacité des marchés financiers a été posée. Cette notion correspond au fait que toutes les informations des entreprises seraient reflétées dans les prix de leurs titres qui constitueraient en ce sens de bonnes estimations de leur « vraie » valeur. Cependant, il est nécessaire de préciser qu'un prix résulte d'un pari sur l'avenir car un titre n'est autre qu'un droit sur des revenus futurs aléatoires. C'est donc dans un contexte d'efficacité des marchés financiers que la valeur boursière est égale à la valeur fondamentale provenant des facteurs fondamentaux puisque dans cette situation seuls ces facteurs sont pris en compte par les opérateurs dans l'évaluation des actifs.

L'idée d'efficacité informationnelle des marchés a notamment été défendue par Friedman¹³ quand bien même il y aurait des perturbateurs qui introduiraient un bruit dans le cours de bourse. En effet, d'après cette théorie, l'action de ces gêneurs ne serait qu'éphémère car les agents rationnels qui ont connaissance de la valeur fondamentale profiteraient de cet écart pour réaliser un arbitrage : ils achèteraient des actions sous-évaluées et vendraient des actions surévaluées. Par conséquent, une fois l'équilibre atteint, l'égalité entre valeur fondamentale et valeur boursière serait rétablie et les perturbateurs endosseraient une perte les incitant à quitter le marché. C'est en ce sens que Friedman considère que la spéculation est une activité stabilisatrice car elle permet de rétablir à la longue une connexion entre la valeur boursière et la valeur fondamentale.

Cependant, cette vision assez « manichéenne » n'a pas fait l'unanimité auprès des intervenants du marché¹⁴. En effet, ce principe n'est vrai que si le marché possède assez de substituts parfaits pour pouvoir réaliser un arbitrage d'autant plus que cet arbitrage doit être parfait et non risqué pour prétendre à l'efficacité informationnelle¹⁵. Ainsi, pour que le marché soit stable et que les cours de la bourse reflètent la valeur fondamentale des sociétés, il faudrait que les investisseurs rationnels, au sens où ils connaissent la « vérité » et ne tentent pas de s'en écarter, jouent un rôle prépondérant sur les marchés. En outre, ce système repose sur l'idée que les professionnels ne sont pas non plus influencés par les effets de mimétisme ce que critique à ce propos De Long et al¹⁶.

¹³ Cf. FRIEDMAN [1953]

¹⁴ Cf. WALTER et BRIAN [2008]

¹⁵ Cf. SHLEIFER et SUMMERS [1990]

¹⁶ Cf. DE LONG et al [1990]

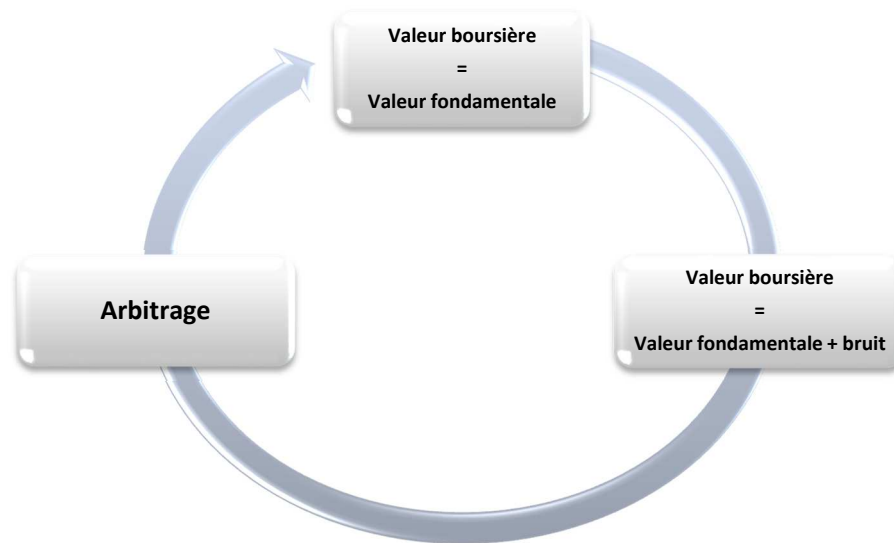


Figure IV.3 Cycle de réajustement de la valeur boursière d'après Friedman

Au vu des arguments soutenant l'idée d'efficacité informationnelle et donc de spéculation déstabilisante improbable, il semblerait que Solvabilité 2 soit en accord avec cette théorie à travers le principe de *fair value*. Les récentes crises et bulles financières nous conduisent cependant à s'interroger sur ce point.

IV.a.2. ... aux idées keynésiennes

Pour Keynes, l'efficacité informationnelle est irréalisable : il considère que l'ignorance est inhérente à l'économie de marché du fait qu'il n'existe aucune valeur fondamentale antérieure à l'évaluation du marché. Il apparaît donc que l'activité de spéculation n'est pas dénuée de toute rationalité mais au contraire est nécessaire à la stabilité du système. En effet, le but premier du marché financier est de rendre liquides les investissements en capital et ceci n'est possible qu'en présence simultanée de spéculateurs et d'investisseurs motivés par les rendements futurs escomptés.

Bien que la stabilité des marchés financiers ne soit pas remise en question ici, il est quand même nécessaire d'étayer les raisons de certaines fluctuations boursières surprenantes.

Dans un premier temps, en tenant compte des arguments des différents protagonistes, il semblerait que les comportements spéculatifs seraient dus à l'incertitude sur la valeur fondamentale mais aussi à l'intérêt que les gêneurs ont de créer un risque artificiel afin de le transformer en performance boursière potentielle. Par conséquent, à ce stade, il est tout à fait possible que l'inefficacité informationnelle soit durable sur le marché financier : la valeur d'équilibre reflète à la fois la valeur fondamentale et les opinions des agents perturbateurs.

Partant de ce constat, nous pouvons dans un second temps distinguer deux types de volatilité dans les fluctuations des cours de bourse :

- **Fundamental risk**

C'est la volatilité fondamentale des actions. Elle correspond à la fluctuation des facteurs fondamentaux déterminant la valeur de l'entreprise et reflétés par les dividendes distribués.

- **Noise trader risk**

C'est la volatilité gênante. En raison du caractère changeant des trouble-fête, il est impossible de prévoir avec certitude, même pour un professionnel averti, le cours futur des actions. De par cette incertitude sur les opinions futures des bruiteurs, un risque comportemental modifie la fluctuation des cours que l'on qualifie de volatilité artificielle.

Cette distinction permet de mettre en relief cette capacité que les perturbateurs ont de modifier le cours de la bourse. De plus, quand bien même les agents rationnels voudraient profiter de l'écart entre la valeur fondamentale et la valeur boursière généré par les bruitages pour réaliser un arbitrage, il n'est pas sûr qu'ils puissent effectuer un gain pour la simple et bonne raison que les bruiteurs sont susceptibles de creuser encore plus cet écart à l'avenir. Ainsi, dans ce cas de figure, l'arbitrage est limité car les professionnels comptabiliseraient une perte étant donné l'importante influence des gêneurs et la prise en compte de leurs opinions dans l'évaluation des actions. De ce point de vue, il serait même préférable de suivre ces gêneurs, totalement déconnectés de la valeur fondamentale, afin de réaliser un profit ce que l'on appelle en d'autres termes le mimétisme.

D'ailleurs, il a déjà été mis en évidence¹⁷ le rôle néfaste de la concurrence financière sur la valeur fondamentale : au lieu de produire des prix justes, elle conduit à des évaluations excessives et irrationnelles au regard des facteurs fondamentaux d'où l'origine des bulles financières. En effet, on ne peut pas juxtaposer le marché financier avec un marché de biens ordinaires où l'offre et la demande s'ajustent pour former un prix d'équilibre. Sur les marchés de biens ordinaires, lorsque le prix d'un bien augmente, l'offre augmente tandis que la demande diminue. Cet écart provoque des « *feedbacks négatifs* », c'est-à-dire des forces de rappel, qui vont inverser la tendance en entraînant la baisse du prix jusqu'au niveau d'équilibre. Ce principe d'autorégulation a été transposé au mécanisme de finance de marché. Or, sur les marchés financiers, l'augmentation des prix est synonyme d'un meilleur rendement et attire par conséquent de nouveaux investisseurs. Ainsi, au lieu de diminuer, la demande augmente ce qui entraîne à nouveau l'augmentation des prix d'où la formation des bulles spéculatives jusqu'au krach. On qualifie alors le processus de formation des prix d'autoréférentiel car la variation des prix

¹⁷ Cf. ASKENASY et al [2010]

se nourrit d'elle-même, les opérateurs ne s'intéressant plus qu'à l'évolution des prix sur les marchés financiers. Ce processus, appelé « *feedbacks positifs* », est donc source d'instabilité sur les marchés financiers car il produit des prix inadéquats¹⁸.

Par ailleurs, cette forme d'instabilité qui conduit à de grandes fluctuations peut être également reliée à la présence d'un « *hasard de Pareto* » en opposition au « *hasard sage* » c'est-à-dire gaussien et serait ainsi la cause des incertitudes sur la valeur fondamentale comme C. Walter et E. Brian l'avancent dans *Critique de la valeur fondamentale*.

Ainsi, le principe de *fair value* commun à Solvabilité 2 et aux normes IFRS semble ignorer le problème d'instabilité des marchés financiers. D'ailleurs, l'utilisation dans les expressions du terme « *valeur de marché* » au lieu de « *prix de marché* » traduit cette volonté d'institutionnalisation et de cristallisation¹⁹.

IV.b. Réglementation et valorisation

IV.b.1. Le principe de « cohérence avec le marché »

Le principal objectif des règles prudentielles est d'éviter la ruine de l'assureur pour protéger l'assuré. Pour cela, ces règles obligent d'établir des normes de solvabilité qui doivent s'appliquer à tout moment. Or, comme on vient de le voir à travers l'évaluation des actifs en valeur de marché, l'instabilité des marchés financiers se répercute sur le bilan économique. Outre l'écart entre la valeur fondamentale et la valeur boursière, l'instabilité est d'autant plus grande que l'interaction entre l'Actif et le Passif est importante. En effet, la prise en compte des rendements financiers a une importance capitale pour déterminer la qualité d'adossement de l'Actif au Passif en plus des participations aux bénéficiaires réglementaires.

De plus, l'évaluation économique des passifs, en accord avec le concept de « *juste valeur* », se situe dans les grandes lignes de la nouvelle directive. Il est intéressant de mettre en relief la différence, entre l'approche actuellement en vigueur et celle qui nous attend à l'avenir, concernant l'estimation des provisions techniques. Tandis que Solvabilité 1 recommande l'utilisation d'un « *taux prudent* » pour l'évaluation des engagements, Solvabilité 2 change la donne en définissant la valeur des provisions techniques comme la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque. En outre, la nouvelle directive précise que « *La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents* »²⁰. De plus, elle impose

¹⁸ Cf. ORLEAN [2011]

¹⁹ Cf. RODARIE [2011]

²⁰ Directive 2009/138/CE, Chapitre IV, section 1, article 77, paragraphe 2

le principe de « cohérence avec le marché »²¹ ce qui implique la nécessité d'utiliser la courbe des taux zéro-coupon à la date des calculs.

En conséquence, l'évaluation des passifs est impactée par la volatilité des taux. Ainsi, dans une première approche, on constate que la volatilité est inhérente au nouveau cadre réglementaire. Cette analyse permet de mieux cerner les enjeux liés au changement des règles prudentielles.

Cependant, le dispositif de valorisation est remis en question par la stratégie même d'allocation d'actifs des compagnies d'assurance dépendant de la structure du Passif. Cette idée tient sur le fait que l'évaluation des actifs en valeur de marché prend en compte tout type de risques même potentiellement ceux auxquels les assureurs ne sont pas exposés, ce que nous développons à présent.

IV.b.2. Evaluation en *fair value* et risque de *spread*

Nous tentons à présent de soulever un problème induit par la comptabilisation des actifs en *fair value*, spécifiquement les actifs *HTM* (*Held-To-Maturity*). Nous entendons par actifs *HTM* les actifs détenus jusqu'à échéance et dont le seul but est de couvrir des passifs d'assurance, ils ne sont donc pas détenus dans le but d'être revendus. D'ailleurs, les gestionnaires financiers dénomment cette stratégie d'investissement « *buy and hold* ».

La directive Solvabilité 2 ne prévoit pas de gestion particulière pour ces actifs, ils sont donc valorisés grâce à la *fair value*, et ceci par souci de cohérence avec la valorisation des provisions techniques, elle aussi en *fair value*. Cependant, si ces actifs présentent un *spread* alors la valeur de marché n'est pas une référence adéquate pour les compagnies d'assurance car elle prend en compte des risques auxquels les assureurs ne sont pas exposés et tend ainsi à sous-estimer leur taux de couverture. Pour mieux comprendre cette problématique, analysons les caractéristiques du *spread*.

Un *spread* est un écart de taux actuariel, constaté sur le marché, entre le taux sans risque et le taux d'une obligation. Cet écart est dû à la présence de trois risques :

- Risque de crédit : il correspond au risque de dégradation de la note.
- Risque de défaut : il correspond au défaut de la contrepartie.
- Risque de liquidité : il correspond au risque de ne pas trouver de contrepartie pour céder le titre.

Ces risques confèrent au taux de rentabilité effectif d'un placement un caractère aléatoire. Par conséquent, de par la présence de ces risques, l'espérance de rentabilité du placement est inférieure au taux maximum de rentabilité obtenu dans des conditions de marché les plus favorables, celles où les risques mentionnés sont inexistantes. Le *spread* traduit donc une majoration du taux de rentabilité actuariel exigé par les investisseurs

²¹ Directive 2009/138/CE, Chapitre IV, section 1, article 76, paragraphe 3

pour compenser cet écart. Cependant, une augmentation du *spread* implique une baisse de la valeur de marché du placement.

Dans l'immédiat, on remarque que le risque de crédit et le risque de liquidité n'existent pas pour des actifs *HTM* car ces derniers sont détenus jusqu'au terme et que le risque de voir la notation dégradée n'a pas de conséquence immédiate car ce risque ne remet pas en cause le paiement des flux à l'échéance. Or, ces risques sont reflétés dans le cours de bourse de ces actifs. De ce fait, si ces derniers sont évalués en valeur de marché alors ils sont sous-évalués car l'assureur est seulement exposé au risque de défaut de l'émetteur. De plus, l'évaluation des passifs est effectuée via « la courbe des taux sans risque pertinents », ce qui implique qu'une augmentation du *spread* à l'Actif pourrait faire apparaître une insuffisance de couverture, du fait que le Passif reste au même niveau, alors même que l'assureur reste parfaitement couvert²². D'ailleurs, il est intéressant de souligner que les passifs, qui se composent principalement des engagements qu'ont les assureurs envers leurs assurés, sont actualisés à un taux sans risque alors qu'ils présentent une part d'illiquidité non négligeable.

Ces constatations conduisent à réfléchir plus en détail à la mise en œuvre du principe de *fair value*.

Les règles prudentielles instaurent ainsi des normes de solvabilité qui doivent s'appliquer à tout moment, et même en cas de marché stressé. Or, c'est là que se trouve la principale difficulté dans la mise en place de ce dispositif, le bilan économique se trouvant exposé à l'instabilité des marchés. Outre le risque de dépréciation excessive des actifs, compte tenu de la stratégie d'allocation de ces derniers et de la structure du Passif, la valeur des provisions techniques est très sensible aux variations des taux d'actualisation. Cette analyse rend compte de la complexité d'adosser l'Actif au Passif de manière adéquate en temps continu tout en ayant une vision à court et long terme des stratégies d'investissement et de la politique de gestion des risques des assureurs, la volatilité des marchés financiers pesant sur l'ensemble du bilan économique.

Dès à présent, l'enjeu sous-jacent à ce dispositif est de trouver, dans un premier temps, des solutions adaptées pour diminuer l'impact de la volatilité des marchés de taux sur le bilan économique afin de pouvoir stabiliser l'estimation de la solvabilité, puis dans un second temps, permettre une gestion Actif/Passif adéquate en accord avec les principes de la directive, l'objectif étant de contourner les problèmes rencontrés ici sans pour autant remettre en question les règles prudentielles.

²² Cf. PLANCHET et LEROY [2013]

V. SOLUTIONS PROPOSÉES PAR LE RÉGULATEUR

Comme nous venons de le constater, Solvabilité 2 impose des règles prudentielles qui conduisent à établir un lien fort avec les marchés financiers. Cependant, ce lien n'est pas sans conséquence : il insère une volatilité dans le bilan économique et introduit des risques auxquels les assureurs ne sont pas exposés ce qui rend difficilement appréciable la solvabilité des entreprises et le pilotage des risques à court terme. D'ailleurs, les différents tests QIS ont mis en évidence l'instabilité de la marge Actif/Passif et du taux de couverture.

V.a. Retour sur le QIS5

Dans un premier temps l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) suggère dans l'exercice QIS5 l'utilisation d'une prime d'illiquidité au Passif. Ce dispositif consiste à augmenter les taux d'actualisation pour le calcul du *best estimate*. La prime est elle-même variable (50 %, 75 % ou 100 %) en fonction de certains critères spécifiques des engagements contractés à l'égard des assurés. L'objectif visé par l'EIOPA par l'introduction de cette prime est de tenir compte dans la valorisation des provisions techniques du manque de liquidité des passifs d'assurance d'une part, des risques de crédit et de liquidité d'autre part présents dans la valorisation des actifs particulièrement en cas de marché stressé. En effet, les actifs étant comptabilisés en valeur de marché, une augmentation du risque de *spread* de façon passagère entraîne une sous-estimation des actifs tandis que les passifs, actualisés au taux sans risque, restent au même niveau. Pour contrer ce biais, cette prime d'illiquidité a pour objectif de réajuster le taux de couverture. De plus, cette prime doit permettre aux assureurs d'investir volontairement dans des actifs illiquides bénéficiant ainsi d'un rendement supérieur à celui des actifs liquides dès lors que leurs engagements envers leurs assurés leur permettent une assez bonne prévisibilité des flux futurs et ne les forcent pas à devoir vendre les actifs illiquides de façon imprévue et dans des conditions de marché défavorables ce qui accentuerait les tensions sur les marchés provoquant ainsi un cycle baissier des prix.

Cependant, cette première solution s'est avérée inadaptée car elle traduisait mal la réalité des mouvements du marché. Elle a notamment été contestée par M. Wütrich²³ qui a démontré qu'elle violait le principe de « cohérence avec les valeurs de marché ». En effet, si cette solution était appliquée elle introduirait un biais de sous-estimation des prix et une consommation de capital excessive la première année ce qui remettrait en cause la solvabilité des entreprises les années suivantes.

Ainsi, l'EIOPA a abandonné la prime d'illiquidité mais a revisité les principes d'ajustement de la courbe d'actualisation dans l'exercice LTGA (*Long-Term Guarantees Assessment*)

²³ Cf. WÜTRICH [2011]

dont les résultats ont été publiés en juin 2013. Revenons sur les grands principes de ce test.

V.b. L'exercice LTGA

Cet exercice fait suite à l'amendement de la directive Solvabilité 2 par Omnibus 2. Dans ce texte datant du 21 mars 2012, la prime contra-cyclique, la prime d'ajustement et le principe d'extrapolation ont été votés. Une possibilité d'adopter des dispositions transitoires est également prévue afin de permettre aux assureurs de s'adapter progressivement aux nouvelles mesures.

L'étude d'impact LTGA s'inscrit dans cette lignée et a pour but de tester les mesures envisagées par l'EIOPA pour contrer les problématiques de volatilité « artificielle » observée sur le paquet « branches longues ». A titre indicatif, cette étude s'inscrit dans les mesures de niveau 2 (élaboration des mesures d'exécution) du processus Lamfalussy établie par la Commission européenne pour mettre en place les nouvelles réformes. En outre, cet exercice présente 13 scénarios élaborés sur 3 années (2011, 2009 et 2004) en vue de permettre au régulateur de préconiser les mesures les plus adaptées au changement de réglementation. D'ailleurs, comme le précise le régulateur à maintes reprises dans cet exercice, rien n'est encore définitif et les hypothèses suggérées dans le test ne sont utiles qu'à une approche plus simple et une élaboration plus homogène de cette analyse.

Nous allons dans un premier temps étudier les solutions proposées par le régulateur dans cette étude pour réduire la volatilité des ratios de solvabilité puis nous reviendrons dans un second temps sur les principaux résultats de ce test.

V.b.1. La Prime contra-cyclique

La Prime contra-cyclique CCP (*Countercyclical Premium*) est une des solutions proposées par l'EIOPA pour contrer la volatilité des ratios de solvabilité due aux mouvements sur les marchés financiers. Ce concept, qui a pour origine la prime d'illiquidité proposée dans le QIS5, consiste à ajuster la courbe des taux pour l'actualisation des passifs en situation de marché stressé. Ce dispositif correspond à un ajustement de la courbe d'actualisation par une prime de risque de l'ordre de 50, 100 ou 250 points de base selon les cas de figure. Cependant cet ajustement ne correspond pas à un décalage parallèle de la courbe des taux car la prime est directement appliquée aux taux *swaps* jusqu'au dernier point liquide (*Last Liquid Point*). C'est à partir de ces taux *swaps* et du modèle de Smith-Wilson que la courbe ajustée qui servira à actualiser les passifs est obtenue.

L'enjeu de cette prime est d'une importance capitale dans la mesure où les mouvements sur les marchés financiers perturbent le pilotage des organismes d'assurance qui sont contraints, en cas de cycle « bas » des marchés financiers, de céder leurs actifs pour satisfaire à l'exigence de marge de solvabilité. En effet, supposons qu'un organisme d'assurance possède assez de fonds propres pour convenir à la marge de solvabilité requise (SCR), mais que pour une raison quelconque (incertitude face à l'avenir, marché

stressé) la liquidité de certains actifs diminue alors ces actifs deviennent plus difficiles à vendre et leur valeur boursière baisse en conséquence. Sans modification du taux d'actualisation au Passif, le *best estimate* reste fixe et une différence apparaît entre le *best estimate* et la valeur de marché des actifs. Ces écarts, générés par des tensions passagères, se reportent intégralement sur les fonds propres diminuant ainsi le ratio de solvabilité et pouvant même mettre en péril l'exigence de marge de solvabilité. Pour assurer l'équilibre de son bilan et revenir à un niveau proche du ratio de solvabilité initial, l'assureur cherchera à se séparer de ces actifs en baisse sur les marchés pour en acheter de plus sûrs. Cependant cette stratégie est commune à l'ensemble des compagnies d'assurance, ainsi des comportements qualifiés de pro-cycliques peuvent émaner de ces tensions entraînant une diminution de la liquidité et un nouveau cycle baissier des prix des actifs. Cette prime de risque permettrait donc de préserver la stabilité des compagnies d'assurance ainsi que des marchés financiers face aux fluctuations de court terme.

Bien que la cause de l'application de la prime contra-cyclique à la courbe des taux sans risque se rapproche de celle de la prime d'illiquidité, sa mise en application est cependant différente. En effet, alors qu'initialement une prime d'illiquidité variable devait s'appliquer à l'ensemble des passifs, l'application de la prime contra-cyclique, telle que le prévoit le régulateur dans le LTGA, peut être décidée exclusivement par le régulateur et uniquement pour les produits non concernés par le *Matching Adjustment*, c'est-à-dire par la prime d'adéquation (qui fait l'objet du prochain point).

Cependant, le SCR doit prendre en compte le risque représenté par la CCP correspondant à une baisse instantanée de 100 % de cette prime de risque. L'impact de ce chargement doit néanmoins être relativement faible au regard des effets de diversifications et d'ajustements lors de l'agrégation du risque de marché au sein du BSCR et lors du passage du BSCR au SCR de manière respectueuse. Ainsi, ce transfert de risque, dû à la diminution du montant des provisions, permet d'alléger les contraintes financières adressées aux organismes leur permettant par cette même occasion d'ajuster convenablement leur ratio de solvabilité.

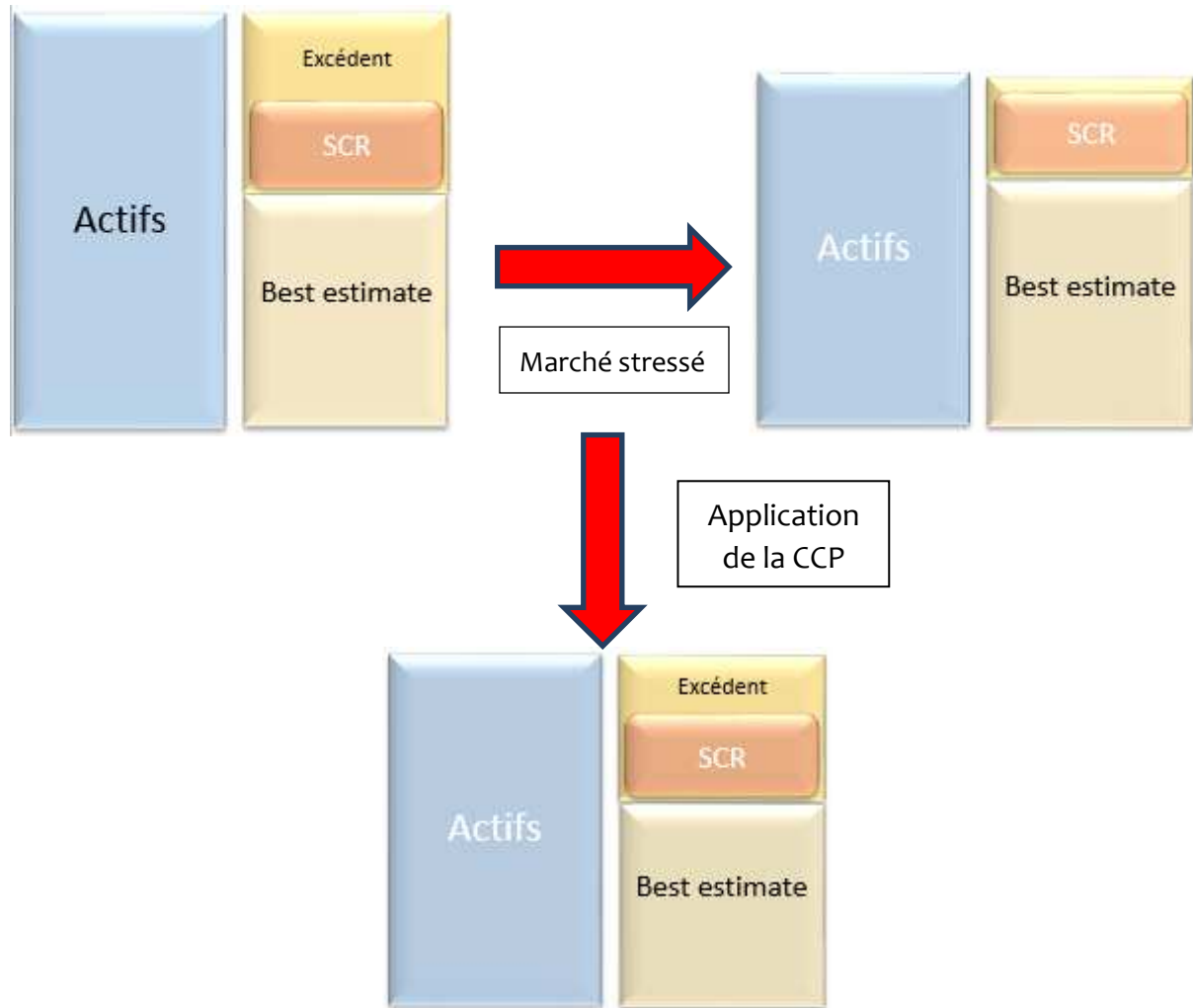


Figure V.1 Illustration de l'ajustement du ratio de solvabilité via la CCP

V.b.2. Le Matching Adjustment

En plus de la CCP, le régulateur a imaginé une solution plus personnalisée concernant l'ajustement de la courbe d'actualisation : le *Matching Adjustment*.

Initialement appelé *Matching Premium*, cet ajustement est censé répondre de manière plus précise aux attentes des organismes d'assurance tout en palliant aux problèmes initialement posés par la prime d'illiquidité. Cette solution consiste à ajuster, par une prime d'adéquation, la courbe des taux sans risque utilisée pour actualiser les passifs. Jusqu'ici il n'y a pas de nette différence avec la CCP, les deux solutions restant focalisées sur l'ajustement de la courbe d'actualisation pour l'évaluation des engagements. Cependant, cette prime est elle-même ajustée en fonction de la qualité d'adossement Actif/Passif des assureurs. L'objectif visé par l'EIOPA à travers cette prime est de minimiser l'impact de *spread* sur les actifs en représentation des passifs ainsi que de réduire la volatilité des ratios de solvabilité due aux fluctuations de court terme sur les marchés financiers auxquels les assureurs possédant une bonne adéquation Actif/Passif ne devraient pas être exposés.

Il s'agit ainsi d'entreprendre une analyse approfondie de la gestion Actif/Passif à travers une étude détaillée de la nature des engagements contractés à l'égard des assurés et de la qualité des actifs adossés aux passifs afin de mesurer le degré d'adéquation correspondant et d'ajuster la prime d'adéquation en conséquence. Ce sont les quatre étapes à suivre et préconisées par le régulateur afin d'appliquer les différentes versions du *Matching Adjustment*.

Ainsi, cinq formes de *Matching Adjustment* ont été proposées et regroupées sous deux versions:

- La version « Classique »
 - *Classic standard*
 - *Classic alternative*

- La version « Etendue »
 - *Extended standard I*
 - *Extended standard II*
 - *Extended alternative*

Par ailleurs, quelle que soit la forme d'ajustement appliquée, celle-ci correspond à un décalage parallèle de la courbe des taux, par conséquent l'ajustement est identique pour tout niveau de maturité. Cependant, c'est la nature des passifs et des actifs qui déterminera le type de *Matching Adjustment* à utiliser.

Ainsi, la prime d'adossement « Classique » s'adresse exclusivement aux produits d'assurance vie n'étant soumis qu'aux risques de longévité, de dépense et de révision. Par conséquent, les autres risques (catastrophe, mortalité, rachat et incapacité/invalidité) sont clairement évincés par cette forme « Classique » d'ajustement. De même, les actifs admissibles correspondent aux produits obligataires à taux fixe dont la qualité de crédit est supérieure ou égale à BBB (Standard & Poor's/Fitch). Cependant, la forme *alternative* se distingue ici de la forme *standard* dans la mesure où cette dernière est appliquée sous réserve que la proportion d'actifs notée BBB est inférieure à 33 %. Suite à la sélection des passifs éligibles et des actifs admissibles, les entreprises doivent alors mesurer le degré d'adéquation Actif/Passif. Pour cela, après avoir divisé les différents flux par intervalle (1 an dans le cadre du LTGA), les éventuels déficits résultant d'une discordance de flux à l'Actif et au Passif doivent être repérés tandis que les potentiels excédents de trésorerie doivent être intentionnellement omis. Il faut alors que la somme de ces déficits actualisés au taux sans risque ne dépasse pas 15% du *best estimate* évalué lui aussi à l'aide de la courbe des taux sans risque. En outre, cette prime d'adéquation est égale à l'écart entre le *spread* des actifs du portefeuille et le *spread* fondamental. Ce dernier est d'ailleurs égal au maximum entre le *spread* de crédit des actifs et 75 % du *spread* de marché.

La prime d'adossement « Etendue » concerne quant à elle tous les autres produits d'assurance vie et les rentes non-vie. L'admissibilité des actifs concernés par l'application des formes *Standard I & II* suit les mêmes règles que la forme standard « Classique ». Néanmoins, aucune restriction concernant la qualité de crédit des investissements n'est à appliquer pour pouvoir ajuster la courbe des taux à l'aide de l'*Extended alternative*. De même cette dernière n'est soumise à aucun critère d'adéquation Actif/Passif ce qui n'est pas le cas pour les formes *Standard I & II* dans la mesure où leur application nécessite un degré d'adéquation supérieur à 85 %. Enfin la prime d'adéquation est calculée en fonction de chaque forme d'ajustement à l'aide d'un ratio. Ce dernier est multiplié par l'écart entre le *spread* des actifs du portefeuille et le *spread* fondamental. L'objectif de ce ratio est de tenir compte du degré d'adéquation Actif/Passif en cas d'éventuels chocs sur les risques liés aux engagements. Ainsi, ce ratio devrait assurer à 99,5 % que les assureurs ne subissent pas de pertes et ne soient pas obligés de céder des actifs durant toute la période d'écoulement des engagements (en *run-off*). Cependant l'*Extended standard II* diffère de l'*Extended standard I* et de l'*Extended alternative* avec un degré de probabilité à 99,9 % associé au ratio. C'est d'ailleurs la seule différence entre l'*Extended standard I* et l'*Extended standard II*. Précisons en outre que le *spread* fondamental est défini pour les formes *Standard I & II* comme le maximum entre le *spread* de crédit des actifs et 80 % du *spread* de marché, tandis que pour la forme *alternative* le *spread* fondamental correspond seulement au risque de défaut des actifs.

Il est à noter qu'un ajustement de la prime d'adéquation est aussi prévu par le régulateur lors du calcul du SCR de marché.

Ainsi, à travers la complexité de mise en application de ces différentes formes d'ajustement, le régulateur veut tester l'avantage pratique de ces solutions compte tenu des diverses structures de portefeuille existantes dans le secteur assurantiel.

V.b.3. Extrapolation de la courbe des taux et mesure de transition

En plus de l'ajustement de la courbe des taux sans risque via la prime contra-cyclique ou le *Matching Adjustment*, le régulateur prévoit également l'extrapolation des taux à partir du LLP (*Last Liquid Point*) jusqu'à l'UFR (*Ultimate Forward Rate*) afin de ne pas utiliser un taux de marché pour valoriser les engagements de long terme ce qui introduirait une volatilité artificielle dans le bilan à cause de l'insuffisance de données sur les marchés au-delà du LLP. En outre, les méthodes d'interpolation et d'extrapolation utilisées découlent du modèle de Smith-Wilson²⁴.

Par ailleurs, en vue de faciliter la transition de Solvabilité 1 à Solvabilité 2, l'EIOPA suggère d'utiliser une moyenne des taux d'actualisation des deux directives durant une période de

²⁴ Sur ce sujet voir notamment LAÏDI [2013]

sept ans par une pondération progressive. Les pondérations par année sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Années	Poids des taux Solvabilité 2	Poids des taux Solvabilité 1
1	14%	86%
2	29%	71%
3	43%	57%
4	57%	43%
5	71%	29%
6	86%	14%
7	100%	0%

Tableau V.4 Pondération des taux S1 et S2

Le régulateur prévoit et teste en conséquence plusieurs mesures afin d'éradiquer la volatilité artificielle présente dans le bilan économique des compagnies d'assurance. Toutes les propositions s'articulent autour de l'ajustement de la courbe d'actualisation nécessaire à la valorisation des passifs. La CCP devrait dans un premier temps réduire l'impact des fluctuations des marchés financiers sur les ratios de solvabilité tandis que le *Matching Adjustment* permettrait de tenir compte de la qualité de gestion Actif/Passif afin de faciliter le pilotage des risques par les organismes d'assurance tout en réduisant l'impact de *spread* sur les actifs. L'extrapolation des taux irait dans le même sens que les deux solutions précédentes en limitant la volatilité introduite au Passif du bilan. Enfin, les mesures transitoires quant à elles ont pour but d'alléger les difficultés liées au changement d'évaluation des différentes composantes du bilan.

Les résultats du LTGA ayant été récemment publiés, nous allons à présent revenir sur les principales conclusions de ce test concernant les solutions proposées par le régulateur.

V.b.4. Résultats du LTGA

Les résultats des tests du LTGA ont soulevés des interrogations concernant l'intérêt des différents ajustements proposés. En effet, quand bien même la Prime contra-cyclique se devait d'être en théorie suffisante pour augmenter le ratio de solvabilité, il se trouve que son utilisation limite la hausse du taux de couverture du fait qu'elle engendre une hausse du SCR au titre du module de risque correspondant à une baisse instantanée de 100 % de cette prime de risque. Par ailleurs, son processus de déclenchement n'étant pas automatique, il a été jugé qu'elle ne permettait pas de réduire la volatilité de court terme de manière satisfaisante. L'EIOPA suggère ainsi de remplacer la CCP par le *Volatility Balancer* (VB). Ce dernier, tel qu'il a été dévoilé dans le rapport de l'EIOPA, correspond à

un dispositif prévisible et permanent ayant le même objectif que la CCP mais calculé et appliqué différemment. Ainsi, ce redresseur de volatilité est calculé par espace monétaire et dépend du *spread* d'un portefeuille national de référence. En outre, le VB agit sur le niveau des fonds propres sans pour autant modifier le reste du bilan et le SCR. Le mécanisme consiste alors à augmenter les fonds propres d'un montant égal à l'impact de tous les ajustements de la courbe zéro-coupon proposés par le régulateur sur la valeur du *best estimate*. De cette façon le ratio de couverture devrait être amélioré.

Par ailleurs, l'adoption de la prime d'adossement « Classique » a été soutenue par l'EIOPA tandis que la prime d'adossement « Etendue » a été abandonnée. En effet, la prime d'adossement « Classique » s'est avérée être un élément essentiel pour réduire la volatilité des bilans prudentiels tout en favorisant les investissements de long terme sans pour autant remettre en cause la protection des assurés. Le régulateur prévoit notamment d'élargir le périmètre d'application de cette prime. A contrario, la prime d'adossement « Etendue » s'écarte de l'objectif initial de la prime d'adossement en ajoutant de la complexité au dispositif sans pour autant fournir une protection adéquate aux assurés.

Enfin l'EIOPA est favorable à l'extrapolation des taux et aux mesures transitoires. Ceci devrait permettre aux assureurs d'améliorer la stabilité de leur bilan tout en favorisant la mise en place de Solvabilité 2.

On remarque finalement au travers de ces résultats la complexité des évolutions réglementaires. Ainsi, bien que le régulateur veuille trouver des solutions adéquates pour contrer le problème de volatilité rencontré, il semble que les solutions proposées compliquent la mise en œuvre du dispositif. Il est à noter que l'étude LTGA n'est d'ailleurs pas conclusive d'autant que le régulateur est prêt à remettre sur la table des négociations le principe de cohérence avec les valeurs de marché, l'ajustement de la courbe d'actualisation violant en théorie l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur laquelle est construit ce dispositif. Il s'agit alors de s'interroger sur la nécessité de compliquer un modèle déjà mal adapté.

Le chapitre suivant propose une réflexion autour du choix des hypothèses économiques en entrée de modèle en mettant en avant d'une part l'approche différente de valorisation préconisée par Solvabilité 1 puis en testant d'autre part l'impact d'un lissage des taux en entrée de modèle sur la valeur du *best estimate* et le ratio de couverture.

VI. SOLUTIONS ENVISAGEABLES

L'objectif à présent est d'élaborer des solutions envisageables pour venir à bout des difficultés rencontrées lors de la mise en place des dispositifs prudentiels au niveau du bilan économique.

Nous revenons dans un premier temps sur les règles d'évaluation préconisées par Solvabilité 1 afin de prendre du recul sur l'approche suggérée par Solvabilité 2, puis dans un second temps nous reviendrons sur Solvabilité 2 en proposant une méthode de valorisation apportant plus de stabilité tout en conservant une logique « économique » dans l'évaluation des engagements.

VI.a. « Solvabilité 1 »

On pourrait se demander un instant si Solvabilité 1 ne serait pas en fin de compte plus adaptée pour le pilotage des risques des compagnies d'assurance que Solvabilité 2 au vu de l'ampleur que prend l'élaboration des mesures d'exécution du processus Lamfalussy suite aux diverses complications émanant de ce dispositif.

Bien que de nombreuses critiques à l'égard de Solvabilité 1 aient amené à la mise en place d'une réforme de ce référentiel prudentiel, ces limites n'ont pu être observées que très rarement, les cas de ruine recensés étant relativement infimes. La récente crise financière n'a d'ailleurs pas entraîné pour autant un défaut majeur des organismes d'assurance.

Il convient donc de revenir un instant sur la manière dont les règles actuellement en vigueur encadrent la gestion des actifs et des passifs.

VI.a.1. Le bilan comptable

Dans un premier temps, les actifs sont comptabilisés à leur valeur d'acquisition. Les plus ou moins-values latentes quant à elles sont gérées à travers certaines provisions présentes à l'Actif et au Passif que nous présenterons par la suite. Dans un second temps, les passifs sont constitués essentiellement de provisions techniques actualisés à un « taux prudent », lequel est encadré par la réglementation. Le surplus d'actifs adossés aux passifs constitue pour sa part les fonds propres qui doivent être suffisants pour respecter l'exigence de marge de solvabilité.

Nous détaillerons principalement ici les provisions liés aux fluctuations de la valeur des actifs ainsi que les provisions reliant l'Actif au Passif dans le cadre de la gestion Actif/Passif. Cependant, il sera nécessaire de distinguer les activités d'assurance vie de celles d'assurance non-vie dans la mesure où la fonction Actif/Passif n'a pas les mêmes spécificités puisque les risques et les enjeux sont bien différents de par la nature même des engagements.

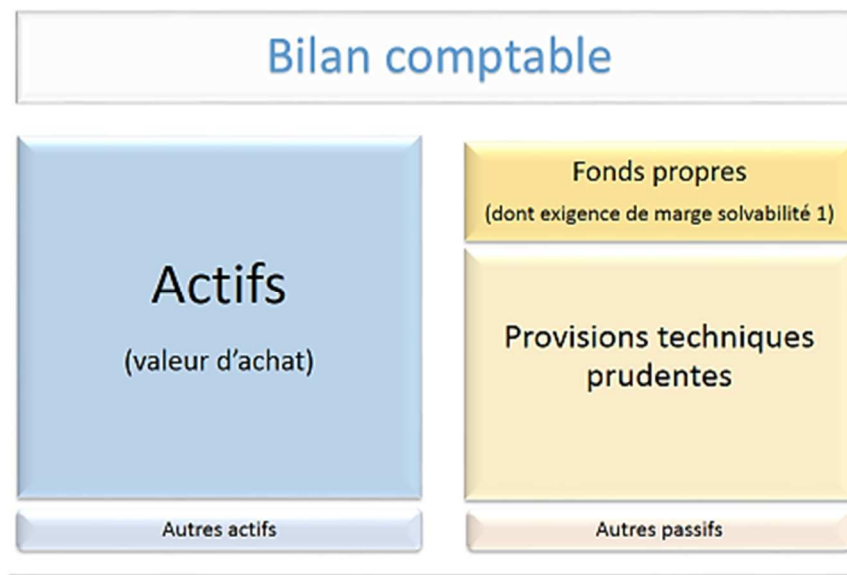


Figure VI.1 Bilan sous Solvabilité 1

VI.a.2. Le taux d'actualisation

Le choix du taux technique prudentiel doit avant tout faire l'objet d'une étude séparée. En effet, ce taux sert à calculer la valeur actuelle des engagements. La nécessité d'actualiser les engagements traduit le fait que le placement de l'actif est rémunéré. Il faut donc que ces actifs aient un rendement annuel minimum égal à ce taux technique jusqu'au terme des contrats.

Cependant ce taux n'intervient pas de la même manière dans les provisions d'assurance vie et non-vie. En assurance non-vie, pour l'essentiel, l'évaluation des engagements n'escompte pas de produits financiers, au contraire de l'assurance vie. Ainsi en assurance non-vie la provision pour sinistre à payer (PSAP) correspond à la « valeur estimative des dépenses nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés »²⁵ tandis qu'en assurance vie la provision mathématique correspond à la « différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés »²⁶. Néanmoins en assurance non-vie certaines provisions (provision mathématique des rentes, provision pour risque croissants, provision mathématique des réassurances) sont actualisées comme en actuariat vie.

En outre, le taux technique en assurance vie correspond à celui du tarif, c'est-à-dire au taux qui avait été considéré comme prudentiel lors de la souscription des contrats. Ce constat permet de mettre en évidence l'approche différente qu'établit Solvabilité 2 avec ces règles prudentielles. En effet, la nouvelle directive préconise l'utilisation des taux

²⁵ Art. R.331-6

²⁶ Art.331-3

d'actualisation pour évaluer l'ensemble du *best estimate* que ce soit en vie ou en non-vie d'autant plus que ces taux sont différents de ceux utilisés à la date de souscription des contrats.

VI.a.3. Règles des placements et liaisons Actif/Passif

Par ailleurs, les placements en représentation des engagements sont aussi encadrés par la réglementation : ils doivent être sûrs, liquides, rentables et dispersés. On peut notamment citer²⁷ les règles de dispersion (5% par émetteur, ou au plus 10% par émetteur si 40 % de la base de dispersion n'a pas été atteinte) ou de limitation (moins de 65% d'actions, moins de 40% d'immeubles et moins de 10% de prêts) à titre d'exemples. Ces placements sont comptabilisés au coût historique et non à la valeur de réalisation. Néanmoins ils font l'objet d'une évaluation lors de l'inventaire. Il est alors nécessaire de distinguer les placements obligataires relevant de l'article R.332-19 des autres placements en actions et immeubles relevant du code R.332-20. En effet, les premiers possèdent une valeur de remboursement ce qui n'est pas le cas pour les seconds. En conséquence, les obligations qui sont comptabilisées au début au prix « pied de coupon » voient leur évaluation comptable évoluer au cours du temps jusqu'à la valeur de remboursement. Pour les autres placements, la valeur comptable globale reste inscrite à l'actif, cependant une comparaison avec la valeur de réalisation doit être effectuée. Si cette dernière est inférieure au prix d'achat alors une provision pour risque d'exigibilité (PRE) doit être constituée d'un montant égal à l'écart constaté en plus de la provision pour dépréciation durable (PDD) constituée ligne par ligne pour chacun des actifs en moins-values latentes sur une période de six mois. En outre la PDD est inscrite à l'Actif contrairement aux autres provisions, où elle vient diminuer la valeur d'inventaire des actifs concernés.

Les liaisons entre les actifs et les passifs sont essentiellement situées au niveau de la réserve de capitalisation et de la provision pour aléas financiers (PAF). Cette dernière ne fait d'ailleurs pas partie des provisions techniques non-vie.

La réserve de capitalisation fait partie des fonds propres et est « destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'Actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu »²⁸. En d'autres termes, cette réserve est constituée par des versements ou des prélèvements en cas de réalisation de plus ou moins-values latentes lors de cessions de produits de taux. Ce mécanisme vise principalement à stabiliser le rendement actuariel des titres à celui qui était attendu lors de leur acquisition²⁹. Cette provision permet par ailleurs de faire face au risque de liquidation en assurance vie en cas de hausse des taux. En effet, si les taux augmentent le risque de rachat se déclenche alors même que l'actif obligataire est en moins-value latente. La réserve de capitalisation vise ainsi à neutraliser l'impact des cessions avant terme mais aussi à éviter que les assureurs n'utilisent les plus-

²⁷ Art. R. 332-3

²⁸ Art. R. 331-6 en non-vie et Art. R. 331-3 en vie

²⁹ Art. R. 333-1

values obligataires comme bénéfiques distribuables au détriment des produits financiers futurs³⁰.

La PAF, propre à l'assurance vie, est pour sa part « destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif »³¹. Elle vise à compléter les provisions mathématiques en cas d'insuffisance des produits financiers futurs au vu des hypothèses faites préalablement dans la tarification des contrats. En non-vie, cette provision n'a pas lieu d'être car la réglementation n'impose pas à l'Actif d'avoir un rendement supérieur à zéro au regard des règles d'évaluation des provisions.

VI.a.4. L'exigence de marge de solvabilité

On peut par ailleurs évoquer le minimum réglementaire de marge de solvabilité dans le cadre de ce concept prudentiel à l'image du SCR dans Solvabilité 2. La méthode de calcul de cette marge dépend de l'activité de l'entreprise en lui étant proportionnelle.

Ainsi, en assurance non-vie le minimum de marge doit être égal à :

$$\max (18 \% \text{ à } 16 \% \text{ primes}; 26 \% \text{ à } 23 \% \text{ sinistres}) \times \max \left(50 \% ; \frac{\text{Charge nette de sinistres}}{\text{Charge brute de sinistres}} \right)$$

En assurance vie, le minimum de marge doit être égale à :

$$\left\{ 4 \% \text{ PM(hors UC)} + 1 \% \text{ PM(UC)} \right\} \times \max \left(85 \% ; \frac{\text{PM nettes}}{\text{PM brutes}} \right) \\ + \begin{cases} 0,1 \% \\ 0,2 \% \\ 0,3 \% \end{cases} \text{ des capitaux décés sous risque en fonction des contrats}$$

En outre, cette exigence est constituée via la marge de solvabilité égale à la somme des fonds propres, des plus-values latentes et des emprunts subordonnés.

Cette approche a cependant été jugée trop simpliste pour autant qu'elle prend essentiellement en compte le niveau d'activité d'une société au détriment de son profil de risque. Le régulateur a donc trouvé un terrain d'entente de sorte que les nouvelles normes assurantielles concilient les différents aspects comptables avec une approche plus prospective en mettant en place des exigences réglementaires basées sur les pratiques réelles des entreprises. Mais d'autres professionnels moins enthousiastes par

³⁰ TOSSETI et al [2011]

³¹ Art R. 331-3

ce remaniement laissent entendre que l'approche préconisée par Solvabilité 2 semble assez brutale pour les raisons que nous avons déjà évoquées dans le chapitre IV. On peut d'ailleurs citer l'opinion d'Hubert Rodarie qui suggère de « comptabiliser les instruments financiers selon leur coût historique »³² plutôt que d'utiliser une référence systématique à la *fair value*. Il propose notamment de créer un état représentant les plus ou moins-values latentes en référence aux prix de marché mais sans incidence sur les comptes de bilan ou encore le compte de résultat. Ce dernier servirait néanmoins à ajuster le coût historique à travers la réalisation de plus ou moins-values latentes sous la responsabilité de l'entreprise. Enfin il conseille d'utiliser la valeur de marché seulement pour les actifs de *trading*. Cette recommandation permettrait de garder un concept à l'Actif assez proche de Solvabilité 1 mais sans pour autant remettre en cause l'usage de Solvabilité 2.

Il est donc utile de s'interroger sur la possibilité de modifier les hypothèses économiques en entrée de modèle sous Solvabilité 2 en vue de faciliter la transition de réglementation. D'ailleurs, les techniques d'ajustement de la courbe d'actualisation proposées à la fois dans le QIS5 et dans l'exercice LTGA ont laissé paraître l'éventualité de remettre en question le principe de cohérence avec les valeurs de marché pour obtenir des résultats plus stables. C'est dans cette lignée que s'inscrit notre étude en testant dans le prochain point l'impact d'un lissage des taux en entrée de modèle sur la valeur du *best estimate* et le ratio de couverture.

VI.b. Valorisation du Passif après lissage des taux

Nous avons déjà mentionné la difficulté d'établir une estimation stable de la solvabilité des compagnies d'assurance à court terme à cause de la volatilité de la courbe des taux zéro-coupon. En effet, cette volatilité perturbe l'estimation du *best estimate* et par conséquent le montant des fonds propres devient difficilement appréciable surtout en cas d'engagements de longue durée. La présente partie a pour objectif d'illustrer un changement d'hypothèse économique consistant à utiliser une moyenne des taux zéro-coupon à la date des calculs³³.

VI.b.1. Moyenne des taux zéro-coupon

L'EIOPA a déjà proposé des solutions dans le cadre de l'exercice LTGA pour ajuster la courbe des taux et qui ont été présentées dans le chapitre V, mais celles-ci sont principalement destinées à diminuer l'impact de *spread* sur les actifs et à préserver la stabilité des compagnies d'assurance en cas de tension passagère sur les marchés financiers. Elles ne sont donc en aucun cas destinées à réduire la volatilité du *best estimate*. D'ailleurs, la méthode d'extrapolation des taux proposée par le régulateur devrait juste permettre de réduire cette instabilité mais qui est principalement due à une

³² RODARIE [2011]

³³ Cette étude s'appuie sur les travaux de KARAM et al [2013].

insuffisance de données sur les marchés. Il est cependant vrai que ces solutions permettraient dans une certaine mesure de limiter l'exposition au risque d'insolvabilité mais elles ne seraient être à elles toutes seules suffisantes pour supprimer la difficulté introduite par un changement relativement rapide de la courbe des taux comparé à la durée des passifs s'échelonnant parfois sur plusieurs dizaines d'années. Ainsi, il est utile de distinguer les causes introduites par le concept de *fair value* bien que les conséquences soient similaires.

Une solution possible au problème posé est de valoriser les provisions techniques avec une moyenne des dernières courbes d'actualisation plutôt que d'utiliser la dernière. En effet, ceci devrait permettre d'atténuer la volatilité de la courbe d'actualisation tout en tenant compte progressivement des variations des taux *swaps* sur les marchés afin que les chocs induits sur le *best estimate* ne soient pas excessifs. Néanmoins, il reste à déterminer l'horizon des taux d'actualisation pour le calcul de la moyenne. Un horizon plus important devrait vraisemblablement entraîner une valorisation plus stable. En outre, cette situation permettrait de suivre la tendance des marchés de façon plus appropriée pour le pilotage des risques aussi bien à court terme qu'à long terme.

Ainsi, le taux zéro-coupon $R(0, t)$, pour toute maturité t , observable sur les marchés financiers à la date de l'évaluation est remplacé par $R_h(0, t)$ où h correspond à l'horizon en mois :

$$R_h(0, t) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h R(0, t, h - i)$$

avec $R(0, t, j)$ le taux zéro-coupon observable sur le marché précédant de j mois la date d'évaluation, $j \in \llbracket 0, h - 1 \rrbracket$.

Nous allons à présent reprendre le portefeuille présenté au chapitre III pour illustrer l'effet d'une modification de la courbe d'actualisation sur la valorisation du *best estimate* et le ratio de solvabilité.

Pour cela nous utiliserons les courbes des taux initiales fournies par le Comité de Normalisation Obligatoire (CNO). Nous calculerons ainsi les passifs de décembre 2012 à septembre 2013, en tenant compte de l'évolution des taux zéro-coupon toutes choses égales par ailleurs.

De plus, notons que pour cette illustration le SCR global est calculé à l'aide de la formule standard telle que précisée dans le LTGA. Avant de présenter les résultats de notre étude, nous allons revenir un instant sur la détermination du SCR.

VI.b.2. Méthode de calcul du SCR

Le SCR global est le Capital de Solvabilité Requis de la formule standard. Il est égal à la somme du Capital de Solvabilité Requis de Base BSCR, de l'ajustement au titre de la

capacité d'absorption des pertes futures Adj et des charges de capital au titre du risque opérationnel SCR_{op} :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}$$

Le BSCR est le Capital de Solvabilité Requis avant tout ajustement, combinant, dans la présente étude, les charges de capital pour les deux principaux modules de risque : module risque de marché et module vie.

Par ailleurs, l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures est la somme de l'ajustement dû à la capacité d'absorption des provisions techniques et de l'ajustement dû aux impôts différés. L'ajustement correspondant à la capacité d'absorption des provisions techniques est matérialisé par le fait que le montant de participation aux bénéficiaires lors de scénarios choqués est réduit en ne versant que le minimum légal aux adhérents.

En outre, le risque opérationnel est le risque de perte résultant de processus, personnes, systèmes internes ou d'évènements externes inadéquats ou défaillants. Le risque opérationnel inclut également les risques juridiques, mais exclut les risques de réputation et les risques résultants de décisions stratégiques. Le module de risque opérationnel est conçu pour traiter les risques opérationnels dans la mesure où ils n'ont pas été explicitement couverts dans les autres modules de risque.

Compte tenu de la structure du portefeuille et des objectifs de notre étude, nous avons simplifié le mode opératoire de calcul du SCR en négligeant certains risques. Ainsi, l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures et le SCR opérationnel sont supposés nuls. De cette façon, le SCR global sera égal au BSCR. Par conséquent, le SCR correspond à l'agrégation des modules risque de marché et risque de souscription vie.

- **Le module risque de marché**

Le module risque de marché mesure les risques de volatilité des cours de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements dans le niveau des variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt et les cours de l'immobilier. Différents chargements en capital doivent ainsi être calculés :

- le chargement au titre du risque de taux d'intérêt,
- le chargement au titre du risque action,
- le chargement au titre du risque immobilier,
- le chargement au titre du risque de *spread*,
- le chargement au titre du risque de change,
- le chargement au titre du risque de concentration,
- le chargement au titre de la prime contra-cyclique.

Chaque chargement est calculé à la suite de chocs appliqués aux composantes du bilan concernés par ces risques et correspond à la variation de l'actif net de passif. Il est à noter que parmi les risques de marché, le risque de taux d'intérêt a un impact sur les actifs, mais également sur les passifs au niveau de la valorisation des provisions. Il s'agit alors d'évaluer la variation de l'actif net de passif dans deux scénarios correspondant à un choc haussier et un choc baissier au niveau de la gamme des taux, le choc le plus coûteux étant retenu *in fine*. Les actions quant à elles doivent subir un choc boursier à la baisse à 22 %. De même, le LTGA suggère d'appliquer une baisse de 25% des indices immobiliers. Par ailleurs, le risque de *spread* correspond à la part de risque issu des instruments financiers qui est expliquée par la volatilité des *spreads* de crédit sur la structure de la courbe de taux d'intérêt de référence. Ce sous-module concerne notamment les obligations détenues en direct hors obligations souveraines (des pays de l'EEE), c'est-à-dire dans notre cas les *corporate*. Le montant de la charge de ce risque est fonction de la durée et du *rating* des obligations. Pour les besoins de notre étude, nous supposons que les obligations *corporate* présentes dans le portefeuille sont notées AA. De plus, en considérant que les valeurs de marché de tous les actifs sont exprimées en euro, le risque de change est absent de notre portefeuille, ce sous-module servant à couvrir tous les actifs dont la valeur de marché est exprimée dans une autre devise. En outre, le risque de concentration correspond au risque d'accumulation des expositions avec les mêmes contreparties. Dans le cadre de notre illustration et au vu de la constitution artificielle de notre portefeuille, nous ne retiendrons pas ce risque dans l'évaluation du module risque de marché. Enfin, le chargement au titre de la Prime contra-cyclique, suite à un choc à la baisse de 100 % de la CCP, est absent de nos calculs, notre objectif étant de mettre en avant une idée différente de celle proposée par le régulateur d'autant plus que celui-ci prévoit de supprimer et de remplacer la CCP par le « *Volatility Balancer* ».

Précisons que la charge de capital au titre du risque de marché est finalement obtenue en agrégeant les charges de capital des risques compris dans le module de marché à l'aide de la matrice de corrélation.

- **Le module risque de souscription vie**

Le module risque de souscription vie couvre les risques techniques liés à l'activité d'assurance vie. De même que pour le module risque de marché, les spécifications techniques LTGA recommandent d'effectuer des chargements en capital au titre des sous-modules suivants :

- mortalité,
- longévité,
- catastrophe,
- incapacité/invalidité,
- rachat,
- dépense,
- révision.

Le risque de mortalité désigne le risque que la durée de vie de l'assuré soit inférieure celle prévue par les tables de mortalité. A contrario, le risque de longévité correspond au risque que la durée de vie de l'assuré soit supérieure à celle prévue par les tables de mortalité. Par ailleurs, le risque catastrophe vie résulte d'évènements extrêmes ou irréguliers. Ce risque est donc assimilé à un risque de mortalité ponctuel et de grande ampleur. De plus, le module incapacité/invalidité correspond au risque de changement des taux d'invalidité. Le risque de rachat est quant à lui relatif aux pertes ou évolutions défavorables de la valeur des engagements issues de changements de niveau ou de volatilité des taux de rachats ou résiliations. Ce risque est modélisé par une augmentation relative de 50 % des taux de rachat puis une diminution relative de 50 % pour toute année de projection et enfin un choc de rachat massif la première année de projection. En outre, le risque de dépense résulte de la variation des dépenses associées aux contrats d'assurance. Les dépenses sont les frais d'administration liés aux contrats et les frais de gestion. Enfin, le chargement au titre du module révision est effectué en cas de risque de révision du niveau des rentes du fait d'un changement réglementaire ou de l'état de santé des assurés.

Afin de simplifier nos calculs, nous ne retiendrons que les risques de rachat et de dépense pour le calcul du module risque de souscription vie. En effet, ces risques étant en pratique relativement plus important dans le cadre de contrats d'épargne, ils expliquent la majorité de la charge en capital au titre du risque de souscription vie. Cependant, par souci de simplification, nous avons effectué nos calculs en négligeant le choc de rachat massif bien qu'utile mais pas nécessaire pour illustrer nos propos. De plus, rappelons que notre portefeuille ne présente aucun frais, le module risque de dépense est donc nul ici. Ainsi, le BSCR est obtenu en agrégeant les modules risque de marché et risque de souscription vie.

VI.b.3. Présentation des résultats

Nous présentons ici les résultats des *best estimate* et des ratios de couverture obtenus sur notre portefeuille de décembre 2012 à septembre 2013. Nous avons pour cela effectué les calculs à l'aide d'un vrai modèle ALM en utilisant trois types de taux zéro-coupon différents à la date des calculs :

- Taux zéro-coupon exactes ($h = 1$) ;
- Moyenne des taux zéro-coupon sur un horizon de 12 mois ($h = 12$) ;
- Moyenne des taux zéro-coupon sur un horizon de 24 mois ($h = 24$) .

Compte tenu des contraintes de temps de calcul, nous avons choisi d'effectuer nos estimations sur 2 000 simulations avec un pas de temps annuel, toutes projections confondues. Bien qu'il soit préférable d'augmenter la précision de nos calculs en tenant compte des remarques apportés dans la première partie de ce mémoire, il s'avère ici que le choix du pas de temps ne remet pas en cause notre analyse dans le cadre de cette

illustration, l'objectif étant de mesurer seulement l'impact d'un changement d'hypothèses en entrée de modèle.

De plus, il est à noter que les taux varient de manière hétérogène de 2011 à 2013. Ainsi, la courbe d'actualisation présente des modifications de niveau, de pente et de courbure sur cette période. Précisons en outre que la tendance des taux évolue à la baisse avec des valeurs relativement faibles à partir du deuxième semestre 2012. Ces remarques seront importantes pour analyser les résultats représentés dans la figure ci-dessous.

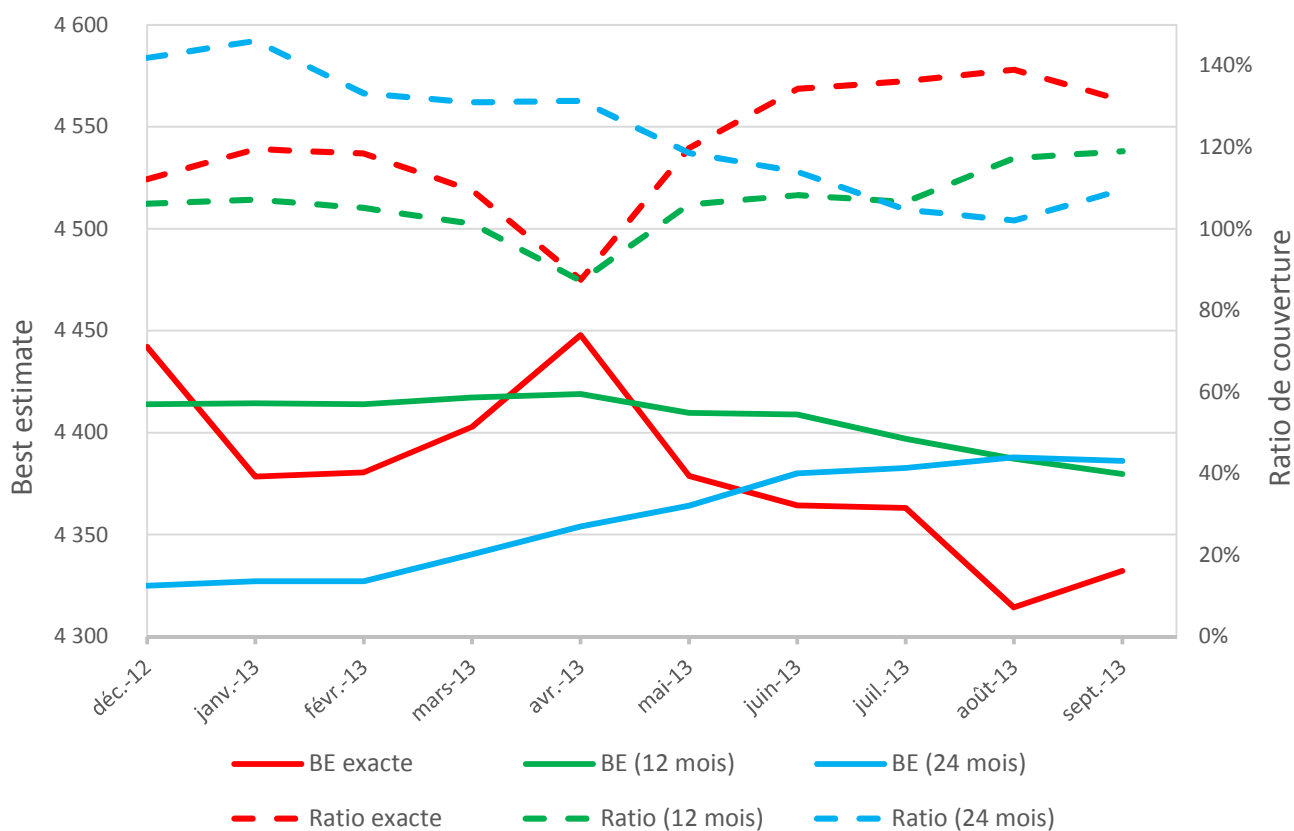


Figure VI.2 Evolution du BE et du ratio de couverture en fonction des taux utilisés

On remarque de prime abord que l'évaluation du *best estimate* à l'aide de la courbe d'actualisation à la date des calculs présente un caractère erratique. Cette instabilité se fait ressentir au niveau du ratio de solvabilité qui évolue dans un sens opposé à celui du *best estimate* pour cause d'une variation des fonds propres mais aussi d'une sensibilité du SCR à l'évolution des taux compte tenu de la structure du portefeuille.

Lorsque l'on utilise la moyenne des taux sur les 12 ou 24 mois précédent l'évaluation le caractère erratique disparaît et la valorisation du *best estimate* se stabilise et évolue en fonction d'une tendance. Cette dernière dépend de l'évolution des taux en fonction de

l'horizon choisi. Par conséquent, si les taux évoluent à la hausse le *best estimate* sera valorisé à la baisse et vice versa.

Dans notre situation, le lissage des taux sur 12 mois pour la période considérée équilibre la valeur des provisions techniques de décembre 2012 à avril 2013 avec une légère tendance positive puis l'évolution est orientée à la baisse jusqu'en septembre 2013. Remarquons que cette estimation semble être en phase avec l'évolution générale du *best estimate* en *fair value*. De même, le ratio de couverture, obtenu avec la moyenne des taux sur 12 mois, suit la tendance du ratio de couverture exacte avec une volatilité plus faible, les écarts étant relativement plus petits entre chaque date. Néanmoins la valeur du ratio de couverture en *fair value* est comparativement plus importante du fait que le *best estimate* associé est en moyenne plus faible que celui calculé à l'aide des taux lissés.

Par ailleurs, l'impact du lissage des taux sur un horizon de 24 mois se distingue du précédent. En effet, l'ajustement obtenu de décembre 2012 à mai 2013 bénéficie du niveau des taux relativement élevé en 2011 et au début de l'année 2012 ce qui permet de réduire le montant des provisions techniques et d'augmenter par la même occasion le ratio de solvabilité. A ce stade, cette méthode de valorisation pourrait convenir aux assureurs dans la mesure où celle-ci permet de ne pas compromettre l'exigence de marge de solvabilité requise par la nouvelle directive à l'inverse des autres méthodes pour le mois d'avril 2013. En revanche, au-delà de cette période, le *best estimate* continue d'être évalué à la hausse, l'impact du regain des taux sur les marchés financiers en mai 2013 étant non significatif sur la moyenne des taux des 2 années précédentes.

Ainsi, cette illustration nous a permis de constater qu'un lissage des taux permettrait de réduire la volatilité du *best estimate* tout en faisant apparaître une tendance au fil de son évaluation. Ceci devrait permettre aux assureurs d'améliorer le pilotage des risques à court terme, chose qui n'est pas évidente en situation de *fair value*. De même, le ratio de couverture pourrait aussi bénéficier de cet avantage. Cependant, cette méthode de valorisation reste toutefois sensible à l'horizon choisi, un horizon plus faible conduisant à une réaction plus rapide à la conjoncture.

CONCLUSION

Nous avons ainsi pu constater au cours de cette étude la complexité de mise en œuvre d'un calcul de *best estimate*, notamment en cas d'interactions Actif/Passif. L'évaluation des provisions techniques est de fait soumise aux erreurs de discrétisation et d'échantillonnage pour la projection et l'actualisation des flux mais est d'autant plus sensible aux aléas des marchés financiers. C'est donc la transition du dispositif réglementaire qui est retardée, l'instabilité des bilans prudentiels ayant un impact non négligeable sur les enjeux économiques.

D'une part, la mesure exacte des biais de discrétisation et de convergence pour le calcul du prix d'un zéro-coupon, à l'aide du modèle de Hull et White à un facteur et d'un schéma de discrétisation exacte pour la projection du taux court, a mis en évidence l'intérêt du choix d'un pas de temps fin et d'un nombre de simulations élevé compte tenu de la maturité du zéro-coupon et du degré de précision du résultat recherché. D'ailleurs, quand bien même le pas de discrétisation serait quotidien, donc très fin, il s'avère qu'un nombre relativement important de simulations reste tout de même nécessaire pour obtenir une erreur relative totale faible.

Afin d'illustrer l'accumulation de ces erreurs sur le calcul d'un *best estimate*, nous avons dans une première étape recalculé le montant des provisions techniques théoriquement connu d'un contrat en unités de compte. L'illustration des écarts de convergence en fonction de différents pas de temps a ainsi montré l'avantage d'une discrétisation fine sous réserve d'effectuer un grand nombre de simulations afin de préserver l'intérêt pratique du choix du pas de temps mais aussi en vue d'obtenir des résultats stables compte tenu de la lenteur de convergence rencontrée en pratique. Puis, dans une seconde étape, l'étude des erreurs de discrétisation et d'échantillonnage dans le cadre d'un vrai modèle ALM a permis de confirmer cette analyse, les résultats obtenus étant tout à fait en phase avec ceux du modèle ALM simplifié.

D'autre part, le lien fort qu'établit Solvabilité 2 avec les marchés financiers, à travers le principe de cohérence avec les valeurs de marché et la volonté d'évaluer le bilan en *fair value*, complexifie la tâche des assureurs. En effet, nous avons pu voir que la volatilité est intrinsèquement liée à l'activité des marchés ce qui rend de ce fait les composantes du bilan économique volatiles. Les méthodes d'évaluation initialement proposées ne permettent donc pas de rendre appréciable la lecture du ratio de couverture à court terme. Tandis que les actifs sont évalués à leur valeur de marché et sont par conséquent soumis au risque de *spread*, les passifs quant à eux sont actualisés au taux sans risque. Il suffit alors que le risque de *spread* augmente en période de marché stressé pour entraîner la baisse de valeur de marché de ces actifs quand bien même ils seraient

détenus en *HTM*, laissant apparaître à tort une inadéquation entre l'Actif et le Passif pouvant mettre en péril l'exigence de marge de solvabilité requise. De plus, la courbe d'actualisation étant volatile, il en est de même pour le *best estimate*.

Pour répondre à cette problématique, l'EIOPA a testé plusieurs mesures, notamment à travers les exercices du QIS5 et du LTGA, censées éradiquer la volatilité des bilans prudentiels considérée comme artificielle. L'ensemble de ces mesures a notamment pour effet d'ajuster la courbe des taux sans risque à la date des calculs pour l'évaluation des engagements. Alors que la prime d'illiquidité a d'abord été proposée dans le QIS5, c'est au tour de la prime contra-cyclique, des primes d'adossement « Classique » et « Etendue », de l'extrapolation des taux et enfin des mesures transitoires de faire leur apparition dans le LTGA. Les résultats obtenus ne sont pas pour autant aussi probants que ceux initialement attendus. Ainsi, seules la prime d'adossement classique, l'extrapolation des taux et les mesures transitoires ont été retenues. Le rapport publié par l'EIOPA fait d'ailleurs mention d'un nouvel ajustement dénommé le redresseur de volatilité ayant le même objectif que la prime contra-cyclique mais calculé et appliqué différemment. Cependant, ces solutions remettent en cause le principe de cohérence avec les valeurs de marché en violant en théorie l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur laquelle est construit le dispositif de valorisation.

Partant de ce constat, nous nous sommes proposé de tenir une réflexion autour du mode opératoire de valorisation suggéré par Solvabilité 1 en mettant l'accent sur les principales différences avec Solvabilité 2 afin de mieux comprendre les enjeux liés aux évolutions réglementaires. Cette analyse a d'ailleurs permis de mettre en avant les avantages d'une vision comptable de certaines parties du bilan afin de rendre plus appréciable sa lecture à court terme. Cependant, nous avons voulu tester une méthode d'évaluation des passifs sous Solvabilité 2, différente de celles proposées par le régulateur et permettant de garder une logique « économique » dans l'évaluation des engagements. Ainsi, il s'avère que le lissage des taux en entrée de modèle permet de supprimer le caractère erratique du *best estimate*. Celui-ci suit désormais une tendance qui dépend de l'horizon choisi compte tenu des évolutions conjoncturelles. De même, nous avons pu constater que l'évolution du ratio de couverture devenait plus appréciable sous réserve d'ajuster l'horizon aux évolutions conjoncturelles mais aussi à la structure du portefeuille.

Ainsi, la mise en œuvre d'un calcul de *best estimate* nécessite de faire des choix importants sur les méthodes d'approximation et les hypothèses économiques utilisées. Pour cela, les assureurs devront tenir compte des contraintes de temps de calcul leur étant impartis pour aboutir à la précision recherchée de même que le régulateur devra trouver un terrain d'entente avec l'industrie pour stabiliser de manière convaincante le montant du *best estimate* et le ratio de couverture à court terme.

BIBLIOGRAPHIE

ASKENASY P., COUTROT T., ORLÉAN A., STERDYNIAK H. [2010], « Crise et dette en Europe : 10 fausses évidences, 22 mesures en débat pour sortir de l'impasse », *Manifeste d'économistes atterrés*

BRIAN E., WALTER C. [2008], « Critique de la valeur fondamentale », *Paris Berlin Heidelberg., Springer*

BROYDEN C. G. [1970], « *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms* », *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 6, 76-90

Commission Européenne : Directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil

CNO France. Site internet. Septembre 2013. www.cnofrance.org.

DE LONG, BRADFORD J., SHLEIFER A., SUMMERS L., WALDMANN R. [1990], « Noise Trader Risk in Financial Markets », *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, vol. 98(4), pages 703-38

DE WINNIE R. [1998], « Processus de diffusion et biais de discrétisation : une analyse empirique par inférence indirecte », *Finance –Paris*, Vol. 19, no. 1, p. 41-58

EIOPA : *Long Term Guarantees Assessment*. Site internet. Octobre 2013.
<https://eiopa.europa.eu/consultations/qis/insurance/long-term-guarantees-assessment/index.html>

FLETCHER R. [1970], « A New Approach to Variable Metric Algorithms », *Computer Journal* 1970, 13, 317-322.

FRIEDMAN M. [1953], « The case for Flexible Exchange Rates », *Essays in Positive Economics*, Chicago, University of Chicago Press, p.134

GIET L. [2003], « Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discrétisation », *Groupement de Recherche en Economie Quantitative d'Aix-Marseille*, Document de travail n°03A15

GOLDFARB D. [1970], « A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means », *Mathematics of Computation*, 24, 23-26

HULL J, WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate-Derivative Securities », *Rev. Fin. Studies*, pp.573-592.

KARAM E., PLANCHET F., THEROND P.E. [2013], « Robust Estimation and Economic Valuation », ISFA - Laboratory SAF

LAÏDI Y. [2013], « Problématiques de calibration en vue de l'évaluation des risques de taux, de défaut et de liquidité dans le cadre de Solvabilité II ». *Mémoire d'actuariat -CNAM*.

ORLEAN A. [2011] « L'empire de la valeur. Refonder l'économie », *Le seuil*

PLANCHET F., THEROND P.E., JUILLARD M. [2011], « *Modèles financiers et analyse de risques dynamiques en assurance - seconde édition revue et augmentée* », Paris : Economica (première édition : 2005)

PLANCHET F. [2012], « Ecart de convergence dans la mise en œuvre d'un GSE », *Document de travail chaire M2A*, IC1227-06, ISFA.

PLANCHET F., LEROY G. [2013], « Le mot de l'actuaire », *La tribune de l'assurance*, n°178

PLANCHET F., THEROND P.E. [2013], « Calculs de best estimate : que faire des imperfections du modèle ? », *Document de travail chaire M2A*, IC1227-09, ISFA.

PLANCHET F [2013], « Mesure de l'erreur d'échantillonnage pour le calcul d'un best estimate », *Document de travail chaire M2A*, IC1227-12, ISFA.

RODARIE H. [2011], « Dettes et monnaie de singe : un système économique à renouveler » *Paris, Salvator*

SHANNO D. F. [1970], « Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization », *Mathematics of Computation*, 24, 647-656

SHLEIFER A. ; SUMMERS L. [1990], « The noise Trader Approach to Finance », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 4, n°2, pp. 19-33

SVENSSON L.E.O. [1994], « Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method » *Sveriges Riksbank Quarterly Review* 1995:3, pp 13-26

TOSSETI A. ; BEHAR T. ; FROMENTEAU M. ; MENART S. [2011], « Assurance : comptabilité, réglementation, actuariat », *Paris : Economica*

WÜTRICH M. [2011], « An academic view on the illiquidity premium and market-consistent valuation in insurance », *European Actuarial Journal*, July 2011, Volume 1, Issue 1, pp 93-105

ANNEXE

Liste des acronymes utilisés dans ce document

ALM	<i>Asset and Liability Management</i>
BSCR	<i>Basic Solvency Capital Requirement</i>
CCP	<i>Countercyclical Premium</i>
CPB	Compte de Participation aux Bénéfices
HTM	<i>Held-To-Maturity</i>
LLP	<i>Last Liquid Point</i>
LTGA	<i>Long-Term Guarantees Assesement</i>
PAF	Provision pour Aléas Financiers
PB	Participation aux Bénéfices
PDD	Provision pour Dépréciation Durable
PM	Provisions Mathématiques
PSAP	Provisions pour Sinistres à Payer
QIS	<i>Quantitative Impact Studies</i>
RC	Rachat Conjoncturel
RS	Rachat Structurel
TA	Taux Attendu
SCR	<i>Solvency Capital Requirement</i>
UFR	<i>Ultimate Forward Rate</i>
VC	Valeur Comptable
VB	<i>Volatility Balancer</i>