

**Frédérique HENGE**

sur

***Rapprochement des concepts  
de la Valeur Intrinsèque  
et du Capital Economique en Assurance Vie***

Stage effectué à

**Towers Perrin - Tillinghast**

*21-25 rue Balzac,  
75008 Paris*



*Du 2 mai au 30 septembre 2006*

Maître de Stage :

**Isabelle KERNEUZET**

Consultante

e-mail : [Isabelle.kerneuzet@towersperrin.com](mailto:Isabelle.kerneuzet@towersperrin.com)

tel : 01 53 93 14 26

Responsable RH :

**Michel LAPARRA**

Président d'honneur

e-mail : [Michel.laparra@towersperrin.com](mailto:Michel.laparra@towersperrin.com)

tel : 01 53 93 14 15



## Sommaire

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>5</b>
<b>RESUME .....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>11</b>
<b>PARTIE I : VERS UN BILAN REALISTE.....</b>	<b>15</b>
1. Les facteurs de risque.....	15
2. Uniformisation des normes comptables en Europe.....	16
2.1. Comptabilisation des instruments financiers : IAS 32 et IAS 39.....	17
2.2. Comptabilisation des contrats d'assurance : IFRS 4.....	18
2.3. Valeur de marché des actifs et des passifs .....	18
3. Projet Solvabilité II .....	19
3.1. Les limites de Solvabilité I, régime de solvabilité en vigueur dans l'Union Européenne.....	19
3.2. Description de Solvabilité II.....	20
4. Conclusion.....	22
<b>PARTIE II : LE CONTRAT D'EPARGNE.....</b>	<b>23</b>
1. Fonctionnement du contrat d'épargne.....	24
1.1. Le cadre de l'assurance vie.....	24
1.2. Les différents types de support.....	24
1.3. Caractéristiques du contrat d'épargne .....	25
2. Dispositions réglementaires et comptabilisation.....	30
2.1. Marge de solvabilité .....	30
2.2. Composition de l'actif .....	31
2.3. Provisionnement .....	31
2.4. Compte de résultat .....	34
3. Conclusion.....	34
<b>PARTIE III : MODELISATION STOCHASTIQUE .....</b>	<b>35</b>
1. L'approche Monde Réel ou Real World .....	36
1.1. Coût Moyen Pondéré du Capital ou Weight Average Cost of Capital (WACC).....	37
1.2. Conclusion.....	39
2. L'approche Market-Consistent (MC) : évaluation cohérente avec les valeurs de marché .....	39
2.1. Théorie risque neutre .....	40
2.2. Théorie des déflateurs .....	46
2.3. Conclusion.....	52
3. Simulation de Monte Carlo .....	52
3.1. Principe.....	52
3.2. Exemple : simulation de la trajectoire d'une action .....	54
3.3. Conclusion.....	56
4. Comparaison des méthodes.....	57
4.1. Données du problème .....	57
4.2. Univers risque-neutre .....	57
4.3. Univers réel .....	59
4.4. Conclusion.....	63

<b>PARTIE IV : VALEUR INTRINSEQUE D'UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE VIE (EV)</b> .....	<b>65</b>
1. L'Embedded Value Traditionnelle (TEV) .....	66
1.1. Méthodologie.....	66
1.2. Critiques de la méthode .....	70
1.3. Conclusion.....	72
2. European Embedded Value (EEV) : une Embedded value calculée selon les normes du CFO Forum .....	73
2.1. Taux d'actualisation (RDR, Risk Discount Rate) .....	74
2.2. Coût des options cachées et des garanties financières.....	78
2.3. Exigence en capital et coût du capital .....	78
2.4. Diffusion et communication des résultats .....	79
2.5. EEV : un outil de mesure de la valeur et de la performance des compagnies d'assurance vie.....	79
2.6. Conclusion.....	80
3. Market-Consistent Embedded Value (MCEV) .....	81
3.1. L'approche bilancielle .....	82
3.2. Méthodologie.....	87
3.3. Au-delà de l'évaluation et du reporting financier .....	90
3.4. Conclusion.....	91
<b>PARTIE V : CAPITAL ECONOMIQUE (EC)</b> .....	<b>93</b>
1. Définition .....	93
2. Détermination.....	94
2.1. Période d'évaluation.....	95
2.2. Modélisation de la distribution de la PVFP.....	96
2.3. Mesure de risque .....	98
2.4. Récapitulatif .....	102
3. Lien avec la réglementation et les agences de notation .....	102
3.1. Capital Economique et capital réglementaire.....	102
3.2. Capital Economique et agences de notation.....	103
4. Au-delà d'une simple mesure de l'exposition au risque .....	103
5. Conclusion.....	105
<b>PARTIE VI : APPLICATION POUR UN PORTEFEUILLE TYPE DE CONTRATS D'EPARGNE EN EUROS</b> .....	<b>107</b>
1. Génération de scénarios économiques .....	107
1.1. Modélisation du taux court.....	108
1.2. Modélisation du cours de l'action .....	113
1.3. Discrétisation des processus .....	115
1.4. Détermination et validation des jeux de scénarios .....	115
2. Données et hypothèses utilisées pour l'application .....	118
2.1. Description des éléments de la compagnie d'assurance.....	118
2.2. Hypothèses générales .....	120
3. Etude de l'impact de différents facteurs de risques .....	126
3.1. Protocole.....	126
3.2. Situation de référence .....	127
3.3. Impact des rachats dynamiques.....	131
3.4. Impact de la garantie de taux.....	134
3.5. Impact de la composition des actifs .....	138
3.6. Effet de la réserve de capitalisation.....	143
3.7. Récapitulatif des résultats.....	147

4. Conclusion.....	149
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>151</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>153</b>
Annexe 1 : Description de l'International Accounting Standards Board (IASB) .....	154
Annexe 2 : Liste des actifs admis en couverture .....	155
Annexe 3 : Notions de probabilité.....	156
Annexe 4 : Extensions du modèle de Black et Scholes .....	161
Annexe 5 : Utilité marginale et déflateurs, démonstration.....	164
Annexe 6 : Description du CFO Forum.....	166
Annexe 7 : Les 12 principes de l'European Embedded value (EEV).....	167
Annexe 8 : Décomposition de Choleski .....	169
Annexe 9 : Table de mortalité et table d'expérience .....	171
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>173</b>
<b>LISTE DES ABREVIATIONS.....</b>	<b>175</b>
<b>GLOSSAIRE.....</b>	<b>179</b>



## Remerciements

Ce mémoire a été réalisé au sein du bureau de Paris du Cabinet Towers Perrin-Tillinghast. Je remercie Michel LAPARRA président d'honneur et Philippe MATHOUILLET directeur général du bureau de Paris pour m'avoir offert l'opportunité d'accomplir mon stage de fin d'études au sein de leur cabinet, où j'ai eu le plaisir de collaborer avec des personnes dotées d'une haute qualité professionnelle. Je remercie l'ensemble de l'équipe du bureau de Paris pour m'avoir accueillie dans une ambiance de travail conviviale et sympathique.

Mes remerciements s'adressent en particulier à ma maîtresse de stage Isabelle KERNEUZET, consultante Tillinghast, pour ses conseils, ses remarques pertinentes et ses compétences techniques.

Je tiens à exprimer mes plus chaleureux remerciements à Aurélie BONNEFOI, consultante junior Tillinghast, pour sa collaboration au quotidien et ses précieuses explications. Elle a su guider mon travail pendant ces cinq mois en faisant preuve d'attention et d'une grande disponibilité.

Je souhaite enfin témoigner ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont aidée, de près ou de loin, à réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions.





**Frédérique HENGE**

sur

*Rapprochement des concepts  
de la Valeur Intrinsèque  
et du Capital Economique en Assurance Vie*

**Résumé**

Toute compagnie d'assurance doit pouvoir évaluer au plus juste sa richesse et son potentiel. Ceci constitue en effet un point essentiel pour le pilotage de sa gestion, que ce soit pour améliorer sa compétitivité (identifier les facteurs qui vont être créateurs ou destructeurs de la valeur) ou pour évaluer sa solvabilité. Mais il importe également de pouvoir diffuser des informations rigoureuses aux différents protagonistes du marché (comme les investisseurs, les superviseurs, les analystes,...) dont l'objectif est de se forger une opinion fiable sur la santé financière et la performance de la société.

Pour ce faire, la compagnie doit disposer d'outils capables de retracer la réalité des aspects économiques et financiers, et de tenir compte de l'ensemble des risques qu'elle supporte. Il s'agit notamment d'adopter des approches qui soient conformes avec les évolutions actuelles de la réglementation. Celles-ci se traduisent par la création d'un référentiel comptable commun, fondé sur le principe de juste valeur ou « Fair Value » (les normes IFRS), et par une réforme du système de solvabilité qui vise une approche intégrée des risques (le projet Solvabilité II). Les actifs et les passifs doivent donc être évalués à leur valeur économique, c'est-à-dire suivant des valeurs cohérentes avec le marché. Or, il se pose ici un problème d'évaluation, car, il n'existe pas à proprement parlé de valeur de marché pour les passifs d'assurance, en l'absence de marché liquide correspondant. Tout va donc dépendre des méthodologies appliquées par les compagnies dans la détermination d'indicateurs de performance ou d'exposition aux risques.

Pour mesurer la performance et la création de la valeur, une compagnie d'assurance vie s'appuie sur le concept de Valeur Intrinsèque ou d'Embedded Value (EV). L'EV correspond au prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie. Différentes techniques d'évaluation existent : la méthode traditionnelle déterministe et les méthodes stochastiques comme l'European Embedded Value (une EV calculée selon les normes du CFO Forum, groupement des directeurs financiers issus des plus importantes compagnies d'assurance et de réassurance européennes) ou la Market-Consistent Embedded Value (une EV cohérente avec les valeurs de marché). Mais seule une modélisation stochastique est susceptible de capturer la volatilité des phénomènes intervenant dans la valorisation d'un portefeuille de contrats d'épargne (en particulier pour l'évaluation des coûts liés aux options et aux garanties financières).

Pour mesurer l'exposition au risque, une compagnie d'assurance vie fait appel au concept de Capital Economique (EC) qui se définit comme le montant de capital nécessaire pour couvrir les engagements envers les assurés selon un critère de risque défini a priori et un horizon temporel spécifié. Son calcul est réalisé à partir de simulations stochastiques et du niveau de risque que la société est prête à accepter.

L'EV et l'EC sont donc deux notions censées traduire la position financière d'une compagnie d'assurance vie. Nous pouvons toutefois constater que, dans la pratique, leur détermination est souvent réalisée par des équipes différentes : l'EV est en général calculée à l'inventaire, tandis que l'EC est plutôt évalué par le service de gestion Actif/Passif.

L'objectif de ce mémoire est donc de définir s'il existe une certaine synergie entre les concepts d'EC et d'EV (sur la base d'une Market-Consistent Embedded Value qui semble l'EV la plus à même à retracer une image fidèle de la compagnie et la plus cohérente avec les exigences de la réglementation).

Pour ce faire, nous nous familiarisons d'abord avec les concepts en présence. Puis il s'agit d'étudier si les calculs et les résultats peuvent être rapprochés, à partir d'une application pratique sur un portefeuille type de contrats d'épargne en euros (qui requiert notamment la génération et la validation de scénarios économiques). Nous considérons alors différents facteurs qui peuvent influencer la valeur de l'EV et de l'EC, ce qui nous permet de montrer l'existence d'une certaine convergence entre les résultats : malgré un raisonnement différent, nous observons que nous aboutissons à des conclusions analogues concernant la perception des risques auxquels la compagnie est confrontée.

Ainsi, l'EV (stochastique) et l'EC se rejoignent et permettent de disposer d'indicateurs cohérents, capables de retracer le profil de risque d'une compagnie d'assurance vie et de fournir des informations pertinentes quant à son potentiel. Ils participent donc activement à la gestion des risques d'entreprise, puisqu'ils permettent de disposer d'un outil de pilotage performant capable de gérer les interactions qui existent entre le risque, le capital et la valeur.

---

**Mots clés :** Assurance vie, Bilan économique, Black et Scholes, Capital Economique, contrat d'épargne, European Embedded Value, juste valeur, Market-Consistent Embedded Value, mesure de risque, normes IFRS, rachats dynamiques, Solvabilité II, taux minimum garanti, théorie des déflateurs, théorie risque-neutre, valeur de marché, Valeur Intrinsèque

---

**Frédérique HENGE**

about

*Bringing together the concepts of  
Embedded Value and  
Economic Capital in Life Insurance*

**Abstract**

Every insurance company needs to be able to value its wealth and potential as accurately as possible. This is an essential point for its management, notably to improve competitiveness (by identifying factors which are going to create or destroy value) or to estimate solvency. Furthermore, it is also important to be able to communicate accurate information to the market's various stakeholders (investors, supervisors, analysts,...). The objective is to allow them to build up reliable opinions of the financial health and performance of the company.

To achieve this, the company must have tools capable of taking into account economic and financial factors, together with the level of risk to which the company is exposed. Notably it is a question of adopting approaches which are in accordance with current regulations. These approaches are translated by the creation of a common accounting repository, based on the principle of "Fair Value" (IFRS standards), and by a reform of the solvency system which aims towards an integrated risks approach (the Solvency II project). Thus, assets and liabilities must be estimated at their economic value (i.e. market consistent values). This creates a valuation problem because in the absence of a corresponding liquid market, a market value for liabilities does not exist. Therefore, everything will depend on the methodologies applied by the companies in the determination of performance and risk exposure indicators.

To measure its performance and change in value, a life insurance company leans on the concept of Embedded Value (EV). The EV corresponds to the theoretical price which an external investor would be ready to pay to acquire the company. Various valuation techniques exist: the traditional deterministic method, stochastic methods such as European Embedded Value (an EV calculated according to the CFO standards; the CFO Forum is a group of Chief Financial Officers drawn from major European insurance and reinsurance companies) and the Market-Consistent Embedded Value (an EV consistent with market values). However, only a stochastic valuation method can capture the volatility of a portfolio of saving contracts (in particular for the evaluation of the costs of options and financial guarantees).

To measure its risk exposure, a life insurance company appeals to the concept of Economic Capital (EC) which is defined as the amount of capital necessary to cover the insurer's financial commitments to its policyholders using a pre-defined risk criterion over a specified temporal horizon. Starting with stochastic simulations and the level of risk which the company is willing to accept, its calculation is carried out.

Thus, both the EV and the EC are concepts which are supposed to indicate the financial position of a life insurance company. We can however note that, in practice, their determination is often carried out separately: the EV is generally calculated by the inventory, while the EC is usually calculate by the Asset/Liabilities management service.

The aim of this document is to determine whether there is a certain synergy between the concepts of EC and EV (on the basis of a Market-Consist Embedded Value which seems to be the best valuation method of obtaining a representative image of the company while adhering to regulation).

With this intention, we initially familiarise ourselves with the concepts involved. Afterwards it is a question of examining whether the calculations and the results can be brought together. Starting from a practical application on a standard portfolio of saving contracts in euros (which in particular requires the generation and the validation of economic scenarios), we then consider various factors which can influence the value of the EV and the EC. This allows us to show the existence of a certain convergence between the results: despite a different reasoning, we observe that we arrive at similar conclusions concerning the perception of the risks to which the company is exposed.

Thus, the EV (stochastic) and EC converge, making it possible to obtain coherent indicators which are able to identify the risk profile of the company and provide accurate information regarding its potential. Thus the EV and the EC actively take part in the risk management process of a life insurance company, since they make it possible to have a powerful management tool capable of managing the interactions which exist between risk, capital and value.

---

**Key words :** Black and Scholes, dynamic lapses, Economic Balance sheet, Economic Capital, Embedded Value, European Embedded Value, Fair Value, IFRS standards, insurance life, Market-Consistent Embedded Value, market-to-market, minimum interest rate, risk measure, risk neutral theory, saving contract, Solvency II, state price deflator

---

## INTRODUCTION

Le monde de l'assurance et sa réglementation vivent actuellement des évolutions considérables, où la préoccupation du risque tient une place primordiale. Ces changements visent à mieux tenir compte des différents risques inhérents à l'activité d'assurance et à améliorer la compréhension, la transparence et la comparabilité des informations fournies par les compagnies au sujet de leur situation financière. Le but est de retracer le plus fidèlement possible l'image de la société, en se basant sur une vision économique de celle-ci.

L'incertitude des marchés financiers et des risques supportés par les assureurs nécessite en effet la diffusion d'informations rigoureuses : les investisseurs, les analystes, les superviseurs et autres sont en demande constante de renseignements fiables pour se forger une opinion concernant la santé et la performance de la société.

Toute compagnie d'assurance doit donc pouvoir disposer d'indicateurs susceptibles d'évaluer au plus juste sa richesse et son potentiel. Ceci constitue également un point fondamental dans le pilotage de la gestion, que ce soit au niveau de la compétitivité ou de la solvabilité. D'une part, la société doit pouvoir mesurer la profitabilité des ses produits ou de ses secteurs d'activité, et identifier les facteurs qui vont être créateurs ou destructeurs de la valeur. D'autre part, elle doit savoir si elle est en mesure de tenir ses engagements et si la richesse est suffisante pour assurer la pérennité de la société dans des circonstances défavorables. Le cas échéant, elle doit être capable d'évaluer son besoin en fonds propres.

### **Mais comment déterminer le potentiel de la compagnie et communiquer des informations cohérentes concernant sa santé et sa performance ?**

Il faut appliquer des approches qui soient conformes avec les principes de la réglementation, fondées sur la réalité des aspects économiques et financiers, et capables de tenir compte des différents risques auxquels est confrontée la société.

Pour ce faire, il faut partir du Bilan économique de la compagnie qui est le plus à même à refléter son profil de risque : les actifs et les passifs sont évalués par rapport aux prix du marché ou sur la base de valeurs cohérentes avec le marché.

Il est facile d'évaluer la valeur des actifs selon leur valeur de marché puisqu'il existe des marchés sur lesquels s'échangent ces actifs. La valeur de marché d'un actif est alors égale au montant qui résulterait de la vente de cet actif sur le marché.

Par contre, il est plus problématique d'estimer la valeur de marché des passifs d'assurance vie (qui se composent principalement des engagements qu'ont les assureurs envers leurs assurés), en l'absence de marché liquide correspondant. La juste valeur est alors obtenue en calculant la valeur actuelle des flux futurs nets liés au portefeuille de contrats d'épargne détenu par la compagnie. Il se pose ici un problème d'évaluation car tout va dépendre des hypothèses et du modèle de projection utilisés. Quelque soit la technique adoptée, il est toutefois nécessaire d'appliquer une approche stochastique si nous voulons obtenir une valeur cohérente, qui soit fonction de la réelle exposition au risque.

En effet, en assurance vie, les contrats peuvent être compliqués à modéliser car ce sont des contrats de longue durée qui dépendent souvent d'options cachées. Celles-ci représentent des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses

contractuelles (comme la garantie de taux minimum ou la possibilité de rachat). Elles sont à prendre en compte lors de l'évaluation de la compagnie car elles peuvent représenter une charge significative pour l'assureur si les conditions économiques du marché deviennent défavorables, comme ce fut le cas ces dernières années.

Or, les méthodes déterministes d'évaluation ne sont pas adaptées pour tenir compte des risques financiers liés à ce genre d'options et de garanties, qui sont soit sous-évaluées, soit complètement ignorées. En fait, les options cachées présentent un caractère volatil que seule une approche stochastique permet de capturer.

Différentes techniques d'évaluation stochastique sont envisageables. Le choix dépendra alors des objectifs visés : mesurer la création de la valeur ou mesurer l'exposition au risque.

Pour mesurer la performance et la création de la valeur, une compagnie d'assurance vie s'appuie sur le concept de Valeur Intrinsèque ou d'Embedded Value (EV). Il s'agit de la valeur actuelle des profits futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures. Autrement dit, l'EV correspond au prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie.

L'exposition au risque est mesuré par le Capital Economique (EC) qui se définit comme le montant de capital nécessaire pour couvrir les engagements envers les assurés selon un critère de risque défini a priori et un horizon temporel spécifié.

L'EV et l'EC sont deux notions censées traduire la position financière d'une compagnie d'assurance vie. Nous pouvons toutefois constater que, dans la pratique, leur détermination est souvent réalisée par des équipes différentes : l'EV est en général calculée à l'inventaire, tandis que l'EC est plutôt évalué par le service de gestion Actif/Passif.

**L'objectif de ce mémoire est donc de définir s'il existe une certaine synergie entre les concepts d'EV et d'EC et de voir, à partir d'une application pratique sur un portefeuille type de contrats d'épargne en euros, si les calculs et les résultats peuvent être rapprochés.**

Dans une première partie (« *Vers un bilan réaliste* »), nous évoquerons l'évolution du contexte réglementaire du monde de l'assurance (en particulier par rapport aux systèmes de comptabilisation et de solvabilité), les exigences qui en découlent et l'importance de considérer l'entreprise d'assurance d'un point de vue économique. En effet, les normes IFRS (International Financial Reporting Standards) introduisent un référentiel comptable commun unique, basé sur le principe de « Fair Value », à savoir une valorisation des actifs et des passifs à leur juste valeur ou valeur économique. Le projet Solvabilité II a, quant à lui, pour objectif de mettre en place un système de régulation européen capable d'apprécier la solvabilité globale de la compagnie, en adoptant une approche intégrée des risques et une évaluation des actifs et des passifs qui soit cohérente avec le marché.

Dans une deuxième partie (« *Le contrat d'épargne* »), nous nous familiariserons avec les particularités d'un contrat d'épargne, étant donné que celui-ci nous servira dans notre application numérique. Le contrat d'épargne dans le cadre d'une assurance vie est un contrat aléatoire (par rapport à la vie humaine) reposant sur la technique de capitalisation viagère. Nous en présenterons le fonctionnement et la comptabilisation.

La troisième partie de ce mémoire (« *Modélisation stochastique* ») sera consacrée à la présentation des différentes méthodes stochastiques qui sont utilisées en assurance vie lors de la valorisation d'un portefeuille de contrats d'épargne. Il est en effet possible de raisonner suivant

une approche Monde Réel (technique de valorisation financière classique) ou suivant une approche Market-Consistent (évaluation cohérente avec les valeurs de marché où les risques sont calibrés suivant les flux issus des produits). Dans le cas d'une évaluation Market-Consistent, nous pouvons raisonner soit suivant la théorie risque-neutre (les agents sont neutres face au risque et le taux de rendement de n'importe quel actif est égal au taux sans risque), soit suivant la théorie des déflateurs (assimilables à une fonction d'actualisation stochastique). Dans la pratique, l'approche adoptée est appliquée à l'aide d'une simulation de Monte Carlo.

Toutes ces techniques sont de toute manière équivalentes, comme nous pourrions le constater dans un simple exemple comparatif.

La quatrième partie (« *Valeur Intrinsèque d'une compagnie d'assurance vie* ») nous permettra d'étudier de manière précise le concept d'EV, et de comprendre les différentes techniques d'évaluation qui existent. La technique traditionnelle déterministe est la plus couramment utilisée mais elle présente certaines faiblesses, qui ont été mises en évidence suite à la chute des marchés boursiers et des taux d'intérêts de ces dernières années (notamment en ce qui concerne la valorisation des risques financiers et des options cachées). Pour pallier à ces manques, des techniques stochastiques sont apparues, comme l'European Embedded Value (EEV) ou la Market-Consistent Embedded Value (MCEV). L'EEV désigne une EV stochastique standardisée, calculée selon les normes du CFO Forum (groupement des directeurs financiers des plus importantes compagnies d'assurance et de réassurance européennes). La MCEV correspond à une EV stochastique cohérente avec les valeurs de marché. C'est d'ailleurs cette dernière technique qui est préconisée par Towers Perrin-Tillinghast et qui sera rapprochée à la notion d'EC. En effet, cette méthode est à privilégier car elle crée un cadre robuste combinant économie financière et finance d'entreprise. Cette EV semble la plus adéquate pour obtenir une valeur économique reflétant la situation financière réelle de la société, et la plus en adéquation avec les exigences de la réglementation. La MCEV permet de plus d'établir un lien entre la gestion de l'activité, les risques, le capital et la valeur. Comme nous allons le voir, il ne s'agit pas seulement d'un simple indicateur de performance; c'est aussi un bon instrument de la gestion du capital.

Dans la cinquième partie (« *Capital Economique* »), nous envisagerons le concept de l'EC qui consiste à trouver un niveau de capital susceptible de concilier, d'une part, les attentes des assurés et de la réglementation (au sujet de la solvabilité de la société), et d'autre part, les exigences de rentabilité des actionnaires (l'EC traduit le risque qu'ils sont prêts à prendre pour atteindre un certain rendement). Nous étudierons la manière dont il est déterminé à partir de la distribution empirique de la valeur actuelle des résultats futurs probables nets distribuables aux actionnaires (calculée par rapport au portefeuille existant et obtenue grâce à des simulations stochastiques) et du niveau de risque que la société est prête à accepter. Il sera donc nécessaire de définir ce qu'est une mesure de risque. Nous verrons également que l'EC peut trouver d'autres applications que le simple fait de mesurer l'exposition au risque. Nous montrerons en particulier qu'il s'inscrit au cœur de la gestion du risque et de la création de la valeur.

Enfin, nous rapprocherons dans la dernière partie (« *Application pour un portefeuille type de contrats d'épargne en euros* ») les techniques de la MCEV et de l'EC. Pour ce faire, nous considérerons un portefeuille de contrats d'épargne en euros, représentatif du marché français de l'assurance vie. L'ensemble des calculs sera effectué à l'aide du logiciel *MoSes*. Nous partirons d'une situation de référence, puis nous ferons varier certains paramètres. L'objectif sera d'étudier l'impact de différents facteurs de risque sur l'EV et l'EC, tels que : la garantie de taux, les rachats dynamiques, la répartition du portefeuille d'actifs. Nous verrons également l'effet de la réserve de capitalisation.

La modélisation de cette application nécessitera notamment la génération et la validation de scénarios économiques. Nous modéliserons le taux court suivant le modèle de Cox Ingersoll Ross en calibrant les paramètres sur les données observables du marché, de sorte à rester

cohérent avec les valeurs de marché. La fonction d'actualisation à la date de calcul sera d'ailleurs obtenue grâce à une interpolation cubique. La modélisation des actions se fera suivant le modèle de Black et Scholes et la décomposition de Choleski. Les scénarios seront générés à la fois en univers risque-neutre (pour pouvoir calculer la MCEV) et en univers réel (pour pouvoir évaluer l'EC).

Grâce à cette application, nous pourrons mettre en évidence l'apport indéniable de l'approche stochastique dans la valorisation des options et des garanties financières, de voir la difficulté de la détermination d'un taux d'actualisation ajusté au risque (qui varie significativement suivant les situations envisagées) et de montrer l'existence d'une certaine convergence entre les résultats issues de la MCEV et de l'EC : malgré un raisonnement différent, nous verrons que nous aboutissons à des conclusions analogues concernant la perception des risques auxquels la compagnie est confrontée.

Ceci nous permettra alors de dire que les concepts d'EV (stochastique) et d'EC se rejoignent et se complètent. Ils constituent des indicateurs cohérents, capables de retracer le profil de risque de la compagnie et de communiquer des informations rigoureuses quant à son potentiel. Ils participent donc activement à la gestion des risques d'entreprise puisqu'ils permettent de disposer d'un outil de pilotage performant, susceptible de gérer les interactions qui existent entre le risque, le capital et la valeur.



## PARTIE I : VERS UN BILAN REALISTE

L'assurance est en train de vivre une période d'évolutions considérables où **le risque constitue une préoccupation primordiale**. En effet, l'activité d'assurance s'exerce dans un cadre réglementaire strict (visant à protéger les intérêts des assurés) qui connaît, depuis quelques années, certains changements. Le but est de mieux tenir compte du risque réel inhérent à l'activité d'assurance et d'harmoniser au niveau européen les règles de comptabilisation et d'évaluation de la situation financière des sociétés. Il s'agit également de converger vers une évaluation basée sur la valeur de marché de sorte à communiquer des indicateurs de performance et de valeur qui soient les plus pertinents possibles.

C'est dans cette optique qu'ont été conçues **les normes IFRS** (International Financial Reporting Standards) et la **régulation Solvabilité II**. Nous allons brièvement en faire la présentation afin de comprendre le contexte économique du monde de l'assurance et les exigences qui en résultent. Nous commencerons d'abord par évoquer les différents risques auxquels une compagnie d'assurance est confrontée.

### **1. Les facteurs de risque**

Nous appelons risque tout évènement aléatoire qui réduit la capacité de l'assureur à faire face à ses engagements.

Une compagnie d'assurance est soumise à **des risques variés qui peuvent concerner une multitude de domaines**. En effet, l'assureur est confronté aux risques de deux métiers qu'il exerce :

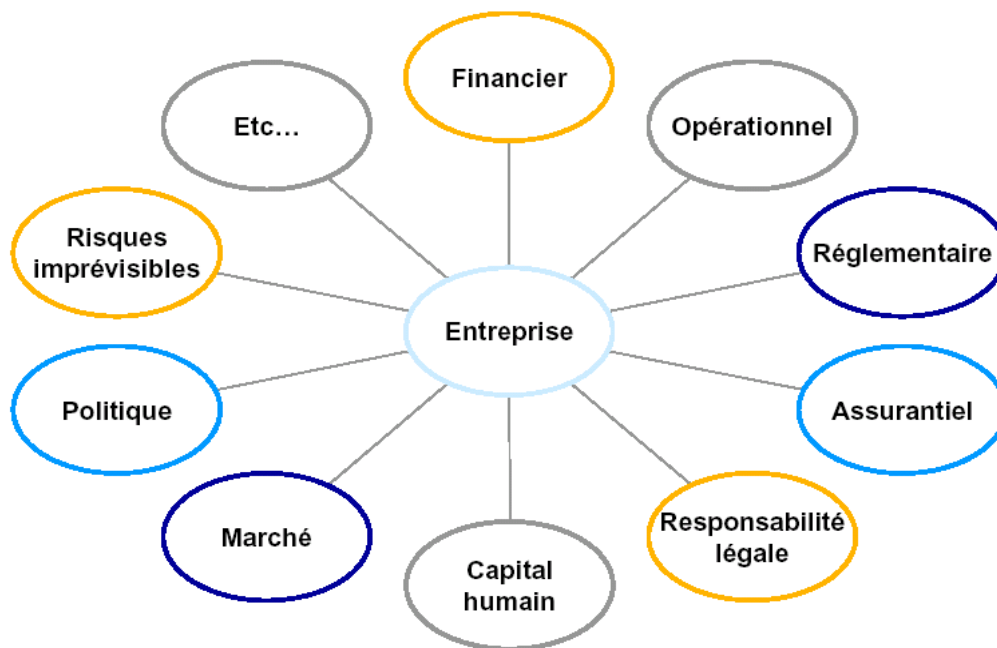
- la commercialisation et la gestion des contrats d'assurance,
- la gestion financière de portefeuille de placements.

Nous pouvons citer en particulier :

- les risques techniques : mortalité, morbidité, rachats ;
- les risques opérationnels : fraude, risque commercial, mauvaise gestion ;
- les risques financiers : risque de marché, risque de défaut, risque de change ;
- les risques de gestion actif/passif : risque de liquidité, mauvaise couverture ;
- les risques liés à la survenance d'un évènement : risque juridique, risque fiscal, risque politique.

Plusieurs éléments peuvent donc mener la société d'assurance à la faillite.

Pour retracer une image fidèle de la société et fournir des informations rigoureuses sur sa position financière ou sa performance, **il faut être capable de dégager au plus juste le profil de risque lié à la compagnie**, même si cela n'est pas toujours évident étant donné la diversité des risques auxquels elle est exposée. Mais ceci constitue un point fondamental. C'est d'ailleurs vers cela que tendent les évolutions actuelles de la réglementation du monde de l'assurance : une meilleure identification et prise en compte du profil de risque lié à chaque compagnie.



## 2. Uniformisation des normes comptables en Europe

Chaque pays européen applique ses propres règles de comptabilisation, ce qui ne facilite pas la comparaison des comptes de sociétés issues de différents pays.

Les états comptables sont des outils de contrôle et de régulation car ils permettent de renseigner les tiers (autorités de contrôle, dirigeants, clients,...) sur les activités et la santé financière de la société. Ils reposent sur le principe de prudence qui se caractérise par une comptabilisation en valeur historique (valeurs des biens inscrites au bilan au coût d'acquisition). Il en résulte que **le bilan comptable ne permet pas d'apprécier directement la performance de l'entreprise** car les valeurs inscrites au bilan ne reflètent pas les véritables valeurs des biens, à savoir les valeurs économiques qui s'expriment en fonction du prix d'échange sur les marchés.

Pour communiquer une information plus en adéquation avec la réalité économique et voir l'émergence d'un marché unique européen, l'Union Européenne a décidé de mettre en place un référentiel comptable compatible avec les normes comptables internationales élaborées par l'IASB (International Accounting Standards Board, anciennement IAS Committee ; l'*Annexe 1* décrit les détails de son organisation).

Il s'agit des normes IFRS, qui s'appliquent à un type de contrat ou de placement et non pas à un secteur d'activité. Toutes les entreprises cotées sur les marchés européens doivent s'y soumettre (pour les comptes 2005 et suivants). Ce référentiel comptable commun et unique se compose des éléments suivants :

- les normes IAS (International Accounting Standards), élaborées et publiées par l'IASB ;
- les textes d'interprétation des normes IAS, c'est-à-dire les rapports du Standing Interpretations Committee (SIC) ;
- les nouvelles normes, nommées IFRS ;
- les nouveaux textes d'interprétation des normes IAS/IFRS, c'est-à-dire les International Financial Reporting Interpretations Committee (IFRIC).

L'objectif est d'harmoniser le système de comptabilisation afin de faciliter la lecture des comptes par les analystes en améliorant la compréhension, la transparence et la comparabilité des résultats. Il s'agit d'**offrir une vision économique de la compagnie**, de fournir des outils d'aide à la décision et de mesurer la richesse créée par l'actionnaire.

Trois normes concernent particulièrement les comptes des assureurs : les normes IAS 32, IAS 39 et IFRS 4.

## **2.1. Comptabilisation des instruments financiers : IAS 32 et IAS 39**

Les normes IAS 32 et IAS 39 précisent les informations à publier et les modalités d'évaluation et de comptabilisation des instruments financiers. Ces normes s'appliquent à tous les instruments financiers, qu'il s'agisse d'actifs financiers, de passifs financiers ou d'instruments sur capitaux propres.

### ■ **Informations à fournir et à présenter : IAS 32**

Cette norme vise à mieux percevoir l'importance des instruments financiers par rapport à la situation financière d'une entité, à sa performance et à ses flux de trésorerie. Elle prescrit la manière dont doivent être présentés les instruments financiers: le classement est énoncé en actifs financiers, en passifs financiers et en instruments de capitaux propres.

La norme impose aussi la présentation d'importantes informations concernant notamment l'utilisation de ces instruments par une entité, les objectifs économiques qu'ils servent, les risques associés et les règles comptables appliquées.

### ■ **Comptabilisation et évaluation : IAS 39**

L'IAS 39 introduit le concept de « juste valeur » (« **Fair Value** ») qui se définit comme étant « le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif atteint, entre des parties consentantes et bien informées dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale ».

La détermination de la juste valeur est alors basée sur :

- la valeur de marché s'il existe un marché et des conditions de concurrence normale (liquidité, absence de position dominante,...),
- la comparaison avec des instruments similaires,
- un modèle d'évaluation.

La norme précise les situations dans lesquelles un actif ou un passif financier peut être évalué à partir de la valeur actuelle de marché : l'option de juste valeur (option de désigner tout instrument comme détenu à des fins de transaction) peut être utilisée de façon à réduire de manière significative (ou à éliminer) l'asymétrie de traitement entre actif et passif ou, lorsqu'elle est déjà utilisée, pour mesurer les performances du portefeuille d'actifs ou du passif de la société.

Quatre catégories d'actifs financiers sont identifiées selon l'intention de détention:

- les prêts et les créances,
- les actifs financiers détenus jusqu'à maturité,
- les actifs financiers détenus à des fins de transaction,
- les actifs financiers disponibles pour la vente.

## **2.2. Comptabilisation des contrats d'assurance : IFRS 4**

Selon cette norme, **les contrats d'assurance se définissent de la façon suivante** : « un contrat d'assurance est un contrat selon lequel une partie (l'assureur) accepte de couvrir un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un évènement futur incertain spécifié (l'évènement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police ».

L'incertitude de l'évènement assuré peut porter sur:

- la survenance de l'évènement visé,
- la date de survenance de l'évènement visé,
- le montant réglé par l'assureur lors de la survenance de l'évènement visé.

Le risque d'assurance correspond au risque, autre que financier, transféré du titulaire du contrat à l'assureur. D'après l'annexe A de la norme (intitulé « Définitions »), le risque financier se rapporte quant à lui au « risque d'une variation future possible d'un ou de plusieurs éléments suivants : taux d'intérêt spécifié, prix d'un instrument financier, prix d'une marchandise, taux de change, indice de prix ou de taux, notation de crédit ou autre variable, à condition que dans le cas d'une variable non financière, la variable ne soit pas spécifique à une des parties du contrat ».

Il y a donc **une distinction entre le risque d'assurance et le risque financier** qui se traduit par une classification et une comptabilisation différente selon que le contrat se rapporte à un contrat « d'assurance » ou à un contrat « d'investissement » : les premiers seront régis par la norme IFRS 4 et les seconds par la norme IAS 39.

Par exemple, la comptabilisation des contrats de prévoyance, de dommages et des contrats d'assurance vie à dominante épargne avec participation aux bénéfices sont effectués selon l'IFRS 4. Par contre, les contrats d'épargne sans participation aux bénéfices, sont considérés comme des contrats d'investissement, comptabilisés à partir de la norme IAS 39.

Les assureurs doivent donc faire face à une différence de traitement des actifs, comptabilisés selon IAS 39 à la juste valeur, et des passifs d'assurance, comptabilisés au coût amorti. Le coût amorti correspond à la valeur d'acquisition minorée ou majorée des coûts de transaction internes et externes y afférant.

## **2.3. Valeur de marché des actifs et des passifs**

Créées pour homogénéiser la présentation et l'évaluation des comptes des sociétés européennes cotées sur les places financières européennes, les normes IFRS définissent donc un référentiel comptable commun et unique, fondé sur le principe d'une comptabilité « Fair Value », à savoir **une valorisation des actifs et des passifs en juste valeur ou valeur économique**. Le but est de fournir une information pertinente et cohérente, traduisant la situation financière réelle de la compagnie.

Il est facile d'évaluer la valeur des actifs selon leur valeur de marché puisqu'il existe des marchés sur lesquels s'échangent les actifs. **La valeur de marché d'un actif correspond alors au montant qui résulterait de la vente de cet actif sur le marché.**

Cependant, ce raisonnement n'est pas vraiment applicable pour les passifs des sociétés d'assurance qui se composent principalement des engagements qu'ont les assureurs envers leurs assurés. **Il est donc plus problématique d'estimer ces passifs à leur valeur de marché, en l'absence de marché liquide correspondant.** La juste valeur des engagements sera en fait obtenue en calculant la valeur actuelle des flux futurs nets liés au portefeuille de polices détenu par la compagnie. Il se pose ici un problème d'évaluation car tout va dépendre des hypothèses et du modèle de projection utilisés.

### **3. Projet Solvabilité II**

L'importance des sommes en jeu et le rôle croissant des entreprises d'assurance dans la société ont conduit l'Etat à mettre en place un système de surveillance prudentielle visant à protéger les intérêts des assurés et des souscripteurs.

En effet, **une compagnie se doit d'être solvable**, c'est-à-dire qu'elle doit être capable de respecter à tout instant ses engagements envers les membres participants et les autres créanciers.

Afin d'évaluer la solvabilité de la société en tenant compte de tous les risques qu'elle supporte, la réglementation a pris la décision de mettre à jour le système de solvabilité européen en vigueur (Solvabilité I): il s'agit du projet Solvabilité II, qui s'inscrit dans la poursuite de l'harmonisation européenne, internationale et intersectorielle.

#### **3.1. Les limites de Solvabilité I, régime de solvabilité en vigueur dans l'Union Européenne**

En Europe, la réglementation concernant la solvabilité des compagnies d'assurance a débuté par l'application de deux Directives (en 1973 pour l'assurance non vie et en 1979 pour l'assurance vie). Elle a ensuite été mise à jour par la réforme Solvabilité I (2002) qui constitue le régime de solvabilité actuellement appliqué.

Solvabilité I impose aux assureurs de détenir un volume de fonds propres égal à la marge de solvabilité réglementaire (ou exigence minimale de marge de solvabilité), ou au fond minimum de garantie si celui-ci est supérieur:

- *marge de solvabilité réglementaire en assurance vie* :  
MS = 4 % des provisions nettes de réassurance, ramené à 1,00% si le risque de placement est transféré à l'adhérent (contrats en Unités de Compte, sans garantie plancher), en intégrant un ratio destiné à tenir compte forfaitairement de la réassurance  
+ 0,3 % des capitaux sous risque non négatifs, net de réassurance (les capitaux sous risque désignent les capitaux décès, déduction faite des provisions mathématiques et provisions de gestion liées au risque principal) ;
- *fond minimum de garantie* :  
FMG = Min(1/3 \*MS ; 2 à 3 millions d'euros selon la branche)

Nous pouvons noter que **seul le niveau d'activité lié à l'assurance entre en compte dans le calcul**. Le risque d'investissement est traité suivant des règles définies par l'Union Européenne qui établissent la manière dont les provisions techniques sont placées. Ces règles exposent:

- les catégories d'actifs dans lesquels les assureurs peuvent investir,
- la quote-part maximale de chacune d'elles qu'ils peuvent détenir.

Solvabilité I a le mérite d'utiliser **des formules simples et robustes**, permettant la comparabilité des résultats entre les entreprises. Par contre, elle présente **de nombreuses faiblesses**, auxquelles il semble urgent de remédier, telles que :

- l'existence d'un standard d'évaluation au niveau de chaque Etat membre ;
- une évaluation des actifs et des passifs différente d'une approche cohérente avec le marché : il est notamment possible de choisir d'évaluer les actifs à leur valeur de marché ou à leur coût historique ;
- l'absence de traitement au sujet de la corrélation entre les actifs et les passifs ;
- la non prise en compte de l'ensemble des risques supportés par la compagnie;
- la non prise en compte du phénomène de diversification, et de certaines formes de transfert de risque (en particulier la réassurance).

Ainsi, les types de risques et la qualité de leur gestion n'ont pas d'impact sur les besoins en fonds propres des compagnies. Dans certains cas, il peut même s'avérer que le système donne des résultats allant à l'encontre des nécessités d'une bonne gestion.

D'autre part, il ne semble pas juste que les entreprises d'assurance de l'Union Européenne ne soient pas soumises aux mêmes exigences de marge de solvabilité, car cela voudrait dire que les assurés ne soient pas protégés de la même manière et que les conditions de concurrence soient inégales entre les sociétés.

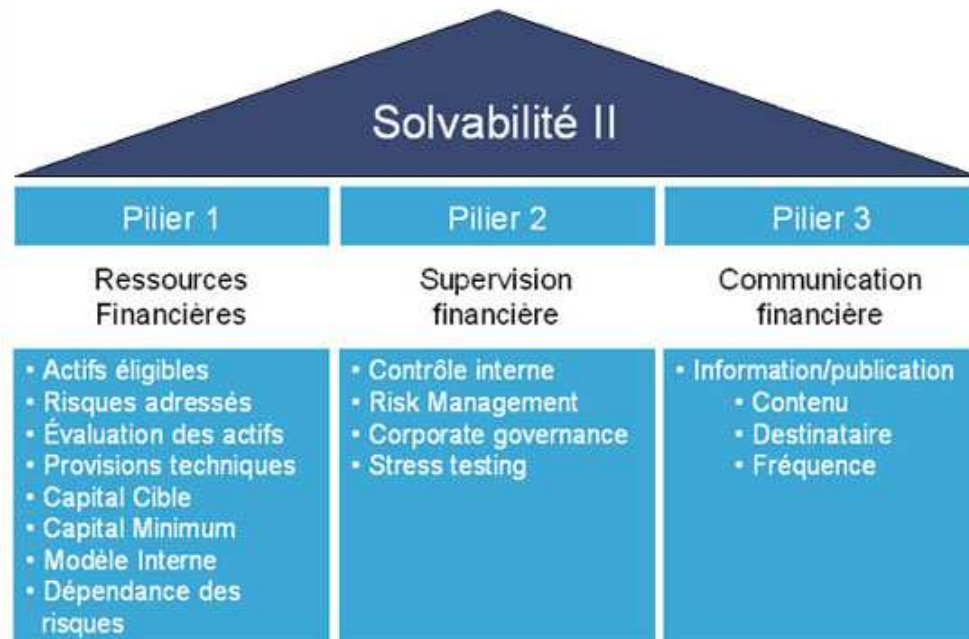
C'est pourquoi la Commission, en collaboration avec les Etats membres, a lancé le projet Solvabilité II, afin de standardiser et de moderniser le système de solvabilité, en remplaçant notamment l'approche de solvabilité axée sur le risque de souscription (la solvabilité étant mesurée sur la base du volume d'affaires souscrites) par une approche s'appuyant sur le véritable profil de risque lié à chaque compagnie d'assurance.

### **3.2. Description de Solvabilité II**

Solvabilité II constitue une étape clé dans la construction du marché européen unique de l'assurance. Son objectif est d'établir un cadre européen sûr et pérenne afin que l'assurance continue à être un vecteur de croissance et de stabilité économique pour l'Europe. Il s'agit en particulier **d'apprécier la solvabilité globale des compagnies en adoptant une approche intégrée des risques et une évaluation des actifs et des passifs qui soit cohérente avec le marché**. Cette réforme ambitieuse vise donc une refonte complète du système européen de contrôle prudentiel d'un point de vue quantitatif mais également qualitatif. Ce projet devrait analyser et synthétiser différents sujets tels que l'adoption d'un système davantage fondé sur le risque, l'harmonisation de l'évaluation des provisions techniques, les nouvelles techniques de transfert de risque et les évolutions récentes en matière de comptabilisation (normes IFRS).

Pour ce faire, la régulation Solvabilité II demande aux compagnies d'assurance de développer leur capital de solvabilité en utilisant **une approche reposant sur « 3 piliers »**, identique à celle de Bâle II (directive regroupant l'intégralité des exigences de fonds propres, applicable au secteur bancaire). La structure s'organise comme suit:

- *Pilier 1* : les exigences quantitatives (au minimum les dispositions concernant les exigences sur les provisions, sur les investissements effectués par l'assureur, et sur l'exigence en capital) ;
- *Pilier 2* : la gestion interne du risque (ou exigences qualitatives) et la surveillance prudentielle par les autorités de contrôle ;
- *Pilier 3* : la diffusion de l'information dans le but d'améliorer la discipline de marché.



Il s'agit de **dresser un tableau complet des risques encourus par la compagnie d'assurance**. En effet, le Pilier 1 vise à mesurer les risques de manière quantitative, et les risques ne pouvant être évalués de façon suffisante sous ce pilier relèveront du Pilier 2 qui permet une évaluation plus qualitative de la gestion des compagnies. Il ne s'agit donc plus pour les sociétés de devoir simplement satisfaire à un niveau de marge de solvabilité. Il est aussi nécessaire de démontrer aux autorités de contrôle une gestion des risques qui soit efficace.

Solvabilité II permettra donc de **faire un état des lieux de la probabilité de défaillance de la compagnie dans son ensemble**, en prenant en considération les fonds propres économiques de la société dans sa globalité.

Les exigences de fonds propres seront d'ailleurs réalisées à deux niveaux :

- l'exigence minimale de capital (Minimum Capital Requirement, MCR),
- l'exigence de capital de solvabilité fondée sur les fonds propres économiques requis en fonction d'une probabilité de faillite donnée (Solvency Capital Requirement, SCR)

Le MCR correspond, selon le CECAPP (Comité Européen des Contrôleurs des Assurances et des Pensions Professionnelles), « au niveau de fonds propres en dessous duquel les activités d'une entreprise d'assurance présentent un risque inacceptable pour les preneurs d'assurance ». Si les fonds propres disponibles d'une entreprise tombent en dessous du MCR, le contrôle effectue une intervention « de dernier ressort », ce qui amènera sans doute à un transfert du portefeuille et au retrait de l'agrément de l'opérateur.

Le SCR désigne « le niveau de capital permettant à une entreprise d'assurance d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de donner aux preneurs d'assurance l'assurance raisonnable que les versements seront effectués à leur échéance. Elle doit correspondre aux fonds propres requis pour remplir toutes les obligations à un horizon temporel donné en fonction d'un niveau de confiance défini ». Tous les risques quantifiables auxquels un assureur est confronté doivent donc être intégrés dans le calcul. Ce calcul reposera sur une modélisation des risques et de leurs corrélations, en fonction des données tirées du bilan qui reflètent la valeur économique de l'assureur.

Le niveau du SCR sera calculé au moyen :

- soit d'une **formule standard** (Approche Standard), assez simple et applicable à toutes les compagnies ;
- soit d'un **modèle interne** développé par la compagnie et validé par les autorités de contrôle;
- soit d'une **combinaison des deux** (utilisation de l'Approche Standard pour certains risques et de modèles internes partiels pour d'autres).

Notons qu'entre les deux niveaux d'exigences en fonds propres, l'intervention du contrôle sera proportionnelle au niveau de capitalisation de la compagnie selon les modalités définies sous le Pilier 2.

Le projet Solvabilité II, dont l'échéance est prévu pour 2010 (selon le calendrier de la Commission), crée donc **un cadre prudentiel plus adapté aux risques réels pesant sur les compagnies, bien que beaucoup de points pratiques restent encore à définir**. Il conduit en outre à un usage efficient du capital, en incitant les entreprises à mieux connaître et gérer leurs risques suivant les dispositions de l'IAIS (International Association of Insurance Supervisors). Ceci impose notamment de grandes responsabilités aux dirigeants des compagnies en matière de gestion du risque, qui doivent disposer d'outils capables de contrôler les processus de connaissance et de gestion des risques.

## **4. Conclusion**

Afin de fournir des informations cohérentes concernant la santé et la performance d'une compagnie d'assurance, il faut utiliser des approches qui soient conformes avec les principes de la réglementation, qui soient fondées sur la réalité des aspects économiques et financiers, et qui soient capables de tenir compte de l'ensemble des risques auxquels est confrontée la société.

Mais comment évaluer la santé financière d'une compagnie d'assurance et retracer une image fidèle de la société?

Pour mesurer la performance et la création de valeur, nous nous appuyerons sur le concept de **Valeur intrinsèque ou d'Embedded Value (EV)**. Il s'agit de la valeur actuelle des profits futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures. Autrement dit, l'EV correspond au prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie.

Pour mesurer l'exposition au risque, nous considérerons le **Capital Economique (EC)** qui est défini par le SOA (Society of Actuaries) comme le « montant de capital suffisant pour couvrir les pertes potentielles à un niveau de risque toléré et pour un horizon de temps spécifié ». Comme nous le verrons, l'EC est aux actionnaires ce que le SCR est aux superviseurs.

Nous allons d'abord étudier chacune des deux notions séparément. Puis, nous les confronterons dans une application sur un portefeuille type de contrats d'épargne en euros, de sorte à voir s'il existe une certaine convergence, étant donné que les calculs sont souvent en pratique effectués au sein des compagnies dans des services différents.

Mais avant cela, nous allons décrire dans la partie suivante les éléments et les mécanismes qui caractérisent un contrat d'épargne.



## PARTIE II : LE CONTRAT D'EPARGNE

Épargner revient tout simplement à placer de l'argent qui devient indisponible pour les paiements immédiats et la consommation courante. Le placement peut être réalisé sur des produits proposés par des établissements financiers (notamment pour l'épargne réglementée) ou des assureurs. Leur rendement varie en fonction du type de placement, de la durée d'immobilisation et du taux de rémunération fixé par le contrat.

Les produits d'épargne sont la réponse à différents besoins:

- épargner sans objectif précis ou par pure précaution,
- financer le court et le moyen terme,
- valoriser ou faire fructifier un capital,
- constituer un revenu complémentaire en vue d'une retraite,
- transmettre un capital.

Afin que chacun trouve le produit en adéquation avec ses motivations, il existe une gamme de produits très diversifiée :

- *Les produits à court terme* où les sommes sont facilement mobilisables, les risques limités et les rendements assez bas, tels que :
  - les livrets d'épargne,
  - le Codévi,
  - le livret d'Epargne Populaire (LEP),
  - certains SICAV et Fonds Communs de Placements (FCP) ;
- *Les produits à long terme* où le capital reste bloqué plusieurs années, par exemple :
  - le Plan d'Epargne Populaire (PEP),
  - le Plan d'Epargne en Actions (PEA),
  - les contrats d'assurance vie ;
- *Les produits liés à l'immobilier* où le rendement n'est pas très important mais qui offrent des conditions d'emprunt avantageuses (notamment pour les taux), comme :
  - le Compte Epargne Logement (CEL),
  - le Plan Epargne Logement (PEL).

Nous allons nous intéresser uniquement **aux contrats d'épargne dans le cadre de l'assurance vie**. Nous allons en particulier étudier ses caractéristiques et les mécanismes comptables mis en jeu.

## **1. Fonctionnement du contrat d'épargne**

### **1.1. Le cadre de l'assurance vie**

Le contrat d'épargne dans le cadre d'une assurance vie ressemble à un placement financier et est proche d'un contrat de capitalisation. Mais il reste malgré tout un contrat d'assurance, c'est-à-dire **un contrat aléatoire** (par rapport à la durée de la vie humaine).

L'assurance vie repose sur la technique de **capitalisation viagère**. Cela signifie que pendant la vie du contrat, le souscripteur ne reçoit pas de revenus, mis à part le versement éventuel des intérêts et de la participation aux bénéfices. Les produits des primes versées (nettes de frais) sont ainsi immédiatement réinvesties et incorporées à l'épargne, devenant ainsi eux-mêmes productifs d'intérêts. Il ne s'agit pourtant pas d'un placement purement financier puisque il fait intervenir à la fois un paramètre viager (le taux tiré de la table de mortalité) et un paramètre financier (le taux d'intérêt technique).

En effet, les prestations sont conditionnées par la réalisation de certains événements comme le décès de l'assuré pendant la durée du contrat, la survie de la personne assurée à la date d'échéance ou encore par le rachat du contrat. Il est donc nécessaire pour la modélisation d'un contrat d'avoir à disposition des tables de mortalités (i.e. pour chaque sexe) indiquant le nombre de vivants à chaque âge de la vie humaine, et par ailleurs des lois de rachats selon le type de contrat.

L'aspect financier de l'assurance vie réside quant à lui dans la capitalisation financière, caractérisée par l'utilisation du taux d'intérêt technique, dont les conditions sont fixées par le Code des assurances (article A.132-1). De manière générale, les tarifs pratiqués doivent être établis sur un taux au plus égal à :

- 75 % du TME pour les contrats dont la durée maximale est inférieure à 8 ans,
- min (3.5 % ; 60 % TME) pour les contrats dont la durée est supérieure à 8 ans.

Le TME désigne le taux moyen des emprunts d'Etat (calculé sur une base semestrielle) qui est « le plus élevé des deux taux suivants : taux à l'émission et taux de rendement sur le marché secondaire ».

### **1.2. Les différents types de support**

#### **■ Les contrats en euros**

Ce sont des contrats avec un risque minimal puisqu'ils sont majoritairement investis en obligations. Ils ont donc un rendement lié aux taux obligataires et sont ainsi peu sensibles aux aléas de la Bourse. Ils présentent de plus une double garantie :

- un **rendement minimal garanti** dont le montant ne peut légalement dépasser un plafond fixé par le Code des assurances (article A.132-1), assorti d'une participation aux bénéfices de l'entreprise d'assurance ;
- un **effet cliquet**, qui permet au souscripteur de conserver définitivement les intérêts annuels crédités sur le contrat.

### ■ Les contrats en unités de compte

Les contrats en unités de compte, appelés aussi **contrats à capital variable**, sont des contrats qui n'ont pas comme référence une monnaie mais des unités de compte, à savoir des parts sociales ou des actions, des valeurs mobilières ou immobilières (SICAV, actions, obligations, OPCVM, SCI, SCPI). La liste des supports admissibles est détaillée aux articles L.131-1 et R.131-1 du Code des assurances.

Ces contrats permettent un investissement diversifié sur les marchés financiers et immobiliers. Ils sont choisis par des investisseurs à long terme qui sont prêts à accepter les risques inhérents aux fluctuations des marchés financiers pour obtenir une espérance de gain plus importante qu'un contrat classique de type obligataire.

### ■ Les nouveaux contrats investis en actions

Ce sont des nouveaux contrats, dits « NSK », qui ont été créés par la loi de finances pour 2005 afin de favoriser l'investissement des particuliers vers les entreprises innovantes et non cotées en Bourse. Ils remplacent les anciens contrats dits « DSK » qui ne peuvent plus être souscrits mais seulement alimentés par leurs détenteurs. Ces contrats en unités de compte majoritairement investis en actions bénéficiaient d'une fiscalité spécifique dans la mesure où ils respectaient des contraintes précises d'investissement (au minimum 50 % d'actions émises par des sociétés ayant leur siège dans un Etat de l'Union européenne, dont 5 % de placements "à risques").

Ces nouveaux contrats bénéficient de ces mêmes dispositions fiscales, à savoir, au-delà de huit années de détention, une exonération de l'impôt de 7.5 % applicable aux contrats d'assurance vie (suite à un abattement annuel de 4 600 € pour les contribuables célibataires et de 9 200 € pour les contribuables mariés).

### ■ Les contrats multisupports

Dans ce type de contrat, **les investissements se font sur plusieurs supports ou fonds** (en euros et/ou en unités de compte). Suivant les contrats, la répartition de l'investissement est libre, imposée ou préétablie. Ces contrats bénéficient de plus d'une **possibilité d'arbitrage** entre les supports en unités de compte et les supports en euros (l'arbitrage est une opération qui consiste à modifier la répartition du capital entre les différents supports du contrat).

Il est ainsi possible de répartir ses investissements entre des supports plus ou moins risqués. Plusieurs profils de gestion sont d'ailleurs souvent proposés : prudent, dynamique, équilibré. Le souscripteur confie alors aux experts financiers de l'organisme gestionnaire le soin de gérer ses versements selon le profil choisi.

## **1.3. Caractéristiques du contrat d'épargne**

Il existe de nombreux contrats d'assurance vie permettant la constitution d'une épargne. Le souscripteur (qui acquiert automatiquement la qualité d'assuré et de bénéficiaire en cas de vie) verse des primes qui, nettes de chargement, sont capitalisées au taux minimum garanti pour constituer le capital garanti. Celui-ci est en outre revalorisé en tenant compte de la participation aux bénéfices. Il faut ajouter qu'en cas de décès avant terme, le capital est versé au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) dans le contrat (selon la clause bénéficiaire).

### ■ Cotisations

Les cotisations peuvent être effectuées sous différentes formes :

- les contrats à **versements périodiques programmés** : un calendrier de versements (mensuels, trimestriels, annuels...) est mis en place avec la plupart du temps la possibilité d'effectuer des versements complémentaires ; il s'agit d'une facilité de versement et pas d'un engagement ferme, puisque l'assuré peut à tout moment interrompre les versements ;
- les contrats à **versements libres** : il n'y a pas de calendrier de versements mais l'assuré est souvent soumis à un montant minimal de cotisations (à la souscription par exemple) ;
- les contrats à **cotisation unique** : le versement a lieu au moment de la souscription.

L'assureur ne peut néanmoins pas exiger le paiement des primes (article L.132-20 du Code des assurances). Le non-paiement entraîne : soit la réduction du contrat (poursuite du contrat, mais diminution du montant des prestations garanties), soit la résiliation pure et simple du contrat.

### ■ Chargements, frais, taxes

#### ■ Les frais liés aux contrats d'épargne

Ils peuvent être très différents d'une compagnie à l'autre. Il existe notamment (liste non exhaustive) :

- les frais d'**entrée** ou d'**acquisition** : il peut s'agir d'un pourcentage prélevé à l'occasion des versements effectués ou d'une somme forfaitaire par police ;
- les frais d'**administration** ;
- les frais de **gestion** liés au placement des fonds: ils sont prélevés sur l'épargne (i.e. sur les provisions mathématiques ou l'encours), lors de la capitalisation annuelle, sur les intérêts générés par les fonds ;
- les frais de **commission** liés aux réseaux de distribution ;
- les frais d'**arbitrage** (cas des contrats multisupports) : ils sont calculés sur les sommes transférées en cas de changement de supports,
- les frais d'**entrée inhérents à certains supports** (SICAV, par exemple).

#### ■ Cotisations sociales

Elles sont **différentes suivant le type de contrat souscrit**.

En effet, pour les contrats monosupports en euro, à chaque capitalisation annuelle, les prélèvements sociaux sont appliqués au taux en vigueur sur les rendements de l'investissement crédité aux assurés. Lors d'un rachat total en cours d'année, des intérêts pour cette dernière année sont calculés et donne aussi lieu à des cotisations sociales.

Dans le cas des contrats multisupports, les cotisations sociales ne sont prélevées qu'en cas de retrait partiel ou total. L'assiette de calcul correspond alors aux revenus issus du contrat (intérêts et plus-values).

Par contre, **aucun prélèvement social n'est effectué lors du décès du souscripteur**.

Les cotisations sociales annuelles viennent ainsi diminuer la participation bénéficiaire destinée aux assurés, ce qui a un impact sur les provisions mathématiques.

Notons que **le taux en vigueur au 1<sup>er</sup> janvier 2006 est de 11%** soit :

- 8.2% pour la CSG (Contribution Sociale Généralisée) ;
- 0.5% pour la CRDS (Contribution pour le Remboursement de la Dette Sociale) ;
- 2% pour le prélèvement social ;
- 0.3% de contribution additionnelle.

■ Impôt sur les sociétés

L'impôt sur les sociétés, qui concerne de plein droit les sociétés de capitaux ainsi que certaines associations et des organismes publics, se calcule **à partir du résultat technique avant impôt**. Il est imputé en même temps que le résultat, c'est-à-dire généralement en fin d'année.

Le taux d'imposition en vigueur est de 33.34 % (depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1993). Mais en général, pour tenir compte du fait que certaines opérations ne sont pas taxées au même taux et que des changements de taxation peuvent intervenir dans le temps, nous appliquons **un taux d'imposition « biaisée » égal à 34.43%**.

Enfin, l'impôt sur les sociétés ne fait pas partie du compte de résultat utilisé pour calculer la participation aux bénéfices versée aux assurés.

■ **Les possibilités de rachat ou d'avance en cours de contrat**

En cas de besoin d'argent avant le terme du contrat, il est possible de demander un rachat partiel ou total, dans la mesure où le contrat comporte une valeur de rachat (article L.132-21 du Code des assurances). Il peut toutefois exister des **pénalités** (exprimés en pourcentages des provisions mathématiques) plus ou moins importantes selon la durée de vie résiduelle du contrat. Cette indemnité destinée à l'assureur ne peut cependant pas dépasser 5% de la provision mathématique et devient nulle à l'issue d'une période de dix ans à compter de la date d'effet du contrat (article R.331-5 du Code des assurances).

■ Rachat partiel

Il correspond au versement par l'assureur d'une partie de la provision mathématique. L'autre partie reste investie dans le contrat.

■ Rachat total

Il met fin au contrat et permet à l'assuré de récupérer la valeur de son fond avant le terme du contrat.

■ Avance

Elle permet au souscripteur d'obtenir une somme d'argent sans diminuer l'épargne du contrat. L'assureur accepte d'avancer des fonds sous forme de prêt qui devra être remboursé par l'assuré. La somme susceptible d'être empruntée est plafonnée à un pourcentage de la provision mathématique. L'avance est consentie moyennant un taux d'intérêt et pour un montant variable selon le contrat souscrit.

En cas d'avance sur un contrat, les versements effectués par l'assuré viennent d'abord rembourser l'avance avant de pouvoir être ajoutés à la provision mathématique.

Notons qu'une avance ne s'octroie pas sur un contrat à primes périodiques.

### ■ Garanties complémentaires en cas de décès

Certains contrats offrent la possibilité d'opter pour **une garantie décès destinée à pallier les conséquences d'un décès qui surviendrait dans un contexte financier défavorable**. Ce type de garantie permet aux bénéficiaires du contrat de récupérer l'intégralité des versements effectués par le souscripteur, déduction faite des éventuels rachats partiels. Différentes garanties existent, telles que:

- la **garantie majorée** : en cas de décès du souscripteur, la garantie majorée permet de disposer d'un capital au moins égal à un montant fixé à la souscription;
- la **garantie cliquet** : ceci permet à l'assuré de bénéficier d'un plancher (en rapport avec l'historique des valeurs atteintes, par exemple le montant maximal atteint par l'épargne constituée) en dessous duquel le montant garanti en cas de décès ne peut descendre, quelque soient les évolutions ultérieures des marchés financiers ;
- la **garantie plancher** sur les contrats en unités de compte: elle permet au bénéficiaire de recevoir avec certitude dans le cas du décès de l'assuré un montant minimal fixé à la souscription du contrat (appelé le plancher), quelle que soit la valeur des unités de compte à la date de survenance ouvrant droit à la prestation; le plus souvent, le capital garanti minimal correspond au total des cotisations investies ou au montant de l'épargne acquise si celle-ci est supérieure.

### ■ La revalorisation du contrat

#### ■ Taux minimum garanti

Lors de la souscription d'un contrat d'épargne, **l'assureur s'engage à garantir un taux de rémunération de l'épargne**. Ce taux minimum garanti est défini par le Code des assurances dans l'article A.132-3. Il est fixé à la souscription pour toute la durée du contrat et stipulé dans les conditions générales du contrat.

Le taux minimum garanti peut être fixé annuellement ou semestriellement pour l'année suivante. Dans ce cas, « il ne peut excéder alors 85 p. 100 de la moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise calculés pour les deux derniers exercices ».

D'autre part, le taux peut être variable « en fonction d'une référence fournie par un marché réglementé et en fonctionnement régulier de valeurs mobilières ou de titres admis en représentation des engagements réglementés des entreprises d'assurance ». Mais la garantie de ce taux n'est possible que pendant une durée maximale de 8 ans.

#### ■ Participation aux bénéfices

D'après l'article L.331-3 du Code des assurances, « les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent, dans les conditions fixées par arrêté du ministre de l'économie et des finances.» Ces profits sont distribués à l'assuré par l'intermédiaire de la participation aux bénéfices.

La réglementation fixe le montant minimal de distribution de la participation aux bénéfices (article A.331-4 du Code des assurances). Il est déterminé globalement **à partir d'un compte de participation aux résultats**. Ce dernier fait intervenir deux autres comptes :

- un compte technique,
- un compte financier.

Le **compte technique** comprend principalement :

---

Primes versées par les assurés
+ Intérêts techniques (en fonction du taux minimum garanti)
- Prestations garanties (rachats, termes, décès)
- Charges de provision
+ Reprises de provision
- Frais de gestion et commissions
+ Participation incorporée aux provisions
<b>= Solde du compte technique</b>

---

Le **compte financier** est précisé dans l'article A.331-6 du Code des assurances. Il se présente de la façon suivante :

---

Produits financiers
- Part des résultats que l'entreprise a dû affecter aux fonds propres pour satisfaire au montant minimal réglementaire de la marge de solvabilité
+ Intérêts techniques
<b>= Solde du compte financier</b>

---

Les produits financiers dont il est question ici se calculent en multipliant l'encours moyen des provisions techniques de l'exercice par le taux de rendement réel des actifs (article A.331-7 du Code des assurances).

Le taux de rendement réel des actifs est égal à (article A.331-7 du Code des assurances):

$$\text{Taux de rendement réel des actifs} = \frac{\text{Produits de placements nets}}{\text{Montant de placements}}$$

Où :

---

<b>PRODUITS DE PLACEMENTS NETS</b>	= Produits de placement - Charges de placement + Plus-values sur cessions d'éléments d'actifs - Moins-values sur cession d'éléments d'actifs
<b>MONTANT DE PLACEMENTS</b>	= Montant moyen des placements au cours de l'exercice + Autres éléments d'actifs pouvant être admis en représentation des provisions techniques - Valeurs remises par le réassureur

---

L'ensemble de ces données nous permet alors d'établir le compte de participation aux résultats qui met en évidence le montant minimal de la participation bénéficiaire à attribuer aux assurés:

---

85 % du solde du compte financier
+ 90 % du solde du compte technique
- Intérêts techniques
- Participation incorporée aux provisions
- Solde de réassurance
<b>= Participation bénéficiaire</b>

---

Ainsi, les assureurs sont dans l'obligation de distribuer, au minimum :

- 85 % des bénéfices financiers,
- 90 % des gains techniques.

Dans la pratique, la participation aux bénéficiaires peut être effectuée (article A.331-9 du Code des assurances):

- par un versement en espèces (peu pratiqué),
- par une incorporation directe aux provisions mathématiques,
- par une affectation partielle ou totale à la provision pour participation aux excédents.

Il est à noter que les sommes portées à la provision pour participation doivent être affectées à la provision mathématique ou versées aux assurés dans un délai de huit ans.

## **2. Dispositions réglementaires et comptabilisation**

Nous venons de présenter de manière globale l'ensemble des éléments qui caractérisent un contrat d'épargne. Il s'agit à présent de comprendre le cadre réglementaire qui s'applique à ce genre de contrats. Nous allons voir les principales dispositions auxquelles sont soumises les compagnies d'assurance proposant des contrats d'épargne, notamment en ce qui concerne la marge de solvabilité et la composition des actifs. Nous décrirons ensuite les mécanismes qui jouent un rôle lors de la comptabilisation, en particulier pour le provisionnement. Ceci nous permettra enfin d'établir un compte de résultat technique simplifié.

### **2.1. Marge de solvabilité**

Afin de garantir le respect des engagements de l'assureur et de protéger les intérêts des assurés, **la réglementation impose aux entreprises pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation, de disposer à tout moment d'une marge de solvabilité suffisante.** L'objectif est d'amortir les effets d'éventuelles variations économiques défavorables liées, par exemple, aux risques de placements ou à la mortalité.

L'article R.334-13 du Code des assurances définit la marge de solvabilité réglementaire ou l'exigence minimale de marge de solvabilité (suivant les dispositions du système de régulation Solvabilité I). Elle correspond **au seuil en dessous duquel la richesse de la compagnie ne doit pas descendre** (nous entendons ici par richesse la situation nette comptable et les plus values latentes).

En assurance vie, ce montant minimal est en relation avec l'activité de la société. Nous distinguons :

- le risque lié aux garanties décès (reflété par les capitaux garantis en cas de décès),
- l'ensemble des autres risques (reflétés par les provisions techniques).

L'**exigence minimale de solvabilité** se calcule donc de la manière suivante :

---

$$\begin{aligned} & 4 \% \text{ des provisions nettes de réassurance, ramené à } 1,00\% \text{ si le risque de placement est transféré à} \\ & \quad \text{l'adhérent (contrats en Unités de Compte, sans garantie plancher), en intégrant un ratio destiné à} \\ & \quad \text{tenir compte forfaitairement de la réassurance} \\ & + 0,3 \% \text{ des capitaux sous risque non négatifs, net de réassurance} \\ \hline & = \text{ Marge de solvabilité} \end{aligned}$$

---

Les capitaux sous risque désignent les capitaux décès, déduction faite de la provision mathématique du risque principal (provisions mathématiques et provisions de gestion).



## **2.2. Composition de l'actif**

Les sociétés d'assurance détiennent des actifs d'un montant au moins équivalent aux engagements réglementés (i.e. les provisions techniques). Ces actifs admis en représentation des engagements réglementés sont soumis à **certaines contraintes légales** (articles R.332-1 et R.332-2 du Code des assurances). Les placements doivent:

- être choisis dans une liste détaillée par la réglementation,
- respecter les règles de localisation géographique et d'adossment,
- respecter les règles de limitation, de dispersion, de diversification,
- respecter les règles d'évaluation,
- être soumis à la surveillance permanente de l'autorité de contrôle.

Le but est de **satisfaire différents principes** répondant aux objectifs suivants :

- la suffisance,
- la rentabilité,
- la diversification,
- la sécurité,
- la congruence (l'unité monétaire de l'actif doit être équivalente à l'unité monétaire de l'engagement qu'il sert à couvrir),
- la liquidité (les actifs doivent être mobilisables à très brève échéance si nécessaire).

Un état récapitulatif des placements admis en couverture est disponible en *Annexe 2*.

## **2.3. Provisionnement**

La directive européenne de 1992 pose le principe selon lequel les entreprises pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation « constituent des provisions techniques dont le niveau leur permet d'assurer le règlement intégral de leurs engagements ». Les provisions techniques doivent donc être suffisantes (en volume) pour faire face au paiement de tous les engagements qu'elles représentent et ainsi garantir la protection des assurés.

**Les provisions techniques font partie des engagements réglementés** (tout comme le dépôt de garantie, les réserves d'amortissement, les dettes privilégiées et le passif social) et se distinguent par conséquent des fonds propres (somme du capital social, du résultat non distribué de l'exercice et des réserves). En tant que charge comptable, elles apparaissent au passif du Bilan.

L'article R.331-3 du Code des assurances énumère l'ensemble des provisions techniques en assurance vie.

### **■ Provision mathématique (PM)**

Dans les contrats traditionnels d'assurance, la PM est estimée suivant une vision prospective, en application des principes de prudence propres à l'activité d'assurance : nous n'examinons que ce qui se passe après l'époque d'évaluation, anticipant l'ensemble des phénomènes ayant un impact sur les flux, notamment en terme de revalorisation des engagements (l'inflation par exemple) ou de modification des fréquences de survenance des sinistres. La PM correspond alors à la différence entre d'une part la valeur actuelle probable des engagements pris par l'assureur (prestation due) et d'autre part, la valeur actuelle probable des engagements pris par l'assuré (paiement des cotisations).

Dans un contrat d'épargne, nous adoptons **une vision rétrospective**. En effet, la PM correspond à « l'encours », à savoir l'épargne acquise par les assurés qui est revalorisée chaque année

suivant les dispositions contractuelles. De ce fait, la variation de la PM est égale à la somme des primes nettes versées, des intérêts, de la participation aux bénéfices, le tout diminué des chargements et des prestations versés aux assurés (en rapport avec les rachats, les prestations décès et les contrat arrivant à maturité).

■ **Provision pour participation aux excédents (PPE) ou aussi appelée provision pour participation aux bénéfices (PPB)**

Comme nous l'avons vu, les entreprises d'assurance font participer leurs assurés et les bénéficiaires désignés aux bénéfices techniques et financiers. La provision pour participation aux excédents (PPE) est la provision destinée à prendre en charge le montant des participations aux résultats attribués aux assurés lorsque ces excédents ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits. La participation aux résultats concerne :

- les intérêts techniques en fonction du taux minimum garanti,
- la participation aux bénéfices.

Toutefois, toute somme affectée à la PPE devra être affectée à la provision mathématique ou versée aux assurés dans un délai de huit ans. La PPE fonctionne en fait comme une réserve de participation qui permet soit de lisser les rendements des contrats et d'offrir une rémunération stable, soit de pallier les résultats d'une année difficile.

■ **Provision globale de gestion (PGG)**

Elle est destinée à couvrir des charges de gestion future non couvertes par des chargements sur primes ou par des prélèvements sur produits financiers. Elle répond au principe de prudence selon lequel les pertes futures doivent être prises en compte et estimées dès qu'elles sont connues, afin que les coûts futurs des contrats réalisés ne pèsent pas sur les nouvelles générations de contrat (A.331-1-1 du Code des assurances).

■ **Provisions concernant la gestion des placements**

■ **Réserve de capitalisation (RdC)**

Elle permet de **se parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu**. Elle n'est impactée qu'en cas de cession des parts de valeurs amortissables réglementées à l'exception des obligations à taux variable (article R.332-2 du Code des assurances). Ce sont surtout des placements obligataires à taux fixe qui sont concernés.

L'objectif est d'égaliser les rendements suivants :

- le rendement actuariel des titres après prélèvement ou versement à la RdC,
- le rendement attendu lors de l'acquisition des titres.

Les opérations concernées sont les ventes et les conversions de titres.

Ainsi, les plus-values réalisées sont affectées à la RdC et les moins-values lui sont imputées. Notons que les plus-values ou les moins-values s'apprécient sur la différence entre le prix de cession (prix de vente net de frais ou valeur de conversion selon le cas) et la valeur actuelle des flux futurs. Cette valeur actuelle est à calculer au jour de la vente du titre. Elle est obtenue par actualisation des flux futurs (coupons et remboursement du principal à l'échéance), au taux actuariel constaté lors de l'acquisition du titre (taux qui égalise au moment de l'achat du titre, le prix d'acquisition et la valeur obtenue par l'actualisation de l'ensemble des flux à venir relatifs à ce titre).

Cette réserve est donc **destinée à lisser les résultats financiers des placements en cas de variation des taux**. Elle fait de plus **partie des éléments constitutifs de la marge de solvabilité**.

■ Provision pour aléas financiers (PAF)

Elle est à constituer pour compenser une éventuelle baisse de rendement des actifs par rapport à des engagements de taux garantis sur des contrats autres qu'en unités de compte. La méthode de provisionnement est décrite dans l'article A.331-2 du Code des assurances. En effet, si lors de l'inventaire, nous avons:

$$80\% \text{ taux de rendement réel des actifs} < \frac{\text{intérêts techniques} + \text{minimum garanti de participation aux excédents}}{\text{montant moyen des PM constituées}}$$

et si,

$$\text{PM recalculées avec } 80\% \text{ du taux de rendement des actifs} > \text{PM à l'inventaire,}$$

alors une dotation est affectée à la PAF.

Le montant de la dotation est égale à la différence entre :

- les PM recalculées avec 80 % du taux de rendement réel des actifs et
- les PM à l'inventaire.

Cette provision est reprise dans les comptes de l'entreprise à l'inventaire suivant.

Le taux de rendement réel des actifs est calculé conformément à l'article A.331-7 du Code des assurances (voir la partie concernant la revalorisation du contrat d'épargne et la détermination de la participation bénéficiaire).

■ Provision pour risques d'exigibilité (PRE)

Cette provision est à constituer si l'inégalité suivante est réalisée :

$$\begin{array}{l} \text{Valeur de réalisation globale des placements au Bilan} \\ \text{(actions et immobilier)} \end{array} < \begin{array}{l} \text{Valeur comptable globale des} \\ \text{placements au Bilan} \end{array}$$

La provision à constituer est égale à la différence constatée entre les deux évaluations et est destinée à faire face à une insuffisance de liquidité des placements, notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres (article R.331-5-1 du Code des assurances).

■ Provision pour dépréciation durable (PDD)

Il s'agit d'une méthode propre à l'assurance française, dérogeant du droit commun: les valeurs amortissables sont supposées pouvoir être cédées rapidement, ce qui implique un certain provisionnement des moins-values. L'évaluation de la provision pour dépréciation à caractère durable se fait ligne à ligne et peut prendre en compte, par exemple, l'évolution de marché ou l'analyse de la structure financière de l'émetteur du titre.

Ces provisions pour dépréciations durables ne sont cependant pas définies clairement par la réglementation et sont appliquées en partie à l'appréciation de l'assureur. Ceci résulte du caractère subjectif lié au seuil de dépréciation et au montant à provisionner.

■ Provision de la garantie plancher (PGP)

Dans un contrat en unités de compte, l'assureur ne supporte aucun risque financier. Toutefois, de nombreuses garanties (en particulier la garantie plancher) sont intégrées aux contrats pour les rendre notamment plus attractifs. Exprimées en euros, ces garanties font supporter un risque à l'assureur, qu'il convient d'évaluer et de provisionner, dans le cadre de l'application des normes IFRS.

La garantie plancher (capital minimum garanti dans le cas des contrats en unités de compte) a la particularité de faire porter aux assureurs directement au passif de leur Bilan deux types de risques : le risque traditionnel d'assurance et un risque financier lié à la volatilité des unités de compte. Le capital sous risque dépend en effet de leur valeur de marché. L'assureur doit donc constituer une provision pour garantie plancher dans le but d'assurer le règlement de ses engagements, en tenant compte de l'aléa financier que la garantie comporte.

## 2.4. Compte de résultat

Le compte de résultat fait partie, de même que le Bilan et des diverses annexes comptables, des **documents comptables de synthèse** qui sont destinés à l'information financière des personnes, tant internes à l'entreprise (direction, personnel...) qu'externes à celle-ci, mais ayant une situation d'ayant droit (fisc, actionnaires, banquiers...).

Le compte de résultat présente sous la forme d'un tableau **l'ensemble des charges et des produits issus de l'activité de la société**. Il est établi pour une période donnée, dite exercice comptable, et permet de calculer le résultat net de l'exercice, qui peut être un bénéfice (les produits excèdent les charges) ou un déficit (les charges excèdent les produits). L'activité de l'assureur se résume donc de la manière suivante :

<b>COMPTE DE RESULTAT TECHNIQUE</b>	
<b>CHARGES</b>	<b>PRODUITS</b>
Prestations versées : rachats, termes, décès	Primes des assurés
Frais de gestion	Produits financiers
Commissions	
Cotisations sociales	
Intérêts versés	Intérêts techniques
Participation aux bénéfices versée	
Charges de provisions	Reprises de provisions
<b>Résultat (si négatif) avant impôt</b>	<b>Résultat (si positif) avant impôt</b>

## 3. Conclusion

Nous venons de présenter les caractéristiques et les principaux mécanismes qui interviennent dans un contrat d'épargne dans le cadre d'une assurance vie. Ceci nous sera utile par la suite lorsque nous essaierons, dans une application numérique, de rapprocher et de comparer les méthodes de calculs utilisées lors de la détermination d'une Valeur Intrinsèque et d'un Capital Economique. Leurs calculs s'effectuent à partir de simulations stochastiques. Nous allons donc à présent étudier les différentes approches qui peuvent être employées au cours d'une modélisation stochastique en assurance vie.

## PARTIE III : MODELISATION STOCHASTIQUE

Toute compagnie d'assurance doit **pouvoir évaluer au plus juste sa richesse propre**. Cela constitue un point fondamental dans le pilotage de la gestion, que ce soit au niveau de la compétitivité (améliorer et exploiter la création de la valeur) ou de la solvabilité (savoir si la richesse est suffisante pour assurer la survie de la société dans des circonstances défavorables ou si elle est en mesure de tenir ses engagements).

En assurance vie, les contrats peuvent être compliqués à modéliser car ce sont des contrats de longue durée qui dépendent souvent d'options cachées. Celles-ci représentent des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses contractuelles, afin de rendre les contrats plus souples et plus attractifs. Il peut notamment s'agir d'un taux minimum garanti, d'une participation bénéficiaire, d'une garantie de capital, d'une possibilité de rachat, etc. Ces options peuvent représenter une charge significative pour l'assureur et sont donc à prendre en compte lors de l'évaluation de la compagnie.

**Or, les méthodes déterministes d'évaluation ne sont pas adaptées pour tenir compte des risques financiers liés à ce genre d'options et de garanties** qui sont soit sous-évaluées, soit complètement ignorées. Par exemple, dans le cas d'un contrat d'épargne à taux minimum garanti, la garantie ne sera pas valorisée si l'unique taux de rendement moyen des actifs utilisé lors de la projection est toujours supérieur au taux minimum garanti. Pourtant, si le taux de rendement des actifs devient inférieur à ce taux minimum, l'assureur subit une charge effective supplémentaire diminuant ainsi son résultat.

**En fait, les options présentent un caractère volatil qu'il n'est pas possible de modéliser de façon satisfaisante en basant la projection sur un unique scénario financier.**

Par conséquent, si nous voulons obtenir une évaluation juste et cohérente en fonction de la réelle exposition au risque, comme le souhaite en particulier les autorités de contrôle, il faut forcément passer par des projections sur la base d'une approche stochastique.

Un modèle stochastique est un modèle qui vise à prendre en compte la volatilité des phénomènes considérés dans ses résultats, comme par exemple, l'évolution possible du marché des actifs au cours du temps. Pour ce faire, de nombreux scénarios financiers sont tirés aléatoirement (correspondant à autant d'états du marché) et les risques sont alors évalués statistiquement.

D'une manière générale, toute modélisation stochastique d'une activité d'assurance comprend un modèle d'actif, un modèle de passif et un modèle d'interactions entre actifs et passifs intégrant les risques de placements et de comportements (stratégie d'investissement, politique de distribution des dividendes, comportement des assurés, etc.). L'idée est d'admettre que **les variables économiques et financières** (taux, cours des actions, inflation, etc.) **peuvent être représentées par des processus stochastiques**. Nous définissons alors une densité de probabilité conditionnelle (dépendant du temps et de la valeur initiale) pour différentes variables du modèle.

Divers modèles sont envisageables. Le choix dépendra de la situation à laquelle nous sommes confrontés, et des objectifs visés : détermination du Capital Economique, évaluation du portefeuille ou d'une activité, tarification, provisionnement, etc.

Notons que le développement et l'exploitation d'un modèle demandent beaucoup de technicités et nécessitent parfois la simulation d'un nombre très important de scénarios pour obtenir la précision requise. La performance de la modélisation est fonction de la puissance informatique disponible. Il faut ainsi trouver un bon compromis entre la simplicité de description (de sorte à optimiser le traitement informatique) et la fidélité du processus modélisé.

Nous allons voir **les deux approches qui sont rencontrées dans le domaine de l'assurance vie**. En théorie, **les deux raisonnements sont cohérents et devraient conduire à des résultats similaires**. Il s'agit de:

- *l'approche Monde Réel ou Real World* : les risques sont calibrés sur le prix de marché des flux de trésorerie versés aux actionnaires et aux créanciers ;
- *l'approche Market-Consistent* : les risques sont calibrés à partir d'une évaluation de marché des flux issus des produits.

Nous présenterons ensuite la manière dont s'effectue la modélisation en pratique grâce à l'utilisation de **la méthode de Monte Carlo**. Cette dernière permet d'évaluer les lois de probabilités associées aux résultats de l'assurance vie et de fournir une mesure cohérente des risques, en partant du principe que les scénarios tirés aléatoirement sont équiprobables.

## **1. L'approche Monde Réel ou Real World**

Cette modélisation stochastique a pour objectif de mettre en place **un modèle d'actifs qui représente fidèlement la distribution des rendements d'actifs**, d'où le terme de monde réel. Le modèle doit être cohérent avec l'état existant de l'économie. Il doit prendre en compte les corrélations entre les différentes classes d'actifs.

Concrètement, la méthode permet d'évaluer les flux futurs de la manière suivante :

- simuler différentes trajectoires des actifs selon le modèle considéré,
- calculer le flux obtenu pour chacun des scénarios,
- actualiser l'ensemble des flux suivant un unique taux d'actualisation,
- déterminer l'espérance de ces flux actualisés (considérée comme l'estimation de la valeur actuelle du flux à évaluer).

Les scénarios sont calibrés suivant l'historique des données observables. Le taux d'actualisation doit refléter le profil de risque réel lié à la compagnie et sa relation avec le marché financier. Il est donc évalué à partir de la vision de marché du risque et s'obtient en ajoutant au taux sans risque (taux des emprunts d'état) **une prime de risque** qui correspond au revenu espéré supplémentaire exigé par les investisseurs lors de l'achat d'actions. Tout le problème réside dans la détermination de ce taux d'actualisation.

Dans l'approche Monde Réel, nous appliquons une méthodologie qui consiste à égaliser le taux d'actualisation au WACC (coût moyen pondéré du capital) de la compagnie calculé sur la base du MEDAF (Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers).

## 1.1. Coût Moyen Pondéré du Capital ou Weight Average Cost of Capital (WACC)

La détermination du taux d'actualisation a comme point de départ le **coût du capital de la compagnie**. Il s'agit donc de calculer le WACC défini suivant cette formule :

$$\text{WACC} = \frac{D}{V} r_d + \frac{E}{V} r_e$$

Où :  $\frac{D}{V}$  = proportion de la compagnie financée par les emprunts,

$\frac{E}{V}$  = proportion de la compagnie financée par investissement,

$V$  = valeur financée de la compagnie ( $V = D + E$ ),

$r_d$  = taux représentant le coût de la dette, net d'impôts,

$r_e$  = taux représentant le coût de l'investissement.

Le paramètre  $r_e$  est estimé en utilisant la formule d'équilibre du MEDAF plus connue sous son nom anglais CAPM (Capital Asset Pricing Model).

### ■ Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers ou Capital Asset Pricing Model

#### ■ Présentation du modèle

Pour pouvoir appliquer la formule du MEDAF, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

- tous les titres sont traités et parfaitement divisibles ;
- les placements et les emprunts sont effectués à un unique taux sans risque  $r_f$  ;
- aucun individu ne peut influencer le prix du titre (il y a atomisticité) ;
- le choix des agents se fait uniquement sur un critère d'espérance de rendement et de variance de rendement (techniquement, les rendements sont gaussiens et les fonctions d'utilité quadratiques) ;
- les investisseurs sont parfaitement homogènes et rationnels (ils ont la même anticipation du futur) ;
- il y a absence de coût de transaction, de taxes et d'impôts.

Le **marché financier est dit efficient** : à tout moment du temps, les prix reflètent l'information disponible. Les prix ne sont jamais « éloignés » de la valeur fondamentale des entreprises.

Sous ces hypothèses, tout actif A (titre quelconque) du marché vérifie la relation d'équilibre :

$$E[r_A] = r_f + \beta_A (E[r_M] - r_f) \Leftrightarrow E[r_A] - r_f = \beta_A \underbrace{(E[r_M] - r_f)}_{\text{prime de marché}}$$

*prime de risque du titre*

Où :  $E(r_A)$  = rendement espéré de l'actif A,

$r_f$  = taux sans risque (sur la base de la rentabilité annuelle moyenne d'un investissement en obligations d'état),

$E(r_M)$  = rendement espéré du portefeuille de marché (portefeuille qui contient tous les actifs risqués disponibles sur le marché) ou taux de rentabilité annuel moyen du marché des actions,

$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i; r_m)}{\text{Var}(r_m)}$  = bêta de l'actif par rapport au marché,

$E(r_A) - r_f$  = prime de risque de l'actif,

$E(r_M) - r_f$  = prime de risque du marché.

Le rendement excédentaire d'un actif A est exprimé comme le produit entre le rendement excédentaire du portefeuille de marché et le facteur bêta du titre.

Nous pouvons remarquer que le rendement excédentaire d'un titre ne dépend pas de sa variance ; ce qui compte c'est son facteur bêta qui dépend de sa covariance avec le marché et qui représente la mesure du risque.

■ **Application pour la détermination du taux représentant le coût de l'investissement**

Le MEDAF permet aux compagnies de calculer le rendement de leur investissement, en tenant compte du risque qu'elles supportent. Il suffit d'estimer le coût de l'investissement en appliquant la relation d'équilibre présentée ci-dessus :

$$E[r_e] = r_f + \beta_e (E[r_M] - r_f)$$

Le bêta  $\beta_e$  reflète **l'exposition de la compagnie au risque de marché**. Par exemple, un  $\beta$  égal à 0 signifie que la compagnie ne subit aucun risque de marché. En revanche, un  $\beta$  de 1 implique que l'exposition de la société au risque est identique au marché.

Ainsi, le taux unique appliqué lors l'actualisation des flux sera égal à :

$$\text{Taux d'actualisation} = \frac{D}{V} r_d + \frac{E}{V} [r_f + \beta_e (E[r_M] - r_f)]$$

Il reflète les risques encourus par la société via le bêta et la prime de risque du marché.

■ **Ajustement à effectuer selon le type d'activité considérée**

Le taux d'actualisation défini à partir de la formule du WACC est un taux acceptable lorsque nous considérons la société dans sa totalité. En effet, il représente **le risque moyen pour toutes les activités de la compagnie**. Certains ajustements sont donc nécessaires quand une seule activité est à envisager, comme, par exemple, lors du calcul de la valeur intrinsèque de l'activité assurance vie. Le WACC ajusté sera alors plus représentatif du risque réel supporté par rapport à l'activité considérée :

$$WACC_{\text{ajusté}} = \frac{WACC_{\text{tot}} \text{ Valeur}_{\text{tot}} - WACC_{\text{excès}} \text{ Valeur}_{\text{excès}}}{\text{Valeur}_{\text{tot}} - \text{Valeur}_{\text{excès}}}$$

Où  $WACC_{\text{ajusté}} = WACC$  ajusté,

$WACC_{\text{tot}} = WACC$  de la société avant tout ajustement,

$Valeur_{\text{tot}} =$  Valeur de la société avant tout ajustement,

$WACC_{\text{excès}} =$  Rendement requis des actifs couvrant l'excédent de capital (basé sur le MEDAF),

$Valeur_{\text{excès}} =$  Valeur de marché des actifs couvrant l'excédent de capital (basée sur le MEDAF).

■ **Inconvénients de la méthode**

Dans la pratique, les ajustements du WACC sont difficiles à établir car l'information disponible concernant les bêtas des activités à exclure est limitée. **La détermination du bêta est d'ailleurs l'une des principales difficultés de la méthode**. En effet, le bêta varie selon le produit d'assurance : il va dépendre de la composition des actifs en rapport avec ce produit, de la structure de chargement et du niveau d'exigence en capital nécessaire à ce produit. Il est donc



difficile de disposer d'observations suffisantes pour estimer le bêta. Ce manque peut alors conduire à introduire une part de subjectivité dans l'établissement des hypothèses et aboutir à certaines erreurs : **le taux d'actualisation est très sensible au paramétrage** et une modification de ce taux implique une variation significative des résultats.

D'autre part, le calibrage est fondé sur l'historique des données. Or, il n'est pas prouvé que le futur sera une reproduction du passé. Au contraire, le marché peut connaître des bouleversements. Ces derniers ne seront donc pas représentés dans le paramétrage. Il est alors nécessaire de **remettre systématiquement à jour les hypothèses** pour rester le plus cohérent possible et refléter les modifications dans le profil de risque de la société.

## **1.2. Conclusion**

L'approche Monde Réel est **une méthode traditionnelle de valorisation, basée sur des données historiques et observables**. Un seul taux d'actualisation est utilisé pour l'ensemble des activités à évaluer. Il est établi à partir d'une vision de marché, grâce à la formule d'équilibre du MEDAF.

Bien que la technique soit acceptable pour un groupe coté, il est pourtant difficile de mettre en évidence le lien qui existe entre le niveau de risque de l'activité et le taux d'actualisation effectivement appliqué.

## **2. L'approche Market-Consistent (MC) : évaluation cohérente avec les valeurs de marché**

Une évaluation Market-Consistent (MC) ou en valeur de marché consiste à déterminer la valeur d'un ensemble de flux en se référant aux valeurs des actifs et des passifs échangés sur le marché. Le but est de **fournir une juste valeur qui soit cohérente avec les valeurs et le risque de marché**.

Le concept fondamental sur lequel repose cette méthode de valorisation est **l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)**.

L'arbitrage est, au sens strict, une opération financière apportant un gain certain sans risque. Il résulte des imperfections momentanées du marché. Concrètement, il s'agit de pouvoir construire un portefeuille d'actifs de valeur initiale nulle qui fournit des valeurs non négatives dans tous les états futurs possibles de la nature avec au moins une valeur strictement positive. L'investisseur qui réalise un tel montage financier arrive donc à obtenir un gain certain en partant de rien.

Dans la pratique, les opportunités d'arbitrage sont assez rares. En effet, il existe des arbitragistes qui sont des professionnels incessamment à l'affût de ces opportunités. Ils ont un rôle important dans l'autorégulation des marchés financiers car ils effacent les distorsions : quand un arbitrage est possible, ces opérateurs en profitent jusqu'à ce qu'il ne soit plus intéressant. Nous considérons donc que les marchés sont sans possibilité d'arbitrage : si nous supposons que les frictions du marché n'existent pas (coûts de transaction, taxes, etc.), **il n'est pas possible de construire un portefeuille sans risque qui ait un rendement plus élevé que le taux sans risque**. En d'autres termes, ce que nous appelons Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), c'est l'impossibilité de réaliser un profit sans mise de fonds et sans risque.

Ainsi, si les modèles veulent pouvoir fournir des évaluations cohérentes avec la valeur de marché, alors ils doivent nécessairement respecter le fait que les marchés sont effectivement sans arbitrage : **chaque séquence de flux futurs ne peut avoir qu'une seule valeur qui est identique à la valeur du portefeuille utilisé pour les reproduire.** Il s'agit de la théorie des prix et du portefeuille de réplcation dans un modèle sans arbitrage.

Cette théorie consiste à dire que s'il est possible de construire un portefeuille de couverture capable de répliquer un contrat donné (réalisant la même séquence de flux), alors la valeur de ce contrat est égale à la valeur du portefeuille de couverture.

**L'AOA dans le cadre d'un marché complet est donc l'hypothèse indispensable sur laquelle se base toute méthode de valorisation en juste valeur.**

Dans le domaine de l'assurance, deux types de méthodologie sont appliqués pour fournir une évaluation en adéquation avec les valeurs de marché. Il s'agit de la théorie risque-neutre et de la théorie des déflateurs.

## **2.1. Théorie risque neutre**

### **■ Théorie de la martingale et changement de numéraire**

Lorsque nous procédons à une évaluation en adéquation avec les valeurs de marché, nous essayons de déterminer la valeur actuelle des flux projetés en résolvant l'équation suivante (d'inconnue V):

$$V = E^Q \left[ \sum_{t=0}^T H_t * \frac{D_t}{D_0} \right]$$

Où : V = valeur actuelle de la séquence de flux à évaluer,

$H_t$  = valeur du flux à la date t,

$D_t$  = valeur du numéraire D à la date t (processus mesurable strictement positif),

T = dernière date prise en compte pour la projection,

Q = mesure de probabilité associée au numéraire D qui permet à tout actif S de conserver la propriété de la martingale (la valeur actuelle d'un actif est égale à l'espérance de la valeur escomptée de cet actif, avec un taux d'actualisation égal au taux de rendement du numéraire) :

$$S_t = E^Q \left[ S_T * \frac{D_T}{D_t} \middle| F_t \right]$$

Où :  $F_t$  = filtration associée à l'ensemble des informations disponibles à la date t.

L'évaluation en valeur de marché passe donc par un calcul d'espérance, conditionnellement à la filtration  $F_t$ .

Ce raisonnement est une application de l'approche développée par Geman, El Karoui, et Rochet (1995, « Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options », Journal of applied Probability) qui s'appuie sur **le théorème d'évaluation par changement de numéraire.**

**Il est ainsi possible d'associer à tout numéraire une mesure de probabilité sous laquelle les prix des actifs sont des martingales.**

Les mesures de probabilités les plus couramment employées sont :

- la **mesure risque-neutre** où le numéraire est un compte épargne valorisé au taux sans risque : nous raisonnons alors en univers risque-neutre,
- la **mesure forward-neutre** associée au numéraire zéro-coupon d'échéance égale au terme de la projection : cet univers forward-neutre est une extension de l'univers risque-neutre dans le cas de taux d'intérêts stochastiques.

■ **Evaluation risque-neutre**

Harrison et Kreps (1979) puis Harrison et Pliska (1981) ont été les premiers à formaliser le **théorème fondamental de la finance** qui dit que :

« Sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude des marchés (i.e. le nombre de sources de risque est égal au nombre d'actifs dans le modèle), il existe une unique probabilité Q équivalente à la probabilité historique P, telle que les processus de prix actualisés (au taux sans risque r) sont des Q-martingales. Cette probabilité Q est appelée probabilité risque-neutre. »

Nous avons donc la relation suivante pour tout processus de prix X:

$$X_s = E^Q [ \exp^{-r(t-s)} X_t | \mathcal{F}_s ] , \forall 0 \leq s < t$$

Le **théorème de Girsanov** donne le moyen de changer de référentiel et décrit concrètement le passage de l'univers réel vers l'univers risque-neutre.

Par exemple, supposons que le taux sans risque r est constant et que le prix S d'un actif est défini par le processus de diffusion suivant (dans l'univers réel):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Où :  $\mu$  = le taux de croissance espéré (paramètre constant),  
 $\sigma$  = la volatilité (paramètre constant),  
 $(W_t)_{t \geq 0}$  = un mouvement brownien sous la probabilité historique P.

Le changement de probabilité est alors réalisé en posant :  $L_t = \exp \left\{ -\frac{\mu-r}{\sigma} W_t - \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2} t \right\}$

de sorte que  $\frac{dQ}{dP} = L_T$ .

En effet, dans l'univers risque-neutre, les valeurs escomptées  $(S_t \exp^{-rt})_{t \geq 0}$  sont des martingales par rapport à la probabilité Q :

$$S_s \exp^{-rs} = E^Q [ S_t \exp^{-rt} | \mathcal{F}_s ] , \forall 0 \leq s < t \Leftrightarrow E^Q [ S_t \exp^{-rt} - S_s \exp^{-rs} | \mathcal{F}_s ] = 0 , \forall 0 \leq s < t$$

Posons  $W_t^Q = W_t + \lambda t$  avec  $W_t^Q$  un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre Q, et  $\lambda$  un processus adapté à la filtration  $\mathcal{F}_t$  satisfaisant la condition de Novikov.

Par dérivation, nous obtenons  $dW_t^Q = dW_t + \lambda dt$  d'où :  $dS_t = (\mu - \lambda\sigma) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ .

Le processus  $(S_t \exp^{-rt})_{t \geq 0}$  sera défini par cette équation :

$$d(S_t \exp^{-rt}) = \exp^{-rt} [ (\mu - \lambda\sigma - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q ]$$

Comme nous voulons que  $(S_t \exp^{-rt})$  soit une Q-martingale, il faut nécessairement annuler le terme en dt dans l'expression ci-dessus :  $W_t^Q$  est une Q-martingale mais pas t.

Par conséquent, il faut poser :  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \Rightarrow W_t^Q = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

Le processus S sera alors défini par cette équation :  $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ .

Ainsi, le principe d'évaluation risque-neutre permet **de raisonner comme si les acteurs du marché étaient indifférents au risque**. Dans un univers réel, les agents économiques sont averses au risque : ils sont prêts à détenir des actifs risqués, uniquement si le risque supporté par leur position est compensée par une espérance de rentabilité plus élevée que le taux sans risque. Par contre, dans un univers risque-neutre, les investisseurs n'exigent aucune compensation pour le risque ce qui signifie que **le taux de rendement attendu de n'importe quel actif sur le marché correspond au taux sans risque**. La valeur présente de tout flux futur est alors obtenue en actualisant l'espérance de ce flux au taux sans risque.

### ■ Application pratique

Dans la pratique, l'évaluation d'un flux selon la théorie risque-neutre se déroule selon les étapes suivantes :

- supposer que les actifs liés au flux ont un rendement égal au taux sans risque,
- simuler différentes trajectoires de ces actifs selon le modèle considéré,
- calculer le flux obtenu pour chacun des scénarios,
- actualiser l'ensemble des flux au taux sans risque,
- prendre l'espérance sous la probabilité Q de ces flux actualisés : il s'agit de l'estimation de la valeur actuelle du flux à évaluer.

Le résultat obtenu est alors correct dans tous les univers et en particulier dans l'univers réel. En effet, **deux phénomènes se compensent toujours exactement : la modification de l'espérance de rentabilité des actifs et le taux employé lors de l'actualisation**.

Il est vrai que le concept de la théorie risque-neutre peut paraître difficile à assimiler. Ce n'est pourtant qu'un artifice de calcul permettant d'obtenir facilement des formules explicites pour certains produits et types de garanties. L'application la plus connue est l'évaluation des options dans le modèle de Black et Scholes.

### ■ Evaluation des options : le modèle de Black et Scholes

Au début des années 1970, Black, Merton et Scholes ont activement participé à l'avancée considérable qu'ont connue les méthodes d'évaluation des options. Leurs travaux ont notamment donné naissance en 1973 au modèle de Black et Scholes. C'est le premier modèle financier en temps continu permettant d'évaluer le prix des options sur actions ne versant pas de dividendes. Il décrit le marché financier à la fois de manière simple et efficace.

### ■ Equation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton (EDP)

**L'EDP de Black-Scholes-Merton est une équation qui est vérifiée par tout produit dérivé et en particulier par un produit dérivé  $G(S_t, t)$  lié à une action S ne versant pas de dividendes.**

Les hypothèses suivantes sont nécessaires :

- la rentabilité du support  $\frac{dS_t}{S_t}$  est régie par un mouvement brownien :  $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$

Où :  $\mu$  et  $\sigma$  sont des paramètres supposés constants,

$W_t$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique.

- la vente à découvert d'actif, avec une utilisation immédiate et intégrale du produit de la vente, est possible;
- il n'y a pas de frais de transactions, de taxes ou d'impôts;
- les actifs sont parfaitement divisibles et sont traités de manière continue sur le marché;
- le sous-jacent ne verse pas de dividende pendant la durée de vie de l'actif dérivé;
- il y a absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché;
- le taux sans risque  $r$  est constant et identique sur toutes les maturités.

Notons que si la rentabilité du support  $\frac{dS_t}{S_t}$  est décrite par l'équation  $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ .

Cela revient à dire que le prix  $S$  de l'actif suit un processus brownien géométrique de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  selon l'EDS (Equation Différentielle Stochastique) :  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ .

Le prix de l'actif est défini dans l'univers risque-neutre par l'EDS suivante  $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$  où  $W_t^Q$  est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre  $Q$ , défini grâce au théorème de Girsanov.

Le lemme d'Itô nous permet alors d'écrire que :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial s} r S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} (\sigma S_t)^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial s} \sigma S_t dW_t^Q$$

Or, l'hypothèse d'AOA dans un marché complet implique que la valeur escomptée de tout produit dérivé est une  $Q$ -martingale. Par conséquent,  $G(S_t, t)$  doit vérifier la relation :

$$\begin{aligned} G(S_s, s) &= E^Q \left[ \exp^{-r(t-s)} G(S_t, t) | F_s \right] \quad \forall 0 \leq s < t \\ \Leftrightarrow E^Q \left[ \exp^{-rt} G(S_t, t) - \exp^{-rs} G(S_s, s) | F_t \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow E^Q \left[ d(\exp^{-rt} G(S_t, t)) | F_t \right] &= 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que le différentiel de l'expression  $\exp^{-rt} G(S_t, t)$  ne doit dépendre que du terme en  $dW_t^Q$  car  $W_t^Q$  est une  $Q$ -martingale (ce qui n'est pas vrai pour  $t$ ). Il faut donc que le terme en  $dt$  s'annule dans tous les cas.

$$\begin{aligned} d(\exp^{-rt} G(S_t, t)) &= -r \exp^{-rt} G dt + \exp^{-rt} dG \\ \Leftrightarrow d(\exp^{-rt} G(S_t, t)) &= \exp^{-rt} [-r G dt + dG] \\ \Leftrightarrow d(\exp^{-rt} G(S_t, t)) &= \exp^{-rt} \left[ -r G dt + \left( \frac{\partial G}{\partial s} r S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} (\sigma S_t)^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial s} \sigma S_t dW_t^Q \right] \\ \Leftrightarrow d(\exp^{-rt} G(S_t, t)) &= \exp^{-rt} \left( \frac{\partial G}{\partial s} r S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} (\sigma S_t)^2 - r G \right) dt + \exp^{-rt} \frac{\partial G}{\partial s} \sigma S_t dW_t^Q \end{aligned}$$

Nous devons forcément avoir :  $\frac{\partial G}{\partial s} r S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} (\sigma S_t)^2 - r G = 0$

C'est cette équation que nous appelons équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton et qui doit être satisfaite par tout produit dérivé. Cette équation admet plusieurs solutions

correspondant à tous les produits dérivés qui peuvent avoir l'actif  $S$  comme sous-jacent. La solution dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé. Par exemple, un put européen d'échéance  $T$  est caractérisé par la condition limite suivante :

$$G(S_T, T) = \max(K - S_T; 0).$$

La résolution de l'EDP n'est toutefois pas évidente. Il semble en effet plus facile de valoriser le produit dérivé en calculant une espérance dans l'univers risque-neutre. C'est ce que nous allons constater dans le cas de l'évaluation d'options européennes ayant pour support des actions ne versant pas de dividendes. Il s'agit du modèle de base de Black et Scholes.

### ■ Modèle de Black et Scholes

Les formules de base du modèle de Black et Scholes permettent de calculer la valeur actuelle d'une option d'achat ou de vente de type européen sur une action qui ne verse pas de dividendes.

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- les marchés financiers sont parfaits (AOA, complétude) et continus;
- l'option à évaluer est européenne ;
- la rentabilité du support dépend d'un mouvement brownien (et est donc de loi normale), ce qui implique que le cours de l'action  $S$  suit une loi log-normale (sous la probabilité  $Q$ ,  $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ );
- le sous-jacent ne verse pas de dividende pendant la durée de vie de l'actif dérivé;
- la volatilité  $\sigma$  du support est constante;
- le taux sans risque  $r$  est constant et identique sur toutes les maturités.

Notons que le seul paramètre inconnu est la volatilité qui peut être estimée, soit selon l'historique des données, soit de manière implicite (volatilité qui, lorsqu'elle est utilisée dans la formule l'évaluation de Black et Scholes, fournit le prix du marché de l'option).

Le prix des options d'achat et de vente de type européen, ayant comme support l'action  $S$ , avec une échéance  $T$  et un prix d'exercice  $K$ , est donné explicitement par :

- Pour le **call C** :  $C_t = S_t \Phi(d_1(t)) - K * \exp^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t)), \forall 0 \leq t < T$ ,
- Pour le **put P** :  $P_t = K * \exp^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(t)) - S_t \Phi(-d_1(t)), \forall 0 \leq t < T$ ,

Avec  $d_1(t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$  et  $d_2(t) = d_1(t) - \sigma \sqrt{T-t}$

Et  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi normale standard :  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Nous pouvons démontrer ce résultat, soit en résolvant l'EDP, soit en appliquant la théorie risque-neutre. Notons que les deux approches sont liées par le **théorème de la représentation de Feynman-Kac** qui permet d'exprimer la solution de certaines équations différentielles stochastiques sous la forme d'un calcul d'espérance et réciproquement.

Nous allons vérifier la relation obtenue dans le cas du call, en appliquant l'évaluation risque-neutre. Pour ce faire, nous partons de la relation de la martingale:

$$C_t = E^Q [ \exp^{-r(T-t)} * \max(S_T - K; 0) | F_t ]$$

$$\Leftrightarrow C_t = E^Q \left[ \exp^{-r(T-t)} * \max \left[ S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma W_{T-t}^Q \right\} - K; 0 \right] \middle| F_t \right]$$

Or,  $S_t$  est  $F_t$ -mesurable (donc se comporte comme une constante dans l'espérance conditionnelle) et  $W_{T-t}$  est de loi normale  $N(0 ; T-t)$  et est indépendant de  $F_t$  (les accroissements du mouvement brownien sont indépendants), donc :

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-r(T-t)} \max \left[ S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma X \right\} - K; 0 \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{X^2}{2(T-t)} \right\} dX$$

$$\Leftrightarrow C_t = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} (T-t) \right\} S_t \int_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ \sigma X - \frac{X^2}{2(T-t)} \right\} dX - \exp^{-r(T-t)} K \int_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{X^2}{2(T-t)} \right\} dX$$

Nous pouvons noter que toute variable normale  $X$  de loi  $N(\mu ; \sigma^2)$  a pour fonction de répartition :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \text{ ce qui implique que } F(x) = \Phi \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right).$$

En posant  $A = \frac{\ln \left( \frac{K}{S_t} \right) - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma}$ , nous obtenons :

$$C_t = S_t \Phi \left( -\frac{A - \sigma(T-t)}{\sqrt{(T-t)}} \right) - \exp^{-r(T-t)} K \Phi \left( -\frac{A}{\sqrt{(T-t)}} \right)$$

$$\Leftrightarrow C_t = S_t \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - \exp^{-r(T-t)} K \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)$$

Nous retrouvons bien la formule annoncée. La démonstration reste identique pour l'évaluation d'un put européen.

Le modèle de base de Black et Scholes est donc **un outil efficace pour évaluer les options sur actions ne versant pas de dividendes**. La méthode peut être généralisée et utilisée dans d'autres situations (voir *Annexe 4*) :

- avec une action versant des dividendes,
- en envisageant une volatilité dépendante du temps,
- dans le cas d'un taux d'intérêt modélisé par un processus stochastique.

### ■ Conclusion

Le principe d'évaluation risque-neutre peut paraître un concept abstrait mais il faut juste y voir un procédé permettant de simplifier le raisonnement et le calcul.

En effet, cette théorie permet de passer de l'univers réel (avec la mesure de probabilité historique) vers un univers où les agents sont indifférents au risque : les investisseurs n'exigent alors aucune compensation pour le risque, ce qui signifie que le taux de rendement attendu de n'importe quel actif sur le marché correspond au taux sans risque. Par conséquent, les flux projetés sont tout simplement actualisés au taux sans risque.

L'évaluation risque-neutre est donc un outil efficace pour déterminer une valeur actuelle qui soit cohérente avec les valeurs de marché. Elle permet également d'obtenir facilement des formules explicites pour certains produits et types de garanties (c'est le cas par exemple du modèle de Black et Scholes d'évaluation d'options européennes).

Il existe toutefois une alternative à la théorie risque-neutre : il est possible d'obtenir des évaluations en valeur de marché en raisonnant dans l'univers réel et en appliquant la théorie des déflateurs.

## **2.2. Théorie des déflateurs**

Lorsque nous raisonnons dans l'univers réel (le modèle est paramétré en fonction des données observables sur le marché), **il faut actualiser les flux projetés en choisissant un taux d'actualisation qui reflète le risque supporté par ces flux**. Or, ceci n'est pas chose facile.

Pour des flux certains et déterministes, il est évident que le taux d'actualisation cohérent à appliquer sera le taux sans risque puisque des variations du marché n'implique aucune fluctuation de ces flux. Par contre, dans le cas de flux aléatoires (dépendant de la performance du marché par exemple), établir un taux d'actualisation objectif devient plus compliqué : il n'est pas certain que le taux choisi sera cohérent avec le marché.

Prenons par exemple le cas d'une option sur un certain actif risqué. Pour déterminer la valeur actuelle de cette option, il faut actualiser les flux futurs probables en rapport avec cette option. Le problème est que nous ne connaissons pas exactement dans l'univers réel le taux d'actualisation à appliquer. Nous savons juste qu'il sera supérieur au rendement du sous-jacent (la position sur une option est plus risquée que la détention directe du support). La prime de risque à ajouter au taux sans risque ne pourra cependant pas être quantifiable sans la connaissance de la valeur actuelle de l'option, cette dernière n'étant calculable qu'après avoir établi le taux d'actualisation. Nous sommes donc bloqués : dans certaines situations, **il n'existe pas de méthode objective pour déterminer un taux d'actualisation cohérent avec le marché**.

Pour faire face à ce problème et éviter d'avoir à choisir un taux arbitraire, il est possible d'appliquer la théorie des déflateurs.

La théorie des déflateurs est **une base solide de la finance moderne** qui, comme nous allons le voir, trouve aussi des applications dans le monde de l'assurance : **les déflateurs, assimilables à une fonction d'actualisation stochastique, peuvent être employés pour calculer la valeur actuelle des flux futurs dans une approche en univers réel**.

Afin de comprendre cette méthodologie, nous allons commencer par présenter la théorie d'équilibre général des prix qui constitue la base de la théorie des déflateurs. Nous verrons ensuite l'approche de manière générale.

### ■ **Approche de base : la théorie générale des prix**

Arrow et Debreu sont à l'origine d'un modèle de représentation mathématique du marché concurrentiel. C'est principalement à eux que nous devons le développement de la théorie d'équilibre général des prix qui maximise l'espérance de chacun.



■ Exemple basique

Nous allons montrer, à partir d'un simple exemple, comment un modèle sans arbitrage peut être construit à partir de la théorie d'équilibre général des prix. Pour ce faire, nous considérons **un modèle à deux états (« up » et « down ») sur une période.**

Tout modèle voulant répliquer une dynamique de marché doit être paramétré en fonction des données du marché. Dans notre cas, il n'y a que deux états futurs possibles. Par conséquent, nous n'avons besoin que de deux actifs pour calibrer le modèle.

Soit les actifs décrits par les informations suivantes :

	Actif A	Actif B
Valeur de marché	1.92	1.42
Prix dans l'état « up »	3.8	3
Prix dans l'état « down »	1.2	0.8

Un **actif d'Arrow-Debreu** est un actif qui paye une unité monétaire dans un état de la nature et à un moment particulier dans le futur. Par contre, il ne donne aucun flux dans les autres états possibles.

Si nous arrivons à déterminer le prix actuel de nos actifs d'Arrow-Debreu (notés AD\_up et AD\_down), alors le modèle considéré sera défini de manière complète. Nous cherchons donc les valeurs manquantes x et y de ce tableau :

	AD_UP	AD_DOWN
Valeur de marché	X	Y
Prix dans l'état « up »	1	0
Prix dans l'état « down »	0	1

Pour résoudre ce problème, il suffit, sous l'hypothèses d'A.O.A (chaque séquence de flux futurs ne peut avoir qu'une seule valeur qui est identique à la valeur du portefeuille utilisé pour le reproduire), de construire, pour chaque actif d'Arrow-Debreu, un portefeuille avec les actifs A et B qui va répliquer les flux de paiement finaux relatifs à l'actif spécifié.

Soit un portefeuille composé de a actifs A et b actifs B. Nous voulons qu'il prenne une certaine valeur u en cas de « up » et une certaine valeur d en cas de « down » :

- pour le portefeuille répliquant AD\_up, nous aurons u = 1 et d = 0 ;
- pour le portefeuille répliquant AD\_down, nous aurons u = 0 et d = 1.

Il suffit alors de résoudre le système linéaire d'inconnus a et b, en fonction des valeurs données à u et d :

$$\begin{cases} 3.8 a + 3 b = u \\ 1.2 a + 0.8 b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{75}{14} d - \frac{10}{7} u \\ b = \frac{15}{7} u - \frac{95}{14} d \end{cases}$$

Nous obtenons alors la composition (en nombre d'actifs) de chaque portefeuille de réplification et le prix actuel des actifs d'Arrow-Debreu :

	Actif A	Actif B
Portefeuille répliquant AD_up	-10/7	15/7
Portefeuille répliquant AD_down	75/14	-95/14

Notons que le signe négatif correspond à une position courte (une vente d'actifs), alors que le signe positif correspond à une position longue (un achat d'actifs).

	AD_UP	AD_DOWN
Valeur de marché	0.3	0.65
Prix dans l'état « up »	1	0
Prix dans l'état « down »	0	1

A présent, il est possible de déterminer le prix de n'importe quel actif sur le marché : sous l'hypothèse d'AOA, il suffit de construire un portefeuille de réplication avec les actifs d'Arrow-Debreu.

Considérons par exemple le cas d'une option d'achat sur l'actif A, de prix d'exercice  $K = 3$ . Son flux final est fonction de la valeur finale prise par l'actif A :

$$\text{Valeur finale du call} = \text{Max} (0 ; \text{valeur finale de l'actif A} - K).$$

	Etat « up »	Etat « down »
Valeur finale de l'actif A	3.8	1.2
Valeur finale du call	0.8	0

Ces flux peuvent être répliqués en construisant un portefeuille composé de 0.8 unités de l'actif AD\_up.

Ainsi, sous l'hypothèse d'AOA, le prix actuel de l'option sera égal à la valeur actuelle du portefeuille répliqué soit  $0.8 * 0.3 = 0.24$ .

Ceci reste valable pour l'actif sans risque. En effet, son flux terminal est identique quelque soit l'état final. Si nous raisonnons sur une unité monétaire, le portefeuille de réplication contiendra alors une unité de chaque actif d'Arrow-Debreu. Par conséquent, le prix actuel de l'actif sans risque est égal à :

$$\text{Prix actuel} = 0.3 * 1 + 0.65 * 1 \text{ soit } 0.95.$$

Notons que ce résultat correspond à un rendement  $r$  vérifiant :  $0.95 * (1+r) = 1$ . Nous trouvons  $r = 5.26\%$  ; c'est le taux sans risque.

### ■ Généralisation pour un modèle multi états

De manière générale, tout actif a pour valeur actuelle :  $C = \sum_{\text{tous les états } s} \psi(s) C(s)$

Où :  $C$  = valeur actuelle de l'actif considéré (prix disponible aujourd'hui sur le marché),  
 $\psi(s)$  = prix actuel de l'actif d'Arrow-Debreu payant 1 dans l'état  $s$  et 0 sinon,  
 $C(s)$  = flux terminal de l'actif dans l'état  $s$ .

L'hypothèse d'AOA implique que :

- tous les prix des actifs d'Arrow-Debreu sont positifs :  $\psi(s) \geq 0 \forall s$  ;
- comme le taux sans risque ne peut être négatif, le prix actuel de l'actif sans risque doit être nécessairement inférieur à un, ce qui se traduit par la relation :  $\sum_{\text{tous les états } s} \psi(s) \leq 1$ .

### ■ Extension : la théorie des déflateurs

Il semble naturel d'**introduire dans le modèle les probabilités de survenance de chaque état**. Pour ce faire, nous définissons le concept de déflateur  $D(s)$  égal au rapport entre le prix actuel de l'actif d'Arrow-Debreu de l'état  $s$  ( $\Psi(s)$ ) et la probabilité de survenance de cet état ( $p(s)$ ):

$$D(s) = \frac{\Psi(s)}{p(s)}.$$

L'exemple précédent nous fournit les déflateurs suivants :

	Probabilité	Prix des actifs d'Arrow-Debreu	Déflateur
Etat « up »	0.6	0.3	0.5
Etat « down »	0.4	0.65	1.625

Comme les prix sont toujours positifs, il en va de même des déflateurs. De plus, leur valeur en date 0 est 1 (par convention).

Dans la théorie des déflateurs, le prix actuel de tout actif est déterminé selon la relation suivante :

$$C = \sum_{\text{tous les états } s} \psi(s) C(s) = \sum_{\text{tous les états } s} p(s) D(s) C(s) = E[DC]$$

L'introduction des probabilités dans l'évaluation signifie que **nous raisonnons en terme d'espérance**. Pour l'actif sans risque, nous obtenons une valeur actuelle égale à :

$$\sum_{\text{tous les états } s} p(s) D(s) = E[D] \leq 1.$$

Ainsi, pour chaque scénario de notre modélisation stochastique, il suffit de déterminer les déflateurs qui sont propres au modèle. Puis, pour obtenir la valeur actuelle des flux, il suffit de calculer la moyenne des flux pondérés par les déflateurs. **Ce raisonnement ne fait intervenir aucun taux d'actualisation explicite et permet de rester cohérent avec les données du marché.**

### ■ Lien avec les fonctions d'utilité

L'optimisation des fonctions d'utilité peut servir d'**outil pour générer les déflateurs**, notamment pour des modèles stochastiques existants qui ne peuvent pas actuellement les produire.

Une fonction d'utilité est une fonction qui caractérise la richesse d'un investisseur et permet à ce dernier de faire un classement entre les différents portefeuilles disponibles. Par définition, une fonction d'utilité est une fonction croissante et différentiable, avec une utilité marginale (égale au gradient) décroissante. Ainsi, si  $U(x)$  est l'utilité obtenue avec une richesse  $x$ , alors  $U'(x)$  mesure l'utilité marginale après avoir augmenté la richesse  $x$  d'une unité. L'objectif de l'investisseur est alors de trouver un portefeuille optimal qui maximise l'espérance de son utilité.

**Les déflateurs peuvent être exprimés en terme d'utilité marginale.** En effet, le déflateur d'un état particulier est un multiple constant de l'utilité marginale du portefeuille optimal dans cet état (voir l'*Annexe 5* pour la démonstration):

$$D(s) = \frac{w_0^*}{E[w^* U'(w^*)]} U'(w^*(s))$$

Où :  $w_0^*$  = valeur initiale du portefeuille optimal,  
 $w^*$  = valeur finale du portefeuille optimal,  
 $w^*(s)$  = valeur dans l'état  $s$  du portefeuille optimal.

**Le déflateur ne dépend pas de la fonction d'utilité retenue** : la fonction d'utilité et le portefeuille optimal sont propres à chaque investisseur, alors que les déflateurs reflètent le marché dans sa globalité.

■ Généralisation : modèle avec des périodes multiples

Considérons un modèle **avec plusieurs états futurs possibles  $s$  à un moment particulier du futur  $t$  appartenant à  $\{t_1, \dots, T\}$** . Notons :

- $\Psi_t(s)$  le prix actuel de l'actif d'Arrow-Debreu payant une unité monétaire en date  $t$  dans l'état  $s$ ,
- $P_t(s)$  la probabilité de survenance de l'état  $s$  en date  $t$ .

Nous obtenons alors le processus stochastique (positif) des déflateurs  $D_t$  :  $D_t(s) = \frac{\Psi_t(s)}{P_t(s)}$

Ceci nous permet d'établir la valeur actuelle de tout actif  $C$  sur le marché, avec des flux à la date  $t$  et dans l'état  $s$  égaux à  $C_t(s)$  :

$$C = \sum_{\substack{\text{toutes} \\ \text{les dates}}} \sum_{\substack{\text{tous les} \\ \text{états } s}} \Psi_t(s) C_t(s) = \sum_{\substack{\text{toutes} \\ \text{les dates}}} \sum_{\substack{\text{tous les} \\ \text{états } s}} P_t(s) D_t(s) C_t(s) = \sum_{\substack{\text{toutes} \\ \text{les dates}}} E[D_t C_t]$$

Il est donc possible d'évaluer à différentes dates intermédiaires la valeur d'un actif avec un processus de prix stochastique  $(X_t)$ . En effet, la valeur  $X_t$  à la date  $t < T$  d'un actif ayant pour valeur  $X_T$  en  $T$  est la suivante :

$$\text{Valeur en } t \text{ de } X_T : X_t = \frac{E_t[D_T X_T]}{D_t}$$

Où  $E_t[.]$  représente l'espérance conditionnelle à l'information disponible en  $t$ .

Nous obtenons la relation suivante :  $X_t D_t = E_t[D_T X_T]$ , pour tout  $t < T$ .

Cette relation implique que  **$XD$  est une martingale** : la valeur espérée de  $XD$  en  $T$ , conditionnellement à l'information disponible en  $t$ , correspond à la valeur de  $XD$  à la date  $t$ .

Dans la pratique, la méthode des déflateurs est utilisée en suivant cette procédure :

- le flux est projeté sur la base de distributions réalistes des risques (rendement des actifs, mortalité,...) : nous obtenons pour chaque scénario une valeur en date  $t$ , notée  $F_t$  ;
- les déflateurs sont générés en même temps que les rendements des actifs : à chaque date  $t$  et pour chaque scénario, nous simulons la valeur du déflateur  $D_t$  ;
- les déflateurs sont utilisés pour actualiser le flux : il suffit de multiplier le déflateur  $D_t$  par le flux  $F_t$  et de faire la moyenne sur tous les scénarios ( $E[D_t F_t]$ ) pour aboutir à la valeur actuelle estimée du flux futur.

Les déflateurs sont en fait **assimilables à une fonction d'actualisation stochastique**.

■ Comparaison avec la théorie risque-neutre

La théorie risque-neutre et la théorie des déflateurs sont **deux méthodes d'évaluation équivalentes** : quelque soit l'approche employée, nous devons trouver les mêmes résultats.

Ceci est bien vérifié dans notre exemple à une période et deux états « up » et « down ». En appliquant la théorie de déflateurs pour évaluer le prix actuel d'un call sur l'actif A, nous avons obtenu une valeur de 0.24.

Rappelons les données du problème :

	Etat « up »	Etat « down »
Valeur finale de l'actif A	3.8	1.2
Valeur finale du call	0.8	0
Prix des actifs d'Arrow-Debreu	0.3	0.65
Probabilité	0.6	0.4
Déflateur	0.5	1.625

En raisonnant en univers risque-neutre, tous les actifs ont un rendement espéré égal au taux sans risque que nous avons trouvé égal à 5.26%. La valeur initiale de l'actif A était de 1.92. Par conséquent, la probabilité risque neutre vérifie l'équation suivante :

$$1.92 \cdot (1 + 5.26\%) = 3.8 \cdot p + (1 - p) \cdot 1.2 \text{ soit } p = 0.315766.$$

La valeur actuelle du call se calcule alors en actualisant au taux sans risque l'espérance de son flux final :

$$\text{Valeur actuelle du call} = 1.526^{(-1)} \cdot [0.315766 \cdot 0.8 + (1 - 0.315766) \cdot 0] = 0.24.$$

Ce résultat est identique à celui issu de la théorie des déflateurs, ce qui confirme le fait que les deux méthodes sont équivalentes.

La méthode la plus adéquate à appliquer va dépendre de la situation à laquelle nous sommes confrontés. Par exemple, les déflateurs seront mieux adaptés aux modèles à multiples devises.

### ■ Conclusion

Ainsi, lorsque nous raisonnons dans l'univers réel, **la méthode des déflateurs est un outil efficace pour déterminer la valeur actuelle des flux qui soit cohérente avec les valeurs de marché.**

Chaque actif S a un rendement espéré qui reflète son niveau de risque inhérent et le processus déflateur D est choisi de sorte à **respecter la relation de la martingale**:

$$S_t = E^P \left[ S_T \cdot \frac{D_T}{D_t} \middle| F_t \right], \quad \forall t < T$$

Où : P = la mesure de probabilité réelle.

Les déflateurs, assimilables à une fonction d'actualisation stochastique, peuvent donc être utilisés pour évaluer n'importe quel flux généré par un modèle calibré sur les données du marché. Ils sont dépendants du modèle considéré mais ne sont pas corrélés aux flux : pour un modèle donné, les déflateurs sont identiques, quelque soit le risque lié aux flux à évaluer. Notons que seul le risque systématique est représenté dans le déflateur.

Ceci rend la méthode plutôt simple à mettre en place et évite également d'introduire la subjectivité liée au choix du taux d'actualisation. Elle est de plus cohérente avec les valeurs de marché, puisque c'est à partir de celles-ci que nous calculons le déflateur.

### 2.3. Conclusion

Nous venons de présenter deux méthodes d'évaluation en valeur de marché qui sont couramment appliqués dans le domaine de l'assurance :

- raisonner en univers risque-neutre et actualiser les flux au taux sans risque,
- appliquer les probabilités du monde réel et utiliser les déflateurs.

La théorie risque-neutre fait appel à une notion un peu abstraite mais qui facilite grandement les calculs : nous considérons que les agents sont neutres face au risque. Par conséquent tous les actifs ont une espérance de rendement égale au taux sans risque. Celui-ci sert donc de taux d'actualisation.

En revanche, dans la théorie des déflateurs, nous raisonnons dans l'univers réel : chaque actif a alors un rendement espéré qui reflète son niveau de risque inhérent. L'avantage de cette méthode est de ne pas faire intervenir de taux d'actualisation explicite qui est en quelque sorte intégré dans la formule du processus déflateur. Elle permet en outre d'obtenir des résultats pouvant être exploités pour une analyse complémentaire des flux, ce qui n'est pas le cas avec la théorie risque-neutre.

De toute manière, quelque soit l'approche choisie, les résultats obtenus sont identiques : **nous aboutissons à une juste valeur qui est cohérente avec les valeurs et le risque de marché.**

## 3. Simulation de Monte Carlo

Une simulation stochastique permet de créer des réalisations de variables aléatoires.

Une simulation de Monte Carlo d'un processus stochastique est une procédure permettant de créer un échantillon aléatoire de ce processus et d'estimer ensuite les caractéristiques de la loi de probabilité en rapport avec ce processus (comme la moyenne, l'écart type, les quantiles,...). La précision de l'estimation dépendra du nombre de trajectoires à simuler.

### 3.1. Principe

Considérons un produit dérivé  $V(t,S)$  ayant pour support une variable de marché  $S$  et engendrant un payoff à la date  $t$  selon la fonction  $f$ . La méthode de Monte Carlo nous donne alors la formule suivante pour estimer la valeur en date  $t$  de ce produit dérivé:

$$V(t,S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(S_i)$$

Où :  $(S_i)_{1,\dots,n}$  est séquence de réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $S$  à la date  $t$

Cette relation est une conséquence de **la loi des grands nombres** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(S_i) = \int f(x) \mu(dx)$$

Où  $f$  est une fonction  $\mu$ -intégrable,  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$

### ■ Application

Dans la pratique, la valeur du produit dérivé en date  $t$  sera donnée par la procédure suivante :

- générer un grand nombre de scénarios du modèle d'actif, afin d'obtenir suffisamment de trajectoires pour satisfaire à la loi des grands nombres,
- calculer la valeur du produit dérivé à la date  $t$  pour chaque trajectoire,
- calculer la moyenne sur tous les scénarios : il s'agit de l'estimation de la valeur du produit dérivé.

Cependant, pour pouvoir lancer une telle simulation, il faut disposer d'un générateur de nombres aléatoires et passer par une étape de discrétisation.

### ■ Générateur de nombres aléatoires

La plupart des modèles nécessite des réalisations de variables aléatoires ce qui signifie qu'il faut pouvoir générer des nombres aléatoires. Pour ce faire, il suffit de faire appel à un générateur de nombres aléatoires. Il faut toutefois porter une attention particulière dans le choix de ce générateur car celui-ci **conditionne la performance des simulations** : le générateur doit être fiable, c'est-à-dire efficace avec une grande périodicité (i.e. générer un nombre de valeurs différentes avant que la séquence ne se répète).

La génération de nombres aléatoires de loi uniforme est fondamentale pour pouvoir utiliser des méthodes de type « **inversion de la fonction de répartition** ». Nous avons le théorème suivant :

« Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs réelles de fonction de répartition  $F_x$  :

$$F_x : \mathfrak{R} \rightarrow [0;1], F_x(x) = P(X \leq x).$$

Notons  $F_x^{\leftarrow}$  la fonction inverse de  $F_x$  :

$$F_x^{\leftarrow} : ]0;1[ \rightarrow \mathfrak{R}, F_x^{\leftarrow}(u) = \inf\{y : F_x(y) \geq u\}, \forall u \in ]0;1[$$

Si  $U$  suit une loi uniforme  $[0,1]$ , alors  $Y = F_x^{\leftarrow}(U)$  a pour fonction de répartition  $F$ . »

Ce résultat se démontre facilement, puisque :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(F_x^{\leftarrow}(U) \leq y) \\ &= P(F_x(F_x^{\leftarrow}(U)) \leq F_x(y)) \\ &= P(U \leq F_x(y)) \\ &= F_x(y) \text{ car } U \text{ est de loi uniforme sur } [0,1]. \end{aligned}$$

La technique d'inversion permet donc dans des situations simples de générer des réalisations indépendantes de n'importe quelle variable dont nous connaissons la fonction de répartition.

### ■ Discrétisation des processus continus

En assurance, **les modélisations stochastiques font appel à des processus continus**, notamment pour l'évolution du cours des actions ou du taux d'intérêt. Cependant, dans la pratique, une simulation de ces processus impose **une discrétisation du temps**. Par conséquent, il faut d'abord discrétiser le processus avant de pouvoir simuler sa trajectoire.

Il est possible de connaître la loi de certains processus à n'importe quel moment. C'est le cas par exemple du mouvement brownien géométrique ou du modèle de Vasicek. Dans ce cas, la discrétisation s'impose à l'utilisateur : il s'agit d'une **discrétisation exacte**.

Par contre, si la discrétisation exacte n'existe pas, alors la loi du processus aux instants de discrétisation peut être approchée par des processus discrets qui convergent vers le processus à simuler. Nous parlons alors d'une **discrétisation approximative**.

Pour ce faire, nous partons de l'EDS définissant le processus, puis nous appliquons un développement d'Itô-Taylor afin d'obtenir la version discrétisée : **l'approximation sera d'autant plus précise que l'ordre de développement est élevé**.

Soit le processus  $X$  défini par l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \Leftrightarrow X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s$$

avec  $W_t$  un mouvement brownien standard.

Les méthodes les plus couramment rencontrées sont **le schéma d'Euler** (développement d'Itô-Taylor à l'ordre 1) **et de Milstein** (développement d'Itô-Taylor à l'ordre 2).

Le schéma d'Euler définit le processus discret  $\tilde{X}_t$  de la façon suivante :

$$\Leftrightarrow \tilde{X}_{t+\Delta t} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t) \Delta t + \sigma(\tilde{X}_t, t) \sqrt{\Delta t} Z_t$$

Où :  $\Delta t$  = pas de discrétisation,

$Z_t$  = réalisations de variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale  $N(0 ; 1)$ .

En effet, les mouvements browniens sont à accroissements indépendants et de loi normale, d'où :

$$\frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{\sqrt{\Delta t}} = Z_t \text{ avec } Z_t \text{ une variable normale standard.}$$

Le schéma de Milstein définit le processus discret de cette manière :

$$\Leftrightarrow \tilde{X}_{t+\Delta t} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t) \Delta t + \sigma(\tilde{X}_t, t) \sqrt{\Delta t} Z_t + \frac{\Delta t (Z_t^2 - 1)}{2} \sigma(X_t, t) \frac{\partial \sigma(\tilde{X}_t, t)}{\partial x}$$

### **3.2. Exemple : simulation de la trajectoire d'une action**

Soit une action avec les caractéristiques suivantes :

- prix initial de l'action :  $S_0 = 100$ ,
- espérance de rentabilité :  $\mu = 10\%$ ,
- volatilité :  $\sigma = 20\%$ .

Nous supposons que le prix de l'action vérifie l'EDS suivante :  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$  où  $W_t$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique.

Le processus de prix de l'action à la date  $t$  est :  $S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$ .

Le but de cet exemple est de simuler des trajectoires du cours de l'action sur une période d'un an en utilisant la simulation de Monte Carlo.



Pour pouvoir démarrer la simulation, il faut d'abord discrétiser le processus de prix puisque celui-ci est continu. Une discrétisation exacte est ici possible. Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation :

$$S_{t+\Delta t} = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t + \Delta t) + \sigma W_{t+\Delta t}\right\} \Rightarrow S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma (W_{t+\Delta t} - W_t)\right\}$$

Or, nous savons que les mouvements browniens sont à accroissements indépendants et que  $W_{t+\Delta t} - W_t$  suit une loi normale  $N(0, \Delta t)$ . Par suite, nous obtenons le schéma récursif exact :

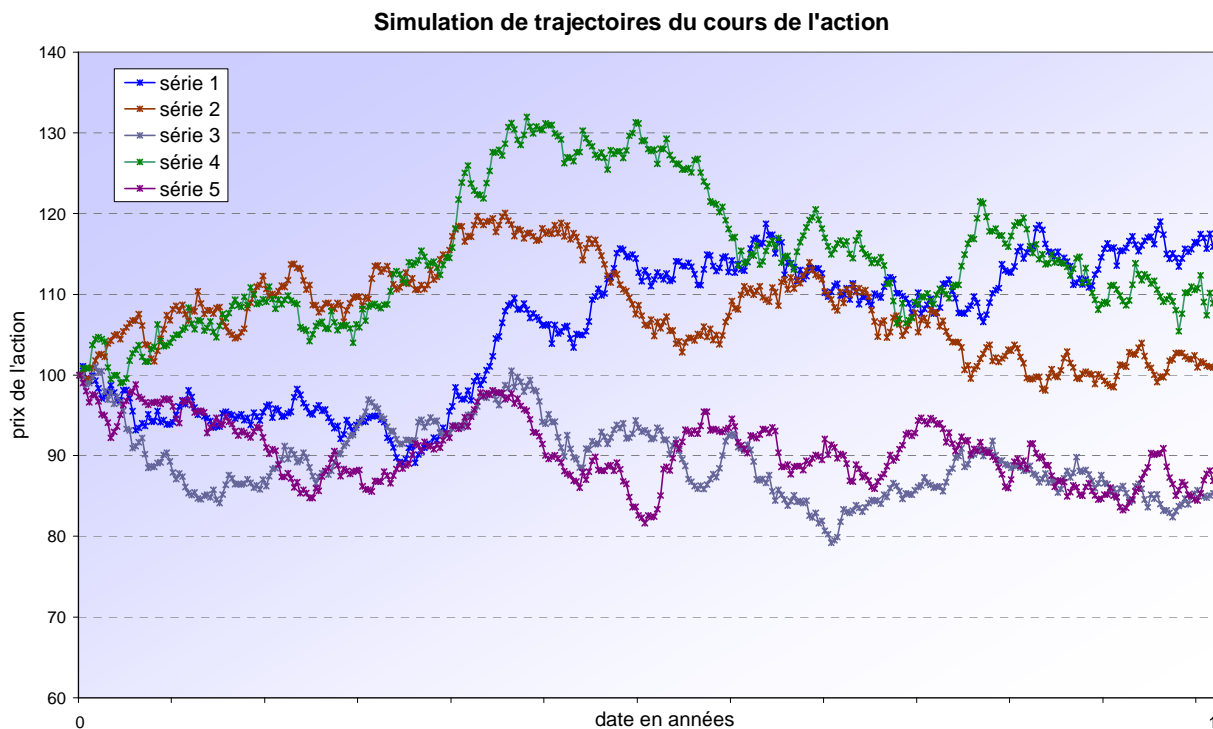
$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_t\right\}, \quad Z_t \text{ de loi } N(0,1)$$

Nous effectuons 5 simulations de trajectoires sous Excel, avec le paramétrage suivant :

- projection sur un an,
- nombre d'itérations : 365,
- pas de la discrétisation :  $\Delta t = \frac{1}{365} \cong 0.00274$ .

Les réalisations de la variable normale sont générées par le générateur pseudo aléatoire « Rand() » d'Excel (c'est un générateur congruentiel c'est-à-dire un générateur périodique issu d'une valeur initiale) et la fonction inverse de la loi normale.

Nous obtenons la représentation graphique suivante :

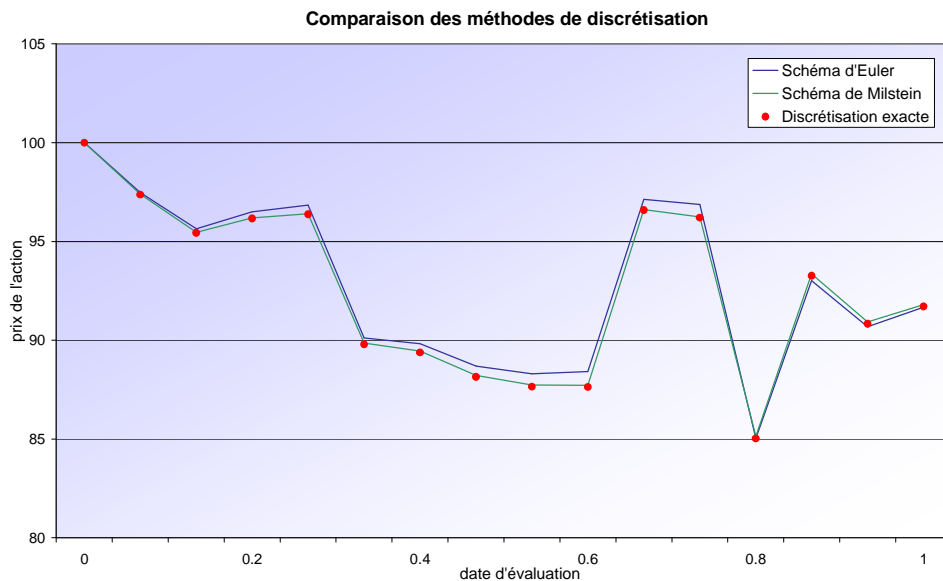


Par ailleurs, nous avons calculé la discrétisation selon les schémas d'Euler et de Milstein afin de comparer les écarts avec la discrétisation exacte :

- projection sur un an,
- nombre d'itérations : 15,
- pas de la discrétisation :  $\Delta t = \frac{1}{15} \cong 0.0667$ ,
- schéma d'Euler :  $\tilde{S}_{t+\Delta t} = \tilde{S}_t + \mu \tilde{S}_t \Delta t + \sigma \tilde{S}_t \sqrt{\Delta t} Z_t$ ,
- schéma de Milstein :  $\tilde{S}_{t+\Delta t} = \tilde{S}_t + \mu \tilde{S}_t \Delta t + \sigma \tilde{S}_t \sqrt{\Delta t} Z_t + \frac{\sigma^2 \tilde{S}_t \Delta t (Z_t^2 - 1)}{2}$ .

D'après les résultats de la simulation, il apparaît que la discrétisation selon le schéma de Milstein soit plus précise que la discrétisation selon le schéma d'Euler :

	Schéma d'Euler	Schéma de Milstein
Ecart maximal avec la discrétisation exacte	0.7768	0.1257
Ecart moyen par rapport à la discrétisation exacte	0.3174	0.0591



### 3.3. Conclusion

La simulation de Monte Carlo est une méthode utile en assurance pour simuler les trajectoires des variables sous-jacentes aux flux que nous cherchons à évaluer. **Son efficacité dépend du nombre de simulations réalisées.**

Pour déterminer la valeur actuelle d'un flux futur, nous procédons de la façon suivante :

- générer un grand nombre de scénarios du modèle d'actif, afin d'obtenir suffisamment de trajectoires pour satisfaire à la loi des grands nombres,
- calculer le flux projeté à la date voulue pour chaque trajectoire,
- actualiser chaque résultat selon le taux d'actualisation spécifique au modèle (soit selon l'approche Monde Réel, soit selon l'approche Market-Consistent)
- pour chaque flux, nous calculons enfin la moyenne de la séquence actualisée sur tous les scénarios : il s'agit de l'estimation de la valeur actuelle du flux futur considéré.

La mise en pratique nécessite un générateur de nombres aléatoires qui soit fiable, et une discrétisation des processus stochastiques qui sont continus.

L'avantage de la simulation par Monte Carlo est de pouvoir être utilisé aussi bien quand les flux dépendent du chemin suivi par les actifs sous-jacents, que lorsqu'ils dépendent juste de la valeur finale de ces actifs; n'importe quel processus d'évolution peut être envisagé. La simulation de Monte Carlo est donc adaptée à des structures de payoffs et à des processus stochastiques complexes. Les principaux inconvénients de la méthode sont le temps de calcul élevé et la difficulté de gérer les situations où l'actif dérivé peut être exercé prématurément.

Notons enfin que la simulation de Monte Carlo converge avec la théorie risque-neutre (notamment avec les formules fermées du modèle de Black et Scholes pour l'évaluation du prix des options européennes) et avec la théorie des déflateurs: **les méthodes sont équivalentes quand le nombre de simulations est suffisamment important.**

## 4. Comparaison des méthodes

L'objectif est de comparer, sur la base d'un simple exemple, les différentes approches utilisées lors de la détermination d'une valeur actuelle. Nous allons donc envisager les méthodes suivantes :

- le modèle de Black et Scholes,
- la simulation de Monte Carlo en univers risque neutre,
- la simulation de Monte Carlo en univers monde réel,
- la méthode des déflateurs.

### 4.1. Données du problème

Nous considérons un contrat d'épargne en euros basique, avec les caractéristiques suivantes :

- valeur initiale du fond :  $V = 100\,000$  €,
- taux minimum garanti (annuel) :  $T_{mg} = 2.5\%$ ,
- participation bénéficiaire :  $PB = 85\%$ ,

Nous ne prenons pas en compte les phénomènes de la mortalité et des rachats; nous supposons qu'il n'y a pas de frais. Par conséquent, le fond s'accroît d'une année sur l'autre suivant le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices.

Ce fond est investi à 30 % en obligations et à 70 % en actions :

- taux sans risque (instantané) :  $r = 5\%$ ,
- taux de rendement de l'action (instantané) :  $\mu = 10\%$ ,
- volatilité de l'action :  $\sigma = 20\%$ ,
- valeur initiale de l'action :  $S_0 = 1$ ,
- valeur initiale de l'obligation :  $P_0 = 1$ ,
- valeur de l'action en date  $t$  :  $S_t$ ,
- valeur de l'obligation en date  $t$  :  $P_t$ .

La valeur du fond en date 1 ( $F_1$ ) s'écrit donc de la façon suivante :

$$F_1 = V * [1 + T_{mg} + \text{Max}(PB * y - T_{mg}; 0)]$$

Où  $y$  correspond au rendement annuel du fond sur la période :

$$(1 + y) * (0.3P_0 + 0.7S_0) = 0.3P_1 + 0.7S_1 \Leftrightarrow y = 0.3P_1 + 0.7S_1 - 1$$

Le but est d'estimer la valeur actuelle du fond de la date 1 que nous noterons  $F_0$ .

### 4.2. Univers risque-neutre

**Quand le nombre de simulations tend vers l'infini, les résultats issus de la méthode de Black et Scholes et ceux de la simulation de Monte Carlo doivent converger :** les deux approches sont en effet théoriquement équivalentes. Nous nous proposons donc de vérifier cette affirmation.

Nous raisonnons en univers risque-neutre : quelque soit l'actif considéré, son rendement est égal au taux sans risque. Celui-ci correspond donc au taux d'actualisation.

L'obligation évolue au même rythme que l'actif sans risque et son prix  $P_t$  suit donc le processus suivant :  $dP_t = r P_t dt$

Comme le taux sans risque est constant, le prix de l'obligation est connu à l'avance :  $P_t = P_0 \exp^{rt}$

Le prix de l'action  $S_t$  vérifie l'équation différentielle standard :  $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$   
où  $W_t^Q$  est un mouvement brownien de loi normale standard sous la probabilité risque-neutre  $Q$  et représente la partie aléatoire du prix de l'action..

Il en résulte que le prix de l'action est modélisé par un mouvement brownien géométrique:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^Q\right\}.$$

■ **Décomposition de la valeur du fond pour mettre en évidence une option**

La valeur du fond en date 1 peut être décomposée en deux parties :

- une **partie déterministe** qui est fonction du taux minimum garanti,
- une **partie aléatoire** : il s'agit de la participation bénéficiaire qui dépend de l'évolution du cours de l'action.

Nous pouvons remarquer que la partie aléatoire peut s'exprimer sous la forme d'une option d'achat dont le support correspond à l'action dans laquelle le fond est investi. En effet :

$$F1 = V * (1 + Tmg) + V * PB * \text{Max}\left(y - \frac{Tmg}{PB}; 0\right)$$

$$\Leftrightarrow F1 = V * (1 + Tmg) + V * PB * \text{Max}\left(0.3 P_1 + 0.7 S_1 - 1 - \frac{Tmg}{PB}; 0\right)$$

$$\Leftrightarrow F1 = V * (1 + Tmg) + V * PB * 0.7 * \text{Max}\left[S_1 - \frac{1}{0.7} \left(1 + \frac{Tmg}{PB} - 0.3 * \exp^r\right); 0\right]$$

Ainsi,  $C_1 = \text{Max}\left[S_1 - \frac{1}{0.7} \left(1 + \frac{Tmg}{PB} - 0.3 * \exp^r\right); 0\right]$  correspond à la valeur d'échéance d'un call européen avec les caractéristiques suivantes :

- Support : l'action  $S$ ,
- Prix d'exercice :  $K = \frac{1}{0.7} \left(1 + \frac{Tmg}{PB} - 0.3 * \exp^r\right)$ ,
- Maturité :  $T = 1$  an.

■ **Modèle de Black et Scholes**

Pour calculer le prix actuel du call ( $C_0$ ), il suffit d'appliquer la formule générale d'évaluation d'une option :

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - K * \exp^{-rT} \Phi(d_2) \text{ avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}.$$

Nous obtenons alors un call de valeur actuelle égale à 0.094212.

La valeur du fond en date 1 et sa valeur actuelle sont obtenues en appliquant les relations suivantes :

$$F1 = V * (1 + Tmg) + V * PB * 0.7 * C_0 \exp^{rt},$$

$$F0 = V * (1 + Tmg) \exp^{-rt} + V * PB * 0.7 * C_0.$$

	Valeur du fond en date 1	Valeur actuelle du fond de date 1
Partie déterministe	102 500	97 501
Partie aléatoire	5 893	5 606
Total	108 393	103 107

■ **Simulation de Monte Carlo**

Nous partons de l'équation modélisant le cours de l'action :  $S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^Q\right\}$

Cette relation nous permet de simuler le prix de l'action à la date 1 (nous n'avons pas besoin de discrétiser la formule car nous raisonnons sur une période). Il suffit juste de générer des réalisations de la variable  $W_1^Q$  qui suit une loi normale  $N(0,1)$ . Une fois l'ensemble des simulations effectué, il ne nous reste plus qu'à prendre la moyenne actualisée au taux sans risque des différents scénarios pour estimer la valeur actuelle du fond de date 1.

Nous procédons à plusieurs simulations :

Nombre de simulations	Valeur du fond en date 1	Valeur actuelle du fond de date	Ecart avec BS	
			Valeur	Pourcentage
1 000	108 297	103 015	-91	-0.09%
10 000	108 531	103 238	131	0.13%
50 000	108 371	103 085	-21	-0.02%

Nous remarquons que la simulation de Monte Carlo converge vers le modèle de Black et Scholes quand le nombre de simulations augmente.

**4.3. Univers réel**

Dans l'univers réel, l'action a un taux de rendement propre qui est supérieur au taux sans risque. Le cours de l'action vérifie l'équation différentielle suivante :  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

où  $W_t$  est un mouvement brownien de loi normale standard sous la probabilité historique P.

Nous en déduisons l'équation décrivant le cours de l'action :  $S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$ .

Le théorème de Girsanov nous permet de faire un lien entre  $W_t$  et  $W_t^Q$ . En effet, nous savons que :

$$W_t^Q = W_t + \lambda t \text{ avec } \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

D'autre part, la dérivée L de Radon-Nikodym de Q par rapport à P ( $\frac{dQ}{dP} = L_T$ ) s'écrit :

$$L_t = \exp\left\{-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right\}$$

■ **Simulation de Monte Carlo**

Dans l'univers réel, il n'est pas possible d'actualiser les flux au taux sans risque. Il faut donc **être capable de choisir un taux d'actualisation qui reflète le risque inhérent aux flux considérés.**

Ce taux est obtenu en calculant un taux pondéré en fonction de la partie risquée (ou aléatoire) et non risquée (ou déterministe) supportées par le fond :

$$\text{Taux d'actualisation} = A r + (1 - A) \eta$$

Où : A = proportion non risquée du fond,

$\eta$  = taux d'actualisation de la partie aléatoire du fond (instantané),

r = taux sans risque instantané.

La partie aléatoire du fond dépend d'une option. Or, il n'est pas facile de connaître exactement le taux d'actualisation à appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. En effet, une position dans une option d'achat est plus risquée qu'une position directe sur le sous-jacent : le taux d'actualisation sera donc supérieur au rendement de l'action (ici 10%). Cependant, il n'est pas possible de quantifier cet écart sans connaître la valeur initiale de l'option. Ceci pose donc un **problème de raisonnement** : la valeur actuelle de l'option dépend du taux d'actualisation qui lui-même est dépendant de la valeur actuelle de l'option.

Supposons toutefois que nous connaissons déjà la valeur actuelle de l'option (grâce au modèle de Black et Scholes) et que nous cherchons à évaluer le taux d'actualisation, de sorte à vérifier la pondération présentée ci-dessus. Pour le cours de l'action (dans le monde réel), nous nous basons sur les résultats obtenus à l'aide d'une simulation de Monte Carlo. Nous obtenons alors les valeurs probables en date 1 pour le call et pour le fond. Ceci nous permet de calculer un taux d'actualisation, à la fois pour le call et pour le fond :

Valeurs actuelles selon le modèle de Black et Scholes	
Fond de date 1	103 107
Partie déterministe	97 501
Call	0.094212

A la date 1, la partie déterministe est égale à 102 500 (= 100 000 \* 1.025).

Nombre de simulations	Fond		Call		Pondération pour la partie déterministe	Taux estimé d'actualisation
	Valeur du fond en date 1	Taux global d'actualisation	Valeur du call en date 1	Taux d'actualisation		
1 000	110 291	6.82%	0.130949	32.93%	93.75%	6.75%
10 000	110 640	6.93%	0.136808	37.30%	93.60%	7.07%
50 000	110 441	6.89%	0.133454	34.82%	93.69%	6.88%

Où : Taux global d'actualisation =  $\ln\left(\frac{F_1}{F_0}\right)$ ,

Taux d'actualisation du call =  $\ln\left(\frac{C_1}{C_0}\right)$ ,

Pondération pour la partie déterministe =  $\frac{1}{2} \left( \frac{\text{Partie déterministe}_0}{F_0} + \frac{\text{Partie déterministe}_1}{F_1} \right) = A$ ,

Taux estimé d'actualisation =  $A r + (1 - A) \text{Taux d'actualisation du call}$ .

Nous constatons que nous trouvons bien un taux supérieur au taux sans risque (aux alentours de 6.9%) et que le taux d'actualisation du call (environ 35%) est nettement supérieur au rendement du sous-jacent.

Nous remarquons de plus que notre pondération nous donne une assez bonne approximation du taux d'actualisation permettant d'être cohérent avec les résultats obtenus en univers risque-neutre. Toutefois, cela ne résout pas le problème de la détermination du taux d'actualisation puisque nous avons supposé que le prix actuel de l'option était déjà connu.

Ainsi, pour estimer le taux d'actualisation à appliquer au fond, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires concernant par exemple la méthode de pondération : faut-il se baser sur la répartition en date initiale, en date finale, en fonction de la moyenne des deux solutions précédentes ?

D'autre part, en univers monde réel, le taux d'actualisation va forcément varier selon le rendement du sous-jacent, la répartition des investissements...

Tout ceci introduit donc une certaine part de subjectivité. Pour faire face au problème d'actualisation et au manque de rigueur mathématique de cette méthode, nous préférons utiliser la méthode des déflateurs.

■ **Méthode des déflateurs**

Nous savons que le processus déflateur  $D$  vérifie la relation suivante sous la probabilité historique  $P$ , quelque soit le processus de prix  $X$ :

$$E^P[D_T X_T] = X_0$$

Or, par définition de la dérivée de Radon-Nikodym de  $Q$  par rapport à  $P$ , nous avons également :

$$E^Q[X_T] = E^P[L_T X_T]$$

D'où :  $E^Q[\exp^{-rT} X_T] = E^P[\exp^{-rT} L_T X_T] = X_0$

Ce qui implique que  $E^P[D_T X_T] = E^P[\exp^{-rT} L_T X_T]$

$$\Leftrightarrow D_T = \exp^{-rT} L_T.$$

En remplaçant  $L_t$  par son expression explicite (d'après le théorème de Girsanov), nous pouvons exprimer le processus déflateur de la manière suivante :

$$D_t = D_0 \exp\left\{-\lambda W_t - \left(r + \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \text{ avec } D_0 = 1 \text{ (par convention).}$$

Cette expression est d'ailleurs équivalente à :  $D_t = D_0 \exp\left\{-\lambda W_t^Q + \left(\frac{\lambda^2}{2} - r\right)t\right\}$ .

Il est possible de vérifier la formule en calculant par exemple la valeur actuelle de l'action ; nous sommes censés retrouver  $S_0$  :

$$\begin{aligned} E[D_t S_t] &= E\left[D_0 S_0 \exp\left\{-\lambda W_t - \left(r + \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \exp\left\{\sigma W_t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}\right] \\ \Leftrightarrow E[D_t S_t] &= D_0 S_0 \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2} - r - \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} E[\exp\{(\sigma - \lambda) W_t\}] \\ \Leftrightarrow E[D_t S_t] &= D_0 S_0 \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2} - r - \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{(\sigma - \lambda) W - \frac{1}{2t} W^2\right\} dW \\ \Leftrightarrow E[D_t S_t] &= D_0 S_0 \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2} - r - \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \exp\left\{\frac{(\sigma - \lambda)^2}{2}t\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(W - (\sigma - \lambda)t)^2\right\} dW \\ \Leftrightarrow E[D_t S_t] &= D_0 S_0 \exp\{(b - r - \sigma \lambda)t\} \\ \Leftrightarrow E[D_t S_t] &= S_0 \end{aligned}$$

De cette manière, il est possible de calculer la valeur actuelle du fond de date 1, sans utiliser de taux d'actualisation. En effet, nous aurons :  $E^P[D_1 F_1] = F_0$ . A nouveau, nous allons raisonner en décomposant le fond.

Pour la partie déterministe, il suffit de calculer l'espérance de  $D_t$  :

$$\begin{aligned} E[D_t] &= E\left[D_0 \exp\left\{-\lambda W_t - \left(r + \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\}\right] \\ \Leftrightarrow E[D_t] &= D_0 \exp\left\{-rt - \frac{\lambda^2}{2}t\right\} E[\exp\{-\lambda W_t\}] \\ \Leftrightarrow E[D_t] &= D_0 \exp\left\{-rt - \frac{\lambda^2}{2}t\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\lambda W - \frac{1}{2t}W^2\right\} dW \\ \Leftrightarrow E[D_t] &= D_0 \exp\left\{-rt - \frac{\lambda^2}{2}t\right\} \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}t\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(W + \lambda t)^2\right\} dW \\ \Leftrightarrow E[D_t] &= D_0 \exp^{-rt} \end{aligned}$$

La valeur actuelle de la partie déterministe est donc égale au produit de  $E[D_t]$  par la valeur du fond initial valorisé au taux minimum garanti  $V^* (1+Tmg)$ .

Pour la partie aléatoire, il s'agit de calculer  $C_0 = E^P[C_1 D_1] = E^P[\text{Max}(S_1 - K; 0) D_1]$  :

$$E^P[\text{Max}(S_1 - K; 0) D_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} D_0 \exp\left\{-\lambda W_t - \left(r + \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \text{Max}\left(S_0 \exp\left\{\sigma W_t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} - K; 0\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{W_t^2}{2t}\right\} dW_t$$

Posons  $A = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma}$  ; il en résulte que :

$$\begin{aligned} E^P[\text{Max}(S_1 - K; 0) D_1] &= \\ D_0 S_0 \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2} - r - \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \int_A^{+\infty} \frac{\exp\left\{(\sigma - \lambda)W_t - \frac{W_t^2}{2t}\right\}}{\sqrt{2\pi}} dW_t - D_0 K \exp\left\{-\left(r + \frac{\lambda^2}{2}\right)t\right\} \int_A^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\lambda W_t - \frac{W_t^2}{2t}\right\}}{\sqrt{2\pi}} dW_t \\ \Leftrightarrow E^P[\text{Max}(S_1 - K; 0) D_1] &= D_0 S_0 \Phi\left(\frac{-A + (\sigma - \lambda)t}{\sqrt{t}}\right) - D_0 K \exp^{-rt} \Phi\left(\frac{-A - \lambda t}{\sqrt{t}}\right) \\ \Leftrightarrow E^P[\text{Max}(S_1 - K; 0) D_1] &= D_0 S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - D_0 K \exp^{-rt} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Où  $\Phi$  correspond à la fonction de répartition de la loi normale standard.

Nous obtenons les résultats suivants, qui sont identiques à ceux issus du modèle de Black et Sholes :

Valeur actuelle du Call	0.09421201
Valeur actuelle du fond	103 107
Partie aléatoire	5 606
Partie déterministe	97 501



Ceci confirme le fait que la méthode des déflateurs et le modèle de Black et Scholes sont des approches équivalentes. Toutefois, les flux obtenus avec la méthode des déflateurs sont plus facilement interprétables puisqu'ils reflètent le rendement espéré réel des flux.

■ **Méthode des déflateurs et simulation de Monte Carlo**

Nous appliquons enfin la méthode des déflateurs en combinaison avec la simulation de Monte Carlo : au lieu de calculer  $F_0 = E^P[D_t F_t]$ , nous simulons les valeurs de  $D_t F_t$  en générant des réalisations de la loi normale :

$$D_1 F_1 = \left[ \exp \left\{ -\lambda W_1 - r - \frac{\lambda^2}{2} \right\} \right] * \left[ V * (1 + Tmg) + V * PB * 0.7 * \text{Max} \left[ \exp \left\{ \sigma W_1 + b - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - \frac{1}{0.7} \left( 1 + \frac{Tmg}{PB} - 0.3 * \exp^r \right); 0 \right] \right]$$

Où  $W_1$  suit une loi normale  $N(0,1)$ .

Puis, nous prenons la moyenne de ces scénarios pour estimer la valeur actuelle du fond :

Nombre de simulations	Valeur actuelle du fond de date 1	Ecart avec la valeur exacte	
		Valeur	Pourcentage
1 000	104 044	937	0.91%
10 000	102 765	-342	-0.33%
50 000	103 171	64	0.06%

Nous remarquons que les résultats convergent vers la valeur obtenue avec la méthode exacte des déflateurs.

**4.4. Conclusion**

Nous venons d'étudier une application pratique des différentes méthodes qui sont actuellement employées dans le domaine de l'assurance vie pour estimer la valeur actuelle de flux futurs. Il est possible de raisonner, soit en univers risque-neutre (les agents sont alors neutres face au risque et le rendement de n'importe quel actif est le taux sans risque), soit en univers réel (nous utilisons alors les données réels concernant le rendement des actifs). Dans tous les cas, **les méthodes d'évaluation sont équivalentes.**

En effet, nous avons pu constater que le modèle de Black et Scholes (univers risque-neutre) et la méthode des déflateurs (univers réel) ont fourni les mêmes résultats. Il semble que le modèle de Black et Scholes soit plus simple à mettre en place puisque nous ne considérons qu'un seul taux de rendement pour les actifs qui est égal au taux sans risque. Par contre, la méthode ne se prête pas à l'interprétation des flux, ce qui n'est pas le cas avec la méthode des déflateurs. Les flux obtenus peuvent en effet faire l'objet d'une analyse, puisque la technique repose sur des hypothèses réelles.

D'autre part, nous avons vu que les évaluations issues de ces approches peuvent être approximées par la simulation de Monte Carlo. Cette méthode est assez pratique : il suffit de projeter les flux après avoir générer des variables aléatoires et d'en prendre la moyenne. Les résultats sont plus ou moins précis selon le nombre de scénarios : **il y a convergence lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini.**



## PARTIE IV : VALEUR INTRINSEQUE D'UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE VIE (EV)

L'incertitude des marchés financiers et des risques supportés par les assureurs nécessite la diffusion d'informations rigoureuses : **l'objectif est d'évaluer au mieux la santé financière des sociétés d'assurance**. Les assureurs ont donc besoin de méthodes d'évaluation susceptibles de mesurer la rentabilité de leurs produits, de leurs secteurs d'activité et de leur compagnie.

**L'interprétation du résultat comptable ne suffit pas à donner une vision complète de la performance des activités en assurance vie.** En effet, le résultat comptable ne reflète pas toujours la vraie rentabilité de la société :

- des ventes de contrats peuvent impliquer des pertes importantes à cause des frais d'acquisition plus élevés la première année ;
- des volumes élevés de rachats peuvent dégager des gains (avec les pénalités de rachat) ;
- la société peut réaliser des plus-values afin d'atteindre le résultat désiré.

D'autre part, il ne faut pas oublier que les contrats d'assurance vie sont des opérations de long terme, avec un cycle de production inversé : les primes sont encaissées avant la réalisation des sinistres qu'elles servent à couvrir. Il faut donc envisager **une vision prospective** : la performance actuelle d'un contrat va dépendre de son évolution future.

C'est pourquoi **un indicateur spécifique aux activités d'assurance vie a été élaboré : l'Embedded Value (EV) ou Valeur Intrinsèque**. Cette approche est retenue depuis plusieurs années par les analystes du secteur de l'assurance. Elle permet :

- d'estimer la valeur actualisée d'un portefeuille de contrats (en excluant la production future),
- de suivre la performance de la société et sa création de valeur économique,
- d'effectuer des tests de rentabilité sur les affaires nouvelles (New Business),
- d'effectuer des analyses de sensibilités afin d'identifier les risques auxquels est exposée la compagnie.

L'EV complète la photographie annuelle de la compagnie, notamment en ce qui concerne l'analyse du résultat et la rentabilité sur fonds propres (ROE, Return On Equity).

Pour pouvoir mesurer la performance et créer de la valeur de manière optimale, **plusieurs techniques d'évaluation ont fait leurs preuves**, à savoir :

- l'approche traditionnelle de l'Embedded Value (TEV),
- l'European Embedded Value (EEV),
- la Market Consistent Embedded Value (MCEV).

La TEV est la technique la plus couramment utilisée mais cette méthode déterministe a récemment montré certaines faiblesses, notamment suite à la chute significative des marchés boursiers et des taux d'intérêts de ces dernières années. C'est pourquoi de nouvelles techniques stochastiques sont apparues comme l'EEV puis la MCEV.

Nous allons d'abord présenter de manière générale la méthodologie traditionnelle. Puis, nous émettrons les critiques qui en découlent. Nous décrirons ensuite brièvement les principes fondamentaux de l'EEV. Nous insisterons enfin sur la MCEV qui est actuellement l'approche préconisée par Towers Perrin-Tillinghast dans le calcul d'une EV et qui fait l'objet de notre étude.

## 1. L'Embedded Value Traditionnelle (TEV)

### 1.1. Méthodologie

La TEV d'une société est définie comme la valeur actuelle des montants futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures. C'est, en quelque sorte, **le prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie**. Elle prend en compte, d'une part, la richesse des actionnaires dans la société, et d'autre part, la richesse des actionnaires dans les profits futurs. Elle est ainsi constituée de deux éléments qui sont communément appelés Actif Net Réévalué (ANR) et valeur de l'In Force (VIF). Nous avons donc :

$$TEV = ANR + VIF$$

Où: ANR = Actif Net Réévalué ou Net Asset Value (NAV),  
VIF = Valeur du stock (Value of In Force).

#### ■ Actif Net Réévalué

L'ANR correspond à **la part de richesse de la société qui reviendrait aux actionnaires dans le cas d'une cessation d'activité**. Il s'agit de déterminer les montants déjà dans la compagnie à la date d'évaluation, c'est-à-dire le montant des actifs diminués de ce qui est destiné à des tiers (les non actionnaires). Les éléments suivants sont alors à considérer :

- les Capitaux propres : capital social (avec l'éventuelle prime d'émission), le report à nouveau, le résultat de l'exercice ;
- la Réserve de capitalisation,
- les Plus-values latentes nettes appartenant aux actionnaires (la plus-value correspond à la différence entre la valeur de réalisation d'un actif et de sa valeur au bilan).

Notons que le traitement de la réserve de capitalisation et le mode de calcul des plus-values latentes appartenant aux actionnaires sont propres à chaque compagnie (il n'existe pas de consensus de marché à ce sujet).

En fait, l'ANR se définit comme la valeur de l'actif net comptable (ANC) d'un Bilan (établi sur la base du coût historique), qu'il faut corriger pour tenir compte de la valeur économique :

$$\begin{aligned} ANR &= ANC \\ &+/- \text{Retraitements comptables de tout impact fiscal éventuel} \\ &+ \text{Plus ou moins values latentes nettes d'impôt et de participation aux bénéfices.} \end{aligned}$$

#### ■ Valeur du stock (VIF)

La valeur du stock se définit **comme la valeur actuelle des profits probables projetés distribuables aux actionnaires, actualisés à un taux représentant le coût réel du capital**. Elle se calcule comme la différence entre la valeur actuelle des résultats futurs sur les contrats en cours à la date d'évaluation et le coût de portage de la marge de solvabilité associée à ces contrats :

$$VIF = PVFP - CMS$$

Où : PVFP = Somme des profits futurs nets d'impôts actualisés (Present Value of Futur Profit),  
CMS = Coût de la marge de solvabilité.

■ **Valeur actuelle des profits futurs (PVFP)**

Afin d'évaluer la PVFP, il faut connaître tous les éléments qui interviennent dans le compte de résultat. En effet, l'objectif est **de réaliser des projections de l'activité d'assurance sur plusieurs périodes** et de calculer ensuite, à la date d'évaluation, la valeur de l'ensemble des cash-flows futurs probables (nets d'impôts), générés par les contrats en portefeuille.

Si nous appliquons une vision comptable, le profit se détermine de la façon suivante, à chaque fin d'exercice comptable cours de la projection :

---

Primes versées
+ Revenus financiers
- Prestations versées (rachats, termes, décès)
- Charges
- Commissions
- Dotation aux provisions
- Impôts
<hr/>
<b>= Profit net d'impôt</b>

---

Chaque élément est estimé en tenant compte de la probabilité de survenance de l'évènement, selon des hypothèses Best Estimate (loi de rachat, probabilité de décès ...).

Nous obtenons une chronique des profits futurs qui sont ensuite actualisés (à la date d'évaluation) selon un unique taux d'actualisation et sommés pour obtenir la PVFP.

Notons que le taux d'actualisation est obtenu en ajoutant au taux sans risque, une prime de risque. Ce taux doit être cohérent avec les paramètres du modèle économique utilisé lors de la projection.

■ **Coût de la marge de solvabilité (CMS)**

La réglementation impose aux entreprises pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation, de disposer à tout moment d'une marge de solvabilité suffisante (en plus des provisions techniques), destinée à amortir les effets d'éventuelles variations économiques défavorables, comme les écarts sur les risques de placements, de sinistralité ou de mortalité. Cette obligation constitue un élément important du système de surveillance prudentielle visant à protéger les intérêts des assurés et des preneurs d'assurance.

L'exigence minimale de capital (suivant Solvabilité I, système de solvabilité actuellement en vigueur) est décrite dans l'article R.334-13 du Code des assurances. Pour l'assurance vie, la marge de solvabilité se calcule de la manière suivante :

---

4 % des provisions nettes de réassurance, ramené à 1,00% si le risque de placement est transféré à l'adhérent (contrats en Unités de Compte, sans garantie plancher), en intégrant un ratio destiné à tenir compte forfaitairement de la réassurance
+ 0,3 % des capitaux sous risques non négatifs, net de réassurance
<hr/>
<b>= Marge de solvabilité</b>

---

Les capitaux sous risque désignent les capitaux décès, déduction faite de la provision mathématique du risque principal (provisions mathématiques et provisions de gestion).

**Cette marge de solvabilité est donc « bloquée »**, dans le sens où elle est placée à un taux de rendement inférieur aux objectifs de rentabilité des actionnaires qui correspond au taux

d'actualisation. Cela représente **un manque à gagner** qui va constituer une charge supplémentaire (ie : un coût) à prendre en compte lors de la détermination de la VIF. Ce coût de la marge de solvabilité se calcule selon deux méthodes : une selon la vision « coût d'opportunité » et l'autre selon la vision « valeur financière ».

■ La vision « coût d'opportunité » :

L'actionnaire, qui attend un rendement pour son capital égal au taux d'actualisation, ne reçoit que le taux de rendement des actifs (après impôt) placés en couverture de la marge de solvabilité (pour la part de capital affecté à cette marge de solvabilité). Le coût de la marge de solvabilité à la date de projection  $i$  ( $CMS_i$ ) correspond ainsi à la différence entre ces deux rendements :

$$CMS_i = MS_{i-1} * (Tact - TRA_{\text{après impôts}})$$

Où :  $MS_{i-1}$  = marge de solvabilité estimée à la date de projection précédente,

Tact = taux d'actualisation,

$TRA_{\text{après impôt}}$  = taux de rendement des actifs après impôt placés en couverture de la marge de solvabilité.

Pour connaître, le coût total de la marge de solvabilité à la date de calcul (CMSA), il suffit ensuite de sommer les  $CMS_i$  en les actualisant suivant le taux d'actualisation considéré :

$$CMSA = \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{MS_{i-1} * (Tact - TRA_{\text{après impôts}})}{(1 + Tact)^i}$$

■ La vision « valeur financière » :

La marge de solvabilité, ses variations et ses intérêts (après impôts) constituent une série de flux, qui sont tous générés par la marge de solvabilité évaluée de début de période ( $MS_0$ ). A une certaine date de projection  $i$ , le flux  $F_i$  est caractérisé par la relation suivante :

$$F_i = MS_{i-1} * TRA_{\text{après impôts}} + MS_{i-1} - MS_i$$

Dans cette optique, les variations de marge sont assimilées à des revenus (négatifs en cas de pertes) au même titre que les intérêts, mais ne sont pas imposables. Cette série de flux a une certaine valeur actuelle pour l'actionnaire, évaluée selon le taux d'actualisation.

Le coût de la marge de solvabilité (CMSB) correspond au montant de capital nécessaire pour la marge de solvabilité initiale, diminuée de la valeur actuelle de la série de flux et du capital actualisé nécessaire pour couvrir la marge de solvabilité à l'horizon de projection ( $MS_{\text{horizon}}$ ):

$$CMSB = MS_0 - \frac{MS_{\text{horizon}}}{(1 + Tact)^{\text{horizon}}} - \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{MS_{i-1} * TRA_{\text{après impôts}} + MS_{i-1} - MS_i}{(1 + Tact)^i}$$

■ Vérification de l'équivalence :

Si nous supposons qu nous allons jusqu'au bout de la projection et que la marge de solvabilité à la fin de la projection est nulle, alors nous pouvons montrer que les deux méthodes en présence sont équivalentes.

Partons de la vision « valeur financière » pour retrouver la vision « coût d'opportunité » :

$$\begin{aligned} \text{CMSB} &= \text{MS}_0 - \frac{\text{MS}_{\text{horizon}}}{(1+\text{Tact})^{\text{horizon}}} - \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1} * \text{TRA}_{\text{après impôts}} + \text{MS}_{i-1} - \text{MS}_i}{(1+\text{Tact})^i} \\ \Leftrightarrow \text{CMSB} &= \text{MS}_0 - \frac{\text{MS}_{\text{horizon}}}{(1+\text{Tact})^{\text{horizon}}} - \text{TRA}_{\text{après impôts}} * \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} - \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} + \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_i}{(1+\text{Tact})^i} \\ \text{or, } \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_i}{(1+\text{Tact})^i} - \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} &= \frac{\text{MS}_{\text{horizon}}}{(1+\text{Tact})^{\text{horizon}}} - \frac{\text{MS}_0}{(1+\text{Tact})} + \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}-1} \text{MS}_i * \left( \frac{1}{(1+\text{Tact})^i} - \frac{1}{(1+\text{Tact})^{i+1}} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_i}{(1+\text{Tact})^i} - \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} &= \frac{\text{MS}_{\text{horizon}}}{(1+\text{Tact})^{\text{horizon}}} - \frac{\text{MS}_0}{(1+\text{Tact})} + \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}-1} \text{MS}_i * \frac{\text{Tact}}{(1+\text{Tact})^{i+1}} \\ \text{d'où : CMSB} &= \text{MS}_0 - \frac{\text{MS}_0}{(1+\text{Tact})} + \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}-1} \frac{\text{MS}_i * \text{Tact}}{(1+\text{Tact})^{i+1}} - \text{TRA}_{\text{après impôts}} * \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} \\ \Leftrightarrow \text{CMSB} &= \text{MS}_0 * \frac{\text{Tact}}{(1+\text{Tact})} + \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}-1} \text{MS}_i * \frac{\text{Tact}}{(1+\text{Tact})^{i+1}} - \text{TRA}_{\text{après impôts}} * \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} \\ \Leftrightarrow \text{CMSB} &= \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \text{MS}_{i-1} * \frac{\text{Tact}}{(1+\text{Tact})^i} - \text{TRA}_{\text{après impôts}} * \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \frac{\text{MS}_{i-1}}{(1+\text{Tact})^i} \\ \Leftrightarrow \text{CMSB} &= \sum_{i=1}^{\text{horizon de projection}} \text{MS}_{i-1} * \frac{\text{Tact} - \text{TRA}_{\text{après impôts}}}{(1+\text{Tact})^i} \\ \Leftrightarrow \text{CMSB} &= \text{CMSA} \end{aligned}$$

Les deux formules sont donc équivalentes mais chacune possède sa propre interprétation.

### ■ Récapitulatif

La TEV est un **indicateur de la valeur et du potentiel d'une compagnie d'assurance** : elle correspond à la richesse nette des actionnaires, augmentée de la VIF et diminuée du coût d'ajustement du capital.

Les principales caractéristiques de la méthode sont les suivantes :

- une projection déterministe des profits distribuables ;
- l'utilisation d'hypothèses « Best-Estimate » ;
- un unique scénario central : un seul taux d'actualisation ajusté au risque, un taux de rendement des actifs égal rendement moyen ;
- la prise en compte d'un coût d'opportunité lié à la détention d'un certain niveau de capital.

La publication des résultats et les analyses de variations permettent de se forger une opinion sur la performance opérationnelle et sur les actions liées à la gestion, en donnant un bilan complet de la compagnie à évaluer. D'autre part, grâce à une analyse assez détaillée de la valeur du New Business, la méthodologie fournit une base robuste pour estimer ce que vont coûter les contrats dans l'avenir.

Notons que la TEV ne prend pas en compte les flux générés par la production future. C'est pourquoi dans les publications, les compagnies présentent également la valeur d'une année de

production nouvelle (où les hypothèses de calcul diffèrent de celles utilisées pour la moyenne du portefeuille). Cette valeur est alors multipliée par un certain coefficient : il s'agit de **la valeur du Goodwill**, qui estime la valeur en rapport avec la progression des affaires nouvelles sur les années futures.

En ajoutant le Goodwill à la TEV, nous arrivons alors à une autre valeur significative de la société qui n'est autre que **la valeur totale de la compagnie ou Appraisal Value (AV)**.

De manière schématique, les éléments que nous venons de citer se présentent ainsi :

Valeur actuelle des profits futurs (PVFP)	Coût de la marge de solvabilité (CMS)	Embedded Value Traditionnelle (TEV)	Appraisal Value (AV)
	Valeur du stock (VIF)		
	Actif net réévalué (ANR)	Goodwill	

## 1.2. Critiques de la méthode

Bien que la TEV soit la technique d'évaluation la plus couramment utilisée dans les compagnies d'assurance vie pour évaluer leur activité et la création de valeur, **la technique connaît certaines faiblesses** qui ont été mises en évidence suite au contexte économique et financier de ces dernières années.

### ■ Un unique taux d'actualisation

Pour actualiser les flux futurs de trésorerie à une date d'évaluation donnée, la TEV applique **un unique taux ajusté au risque global**. Il n'y a donc pas de distinction entre les différents types de risques supportés par la compagnie d'assurance, ce qui constitue une hypothèse assez simpliste en ce qui concerne l'évaluation des risques.

Le taux d'actualisation correspond au taux sans risque, auquel nous ajoutons une prime de risque. L'ajustement est **assez difficile à calibrer** car il repose sur une analyse du profil de risques actuels en rapport avec la société (le risque financier et le risque d'assurance) et dépend également de l'appréciation des dirigeants.

Il apparaît donc une certaine part de subjectivité dans la détermination du taux. Ainsi, plusieurs sociétés peuvent utiliser un même taux d'actualisation, sans pour autant être exposées aux mêmes risques.

De plus, l'unicité du taux d'actualisation au cours de la projection implique **un manque de représentativité et de transparence entre le taux et les risques liés à l'activité d'assurance**. En effet, le taux d'actualisation n'est pas mis à jour afin de prendre en compte les changements dans le profil de risque des éléments à évaluer. Or, si les hypothèses permettant d'établir la prime de risque ne varient pas au cours du temps malgré une modification du profil de risque ou des marchés des investissements, les conditions qui prévalent sur le marché ne seront pas reflétées dans l'évaluation, et nous obtiendrons des résultats peu fiables par rapport à la réalité économique.



Ainsi, le calcul de la TEV ne peut être cohérent avec la valeur de marché des actifs de l'assureur : il n'est pas logique de considérer un taux d'actualisation forfaitaire unique pour tous les flux de trésorerie, alors que le prix de marché des actifs résulte de l'application de primes de risques variées. Il semblerait donc plus pertinent d'utiliser un taux d'actualisation variable en évaluant plus précisément les risques encourus (au niveau de la ligne du produit par exemple).

■ **Faiblesse dans le cas des options et des garanties**

Les conditions de marché de ces dernières années ont eu un impact sans précédent sur la position financière des compagnies d'assurance vie à travers le monde. La chute des marchés des investissements et des taux d'intérêts, accompagnée d'une mauvaise couverture des passifs par les actifs, a exposé les garanties et les options financières des contrats d'épargne, qui étaient jusqu'à présent à l'abri, remettant ainsi en doute la rentabilité et la solvabilité des sociétés d'assurance vie. Ces options ont donc une influence sur la valeur de la compagnie, car elles représentent un coût pour l'entreprise que l'application des normes IFRS oblige à prendre en compte.

Or, la TEV est inadaptée pour la valorisation des contrats avec des options et des garanties financières parce que la méthodologie repose sur un unique scénario central, avec un seul taux de rendement espéré des actifs financiers.

Prenons l'exemple d'un contrat avec un taux minimum garanti. Ce genre de contrat assure un rendement pour le fond égal au taux minimum garanti (TMG), quelque soit l'évolution du taux de rendement des actifs (TRA). Le taux servi à une certaine date peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$\text{Taux servi} = \text{TRA} + \max(\text{TMG} - \text{TRA}; 0)$$

où  $\max(\text{TMG} - \text{TRA}; 0)$  se comporte comme une option.

Si l'unique taux de rendement des actifs considéré est supérieur au taux minimum garanti, alors l'option n'est pas dans la monnaie et sa valeur intrinsèque est nulle, bien qu'il existe un coût lié à cette option. Le résultat espéré probable en rapport avec ce contrat n'est donc pas affecté par la charge liée à la garantie de taux minimum.

En présence de contrats avec des options et des garanties financières, il y a donc surévaluation systématique du résultat moyen projeté. Il est vrai qu'une solution serait de corriger la TEV de la valeur des options qui serait calculée séparément. Mais l'évaluation reste forfaitaire et imparfaite. Seul un cadre stochastique permet un traitement rigoureux du problème d'évaluation des engagements des contrats comprenant des options et des garanties financières (avec la méthode Black & Scholes par exemple). Dans le cadre stochastique, plusieurs taux de rendement sont envisagés, ce qui permet de valoriser l'option dans le cas où le taux de rendement est plus faible que le taux minimum garanti.

■ **Le coût de l'exigence en capital**

Le coût de la marge de solvabilité, tel qu'il est calculé dans la TEV (sur la base d'un différentiel de rendements entre le taux d'actualisation et le taux de rendement des actifs en représentation du capital requis), donne l'impression qu'un capital investi sur des actifs plus risqués pourrait tendre à diminuer son coût de détention, ce qui n'est pas forcément le cas. Le coût a d'ailleurs plutôt tendance à augmenter avec le risque encouru.

D'autre part, le coût du capital est en quelque sorte déconnecté des risques spécifiques liés à l'activité de la compagnie. En effet, le montant de capital nécessaire pour faire face à des pertes potentielles de l'activité ne dépend que de la réglementation. Il n'est pas du tout envisagé l'exigence de capital à détenir (et son coût) par rapport aux objectifs internes de la compagnie (pérenniser la société et éviter le risque de faillite), qui peut être supérieur à la réglementation en vigueur, notamment quand la société cherche à atteindre un certain niveau de notation par rapport aux agences de rating.

En fait, il semble que le coût de portage défini dans la méthode de la TEV ne soit approprié que dans le cas où le capital requis correspond au capital réglementaire, ce qui est assez restrictif par rapport aux récents développements préconisés par les compagnies pour déterminer leur exigence en capital.

■ **Manque de communication et d'harmonisation pour la diffusion et la comparabilité des résultats entre les compagnies**

La TEV est calculé en faisant certaines hypothèses de différentes natures :

- des hypothèses économiques : l'inflation, les rendements, les impôts, l'actualisation...
- des hypothèses sur les contrats : les chargements, les chutes, le taux minimum garanti, la garantie plancher, les arbitrages, ...
- des hypothèses sur les coûts : les commissions, les frais (notamment d'administration, d'acquisition, de gestion) et leur ventilation.

Le problème réside dans le fait que **l'ensemble de ces hypothèses est fixé à la date d'évaluation selon des estimations propres à chaque compagnie**. Or, il existe un réel manque de communication par rapport à la méthodologie et à la justification du choix de ces hypothèses. Ceci est d'autant plus ennuyeux que la TEV est très sensible à certains paramètres (comme le taux de rendement des actifs, le taux d'actualisation, le niveau de participation aux bénéficiaires). Un mauvais calibrage pourrait donc conduire à une publication et une interprétation erronée de la situation de la compagnie.

Il semble donc nécessaire d'harmoniser le cadre d'évaluation en instaurant certaines règles de cohérence, dans le but d'augmenter la comparabilité et la fiabilité des résultats entre les sociétés.

### **1.3. Conclusion**

La TEV est une **méthode traditionnelle d'évaluation, simple et directe à mettre en œuvre**. Elle est connue de tous dans le secteur de l'assurance. Elle donne un point de vue clair sur la valeur du New Business et sur le développement de l'In Force et permet de lier les notions de tarification, de performance et de rendement de capital. Toutefois, **la méthode a montré ses limites**, tant au niveau du choix du taux d'actualisation, que de la valorisation des options et des garanties financières de certains contrats d'épargne. Pour ces options cachées, **l'application des méthodes stochastiques et de modèles de projection dynamique devient inévitable**, notamment lorsque un contrat associe plusieurs garanties complexes non déterministes.

Il est ainsi devenu évident que l'utilisation de la méthodologie traditionnelle comme un outil standard de mesure de la valeur et de la performance des compagnies d'assurance vie est devenu insuffisante, étant donné qu'elle ne permet pas de refléter les risques de marché liés aux conditions de ces dernières années. Des changements significatifs doivent donc être apportés pour pallier aux faiblesses de la TEV afin d'améliorer la cohérence du reporting financier en assurance vie et la précision des informations susceptibles d'aider la gestion de la société.

C'est pourquoi les actuaires et les analystes travaillent activement à **de nouvelles techniques d'évaluation qui s'orientent vers une vision économique cohérente avec les valeurs de marché**. De nouveaux concepts ont ainsi vu le jour :

- l'European Embedded Value (EEV) : une EV stochastique calculée selon les normes du CFO Forum ;
- la Market Consistent Embedded Value (MCEV) : une EV stochastique cohérente avec les valeurs de marché.

Nous allons donc à présent décrire brièvement les notions qui interviennent dans l'EEV. Puis, nous verrons de manière plus approfondie l'EEV de type market-consistent (i.e. une MCEV), qui est la technique d'évaluation actuellement employée par Towers Perrin-Tillinghast et qui fera l'objet de notre application numérique.

## **2. European Embedded Value (EEV) : une Embedded value calculée selon les normes du CFO Forum**

En mai 2004, le secteur de l'assurance vie en Europe a connu une étape importante. En effet, le CFO Forum (groupement des directeurs financiers des 19 plus grandes compagnies d'assurance européennes ; voir *Annexe 6* pour plus de détails) a publié **12 principes fondamentaux, servant de base commune dans le cadre de l'évaluation et de la communication de l'EV : il s'agit de l'European Embedded Value (EEV)**. Les 12 principes sont résumés en *Annexe 7*.

Le CFO forum avait pour objectifs:

- de développer un guide avec des normes uniques et communes à toute l'Europe, afin de standardiser la méthodologie et d'accroître la cohérence, la transparence et l'homogénéité du reporting en assurance vie ;
- de répondre aux critiques et aux réserves actuelles émises au sujet de la TEV, en s'assurant que l'EEV est crédible, robuste et peut être appliquée de manière cohérente ;
- de mieux prendre en considération les risques supportés par la compagnie d'assurance ;
- de s'assurer que la méthodologie reflète la valeur économique de long terme de l'activité ;
- de prescrire un niveau minimal de publications avec des analyses de sensibilités, de sorte à améliorer la comparabilité des résultats entre les compagnies qui adoptent des hypothèses différentes.

Les recommandations du CFO Forum permettent ainsi **d'augmenter la qualité de l'information financière diffusée par les compagnies d'assurance européennes, en mettant l'accent sur la valorisation des risques**. Mais le succès du CFO Forum dépend de la manière dont les compagnies gèrent les éléments pour lesquels elles disposent d'une certaine liberté d'action. En effet, comme nous allons le voir par la suite, des approches variées (mais théoriquement équivalentes) ont été proposées au sujet :

- de la détermination du taux d'actualisation ;
- du calcul explicite du coût des options cachées et des garanties financières ;
- de la façon dont est traité le coût du capital.

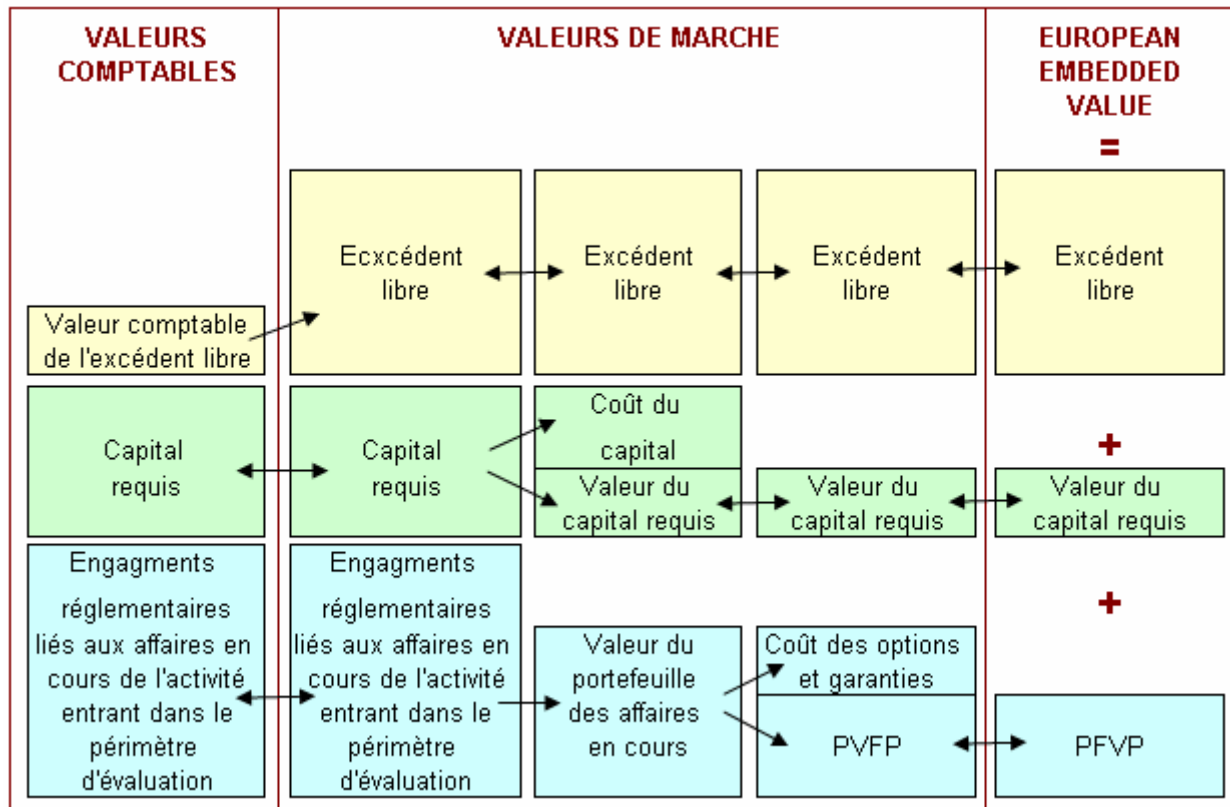
C'est ensuite à la compagnie de choisir laquelle des méthodes est la mieux adaptée à sa situation.

**L'EEV n'est pas en soit une nouvelle technique d'évaluation mais plutôt une extension de la méthode traditionnelle.**

Elle se compose des éléments suivants :

- l'excédent libre (surplus du capital qui n'est pas nécessaire pour supporter les affaires en cours de l'activité couverte à la date d'évaluation);
- le capital requis ou l'exigence en capital, diminué de son coût de portage ;
- la valeur actuelle des profits futurs distribuables aux actionnaires provenant des affaires en cours de l'activité entrant dans le périmètre de l'évaluation (PVIF, Present Value of In Force que nous noterons PVFP par analogie avec la méthodologie de la TEV).

Le calcul de l'EEV peut être représenté schématiquement de la façon suivante :



Le point fondamental dans l'implémentation de cette méthodologie réside dans **l'allocation du risque qui s'effectue à trois niveaux** :

- au niveau du taux d'actualisation ;
- au niveau du coût des options financières et des garanties ;
- au niveau du coût du capital.

Le but est de pouvoir refléter le plus fidèlement possible l'ensemble des risques liés aux activités entrant dans le périmètre de l'évaluation.

## 2.1. Taux d'actualisation (RDR, Risk Discount Rate)

Une des plus grandes difficultés dans une évaluation concerne le choix du taux appliqué pour actualiser les profits futurs distribuables aux actionnaires issus des activités entrant dans le périmètre de l'évaluation. Jusqu'à présent, il n'existait pas vraiment de règle pour établir le RDR. Celui-ci était obtenu en ajoutant au taux sans risque une prime de risque, définie de manière plus ou moins subjective au sein de chaque compagnie, sans mettre en évidence de lien direct avec les risques encourus par les activités considérées. Par conséquent, certaines sociétés pouvaient appliquer le même taux d'actualisation, sans pour autant supporter le même risque, ce qui constituait une certaine incohérence.

Le CFO Forum a résolu ce problème dans l'EEV, en exposant certaines règles pour établir le RDR : **il doit être égal au taux sans risque plus une prime de risque dont la détermination doit être clairement expliquée.**

Le taux sans risque peut faire référence :

- aux taux des obligations d'état (OAT) ;
- aux taux swap.

La prime de risque doit refléter tout risque associé à l'émergence des profits distribuables qui n'ont pas été affectés ailleurs dans l'évaluation. Le RDR devrait donc varier suivant les groupes de produits et la situation géographique puisqu'à ce niveau, les risques sont différents.

Deux méthodes sont proposées :

- **l'approche « top-down »** : méthodologie de valorisation financière classique avec l'intervention du bêta de la société ;
- **l'approche « bottom-up »** : évaluation du risque associé aux différents flux issus des produits.

■ **l'approche « top-down »** :

Cette approche détermine un unique RDR de façon similaire à la méthodologie employée dans l'approche Monde Réel (voir partie « *Modélisation stochastique* »). Il s'agit d'une **méthodologie de valorisation financière classique, qui évalue les risques à partir des données du marché.**

En effet, le taux d'actualisation est calculé en partant d'un calibrage des risques basés sur le prix de marché des flux de trésorerie versés aux actionnaires et aux créanciers, à savoir :

- la valeur de marché de l'investissement, estimée à l'aide de la formule du MEDAF et du bêta de la société;
- la valeur de marché de la dette, suivant le taux de marché en vigueur.

A partir de ces éléments, nous déterminons le WACC, qui permet d'établir un taux d'actualisation en tenant compte du coût du risque selon le marché:

$$WACC = \frac{D}{V} r_d + \frac{E}{V} [r_f + \beta_e (E[r_m] - r_f)]$$

Où :  $\frac{D}{V}$  = proportion de la compagnie financée par les emprunts,

$\frac{E}{V}$  = proportion de la compagnie financée par investissement,

$V = D + E$  = valeur financée totale de la compagnie,

$r_d$  = taux représentant le coût de la dette, net d'impôts,

$r_f$  = taux sans risque (sur la base de la rentabilité annuelle moyenne d'un investissement en obligations d'état),

$E[r_m]$  = taux de rentabilité annuel moyen du marché des actions,

$\beta_e$  = bêta de la compagnie retraçant le comportement de la société par rapport au marché.

$r_f + \beta_e (E[r_m] - r_f)$  = taux représentant le coût de l'investissement ;

$E[r_m] - r_f$  = prime de risque du marché.

Ce taux est assimilable au taux d'actualisation applicable pour l'ensemble des activités de la compagnie (activité d'assurance vie et autres). Un ajustement est donc nécessaire pour évaluer uniquement l'activité vie de la compagnie.

Le taux d'actualisation WACC applicable au portefeuille vie peut être obtenu en 6 étapes :

- calculer le WACC Groupe avec les données du marché (suivant la relation ci-dessus);
- effectuer un ajustement pour les autres lignes (banque, compagnies non vie,...) ;
- faire un ajustement pour les affaires nouvelles vie ;
- éliminer l'excédent de capital ;
- ajuster par rapport aux options cachées et aux garanties financières;
- considérer le risque hors marché.

Mais cela n'est pas aussi simple dans la réalité : le manque d'informations concernant notamment les bêtas des activités à exclure ne permet pas toujours d'obtenir un taux d'actualisation objectif.

Bien que l'approche « top-down » soit théoriquement appropriée pour les groupes cotés, nous pouvons noter qu'il semble difficile de voir comment lier, dans la pratique, le niveau de risque de l'activité et le RDR : l'approche donne un unique taux d'actualisation qui est utilisé pour l'ensemble de l'activité, ce qui ne retrace pas le risque réel supporté au niveau de chaque ligne de produits. D'autre part, il n'est pas possible d'appliquer cette approche pour tarifier les affaires nouvelles ou évaluer l'impact d'un changement dans les politiques d'investissement ou de distribution des bénéfices, car tous ces éléments ont un impact inconnu sur le bêta requis pour le calcul du RDR.

■ **l'approche « bottom-up » :**

L'objectif est **d'évaluer le risque à partir d'une évaluation plus fine des flux de trésorerie issus de chaque produit**. En effet, pour chaque produit et suivant la région géographique, une prime de risque est déterminée de sorte que le RDR reflète directement le profil de risque lié au produit. Des consolidations successives sont ensuite effectuées pour aboutir au taux d'actualisation global.

Il existe deux variantes pour estimer la prime de risque. Nous parlons en effet de :

- l'approche des bêtas spécifiques aux produits ;
- l'approche market-consistent ou cohérente avec les valeurs de marché.

■ **l'approche reposant sur les bêtas spécifiques des produits**

Le RDR est calculé de la manière suivante : 
$$\text{RDR} = \text{Taux sans risque} + \text{prime de risque} + \text{marge de sécurité.}$$

La marge de sécurité correspond à une allocation forfaitaire, indépendante du produit considéré. La prime de risque correspond au bêta spécifique du produit multiplié par la prime de risque d'investissement. Le bêta du produit va dépendre :

- de l'allocation des actifs ;
- du niveau de capital requis, affecté pour supporter le produit ;
- la valeur des primes futures relatives à la taille de la réserve (du fond) ;
- la structure de chargement du produit, des coûts et des prestations.

Ce paramètre reflète donc le niveau du risque de marché en rapport avec le produit considéré, sur une base dynamique (si le profil de risque change alors le bêta change).

Bien que cette approche mette en évidence le risque supporté au niveau de chaque ligne de produits, la détermination des bêtas peut parfois poser un problème, car nous ne disposons pas

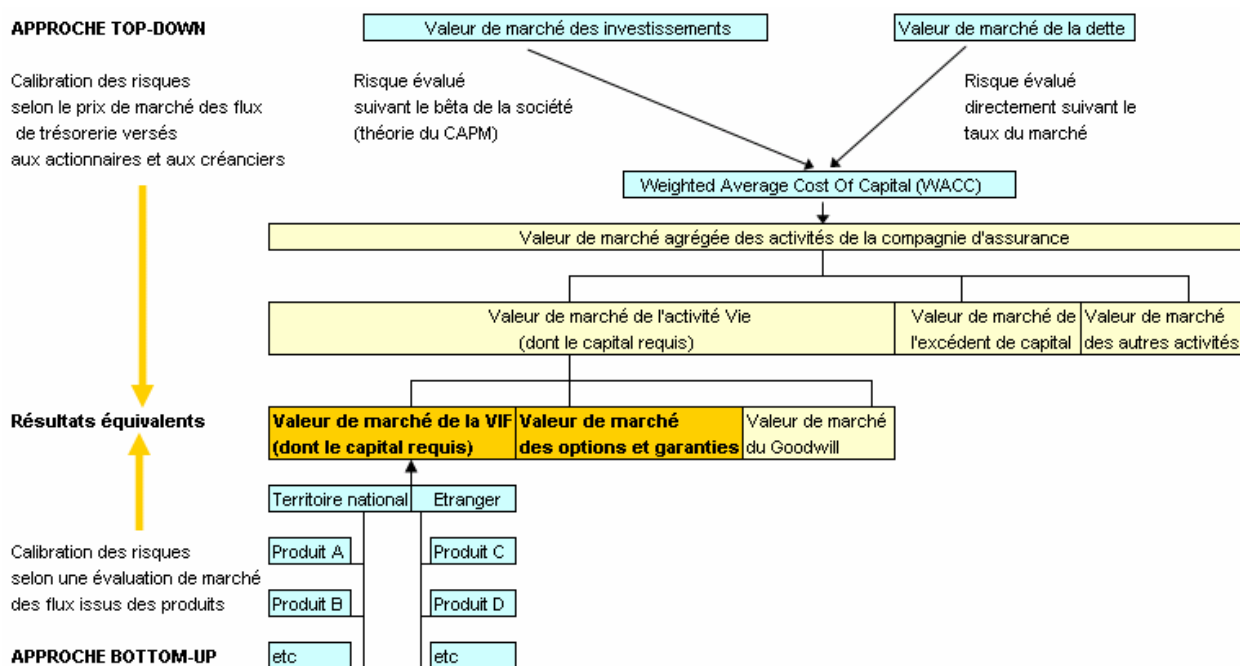
toujours d'informations suffisantes à ce sujet. C'est pourquoi le **CFO Forum recommande plutôt d'utiliser l'approche bottom-up market-consistent**.

■ L'approche « bottom-up » cohérente avec les valeurs de marché

Il s'agit d'observer le marché dans le but d'établir un RDR approprié pour chaque flux de trésorerie individuel de la société. Pour ce faire, **chaque flux est estimé de manière cohérente avec les instruments de marché qui supportent des risques similaires**. Pour ce faire, il suffit de s'assurer que le taux d'actualisation appliqué au flux est cohérent avec celui appliqué pour ce même flux sur le marché des capitaux.

L'approche « bottom-up » fournit donc des RDR qui varient selon les risques inhérents aux flux que nous cherchons à évaluer. Ceci nous permet d'obtenir beaucoup d'informations au sujet de la valeur économique de toute subdivision de l'activité, comme la profitabilité d'un produit ou la valeur ajoutée des affaires nouvelles. Elle paraît plus transparente que l'approche « top-down » et est particulièrement appropriée pour les compagnies où les risques liés à l'activité sont variés et diversifiés. Toutefois, établir le RDR pour chaque produit n'est pas toujours évident.

De toute manière, quelque soit la méthode adoptée, le but est identique : **refléter dans le RDR, du point de vue du marché, les risques inhérents à une activité**. Les deux approches sont équivalentes en théorie et devraient donc aboutir à des résultats agrégés identiques, comme l'illustre ce diagramme récapitulatif :



Nous pouvons noter qu'**aucune allocation n'est effectuée pour le risque diversifiable en rapport avec l'activité d'assurance**, comme le risque lié aux variations des taux de mortalité. En effet, la théorie établit que le marché ne doit pas rémunérer ce risque spécifique qui peut être éliminé grâce au phénomène de diversification.

## **2.2. Coût des options cachées et des garanties financières**

Les normes définissant l'EEV demandent d'effectuer une allocation spécifique et explicite pour le coût des options et des garanties financières, **à travers l'utilisation de simulations stochastiques**. Deux sortes de scénarios économiques peuvent être appliqués:

- les **scénarios Monde Réel ou Real World** : le modèle d'actif, basé sur des données historiques et observables (d'où le terme de monde réel ou monde physique), se doit de représenter fidèlement la distribution des rendements d'actifs;
- les **scénarios Market-consistent ou en valeur de marché** : le raisonnement est alors cohérent avec les valeurs et le risque du marché et repose sur l'une de ces deux théories (qui sont équivalentes):
  - la **théorie risque-neutre** : les rendements des actifs correspondent au taux sans risque et c'est celui-ci qui est utilisé dans l'actualisation des flux ;
  - la **théorie des déflateurs** : chaque actif a un rendement espéré qui reflète son niveau de risque inhérent et ce phénomène est compensé par l'intervention du processus stochastique des déflateurs (qui est assimilable à une fonction d'actualisation stochastique).

Ces approches sont décrites en détails dans la partie « *Modélisation stochastique* ».

Le choix du type de scénarios économiques employé est laissé à l'appréciation des compagnies mais doit rester cohérent avec les hypothèses de projection. Par exemple, si le RDR est déterminé sur la base de la méthode « top-down », alors, il faut appliquer l'approche Real world. Par contre, pour le cas de la méthode « bottom-up » cohérente avec les valeurs de marché, il faut choisir l'approche Market-Consistent.

Une fois identifié, le coût des options et garanties financières est intégré dans l'estimation de la valeur actualisée des profits futurs distribuables aux actionnaires lors du calcul de la VIF.

## **2.3. Exigence en capital et coût du capital**

Dans l'EEV, le capital alloué pour les activités entrant dans le périmètre d'évaluation est décomposé en deux sous éléments. Nous avons d'une part l'excédent libre et d'autre part, le capital requis.

Les principes de l'EEV ont introduit **un standard par rapport à la définition du capital requis**, qui jusqu'à présent était variable suivant les pays.

Le capital requis, pour lequel la distribution aux actionnaires est réglementée, désigne soit :

- le niveau de solvabilité réglementaire;
- le Capital Economique calculé en fonction d'une évaluation interne des risques;
- le niveau nécessaire que les agences de rating sollicitent pour atteindre une certaine notation.

Mais au minimum, il doit correspondre à la marge de solvabilité réglementaire exigée par les autorités de contrôle.

Le coût du capital est calculé à partir du capital requis. Il tient compte :

- des **coûts de frictions** : les actionnaires injectent du capital dans la compagnie d'assurance avec une structure propre, au lieu d'aller directement investir sur les marchés ; la présence d'un intermédiaire implique donc un coût dont il faut tenir compte lors de l'évaluation ;



- du **coût de portage** : d'après le CFO Forum, il s'agit de la différence entre le montant de capital requis et la valeur actuelle des revalorisations futures de ce capital, liées au rendement futur d'investissement.

## **2.4. Diffusion et communication des résultats**

Dans le but d'améliorer la comparabilité et l'interprétation des résultats, des recommandations précises ont été données par le CFO Forum au sujet des éléments à publier à la suite d'une EEV :

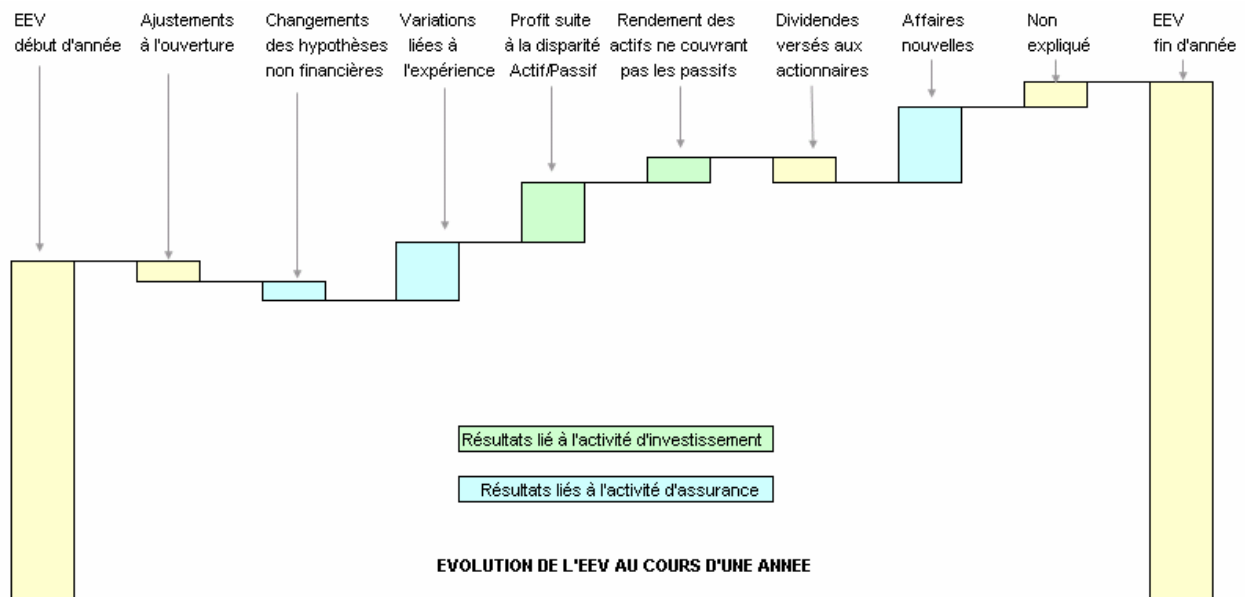
- description des hypothèses, y compris les hypothèses économiques (stratégie d'investissement selon la classe d'actifs, composition des actifs, taux d'inflation, impôts et taxes, RDR, ...)
- processus de détermination des hypothèses ;
- description claire de l'activité entrant dans le champ d'application de l'EEV ;
- méthode de calcul du rendement opérationnel de l'évaluation ;
- traitements des ajustements liés à la consolidation ;
- pour les compagnies proposant des contrats avec une clause de participation aux bénéficiaires envers les assurés, présentation de l'approche permettant d'estimer la politique de distribution future et le traitement des actifs résiduels ;
- base et montant du coût du capital ;
- justifications pour toute modification dans la prime de risque ;
- méthodologie appliquée aux affaires nouvelles ;
- traitement des coûts de développement et de toute anticipation des gains de productivité dans les dépenses futures projetées ;
- techniques utilisées pour évaluer les options financières et les garanties ;
- analyse du rendement de l'EV ;
- analyse de l'excédent libre ;
- segmentation des résultats de manière cohérente.

Il y a donc **un accroissement significatif du volume d'informations produit**: une combinaison de statistiques, des commentaires sur les résultats, la description des points clés du raisonnement employé... Tous ces points permettent **d'améliorer la transparence et l'interprétation des résultats**.

A cela s'ajoute encore **un minimum de mesures de sensibilités**, permettant à un analyste averti de réaliser des comparaisons selon les différentes hypothèses employées. En effet, les mesures de sensibilités constituent un bon point de départ pour prendre des décisions, notamment au sujet de la gestion financière. Elles sont également très importantes pour les investisseurs car elles les renseignent sur le risque d'exposition.

## **2.5. EEV : un outil de mesure de la valeur et de la performance des compagnies d'assurance vie**

L'EEV constitue **un bon outil de base pour le pilotage de la gestion de la compagnie**. En effet, l'analyse des variations de l'EEV au cours d'une année permet de gérer au mieux la performance de la société, en identifiant les principales étapes qui créent ou détruisent de la valeur. Le rendement lié à la création de valeur peut alors être décomposé en plusieurs composantes : investissement, assurance, stratégie d'allocation d'actifs.



Notons que les profits en rapport avec les disparités Actif/Passif résultent des revenus supplémentaires liés à l'investissement des passifs d'assurance, après versement de la part revenant aux assurés suivant le taux servi. D'autre part, les ajustements à l'ouverture correspondent aux modifications en rapport avec la modélisation qui peut avoir changé entre deux dates d'évaluation.

## 2.6. Conclusion

Les principes de l'EEV et ses recommandations **sont une avancée considérable dans les techniques d'évaluation et dans le développement du reporting financier pour les compagnies d'assurance vie européennes** : cela a permis la création d'une méthodologie commune capable d'introduire un degré supplémentaire dans la cohérence des évaluations, ce qui s'inscrit dans la continuité des exigences résultant de la mise en place des normes IFRS.

L'EEV **répond directement aux critiques majeures émises par la méthode traditionnelle**, en améliorant la sophistication de la prise en compte des risques et en augmentant la diffusion des informations et la comparabilité des résultats. C'est un développement positif dans le sens où l'approche nous engage vers une évaluation cohérente avec le marché, bien que des diversités persistent à cause de la liberté d'interprétation laissée aux sociétés. Il reste donc encore **des progrès à faire avant d'aboutir à une véritable homogénéisation de la technique d'évaluation**.

Parmi les approches variées proposées par le CFO Forum, c'est l'approche « bottom-up market-consistent » qui semble la plus recommandée. En effet, cette technique d'évaluation en valeur de marché constitue une issue plus favorable parce qu'elle produit un résultat objectif, capable de refléter le profil de risque actuel sur chaque produit et territoire. Cette approche explique comment le risque et la valeur interagissent à travers l'activité. Elle fournit donc une méthodologie cohérente pour lier les risques, le capital et la valeur, ce qui permettra d'ailleurs à terme de faciliter l'application des normes IFRS et de Solvabilité II.

C'est pour ces raisons que les compagnies adoptent de plus en plus cette approche dans le calcul de l'EEV : nous parlons alors de Market-Consistent Embedded Value (MCEV).

Cette technique d'évaluation est actuellement appliquée par Towers Perrin-Tillinghast et est la méthode la plus à même à répondre aux attentes du contexte réglementaire. Nous allons donc l'étudier plus en détails.

### **3. Market-Consistent Embedded Value (MCEV)**

Dans le passé, le lien entre l'évaluation de la compagnie et la gestion du risque était faible. Cependant, ces dernières années, les changements de la réglementation ont conduit notamment à **envisager la réelle exposition au risque des compagnies d'assurance**. Pour ce faire, il faut être capable d'évaluer les passifs et les actifs de la compagnie d'assurance à leur juste valeur ou valeur économique, comme le sollicitent la FFSA et l'IASB.

C'est dans cette optique que s'est **développée une nouvelle approche d'évaluation cohérente avec les valeurs de marché : la Market-Consistent Embedded Value (MCEV)**. Il s'agit de mieux prendre en compte les risques dans l'évaluation de la compagnie.

Pour ce faire, les actifs, les passifs et le coût du capital sont évalués de manière cohérente avec le marché (i.e. en adéquation avec les prix de flux similaires échangés sur le marché), et de manière cohérente les uns par rapport aux autres. **Les prix du marché sont donc utilisés comme une référence** (nous parlons de **market to market**).

Nous pouvons envisager de présenter une MCEV suivant trois possibilités :

- suivant une **approche bilancielle**, sur la base d'un Bilan économique ;
- suivant les **projections de la modélisation stochastique** : la MCEV se définit comme la moyenne des revenus distribuables actualisés par rapport à des scénarios stochastiques, qui tiennent compte du comportement des assurés et des actions de la gestion ;
- suivant la **présentation de la méthode traditionnelle** : sous réserve qu'une méthodologie et des hypothèses Market-Consistent sont appliquées dans le calcul de la PVFP, alors

$$\text{MCEV} = \text{Richesse nette} + \text{PVFP} - \text{coût du capital}$$

Où : PVFP = Valeur de marché des actifs servant à couvrir les réserves statutaires  
– Valeur de marché des passifs d'assurance,  
= Valeur actuelle des profits futures distribuables en rapport avec le portefeuille de contrats en cours ;  
Richesse nette = Valeur de marché des autres actifs – Valeur de marché des dettes ;

Nous pouvons d'ailleurs envisager l'équivalent de ce résultat selon le point de vue émis par les principes de l'EEV :

$$\text{MCEV} = \text{Excédent libre} + \text{Capital requis} + \text{PVFP} - \text{Coût du capital}$$

car il est clair que la richesse nette des actionnaires (hors activité) correspond au capital investi qui est affecté soit au capital requis, soit à l'excédent libre.

Néanmoins, la compréhension de la MCEV commence par l'assimilation du Bilan économique.

### 3.1. L'approche bilancielle

#### ■ Le Bilan économique

La présentation de l'activité d'une compagnie d'assurance sous la forme d'un Bilan économique permet de mettre en évidence, de manière cohérente avec le marché, les différents éléments qui interviennent dans la détermination de la valeur de la société, et apporte aux investisseurs une information réaliste concernant la richesse et la performance de la compagnie.

La valeur économique ne se déduit pas directement de la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur de marché des engagements envers les tiers : **la structure de la compagnie implique des coûts mais permet également de bénéficier de certains avantages.**

ACTIFS	PASSIFS
Valeur de marché des actifs	Valeur de marché des passifs d'assurance
Option de vente de passif limité	Valeur de marché de la dette
Allègements fiscaux	Déficit en matière de passif social
Aptitude à créer de la valeur	Coûts de friction du capital
	VALEUR ECONOMIQUE
<b>Total des actifs</b>	<b>Total des passifs et Valeur Economique</b>

Les coûts de friction du capital comprennent :

- le coût de la double taxation,
- le coût lié aux dépenses du double investissement,
- les asymétries des règles d'imposition,
- le coût du capital réglementaire,
- les coûts d'agence,
- le coût de la détérioration financière.

#### ■ Valeur de marché des actifs

Il n'est pas très compliqué de déterminer la valeur de marché des actifs car il existe, quasiment pour tous les actifs détenus par une compagnie d'assurance vie, des marchés sur lesquels s'échangent ces actifs. La valeur de marché correspond alors au montant qui résulterait de la vente des actifs de la société au moment de la date d'évaluation. Concernant les actifs non échangeables, il est nécessaire de faire une estimation de la valeur de marché.

#### ■ Valeur de marché des passifs d'assurance

De manière générale, les passifs d'assurance vie ne sont pas échangeables sur les marchés car ils se composent essentiellement des engagements qu'ont les assureurs envers leurs assurés. Il est donc plus difficile de déduire une valeur de marché pour les passifs d'assurance.

Pour estimer au mieux la juste valeur de ces passifs, il faut pouvoir calculer la valeur actuelle des engagements futurs envers les assurés et par conséquent la valeur actuelle des flux futurs nets liés au portefeuille de polices détenu par la compagnie. Ceci est réalisé en utilisant une méthodologie cohérente avec les valeurs de marché (suivant la théorie risque-neutre ou la théorie des déflateurs ; se référer à la partie « *Modélisation stochastique* »).

■ Valeur de marché de la dette

La compagnie d'assurance dispose de différents moyens pour financer son activité, notamment en effectuant un emprunt. Dans le Bilan comptable, la dette est inscrite suivant son coût amorti. Or, ceci ne correspond pas à la valeur de marché de la dette qu'il faut estimer d'un point de vue économique. Il s'agit en particulier, d'utiliser des taux de rendements équivalents à ceux observés sur le marché en se référant aux critères de notation, de durée et de taux de coupon.

■ Déficit en matière de passif social

Cela représente le déficit supposé lié aux régimes de pension. Bien qu'il s'agisse d'un élément du passif, il peut arriver pour certaines compagnies que les régimes de pension correspondent à un surplus et donc à un actif de la société.

■ Taxation

Il y a une différence concernant les modalités d'imposition pour les actionnaires qui choisissent d'investir dans les actifs d'une société, au lieu de les détenir directement sur le marché : **l'intervention d'un intermédiaire change les bases d'imposition.**

D'une part, la structure de la compagnie d'assurance permet de profiter d'**allègements fiscaux** qui se caractérisent par la faculté, soit de payer moins d'impôts, soit d'en différer le versement. Il s'agit donc d'un avantage par rapport au contexte de la société ; c'est pourquoi nous retrouvons cette notion à l'actif du Bilan économique.

D'autre part, il existe le **phénomène de la double taxation**. Celui-ci représente le coût additionnel de l'impôt que la compagnie d'assurance paye sur les actifs qu'elle possède, par rapport à l'impôt que les actionnaires devraient payer s'ils détenaient directement ces actifs sur le marché. En effet, les compagnies d'assurance ont besoin de détenir du capital pour se protéger contre la volatilité du marché et de leurs activités. Mais ce capital a un coût, car les actifs investis dans une société d'assurance sont généralement soumis à une taxation plus importante que celle appliquée aux actionnaires qui traitent directement les actifs sur les marchés.

En fait, les revenus des investissements dans la compagnie sont imposés une première fois suivant le taux moyen d'imposition de la société. Puis ils sont taxés une seconde fois lorsqu'ils sont versés aux actionnaires (selon leur situation personnelle). Or, si les actionnaires détenaient directement les actifs en question, ils n'auraient pas à subir l'effet de l'impôt sur les sociétés. Cette double taxation constitue donc un manque à gagner pour les actionnaires, c'est pourquoi nous la retrouvons au passif du Bilan économique.

■ Option de vente de passif limité (LLPO, Limited Liability Put Option)

Lors de l'évaluation des passifs d'assurance en valeur de marché, nous supposons implicitement que la compagnie est toujours apte à faire face à ses engagements, c'est-à-dire que le risque de défaut est nul. Toutefois, il existe des lois protégeant les intérêts des actionnaires : si les appels de fonds de la société (pour honorer ses engagements) deviennent excessifs, les actionnaires peuvent trouver plus avantageux de mettre la compagnie en faillite plutôt que d'injecter du capital. Les actionnaires ont donc la possibilité d'exercer une « option de faillite ». Ceci confère une valeur supplémentaire à la société car **cela limite la perte des actionnaires au montant des fonds propres qu'ils ont apporté**. Cette option se comporte alors comme un actif, appelé option de vente de passif limité ou aussi connu sous le terme de risque de crédit propre.

■ Aptitude à créer de la valeur (« Franchise value »)

L'aptitude à créer de la valeur permet de **valoriser le savoir-faire** de la compagnie d'assurance. Elle exprime la valeur que les actionnaires attribuent à la gestion pour souscrire des affaires nouvelles profitables dans l'avenir. Cette valeur augmente si la compagnie est capable d'exploiter de la manière la plus optimale sa connaissance du marché, son réseau de distribution, et son expérience.

■ Coût lié aux dépenses du double investissement

Ce coût est évalué sur une base similaire au coût de la double taxation, bien que la plupart du temps, il soit moins matériel.

■ Coût du capital réglementaire

Pour justifier sa solidité financière, la compagnie d'assurance doit détenir un montant de capital réglementaire qui reste « bloqué » au sein de la société. Cette détention implique un coût : c'est le coût du capital réglementaire.

■ Coûts d'agence

Les coûts d'agence correspondent à la perte de valeur résultant du transfert de pouvoir de décision des actionnaires vers le système de gestion. En effet, les actionnaires ne dirigent pas directement la société ; ils délèguent la gestion à des personnes qui peuvent avoir une vision différente de l'utilisation du capital. Ainsi, le but est de retranscrire via ce coût les divergences qui peuvent exister par rapport aux intérêts et aux objectifs émanant des actionnaires et ceux visés par le système de gestion.

Ces coûts sont établis selon l'appréciation et la perception des actionnaires. Ils seront d'autant plus importants que la compagnie est opaque (i.e. l'information est asymétrique : certaines parties en savent plus que d'autres), ce qui est généralement le cas dans le secteur de l'assurance.

■ Coûts de la détérioration financière

Les coûts de la détérioration financière représentent la valeur actuelle des effets liés au fait que la compagnie soit en difficulté financière, sans aboutir forcément à la faillite. Nous pouvons identifier trois composantes :

- le coût additionnel pour redresser la situation par rapport à la réglementation, comme le coût de l'augmentation de capital ;
- le coût d'opportunité lié au temps utilisé par le système de gestion (l'équipe doit s'occuper son temps en priorité pour redresser la situation ; il faut donc renoncer à leurs services pour de nouveaux projets) ;
- la perte de valeur par rapport à l'aptitude à créer de la valeur et à la VIF.

Lors de difficultés financières, la société va en effet devoir faire face à la situation en raisonnant plutôt à court terme, au détriment du développement et de l'expansion de son activité. Ceci va donc avoir un impact sur l'aptitude à créer de la valeur, car l'objectif premier dans ce genre de situation est de pouvoir retrouver une solidité financière suffisante vis-à-vis de la réglementation et des assurés. D'autre part, la remise en cause de la solvabilité de la compagnie peut inquiéter les assurés qui préféreront mettre un terme à leurs contrats, d'où une diminution de la VIF.

■ Valeur Economique

La valeur économique de la compagnie d'assurance est **le résultat de la différence entre la valeur de tous les actifs et de tous les passifs inscrits au Bilan économique**. C'est sur la base de cet élément que les actionnaires peuvent apprécier la richesse et le potentiel de la société.

■ Application à la MCEV

Dans une MCEV, **la valeur économique de la compagnie est obtenue en s'appuyant sur un Bilan économique simplifié**. En effet, comme nous allons le voir par la suite, certains éléments du Bilan économique n'entrent pas dans le champ d'application pour la valorisation d'une compagnie d'assurance :

ACTIFS	PASSIFS
Valeur de marché des actifs	Valeur de marché des passifs d'assurance Valeur de marché de la dette Déficit en matière de passif social Coût du capital VALEUR ECONOMIQUE
<b>Total des actifs</b>	<b>Total des passifs et Valeur Economique</b>

■ Coût du capital

En théorie, la structure d'une compagnie d'assurance permet de diversifier les risques de manière efficace. Mais cela dépend du point de vue suivant lequel nous nous plaçons : l'organisation de la société n'est pas forcément optimale pour tous les protagonistes de la société. Pour les actionnaires, toute inefficacité doit être reflétée par un coût qui va venir diminuer la valeur de la compagnie. L'ensemble de **ces coûts de structure** est connu dans la méthodologie de la MCEV sous le terme de coût du capital. Nous pouvons y voir en fait **les coûts de friction** qui existent par rapport au fait que l'actionnaire choisit d'investir son capital en passant par un intermédiaire (la compagnie d'assurance), avec une structure spécifique.

Tous les éléments du Bilan économique ne vont pas être considérés dans la MCEV.

■ Aptitude à créer de la valeur et détérioration financière : inadaptés pour une évaluation des affaires en cours

Comme l'évaluation se base sur les affaires en cours et exclut la production future, il est logique de ne pas tenir compte de l'aptitude à créer de la valeur et du coût de la détérioration financière qui, soit est fonction de la Franchise Value, soit est directement intégrée dans le calcul de la VIF.

■ Taxation et double investissement

La plupart de ces allègements sont pris en compte lors de l'établissement de la VIF, le reste est à intégrer dans le coût du capital.

Le coût de la double taxation et du double investissement représente la composante principale du coût du capital. Pour en donner une évaluation correcte, il faudrait connaître le niveau

d'imposition de l'investisseur moyen par rapport à celui de la compagnie, ce qui n'est pas évident. En effet, au sein d'une compagnie, il existe en général des investisseurs de toute taille et le poids de chacun va avoir une influence sur le coût.

En pratique, nous supposons que tous les produits d'actifs venant en couverture du capital investi sont soumis à la double taxation. Ce coût est alors modélisé dans le calcul de la VIF comme une charge appliquée à tout produit d'actifs servant à couvrir le capital.

#### ■ Coûts d'agence et LLPO : éléments trop subjectifs

Des études empiriques ont suggéré que les coûts d'agence étaient une fonction du capital ou de l'excédent libre de la compagnie. De ce fait, il faudrait intégrer cette notion dans le coût du capital. Toutefois, ce ne serait pas très objectif car il ne faut pas oublier que ces coûts reflètent la manière dont les investisseurs apprécient le système de gestion. En général, les résultats de l'évaluation sont complétés par une mesure de sensibilité pour les coûts d'agence correspondant par exemple, à la valeur d'un chargement annuel de 1% sur le capital (somme de la richesse nette et de la VIF). Ceci permet alors aux actionnaires de se forger leur propre opinion sur les coûts d'agence.

Au sujet de la LLPO, il existe actuellement un débat dans la profession pour savoir si ce coût est à inclure dans le coût du capital. En effet, il est raisonnable de penser que les assureurs ne peuvent promettre à leurs assurés de manière certaine un risque de faillite nul. Ce fait devrait donc être diffusé dans la MCEV, à la fois de manière quantitative et qualitative. Mais cela reste assez délicat dans le sens où cet élément dépend de l'appréciation et de la perception de chaque investisseur. Nous pouvons noter que si le taux sans risque correspond aux taux swap, alors le LLPO est implicitement alloué. De toute manière, pour une compagnie d'assurance vie bien capitalisée et opérant sur un marché réglementé, la LLPO devrait être assez faible. Par conséquent, nous omettons son coût dans le coût du capital.

**Ainsi, dans une perspective d'EEV et de MCEV, seuls les effets de la taxation et du double investissement sont pris en compte dans le coût du capital.** Une information peut être de plus communiquée au sujet des coûts d'agence.

Il reste à définir le capital pour lequel ces coûts sont appliqués. Dans l'EEV, le capital lié à l'activité a deux composantes :

- le capital requis qui est soumis à la pression de la réglementation concernant son montant et sa rémunération,
- l'excédent libre.

Le coût du capital est calculé en fonction du capital requis (au minimum égal à la marge de solvabilité réglementaire) qui, selon la compagnie, peut être établi suivant différentes manières.

Il peut s'agir :

- de la marge de solvabilité réglementaire,
- du Capital Economique, déterminé sur la base d'une évaluation interne des risques,
- du niveau de capital nécessaire pour atteindre une certaine notation par les agences de rating.

Il n'existe pas de standard pour déterminer le taux à appliquer au capital requis dans une MCEV et ainsi calculer le coût du capital. En théorie, cela va dépendre de la perspective de chaque investisseur. Le taux approprié correspond à la charge additionnelle que subit l'actionnaire en investissant à travers la compagnie au lieu de détenir directement les actifs sur le marché.



### ■ Différence avec la TEV concernant le coût du capital

Dans la TEV, le coût d'immobilisation du capital est défini sur la base d'un différentiel de rendement entre le taux d'actualisation et le taux de rendement des actifs venant en couverture du capital. Il s'agit du manque à gagner résultant de l'obligation de détenir une marge de solvabilité.

Dans une MCEV, tous les éléments sont évalués de manière cohérente avec les valeurs de marché : **le coût dû au risque pur de marché est déjà inclus dans la valeur de marché des actifs et des passifs détenus par la compagnie**. Par conséquent, le coût du capital tel qu'il est défini dans la TEV n'a plus de sens, puisque le taux approprié pour tout actif échangé sur le marché est simplement son taux de rendement espéré. Le coût du capital défini suivant la méthode traditionnelle est donc nul (si nous ne tenons pas compte des taxes). Mais cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas de coût de capital dans la MCEV. En fait, suivant cette approche, **le coût du capital représente le coût en rapport aux imperfections des marchés des capitaux** (les frictions) qui existent en présence d'une structure de compagnie d'assurance.

C'est pourquoi, en général, le coût du capital issu de la MCEV est inférieur à celui établi dans la méthode traditionnelle, car il n'est affecté que par les risques non liés au marché, i.e. à l'activité propre de l'assurance (mortalité, dépenses,...).

## 3.2. Méthodologie

### ■ Principes

Dans l'approche MCEV, les actifs, les passifs et les coûts du capital sont évalués en adéquation avec le marché et de manière cohérente les uns par rapport aux autres. **Chaque flux est donc estimé en appliquant un taux d'actualisation qui est cohérent avec celui utilisé pour un flux similaire traité sur le marché des capitaux.**

Pour les actifs, il n'est pas difficile de trouver leur valeur de marché car la plupart sont traités sur les marchés. En revanche, pour les passifs d'assurance (constitués notamment des provisions techniques), la situation se complique car il n'existe pas a priori des prix équivalents sur le marché. Dans une MCEV, la valeur du passif d'un assureur se définit comme la somme d'argent nécessaire pour former un portefeuille d'actifs qui réplique les flux du passif le mieux possible, c'est-à-dire qui génère la même séquence de flux. Il s'agit de trouver la valeur du portefeuille de réplication.

Le raisonnement utilisé dans l'approche MCEV repose en effet sur certains principes de la théorie financière et économique :

- **Absence d'arbitrage** : si deux actifs ou passifs ont exactement les mêmes flux dans toutes les circonstances possibles (ou états de la nature possibles), alors ils doivent avoir la même valeur actuelle à la date d'évaluation ;
- **Réplication** : chaque actif (passif) dont les flux dépendent de la performance des actifs échangés sur le marché peut être répliqué (dynamiquement) à travers un investissement dans un portefeuille composé de ces actifs échangés et de l'actif sans risque ; ceci est assez difficile à réaliser pour les passifs d'assurance mais nous supposons que les flux Best Estimate associés à ces passifs peuvent être répliqués ;
- **Equilibre** : si deux actifs ou passifs ont le même degré de risque de marché alors la prime de risque implicite dans leur valeur sera la même ;

- **Diversification** : les investisseurs ne reçoivent pas de compensation pour les risques qu'ils peuvent éliminer suite à la diversification ;
- **Prix du marché** : la modélisation est cohérente avec l'information fournie par le marché disponible à la date d'évaluation ;
- **Actualisation cohérente avec les hypothèses de projection de l'approche « bottom-up »** : le processus d'actualisation est distinct selon les contrats, les produits, la situation géographique et est appropriée à chaque date d'évaluation.

#### ■ Technique d'évaluation

La MCEV permet d'évaluer explicitement le coût des risques et le coût du capital, suivant plusieurs étapes :

- les flux de trésorerie considérés sont évalués de manière individuelle à l'aide d'un taux d'actualisation qui reflète le risque inhérent à chaque flux ;
- les options et les garanties sont évaluées en utilisant les techniques standards de la théorie des prix des options, et font appel à la simulation stochastique pour les cas les plus complexes ;
- une déduction est faite pour compenser l'effet de la double taxation subi par les investisseurs.

De cette manière, la MCEV répond directement à certaines critiques de la TEV :

- le taux d'actualisation est établi de façon objective, basé sur les taux de rendement observables du marché à la date d'évaluation ;
- le coût des options et des garanties financières est traité de manière explicite et implique l'utilisation de modélisations stochastiques et de la théorie des prix des options de sorte à rester cohérent avec les prix des options sur le marché ;
- il est identifié explicitement un coût du capital qui résume les coûts de frictions subis par la présence de la structure de la compagnie.

#### ■ Flux certains ou liés à du risque diversifiable

Quand les flux ne sont pas soumis au risque financier et qu'ils ne contiennent que du risque d'assurance, nous parlons de cash flow certains ou déterministes. Dans ce cas, le taux d'actualisation approprié à appliquer est le taux sans risque. Il en va de même pour les cash flow avec du risque diversifiable. La théorie établit en effet que **le marché ne doit pas rémunérer le risque diversifiable** donc aucune prime de risque n'est affectée.

Le risque diversifiable, ou risque spécifique, correspond au risque qui n'est pas lié au marché. Ce risque n'est pas rémunéré car il est possible pour les investisseurs de l'éliminer en diversifiant leur portefeuille (ce qui n'est pas le cas du risque de marché qui est un risque systématique). Dans le cas d'une compagnie d'assurance, le risque diversifiable peut faire par exemple référence aux variations des taux de mortalités. Le risque de mortalité peut soit être diversifiée par la société si celle-ci possède un grand nombre de contrats, soit par les actionnaires en choisissant d'investir dans plusieurs compagnies d'assurance ou dans de multiples secteurs qui ne sont pas tous exposés au risque de mortalité.

Par conséquent, **il n'y a pas d'allocation explicite de risque diversifiable dans le taux d'actualisation**. Cela ne veut pourtant pas dire qu'il n'affecte pas l'évaluation. En effet, certains coûts subis par la compagnie d'assurance dépendent de tous les risques auxquels elle est exposée. Par conséquent, le risque diversifiable est implicitement pris en compte dans le niveau espéré des profits futurs. En fait, dans la MCEV, **le risque diversifiable est alloué en utilisant des hypothèses Best Estimate et son effet est inclus dans le coût du capital**.

Notons que pour une MCEV, la définition de Best Estimate est basée sur la moyenne des flux qui devraient augmenter si la distribution du risque diversifiable était modélisée de manière stochastique (et pas directement la moyenne ou la médiane de la distribution du risque diversifiable).

#### ■ Flux linéairement corrélés au risque lié au marché

Il faut faire un raisonnement différent quand les flux de trésorerie sont corrélés aux actifs du marché. Pour rester cohérent avec les valeurs de marché, le taux d'actualisation adéquat est le rendement espéré des actifs en rapport avec ce flux. Nous effectuons alors une pondération entre les différents actifs selon leur représentativité.

#### ■ Cas des options et des garanties financières

Quand il existe une asymétrie ou une non linéarité, nous utilisons la théorie des options pour évaluer les passifs à la valeur de marché, surtout quand la formulation du contrat est assez simple à faire. Il est alors possible d'appliquer des formules fermées (de type Black et Scholes). Mais à partir d'un certain niveau de complexité, il est nécessaire de passer à des simulations stochastiques (simulation de Monte Carlo).

#### ■ Coût du capital

Sous la MCEV, **le risque de marché est alloué explicitement dans l'évaluation des flux de trésorerie**. Le coût du capital reflète donc seulement les coûts de friction liés à la détention de capital en rapport avec la structure de la compagnie d'assurance. Il s'agit principalement du coût de la double taxation. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, le fait que l'actionnaire investisse son capital par l'intermédiaire de la société plutôt que de traiter directement sur le marché implique un coût qui diminue la valeur de la compagnie.

#### ■ Application pratique

Il existe actuellement **deux techniques pour faire une évaluation en valeurs de marché** (pour plus de détails, voir la partie « *Modélisation stochastique* »):

- la théorie risque-neutre,
- la théorie des déflateurs.

La théorie risque-neutre permet de passer dans un univers neutre au risque où tous les rendements sont égaux au taux sans risque : les flux sont en fait ajustés pour annuler le prix du risque de marché et sont tous actualisés au taux sans risque ; ce dernier peut soit faire référence obligations d'Etat (risque de défaut assez faible ou quasi nul) ou aux taux swap.

Il est important d'ajouter que les flux issus de cette technique ne sont plus des flux de type réel. Ils ne sont donc pas exploitables pour certaines études comme les business plans. En effet, les revenus des investissements sont évalués selon le taux sans risque donc seront forcément inférieurs à ceux obtenus avec les différents rendements. Pour pallier à ce manque, il est possible d'utiliser la méthode des déflateurs où la mesure de probabilité est équivalente à une mesure monde réel: nous considérons les rendements réels qui sont observables sur le marché.

Une fois la méthode choisie, **les valeurs de marché sont déterminés suivant la simulation de Monte Carlo**:

- générer un grand nombre de scénarios économiques par rapport à un modèle d'actif ;

- projeter les cash flow du passif pour chaque scénario basé sur les hypothèses de rendement des actifs ;
- actualiser chaque cash flow au taux d'actualisation approprié selon le modèle d'actif considéré ;
- prendre la moyenne de ces flux par rapport à tous les scénarios.

Pour mettre en pratique cette procédure, il faut envisager différents éléments :

- un modèle d'actif qui soit acceptable, c'est-à-dire sans arbitrage et calibré en fonction des prix observables sur le marché à la date d'évaluation ;
- un modèle du passif résumant les caractéristiques du portefeuille de contrats ;
- un modèle d'interactions entre actifs et passifs comprenant par exemple la stratégie d'investissement, la politique de distribution des bénéfices, le comportement des assurés...

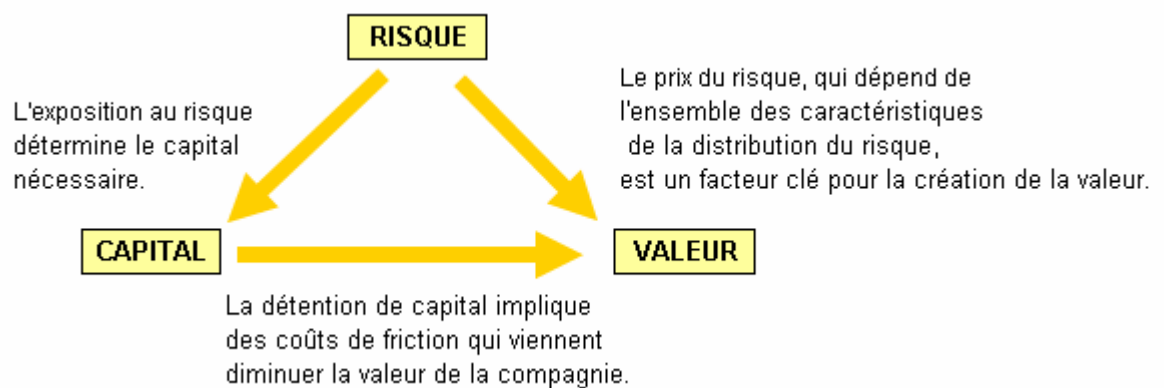
### 3.3. Au-delà de l'évaluation et du reporting financier

La MCEV constitue **un cadre robuste combinant économie financière et finance d'entreprise**, capable de mesurer précisément l'impact des différents éléments sur la valeur globale de la compagnie. Elle fournit une évaluation cohérente avec le marché à la gestion financière de l'activité vie, et un reporting financier qui est exploitable par les analystes.

Mais tout suggère que la MCEV peut trouver **d'autres finalités** qu'une évaluation à la valeur de marché. Elle peut notamment :

- aider à la prise de décision stratégique ;
- servir de base pour les achats et les ventes au niveau du groupe ;
- aider à la conception et la tarification des produits ;
- aider à la détermination du capital requis.

La MCEV peut être en effet **un bon instrument de mesure et de gestion du capital** car elle met en évidence les interactions qui existent entre le risque, le capital et la valeur :



La valeur est créée quand la performance excède le prix du risque et le coût frictionnel de capital employé. Notons que les mesures de sensibilités publiées avec la MCEV participent à la compréhension des risques auxquels est exposée la société.

De plus, l'analyse des variations de la MCEV permet **d'identifier et de décrire la création et la destruction de la valeur selon les différentes activités de la compagnie**, ce qui facilite la gestion des risques.

Nous pouvons distinguer :

- l'activité d'assurance ;
- l'activité d'investissement ;
- la stratégie d'allocation d'actifs.



Les profits issus de la gestion proviennent de la différence entre l'expérience actuelle et la performance espérée sur l'année, plus l'impact des changements de toute hypothèse à la fin de l'année. Deux composantes peuvent être identifiées dans cette analyse : les profits en rapport avec l'expérience et la contribution des affaires nouvelles.

Les résultats liés à l'investissement résultent de la variation ou de la capacité à garder la position de couverture. La décision d'investir dans des actifs autres que le portefeuille de réplication des passifs représente une décision d'investissement et tout rendement supérieur ou inférieur à celui du portefeuille d'actifs nécessaire à la couverture des passifs correspond au profit ou à la perte de la décision d'investissement.

### 3.4. Conclusion

La MCEV est une approche qui permet d'obtenir **une valeur économique cohérente avec les valeurs de marché, en tenant compte du profil de risque au niveau du produit**. Chaque flux de trésorerie est évalué individuellement en appliquant un taux d'actualisation qui est cohérent avec celui utilisé pour un flux similaire traité sur le marché des capitaux.

La réelle richesse de l'approche MCEV est de pouvoir **établir un lien entre la gestion de l'activité, les risques, le capital et la valeur**. Ceci constitue un gain considérable pour, d'une part, la conception et la tarification de nouveaux produits, et d'autre part pour une gestion financière cohérente et efficace. Il sera en effet plus aisé de prendre des décisions objectives sur le niveau acceptable de risque à prendre pour atteindre un rendement désiré.

La MCEV est donc une application à privilégier pour le reporting financier prudentiel de l'EV, la tarification et la mesure de performance, car **seul le concept de market-to-market permet une mesure cohérente des actifs et des passifs**. Il semble d'ailleurs que cette technique d'évaluation permettra d'aboutir à une méthodologie unifiée, susceptible de respecter les principes établis par les normes IFRS et la directive Solvabilité II et de faire converger le reporting financier, la solvabilité et la gestion du risque.



## PARTIE V : CAPITAL ECONOMIQUE (EC)

La gestion des compagnies d'assurance est généralement confrontée à **un conflit d'intérêts, au sujet de la détention de fonds propres** : les assurés (via la réglementation) et les actionnaires ont des points de vue antagonistes à ce sujet.

Pour les assurés, c'est la prudence et le souci de solvabilité qui déterminent le besoin en capital : la compagnie doit détenir suffisamment de fonds propres pour assurer ses engagements quand les provisions établies de manière prudentes deviennent insuffisantes à la suite d'une sinistralité exceptionnelle. Disposer de beaucoup de capital implique donc une meilleure protection des assurés.

Or, plus le capital est élevé, plus la rentabilité sur fonds propres est faible, ce qui nuit aux intérêts des actionnaires. Ces derniers ont effet pour objectif de rentabiliser l'investissement qu'ils ont effectué en achetant des parts de la société.

L'enjeu est donc de **trouver un niveau de capital optimal**, susceptible de concilier les attentes des assurés (par rapport à la continuité de l'activité) et les exigences croissantes de rentabilité des actionnaires. Pour ce faire, les gestionnaires doivent disposer d'outils capables **d'identifier et de mesurer les risques auxquels est exposée la compagnie**.

C'est dans cette optique que s'est développé le concept de Capital Economique (EC), que nous nous proposons d'étudier dans cette partie.

Nous commencerons par en donner la définition. Puis, nous présenterons la méthodologie employée en assurance vie pour sa détermination, en insistant sur la notion de mesure de risque. Nous évoquerons ensuite le lien qui existe avec la réglementation et les agences de notations. Nous envisagerons enfin comment cette notion peut être exploitée au sein de la gestion des risques d'entreprise.

### **1. Définition**

L'EC est un concept qui a vu le jour dans le secteur bancaire et qui a été adapté dans le monde de l'assurance, notamment suite à l'apparition des bancassurances. Bien qu'il s'agisse d'un standard dans l'industrie bancaire, il commence seulement à trouver sa place en assurance, surtout grâce au développement de la gestion du risque d'entreprise, qui envisage une approche intégrée des risques pour déterminer ses besoins en fonds propres.

Selon la SOA (Society of Actuaries), l'EC se définit comme « **le montant de capital suffisant pour couvrir les pertes potentielles à un niveau de tolérance au risque donné et pour un horizon de temps spécifié** ».

En d'autres termes, il s'agit du niveau de capital nécessaire pour maintenir la solvabilité sur une période donnée et selon une certaine probabilité (définie suivant l'aversion au risque de la compagnie et plus particulièrement des investisseurs). Ces fonds vont pouvoir être utilisés comme un matelas de sécurité et venir amortir une sinistralité excessive ou des placements risqués, qui pourraient mettre en péril l'aptitude de l'assureur à honorer ses engagements.

Ainsi, l'EC tient compte à la fois :

- **du point de vue des assurés et de la réglementation:** l'EC désigne un niveau de fonds propres minimal garantissant la continuité de l'activité dans des conditions saines ;
- **du point de vue des actionnaires :** l'EC indique le besoin en capital suffisant par rapport aux risques que les investisseurs sont prêts à prendre pour atteindre une certaine rentabilité.

## 2. Détermination

L'objectif du calcul de l'EC est d'arriver à une **mesure économique réaliste** du montant de capital nécessaire à l'assureur pour la couverture des engagements envers ses assurés, selon un critère de risque défini a priori. Pour ce faire, son évaluation **doit tenir compte de l'ensemble des risques auxquelles la compagnie est confrontée**, que ceux-ci soient financiers ou non. Il peut notamment s'agir :

- du risque de taux d'intérêt,
- du risque de crédit,
- du risque de marché,
- du risque de liquidité,
- du risque opérationnel.

En fait, tous ces risques aboutissent au même résultat, à savoir la remise en cause de la solvabilité de la compagnie. **La notion d'EC est donc liée au risque d'insolvabilité** qui permet de regrouper sous un seul terme l'ensemble des risques et de leurs interactions que la société doit gérer.

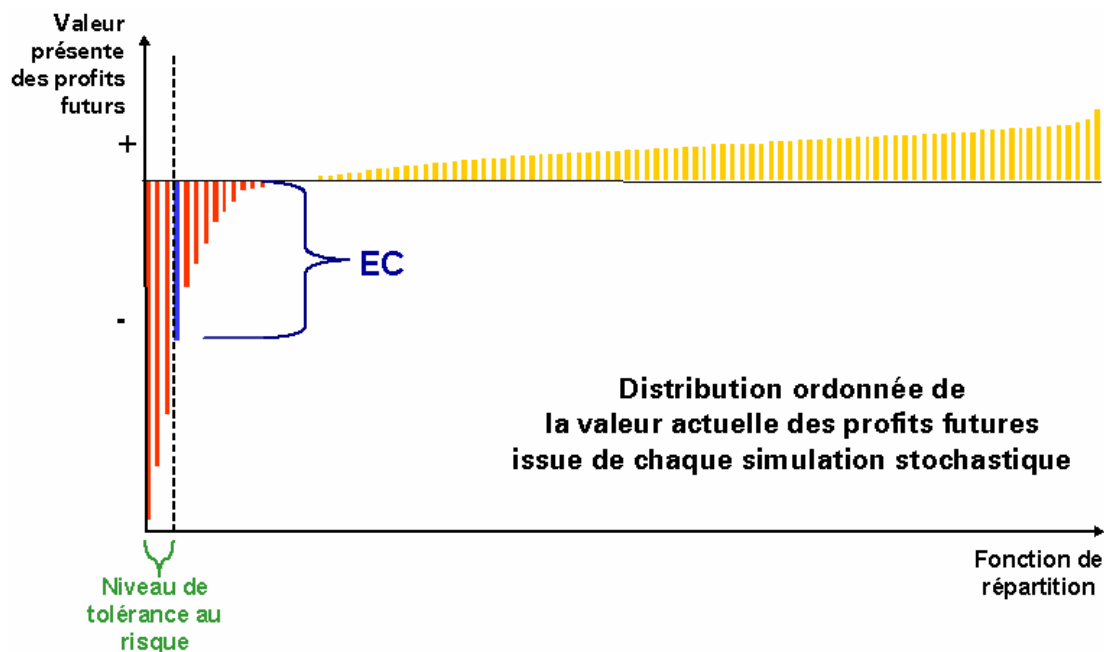
La solvabilité se traduit par la capacité que possède la compagnie d'assurance d'honorer ses engagements envers ses assurés. Ceci est possible dès lors que la valeur de marché des actifs dépasse le total des engagements de la société (en valeur actuelle).

Il est équivalent de dire que **la société risque la ruine si la valeur actuelle des profits futurs nets distribuables aux actionnaires (PVFP) devient négative** (profits évalués par rapport au portefeuille en cours à la date d'évaluation, donc hors productions futures), comme le montre ce bilan économique simplifié cohérent avec les valeurs de marché:

<b>ACTIF</b>	<b>PASSIF</b>
Valeur de marché des actifs	Valeur actuelle des engagements envers les assurés
	PVFP
<b>Total Actif</b>	<b>Total Passif</b>

Le risque d'insolvabilité se traduit donc par une PVFP négative. Par conséquent, il est logique de déterminer l'EC en s'appuyant sur la distribution de la PVFP, qui permet **de représenter au mieux la réalité économique de l'activité** : l'EC sera alors égal à un certain quantile, en fonction de la mesure de risque choisie.





La détermination de l'EC nécessite donc **plusieurs étapes** :

- définir la période d'évaluation ;
- modéliser la distribution de la PVFP ;
- choisir la mesure de risque.

## **2.1. Période d'évaluation**

De manière générale, **la période d'évaluation correspond à la durée sur laquelle l'EC assure la solvabilité de la compagnie suivant le niveau de tolérance au risque donné**. Il est possible d'envisager un besoin en capital couvrant le risque d'insolvabilité, par exemple, sur 1 an, sur 3 ans ou chaque année pendant 3 ans. Tout dépend des objectifs ou des informations que souhaite atteindre ou connaître la compagnie.

Cependant, en assurance vie, nous pouvons remarquer que la notion d'horizon temporel n'a pas vraiment de sens. En effet, nous nous plaçons à la date d'évaluation et nous estimons le montant de capital minimal qui évite la ruine suivant un niveau de risque donné, par rapport au portefeuille en cours, sans considérer la production future. Nous nous basons sur des valeurs actuelles qui ont été projetées jusqu'à extinction (ou quasi extinction) du portefeuille détenu par la compagnie à la date d'évaluation.

Autrement dit, l'EC nous permet de d'estimer le montant de capital que la société a besoin à la date d'évaluation pour assurer globalement la solvabilité selon une certaine probabilité, jusqu'à extinction du portefeuille en cours. Nous pouvons donc dire qu'**il s'agit d'un horizon temporel « infini »**, si nous considérons que **la période d'évaluation est égale à la période de projection utilisée dans l'estimation de la PVFP**. Dans la pratique, il est souvent envisagé pour un portefeuille de contrats d'épargne une période de projection égale à 30 ans.

## 2.2. Modélisation de la distribution de la PVFP

La distribution de la PVFP est obtenue grâce à une modélisation stochastique en univers réel. Les flux projetés sont actualisés suivant **un taux qui doit être ajusté au risque**.

### ■ Détermination du taux d'actualisation (RDR)

Le RDR correspond au taux de rendement attendu par les actionnaires et se détermine comme le taux sans risque auquel nous ajoutons une prime de risque. Il s'agit de pouvoir refléter le profil de risque réel lié à la société et sa relation avec le marché financier. Dans la majorité des cas, c'est l'approche Monde Réel qui est utilisée.

L'approche Monde Réel (pour plus de détails, se référer à la partie « *Modélisation stochastique* ») est une **méthode classique de valorisation**, qui s'appuie sur l'état existant de l'économie. Il s'agit de mettre en place un modèle d'actifs représentant fidèlement la distribution des rendements d'actifs, en se basant sur les données historiques et observables sur le marché.

Le taux d'actualisation est dans ce cas **unique et ajusté au risque global**. Il est établi à partir d'une **vision du marché**, grâce à la formule d'équilibre du MEDAF (adaptée au cas d'une compagnie d'assurance):

$$\text{Taux d'actualisation} = \frac{D}{V} r_d + \frac{E}{V} [r_f + \beta_e (E[r_M] - r_f)]$$

Où :  $\frac{D}{V}$  = proportion de la compagnie financée par les emprunts,

$\frac{E}{V}$  = proportion de la compagnie financée par investissement,

$V$  = valeur financée de la compagnie ( $V = D + E$ ),

$r_f$  = taux sans risque (sur la base de la rentabilité annuelle moyenne d'un investissement en obligations d'état),

$E(r_M)$  = rendement espéré du portefeuille de marché (portefeuille qui contient tous les actifs risqués disponibles sur le marché) ou taux de rentabilité annuel moyen du marché des actions,

$\beta_e$  = bêta de la compagnie,

$E(r_M) - r_f$  = prime de risque du marché.

Les risques encourus par la société sont alors représentés via le bêta de la compagnie (qui indique l'exposition de la compagnie au risque de marché) et la prime de risque du marché.

Le RDR ainsi obtenu est un taux qui représente **le risque moyen pour toutes les activités de la compagnie**. Ce taux est acceptable si nous considérons la société d'assurance dans sa globalité. Il est donc nécessaire d'effectuer certains ajustements (ce qui peut d'ailleurs poser quelques problèmes si les informations sont insuffisantes), puisque nous nous intéressons uniquement à l'activité vie (pour plus d'explications, se référer à la partie « *Modélisation stochastique* »).

L'approche Monde Réel n'est pas la seule technique envisageable pour déterminer le RDR. Il est possible en effet de calculer **un taux d'actualisation approprié à chaque simulation et chaque maturité**, en tenant compte des données simulées des rendements des actifs et de la politique d'investissement envisagé (de sorte à traduire le taux de rendement attendu par les actionnaires dans chaque situation). Nous rejoignons en fait ici le raisonnement appliqué dans la théorie des déflateurs (voir la partie « *Modélisation stochastique* » pour plus de détails). Toutefois, cette approche est rarement utilisée dans la pratique car elle nécessite un investissement informatique très lourd.

■ **Application dans la détermination de la distribution de la PVFP**

L'objectif est d'estimer plusieurs réalisations de la variable PVFP en effectuant des **simulations stochastiques du compte de résultat de la compagnie**, afin de retracer l'ensemble des situations (i.e. états de la nature) auxquelles la société pourra être confrontée.

Pour évaluer des réalisations de la PVFP, il faut réaliser des projections de l'activité d'assurance sur plusieurs périodes et calculer ensuite la valeur actuelle des cash-flows futurs probables (nets d'impôts), générés par les contrats présents dans le portefeuille à la date d'évaluation (nous ne tenons pas compte de la production future). Il nous faut donc connaître tous les éléments qui interviennent dans le compte de résultat.

Si nous appliquons une vision comptable, le profit se détermine de la façon suivante, à chaque fin d'exercice comptable au cours de la projection :

Primes versées
+ Revenus financiers
- Prestations versées (rachats, termes, décès)
- Charges
- Commissions
- Dotation aux provisions
- Impôts
<b>= Profit net d'impôt</b>

Chaque élément est estimé en tenant compte de la probabilité de survenance de l'évènement, selon des hypothèses Best Estimate (loi de rachat, probabilité de décès ...).

Nous obtenons une chronique des profits futurs qui sont ensuite actualisés (à la date d'évaluation) selon un unique taux d'actualisation et sommés pour obtenir une réalisation de la PVFP.

Concrètement, **une réalisation de la variable PVFP** est obtenue en procédant de la façon suivante :

- nous simulons pour toute la période de projection considérée une trajectoire des actifs selon le modèle envisagé;
- au 31/12 de chaque année (pendant toute la période de projection), nous calculons le résultat net probable distribuable aux actionnaires suivant des hypothèses Best Estimate;
- nous actualisons l'ensemble de ces flux au taux d'actualisation préalablement estimé ;
- la somme de ces valeurs actuelles nous donne alors une réalisation de la PVFP.

Nous réitérons ensuite ce protocole jusqu'à obtenir **un nombre de réalisations jugé suffisant pour aboutir à une interprétation pertinente** (c'est en général le cas à partir de 1 000 réalisations).

L'ensemble des réalisations de la PVFP est ensuite classé par ordre croissant, de sorte à obtenir la distribution empirique de la PVFP, à partir de laquelle nous allons estimer l'EC suivant le critère de risque caractérisant l'aversion au risque de la compagnie.

### 2.3. Mesure de risque

Soit un risque modélisé par une fonction  $X$  qui à tout état de la nature  $\omega$  associe le réel  $X(\omega)$ . Nous appelons **mesure de risque** toute application  $\rho$  associant au risque  $X$  un réel positif  $\rho(X)$ .

Il est évident qu'un grand nombre d'applications répondent à la définition d'une mesure de risque. Mais cela ne veut pas dire que toute mesure de risque est jugée « satisfaisante » ou « adéquate » pour servir d'indicateur de risque lors de la détermination d'un besoin en capital.

En effet, une mesure de risque pertinente pour ce genre d'analyse doit remplir des propriétés supplémentaires, à savoir les 4 axiomes suivants :

- **Invariance par translation** :  $\rho(X+c) = \rho(X) + c$ , pour toute constante  $c$ ;
- **Sous-additivité** :  $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ , quels que soient les risques  $X$  et  $Y$ ;
- **Homogénéité positive** :  $\rho(cX) = c\rho(X)$ , pour toute constante positive  $c$ ;
- **Monotonie** :  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ , quels que soient les risques  $X$  et  $Y$ .

Si une mesure de risque satisfait à ces 4 conditions, alors **elle est qualifiée de cohérente** par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1998).

Ces propriétés ont des interprétations évidentes :

- l'invariance par translation implique que l'addition ou la soustraction d'un montant certain a comme conséquence une translation de la mesure d'un même montant ;
- la sous-additivité implique que la diversification tend à réduire le risque global puisque la fusion de deux risques ne devrait pas accroître la mesure du risque total;
- l'homogénéité positive permet de s'assurer de l'indépendance de la mesure par rapport à l'unité monétaire utilisée ;
- la monotonie implique qu'un risque  $X$  dont les réalisations sont toujours supérieures à celles d'un autre risque  $Y$ , devrait correspondre à un risque et par conséquent à une valeur de  $\rho$  plus élevée.

#### ■ Mesures de risque usuelles

Il existe différentes mesures de risque qui peuvent servir à la détermination d'un besoin en capital. Nous allons nous concentrer sur celles qui sont **les plus fréquemment rencontrées**, à savoir :

- la **Value-at-Risk** (VaR),
- la **Tail-Value-at-Risk** (TVaR),
- la **Conditional Tail Expectation** (CTE).

Pour information, nous pouvons noter que les premières mesures de risque furent l'écart type et la variance. Elles furent introduites par Markovitz (1952) dans l'optimisation de portefeuille : il mesurait le risque d'un portefeuille suivant le critère moyenne/variance. Ce critère ne semble toutefois pas bien adapté au contexte de l'assurance : il est symétrique et pénalise donc les « bonnes variations » comme les mauvaises. Il est néanmoins possible de prendre en compte la notion d'écart type au moment de choisir le niveau de tolérance au risque : ce dernier pourra être exprimé en fonction de l'écart type.

#### ■ Value-at-Risk (VaR)

La VaR de niveau  $\alpha \in [0;1]$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$\text{VaR}(X, \alpha) = \inf \{x \in \mathfrak{R}, P(X \leq x) > \alpha\}$$

Dans le cas d'une variable  $X$  continue, nous retrouvons tout simplement le fait que :  $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$  où  $F_X^{-1}$  désigne la fonction quantile de la loi de  $X$ .

Cette notion a été imposée par JP.Morgan en 1994 et validée par le Comité de Bâle en 2001.

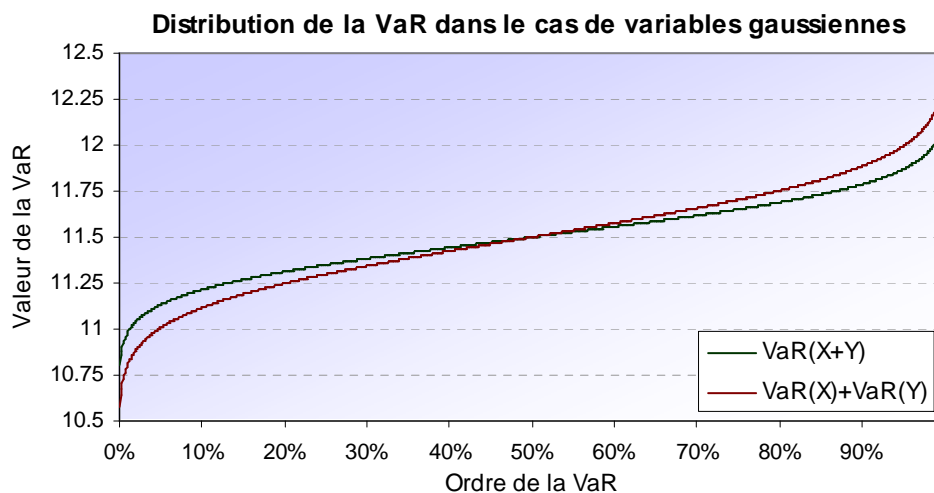
Mais cette mesure de risque est néanmoins **à manier avec prudence car ce n'est pas une mesure de risque cohérente**. En effet, elle ne satisfait pas au critère de sous-additivité. Pour démontrer cela, nous allons évoquer un simple contre-exemple.

Considérons deux risques  $X$  et  $Y$  indépendants:

- $X$  est représenté par une variable normale de moyenne 5 et d'écart type 10% ;
- $Y$  est représenté par une variable normale de moyenne 6.5 et d'écart type 20%.

Il en résulte que la somme  $X+Y$  suit une loi gaussienne de moyenne 11.5 et d'écart type  $\sqrt{5\%}$ .

Nous pouvons montrer (il suffit de regarder la représentation graphique pour s'en persuader) qu'il existe  $\alpha \in [0;1]$  tel que:  $VaR(X+Y, \alpha) > VaR(X, \alpha) + VaR(Y, \alpha)$ .



### ■ Tail-Value-at-Risk (TVaR)

La TVaR de niveau  $\alpha \in [0;1]$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(x) dx$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1-\alpha} E[(X - VaR(X, \alpha))^+]$$

La deuxième partie de cette relation représente la perte moyenne au-delà de la VaR. La TVaR est donc très **sensible à la queue de la distribution du risque**. De plus, c'est **une mesure de risque cohérente**.

### ■ Conditional Tail Expectation (CTE)

La CTE de niveau  $\alpha \in [0;1]$  associé au risque  $X$  est donné par :

$$CTE(X, \alpha) = E[X | X \geq VaR(X, \alpha)]$$

Il s'agit de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR.

Nous pouvons remarquer que **dans le cas continu, la TVaR et la CTE donnent des résultats identiques.**

### ■ Application dans la détermination de l'EC

L'EC correspond au capital minimum nécessaire permettant à la compagnie de couvrir ses engagements envers ses assurés étant donné le risque que celle-ci est prête à supporter. Il s'agit en effet de répondre à la question : de combien de capital la compagnie a-t-elle besoin pour pérenniser l'activité d'assurance avec une certaine probabilité, étant donné le profil de risques lié à la compagnie et l'horizon temporel considéré ?

Comme nous l'avons vu, **le risque d'insolvabilité se caractérise par une PVFP négative.** Il en résulte que **nous modélisons le risque d'insolvabilité par la variable  $X = -PVFP$**  (le risque étant d'avoir un déficit).

En pratique, nous estimerons l'EC à partir de réalisations de la variable PVFP obtenues par simulations stochastiques. Par conséquent, les mesures de risque que nous pouvons employer pour déterminer l'EC avec un niveau  $\alpha$  de tolérance au risque (pour avoir une probabilité de défaillance égale à  $\alpha$ ) sont :

- VaR :  $EC = \text{VaR}(-PVFP, 1-\alpha) = -\text{VaR}(PVFP, \alpha)$   
 Car :  $\text{VaR}(-PVFP, 1-\alpha) = \inf\{x \in \mathfrak{R}, P(-PVFP \leq x) > 1-\alpha\}$   
 $\Leftrightarrow \text{VaR}(-PVFP, 1-\alpha) = -\inf\{x \in \mathfrak{R}, P(PVFP \leq x) > \alpha\}$
  
- TVaR :  $EC = -\text{VaR}(PVFP, \alpha) + \frac{1}{\alpha} E[(\text{VaR}(PVFP, \alpha) - PVFP)^+]$   
 Car :  $\text{TVaR}(-PVFP, 1-\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_{-PVFP}^{-1}(x) dx$   
 $\Leftrightarrow \text{TVaR}(-PVFP, 1-\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{PVFP}^{-1}(x) dx$
  
- CTE :  $EC = -E[PVFP | PVFP \leq \text{VaR}(PVFP, \alpha)]$   
 Car :  $\text{CTE}(-PVFP, 1-\alpha) = E[-PVFP | -PVFP \geq \text{VaR}(-PVFP, 1-\alpha)]$

Soit  $N$  le nombre de simulations et  $(PVFP_{(k)})$  la distribution statistique ordonnée des réalisations de la variable PVFP. Suivant la mesure de risque considérée, l'EC, au seuil  $\alpha$ , sera estimé de la façon suivante :

- VaR :  $EC = -\min\{PVFP_{(k)} | k = 1..N, k > \alpha N\}$
  
- TVaR :  $EC = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l PVFP_{(i)}$ , avec  $l = \max\{k | k = 1..N, k \leq \alpha N\}$   
 $\Leftrightarrow EC = -\min\{PVFP_{(k)} | k = 1..N, k > \alpha N\} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\min\{PVFP_{(k)} | k = 1..N, k > \alpha N\} - PVFP_{(i)})^+$
  
- CTE :  $EC = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l PVFP_{(i)}$ , avec  $l = \min\{k | k = 1..N, k > \alpha N\}$

## ■ Mesure de risque et probabilité de ruine

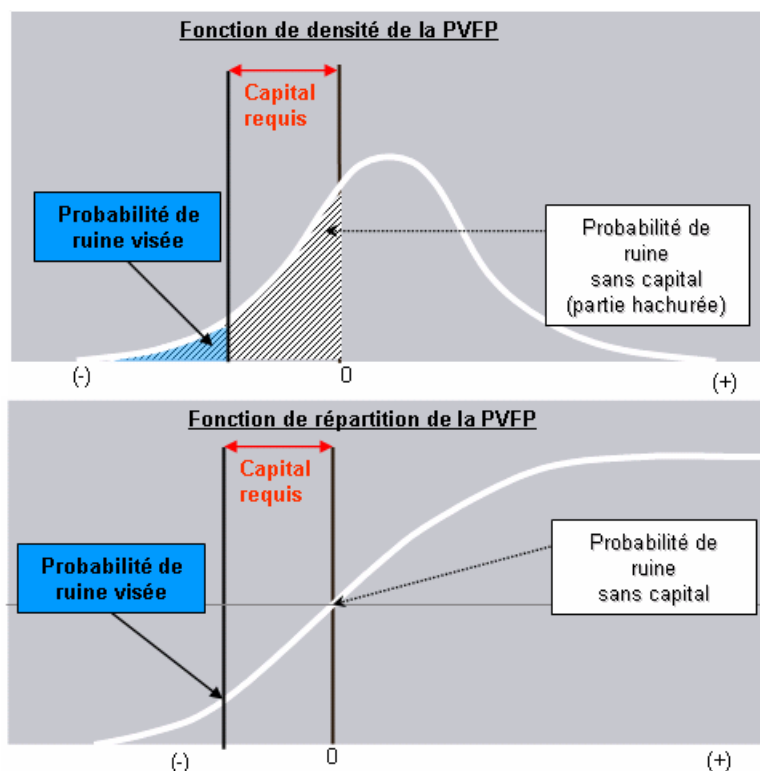
Nous pouvons remarquer que **la VaR rejoint le concept de probabilité de ruine**.

La probabilité de ruine se mesure, comme la probabilité d'avoir une PVFP négative, puisque nous définissons la ruine comme l'évènement suivant : « le total des engagements de la compagnie dépasse le montant de l'actif ».

L'approche consiste alors à déterminer le montant des actifs supplémentaire, nécessaire pour réduire cette probabilité de ruine à un niveau cible spécifié par les objectifs de la gestion (pour atteindre une certaine notation par exemple). Il s'agit donc de trouver le montant minimal de capital  $K$  qui vérifie :

$$P(K + PVFP < 0) < \alpha \Leftrightarrow P(-PVFP < K) > 1 - \alpha$$

Nous retrouvons alors la relation définissant la VaR de niveau  $1 - \alpha$  :  $VaR(-PVFP, 1 - \alpha)$  (soit  $-VaR(PVFP, \alpha)$ ) correspond exactement au montant de ressources qui permet d'avoir une PVFP positive avec une probabilité égale à  $1 - \alpha$  (i.e. une probabilité de ruine de  $\alpha$ ).



La VaR et la probabilité de ruine sont les approches les plus connues et utilisées dans le secteur de la finance et de l'assurance car ce sont **des mesures assez simples à calculer et permettant de communiquer une information compréhensible par la majorité des gens** : il s'agit du besoin en capital minimum pour éviter la ruine suivant une certaine probabilité. Il faut cependant les manipuler avec précautions car **ces mesures ne sont pas cohérentes**.

En pratique, la VaR est beaucoup utilisée dans le secteur financier car c'est à l'origine un modèle bancaire. Elle est toutefois assez difficile à adapter dans le monde de l'assurance vie parce que les contrats sont très différents des contrats bancaires (par exemple la durée de vie).

Il serait donc préférable **d'utiliser la TVaR ou la CTE comme mesures de risque qui sont des mesures cohérentes**. D'autre part, elles tiennent mieux compte de la queue de la distribution, ce

qui permet de **mettre l'accent sur l'ampleur de la ruine** et les conséquences d'une défaillance potentielle. C'est d'ailleurs cette tendance qui émane des superviseurs pour la détermination de l'exigence de solvabilité réglementaire (SCR) sous Solvabilité II. Le CECAPP « apprécie tout particulièrement la TVaR dans une optique de surveillance et d'évaluation sensible au risque ». Mais il reconnaît néanmoins que « selon les caractéristiques des risques du portefeuille, la VaR peut être calibrée pour intégrer le même degré de prudence que le concept de la TailVaR ». Les discussions sont actuellement en cours pour fixer de manière définitive l'indicateur de risque, le niveau de confiance et l'échéance appropriée.

## **2.4. Récapitulatif**

La méthodologie appliquée par une compagnie d'assurance vie pour le calcul d'un EC fait appel à différentes étapes que nous pouvons résumer de cette manière :

- définir l'horizon temporel ;
- modéliser la situation de la compagnie suivant une approche Monde Réel, en tenant compte de l'ensemble des risques inhérents à l'activité ;
- effectuer des simulations recouvrant l'ensemble des états financiers possibles ;
- représenter la distribution de la variable PVFP ;
- choisir la mesure de risque et le niveau de tolérance au risque;
- calculer l'EC suivant la distribution ordonnée de la PVFP et l'indicateur de risque considéré.

Déterminé suivant cette méthodologie, l'EC constitue **une bonne représentation de la réalité économique de l'activité**. Nous obtenons ainsi **un indicateur fiable concernant l'exposition au risque de la compagnie**.

## **3. Lien avec la réglementation et les agences de notation**

Nous devons signaler que le concept d'EC est à **distinguer des exigences en capital demandées actuellement par la réglementation** (la marge de solvabilité réglementaire de Solvabilité I) et **par les agences de notations**. En effet, les exigences actuelles en capital ne tiennent compte que du point de vue des assurés (à savoir garantir la solvabilité) et ne reflètent pas l'ensemble des risques encourus par la société. **Ceci ne permet donc pas de communiquer le niveau « juste » pour éviter la défaillance**. Mais cela tend à évoluer.

### **3.1. Capital Economique et capital réglementaire**

La réglementation a pour but de contrôler la solvabilité des entreprises de sorte à protéger les intérêts des assurés. Pour ce faire, le système de solvabilité actuellement en vigueur (Solvabilité I) exige aux compagnies de détenir un minimum de capital déterminé suivant des formules simplifiées. Ces formules ne reflètent cependant que le niveau lié à l'activité d'assurance. Ceci ne permet donc pas de s'adapter à la particularité de chaque entreprise et de déterminer un besoin en capital qui soit en relation avec le profil de risque de chaque société. Ceci constitue pourtant un point fondamental dans le calcul de l'EC.

Il s'agit ici de l'exigence en capital demandé par Solvabilité I. Mais, comme nous l'avons déjà évoqué (voir la partie « *Vers un bilan réaliste* »), la réglementation a pris la décision de réformer ce système avec la mise en application du projet Solvabilité II, où les exigences en fonds propres seront calculées sur la base d'une évaluation des actifs et des passifs cohérente avec le marché et



suivant une approche intégrée des risques supportés par chaque société. Ceci aura notamment pour conséquence d'inciter le développement de modèles internes et sans doute **de voir converger l'exigence de capital de solvabilité (SCR) et la notion d'EC**.

En effet, le SCR, selon le CECCAP, désigne « le niveau de capital permettant à une entreprise d'assurance d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de donner aux preneurs d'assurance l'assurance raisonnable que les versements seront effectués à l'échéance ». Il correspond donc au montant des fonds propres requis par l'assureur pour honorer ses engagements à un horizon temporel donné et en fonction d'un niveau de confiance défini. Le SCR peut être déterminé en appliquant l'approche standard ou en utilisant un modèle interne des risques, qui doit au préalable être validé et approuvé par les autorités de contrôle. Mais quelque soit l'approche choisie, le calcul devra reposer sur une modélisation de l'ensemble des risques quantifiables supportés par l'assureur (et de leurs corrélations), en fonction de données tirées du bilan qui traduisent la valeur économique de la compagnie.

Ainsi, si le modèle interne est adopté, le SCR et l'EC seront calculés suivant une méthodologie similaire. Les différences résulteront du niveau de risque et de l'horizon temporel : ces éléments seront imposés par les régulateurs dans le cadre du SCR, tandis que dans le cas de l'EC, ils intégreront le point de vue des actionnaires et leur aversion au risque. En fait, nous pouvons dire que **le SCR est aux superviseurs ce que l'EC est aux actionnaires**.

### **3.2. Capital Economique et agences de notation**

Les agences de notation s'intéressent principalement au risque de défaillance lié à l'aptitude que possède la société à rembourser ses emprunts. Elles communiquent une évaluation de la santé financière de la compagnie aux assurés et aux créanciers en attribuant une note à chaque compagnie selon son risque de non remboursement. Sur la base d'études statistiques concernant l'ensemble du secteur et selon des données historiques, elles déterminent le niveau de capital nécessaire que la société doit détenir suivant la note que cette compagnie souhaite obtenir. Cette **méthodologie rétrospective** semble inadaptée pour pouvoir dire que le capital exigé par les agences de notation soit identique à l'EC, dont la détermination s'appuie plutôt sur **une vision prospective des besoins en fonds propres**.

Toutefois, suite à l'évolution en matière de gestion du risque d'entreprise, les agences commencent à adopter de nouveaux critères de notation. Par exemple, Standard & Poor's a récemment créé un modèle dynamique (Financial Product Capital, FPC) pour mesurer l'EC requis. D'autres agences suivent cette voie, comme A.M Best et Moody's qui cherchent à mettre en place des modèles d'adéquation du capital, permettant de mettre en relation l'exigence en capital avec les modèles internes développés par les compagnies pour la détermination de l'EC.

## **4. Au-delà d'une simple mesure de l'exposition au risque**

**La sécurité et la survie sont les principales raisons qui conduisent la compagnie à calculer un EC**. Les marchés financiers deviennent plus volatils et la compétitivité s'accroît. Les institutions financières et les investisseurs veulent donc pouvoir disposer d'informations réalistes pour se faire une idée claire des risques inhérents à une compagnie et s'assurer que cette dernière aura assez de capital pour être capable de les couvrir dans une certaine mesure. Ceci est demandé à la fois au niveau du groupe, mais aussi au niveau individuel. Le calcul de l'EC est donc

primordial pour **se garantir de la sécurité économique d'une entreprise**. Mais, le concept ne représente pas uniquement un indicateur reflétant l'exposition au risque de la compagnie.

En effet, **l'EC peut trouver des applications diverses**, telles que :

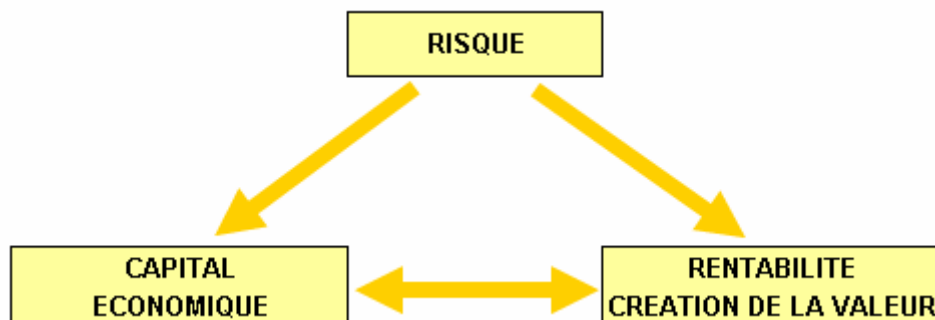
- s'assurer que les risques sont gérés de manière appropriée pour évaluer les contrats, les programmes de réassurance, le contrôle des risques;
- s'assurer que la firme n'est pas surcapitalisée (ce qui pénaliserait la rentabilité des actionnaires);
- s'assurer que le capital est utilisé efficacement pour produire les meilleurs rendements possibles;
- aider la prise de décisions stratégiques.

L'EC participe en fait activement à **une gestion saine du risque d'entreprise**, qui se décompose en cinq étapes clés :

- identifier les risques,
- quantifier les risques : leur poids, leurs impacts, leurs interactions,
- apporter des solutions pour y faire face,
- prendre une décision pour les gérer (si possible la plus optimale possible pour répondre aux intérêts et aux attentes de chacun) et la mettre en application,
- mesurer l'impact sur la création de valeur.

Les assureurs sont alors capables de **mieux comprendre les risques encourus** quand ils mettent par exemple en place de nouveaux projets, car ils ont plus de facilités à identifier les produits qui créent de la valeur à moindre risque.

En effet, l'EC permet de **concilier rentabilité et solvabilité**. Il constitue **un véritable outil d'aide au pilotage de la gestion** :



L'analyse de la structure du risque permet de déterminer un besoin en capital : l'EC correspond au niveau minimal de capital nécessaire pour assurer la continuité de l'activité (i.e. la solvabilité) selon un horizon de temps et un niveau de tolérance aux risques spécifiés. Le niveau de tolérance aux risques est déterminé en fonction des risques que les actionnaires sont prêts à prendre pour atteindre un certain niveau de rentabilité, qui dépend lui-même du prix du risque. Cette rentabilité sera améliorée avec une « bonne » allocation de capital, mais sera freinée par les coûts de friction liés à la détention du capital requis.

En fait, l'EC apporte des informations utiles pour améliorer la prise de décision, le but étant de trouver **un juste équilibre entre risque, capital et rendement de sorte à obtenir les meilleurs résultats possibles tout en pérennisant l'activité et en respectant les contraintes réglementaires**. Ne pas détenir assez de capital implique un risque de défaut et en détenir trop nuit à la rentabilité des actionnaires.

L'EC constitue donc un outil indispensable pour les gestionnaires, car il permet de fournir des renseignements sur les risques supportés mais également par rapport à la performance de la compagnie (i.e. rentabiliser un niveau de fonds propres approprié par rapport aux risques encourus par la société).

La compagnie peut donc démontrer qu'elle est capable de **gérer convenablement l'utilisation de capital et d'appréhender le couple rentabilité/risque**. Il est ainsi possible aux investisseurs, aux régulateurs, aux analystes et autres, de comprendre et d'apprécier le système de gestion.

## **5. Conclusion**

L'EC se définit comme **le montant de capital nécessaire à la couverture des engagements envers les assurés, selon un critère de risque défini a priori et un horizon temporel spécifié**.

Il est **mesuré sur la base d'une vision économique de la compagnie, cohérente avec les valeurs de marché**. Son calcul est en effet réalisé à partir de simulations stochastiques de la valeur actuelle des profits futurs probables nets distribuables aux actionnaires, évaluées suivant une approche réelle.

Nous disposons ainsi d'une **juste mesure de l'exposition au risque** et des impacts financiers et économiques que peut connaître la compagnie d'assurance. Mais, l'EC constitue également un **important outil d'aide à la décision basé sur le risque**, puisqu'il permet, entre autres :

- d'identifier et de comprendre les risques supportés par la compagnie ;
- de diffuser un reporting financier plus complet, avec des informations fiables concernant la solvabilité de la société ;
- de déterminer un montant et une allocation de capital appropriés pour couvrir les risques inhérents à l'activité ;
- d'effectuer une tarification;
- d'aider la gestion Actif/Passif dans sa prise de décision ;
- d'optimiser le risque, la détention de capital et la rentabilité ;
- de servir d'argument pour discuter avec les régulateurs et les agences de notation.

**L'EC s'inscrit donc au cœur de la gestion du risque et de l'analyse de la création de la valeur de la compagnie**. Grâce à cet outil, il est possible de prendre des décisions réfléchies quant à la politique d'investissement, à la tarification de nouveaux produits ou à l'allocation du capital, de sorte à améliorer la compétitivité tout en assurant la profitabilité de la compagnie.



## PARTIE VI : APPLICATION POUR UN PORTEFEUILLE TYPE DE CONTRATS D'EPARGNE EN EUROS

L'EV se définit comme la valeur actuelle des profits futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures. Elle exprime le prix théorique qu'un investisseur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la société. Pour son calcul, Towers Perrin-Tillinghast applique une méthodologie de type MCEV (suivant la théorie risque-neutre) qui correspond à une EV stochastique, cohérente avec les valeurs de marché.

L'EC se définit comme le montant de capital suffisant pour couvrir les pertes potentielles à un niveau de risque toléré et pour un horizon de temps spécifié.

Ces deux concepts sont des outils utiles à la prise de décision car ils permettent de se forger une opinion sur le potentiel de la compagnie, tant par rapport à sa performance et à son aptitude à créer de la valeur, que par rapport à son profil de risque.

**Les calculs de l'EV et de l'EC sont en pratique effectués au sein des compagnies par des équipes différentes (en général, à l'inventaire pour l'EV et au sein de la gestion Actif/Passif pour l'EC) et parfois même sur des logiciels différents.**

L'objectif de cette partie est de **pouvoir comparer les méthodes de calcul de la MCEV et de l'EC, afin de voir si des deux méthodes de calculs peuvent être rapprochées ou non, et pourquoi.**

Pour ce faire, nous allons nous baser sur un portefeuille représentatif de contrats d'épargne en euros. Nous partirons d'une situation de référence, puis nous ferons varier certains paramètres afin de calculer la MCEV, l'EC et une série de mesures de sensibilités. A partir d'une analyse de ces résultats, il s'agira alors de dégager les éléments de convergence ou de divergence des deux méthodes. L'ensemble des calculs est effectué à l'aide du logiciel *MoSes*.

Dans un premier temps, nous allons décrire la procédure qui nous a permis de générer les scénarios nécessaires aux simulations stochastiques à partir desquelles seront calculés la MCEV et l'EC.

### **1. Génération de scénarios économiques**

L'objectif est de pouvoir calculer une MCEV suivant la théorie risque-neutre et un EC qui utilise l'approche Monde réel. Il nous faut donc pouvoir simuler le prix des différents actifs (détenus ou qui vont être achetés par la compagnie) pendant la période de projection.

Nous devons disposer de deux jeux de scénarios :

- **un scénario risque-neutre** où le rendement espéré de tout actif est égal au taux sans risque (nous supposons que les marchés sont complets et donc que la probabilité risque-neutre est unique) ;
- **un scénario monde réel** où nous nous attachons à l'évolution réelle des actifs (suivant le taux sans risque plus une prime de risque).

Nous allons présenter le raisonnement utilisé pour la création de ces scénarios, qui nécessite notamment la modélisation des processus de diffusion des taux d'intérêt et du cours des actions.

## 1.1. Modélisation du taux court

Le taux court  $r(t)$  à une date donnée  $t$  (que nous appelons aussi taux court instantané) est le taux qui s'applique pour une période de longueur infinitésimale.

La connaissance du processus stochastique suivi par le taux et sa valeur aux différentes dates de projection va nous être très utile. En effet, d'une part, nous pourrions reconstituer la fonction d'actualisation prévalant aux différentes dates de projection, et par conséquent déterminer la valeur des titres obligataires en portefeuille ainsi que ceux traités sur le marché. D'autre part, cela nous permettra de simuler le rendement des actions, suivant que nous nous situons dans un univers risque-neutre ou un univers réel.

### ■ Modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

Il existe plusieurs modèles d'équilibre des taux (que ce soit à un ou deux facteurs) mais ceux-ci reposent tous sur **les mêmes hypothèses de base**:

- il n'existe pas coûts de transaction,
- les titres sont parfaitement divisibles,
- les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information,
- les marchés sont efficaces ce qui implique l'absence d'opportunité d'arbitrage,
- les taux d'emprunts et de prêts sont égaux.

Nous choisissons de représenter la dynamique des taux courts par le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (datant de 1985). Il s'agit d'**un modèle d'équilibre à un facteur** (le taux court dépend d'une seule source d'incertitude) qui est couramment utilisé dans les modélisations car il est assez simple à mettre en application et permet d'obtenir des résultats basés sur la structure initiale observable sur le marché (pour le calibrage des paramètres), ce qui assure la **cohérence des prix produits avec les valeurs de marché**.

Le modèle CIR est caractérisé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \phi\sqrt{r_t}dZ_t$$

Où :  $a$  = force de retour à la moyenne,

$b$  = valeur moyenne à long terme,

$\phi$  = volatilité telle que  $\phi\sqrt{r_t}$  correspond à l'écart type instantané du taux court,

$Z_t$  = mouvement brownien standard.

$$E[r_t | F_s] = r_s \exp^{-a(t-s)} + b(1 - \exp^{-a(t-s)})$$

$$\text{Var}[r_t | F_s] = r_s \phi^2 \frac{(\exp^{-a(t-s)} - \exp^{-2a(t-s)})}{a} + b\phi^2 \frac{(1 - \exp^{-a(t-s)})^2}{2a}$$

Nous pouvons remarquer qu'il apparaît **un phénomène de retour à la moyenne** : le taux semble poussé, au cours du temps à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne. Ce fait peut d'ailleurs trouver une explication macroéconomique : quand les taux sont élevés, les emprunts diminuent du fait de leur coût élevé et l'économie a tendance à ralentir ; ceci provoque alors une diminution des taux. Par contre, si les taux sont faibles, les emprunts sont plus attractifs, ce qui poussera à faire accroître les taux par le jeu de l'offre et de la demande. Les variations du taux court s'expliquent donc par un effet rappel et un effet aléatoire.

Il faut ajouter que le modèle, tout en conservant la simplicité du processus d'Orstein-Uhlenbeck, introduit un processus en racine carrée **qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives** (ce qui n'est pas le cas du modèle de Vasicek où le taux court peut devenir négatif car l'écart type instantané ne dépend que du niveau atteint par le taux court). En effet, quand le taux court décroît, l'écart type  $\phi\sqrt{r_t}$  en fait de même. A la limite, quand ce taux est nul, le taux repart vers des valeurs positives car nous avons :  $dr_t = ab dt$  .

Mais il faut également noter que le modèle présente néanmoins l'inconvénient de **stabiliser la queue de la structure des taux** ce qui est assez problématique lorsque nous raisonnons à très long terme et que nous nous retrouvons dans la zone où le taux est stabilisé autour de sa valeur limite. Ceci n'est pas le cas dans notre application : nous nous intéressons uniquement à ce qui risque de se passer dans les 30 ans à venir (cette période est déjà très longue mais ne peut être considérée comme du très long terme).

Comme nous allons le voir, la courbe des taux va nous être indispensable dans notre étude. Nous allons pouvoir :

- **déterminer le prix des zéro-coupons** (sans risque) nécessaires pour obtenir la fonction d'actualisation à chaque date au cours de la période de projection ;
- **simuler les actifs financiers** dont l'évolution dépend en partie de ce taux,
- **déterminer la valeur de marché et la valeur actuelle des éléments du portefeuille;**
- **définir les taux auxquels seront placés les obligations** qui seront achetées dans le futur.

#### ■ Détermination de la fonction d'actualisation

Le taux court instantané permet **de reconstituer la structure par termes des taux** (ou la fonction d'actualisation) à n'importe quelle date. En effet, sous l'hypothèse du modèle de CIR, la valeur à la date t du zéro-coupon de maturité T est égale à :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp\{-B(t, T) r(t)\}$$

$$\text{Où : } A(t, T) = \left\{ \frac{2\gamma \exp\left\{\frac{(\gamma + a)(T - t)}{2}\right\}}{(\gamma + a) (\exp\{\gamma(T - t)\} - 1) + 2\gamma} \right\}^{\frac{2ab}{\phi^2}},$$

$$B(t, T) = \left\{ \frac{2 (\exp\{\gamma(T - t)\} - 1)}{(\gamma + a) (\exp\{\gamma(T - t)\} - 1) + 2\gamma} \right\},$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\phi^2} .$$

Ces zéro-coupons sont assimilables à des obligations d'état qui sont supposées sans risque.

La fonction d'actualisation nous permettra par la suite de calculer **les valeurs de marché des différentes obligations** (sans risque de défaut). Ces dernières sont en effet valorisées suivant cette relation :

$$V_t = N * \left( P(t, T) + c \sum_{i=t+1}^T P(t, i) \right)$$

Où :  $V_t$  = prix de l'obligation à la date t,  
 N = valeur nominale de l'obligation,  
 c = taux de coupon,  
 T = maturité de l'obligation.

Mais il nous faut avant tout pouvoir estimer les différents paramètres du processus de diffusion du taux. Pour ce faire, nous allons **calibrer le processus de manière cohérente avec le marché** : nous fixons les paramètres de sorte à reproduire le plus fidèlement possible les prix de marché des instruments échangés tels que les zéro-coupons fournissant la fonction d'actualisation à la date d'évaluation. Nous devons faire en sorte que la formule fournissant les prix des zéro-coupons à partir du taux court instantané donne les mêmes résultats que les prix observés sur le marché.

Par conséquent, pour affecter des valeurs aux paramètres de notre processus de taux, il nous faut d'abord déterminer la fonction d'actualisation à la date d'évaluation.

■ Détermination de la fonction d'actualisation en date d'évaluation

Nous disposons en date d'évaluation des taux au pair pour des obligations payant des coupons annuels, suivant 18 maturités: de 1 à 15 ans, 20 ans, 25 ans et 30 ans.

Taux au pair	Maturité
0.0251	1
0.0264	2
0.0275	3
0.0286	4
0.0295	5
0.0303	6
0.0311	7
0.0318	8
0.0324	9
0.0329	10
0.0334	11
0.0338	12
0.0342	13
0.0345	14
0.0348	15
0.0365	20
0.0374	25
0.0379	30

Rappelons que le taux au pair pour une maturité donnée est le taux de coupon qui permet d'égaliser le prix de l'obligation et son nominal :

$$VN = VN * \left( P(0, T) + \sum_{i=1}^T C_T * P(0, i) \right)$$

Où : VN = Valeur Nominale,

P(0,i) = Prix du Zéro Coupon de maturité i années,

C<sub>T</sub> = Taux au pair pour l'obligation de maturité T années.

C'est à partir de ces taux que nous allons pouvoir reconstituer la fonction d'actualisation du marché. En effet, la relation précédente peut s'écrire sous la forme:

$$P(0, T) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{T-1} C_T * P(0, i)}{1 + C_T}$$

Il suffit alors de commencer par calculer le prix du zéro coupon de maturité un an et d'appliquer successivement la relation aux différentes maturités.



Il nous faut néanmoins connaître les taux au pair pour toutes les maturités annuelles allant de 1 à 30 ans. Nous choisissons donc d'**estimer les taux manquants en appliquant une interpolation cubique**, par segment de courbes.

■ Principe de l'interpolation cubique

Nous considérons la courbe qui exprime les taux au pair en fonction de la maturité, selon la relation :  $C_t = a t^3 + b t^2 + c t + d$ .

Nous définissons un segment de la courbe où nous connaissons quatre points :  $(t_1;C_1)$ ,  $(t_2;C_2)$ ,  $(t_3;C_3)$ ,  $(t_4;C_4)$ . Sous l'hypothèse que la courbe passe par ces quatre points, nous obtenons un système à quatre équations qui nous permettra d'estimer les paramètres a, b, c et d :

$$\begin{cases} C_1 = a t_1^3 + b t_1^2 + c t_1 + d \\ C_2 = a t_2^3 + b t_2^2 + c t_2 + d \\ C_3 = a t_3^3 + b t_3^2 + c t_3 + d \\ C_4 = a t_4^3 + b t_4^2 + c t_4 + d \end{cases}$$

Par rapport à nos données, nous définissons trois segments donc nous estimons trois fois nos paramètres, suivant où nous nous situons sur la courbe :

- segment 1 :

Taux au pair	Maturité
0.0342	13
0.0345	14
0.0348	15
0.0365	20

⇒

a	5.24E-06
b	-2.50E-04
c	4.21E-03
d	1.01E-02

- segment 2 :

Taux au pair	Maturité
0.0345	14
0.0348	15
0.0365	20
0.0374	25

⇒

a	-1.96E-06
b	1.03E-04
c	-1.47E-03
d	4.03E-02

- segment 3 :

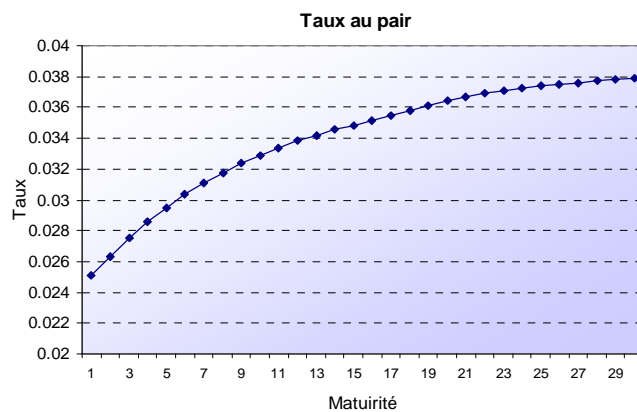
Taux au pair	Maturité
0.0348	15
0.0365	20
0.0374	25
0.0379	30

⇒

a	4.28E-07
b	-4.00E-05
c	1.33E-03
d	2.24E-02

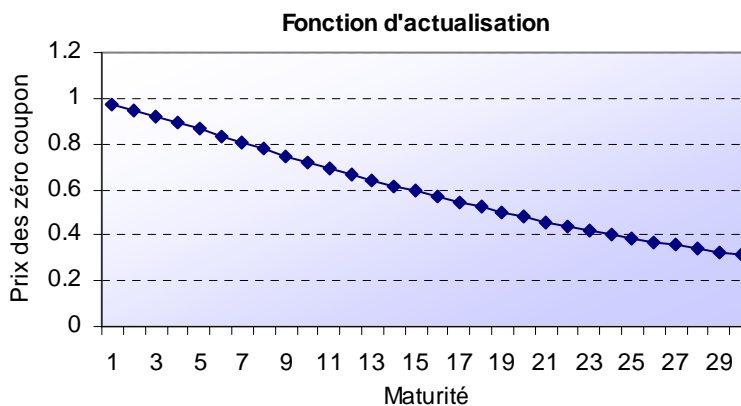
Pour chaque taux manquant, nous estimons sa valeur suivant qu'il appartienne à l'un ou l'autre des trois segments puis nous prenons la moyenne. Par exemple, le taux au pair pour une obligation de maturité de 16 ans se situe sur les trois segments. Par conséquent, nous avons à disposition trois valeurs possibles. L'estimation de taux au pair correspondra donc à la moyenne de ces trois valeurs.

Taux au pair	Maturité	Taux au pair	Maturité
0.0251	1	0.0351	16
0.0264	2	0.0355	17
0.0275	3	0.0358	18
0.0286	4	0.0361	19
0.0295	5	0.0365	20
0.0303	6	0.0367	21
0.0311	7	0.0369	22
0.0318	8	0.0371	23
0.0324	9	0.0372	24
0.0329	10	0.0374	25
0.0334	11	0.0375	26
0.0338	12	0.0376	27
0.0342	13	0.0377	28
0.0345	14	0.0378	29
0.0348	15	0.0379	30



Nous obtenons au final l'ensemble des données dont nous avons besoin pour déterminer la fonction d'actualisation à la date d'évaluation.

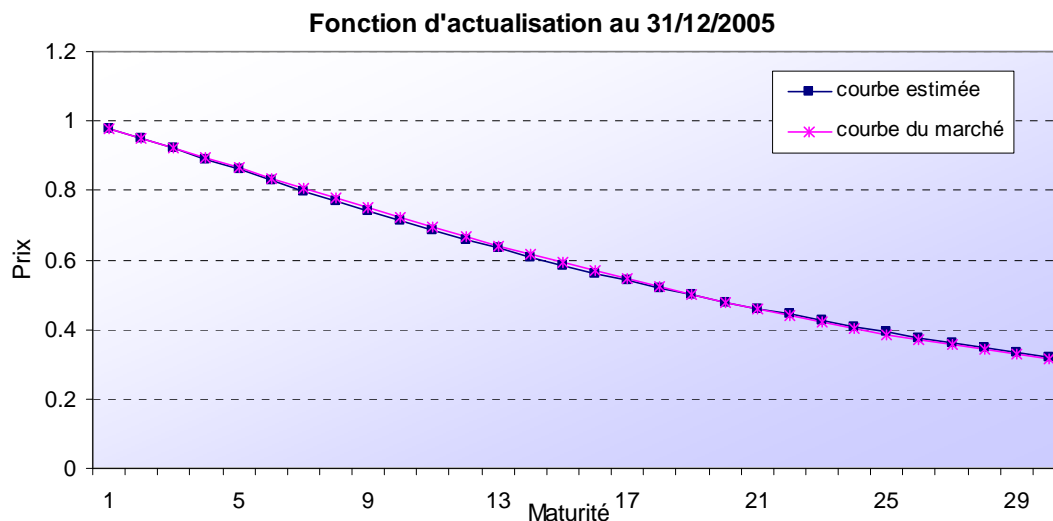
Prix	Maturité	Prix	Maturité
0.97555	1	0.56898	16
0.94928	2	0.54549	17
0.92169	3	0.52233	18
0.89322	4	0.49977	19
0.86424	5	0.47813	20
0.83505	6	0.45767	21
0.80591	7	0.43837	22
0.77702	8	0.42012	23
0.74857	9	0.40282	24
0.72067	10	0.38632	25
0.69343	11	0.37051	26
0.66693	12	0.35533	27
0.64122	13	0.34072	28
0.61635	14	0.32666	29
0.59256	15	0.31308	30



Ceci va nous permettre de calibrer la modélisation de la dynamique des taux courts en fonction des données du marché. Nous retenons les valeurs suivantes:

Paramètre	Dénomination	Valeur
a	Force de retour à la moyenne	27.86%
b	Taux court moyen	4%
$\varphi$	Volatilité	1%
$r_0$	Taux court initial	2.2%

Avec ce paramétrage, nous obtenons un écart maximal de 0.84% entre les prix des zéro-coupons du marché et les prix calculés selon la modélisation.



Nous pouvons donc dire que le calibrage des paramètres est cohérent avec les prix disponibles sur le marché en date d'évaluation.

## 1.2. Modélisation du cours de l'action

Nous considérons que les actions sont modélisées par **un indice synthétique S** de sorte à pouvoir calculer **un rendement global**. Nous devons envisager deux situations suivant l'univers dans lequel nous travaillons.

Nous adoptons le modèle de Black et Scholes. La distribution du cours de l'action suit donc une loi log-normale :

$$dS_t = (\mu_t - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$\Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu_t - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$$

Où :  $S_0$  = valeur initiale du cours de l'action,  
 $\mu_t$  = espérance de rentabilité de l'action,  
 $q$  = taux de dividende de l'action,  
 $\sigma$  = volatilité de l'action

$W_t$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique P.

Le rendement espéré de l'action correspond au taux sans risque, auquel nous ajoutons une prime de risque  $\lambda$  qui reste par simplification constante au cours du temps :

$$\mu_t = r(t) + \lambda$$

$$\Rightarrow dS_t = (r(t) + \lambda - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Le théorème de Girsanov nous permet alors de passer de l'univers réel à l'univers risque-neutre en posant :

$$dW_t^Q = dW_t + \frac{\lambda}{\sigma} dt$$

Où :  $W_t^Q$  = un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre Q,

$\frac{\lambda}{\sigma}$  = prix de marché du risque.

En effet, en univers risque-neutre, le rendement de tout actif correspond au taux sans risque, alors que dans le monde réel, ce rendement est égal au taux sans risque plus une prime de risque.

En résumé, la dynamique du prix des actions est caractérisée par un processus à chaque univers :

- **univers risque-neutre** :  $dS_t = (r(t) - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$
- **univers réel** :  $dS_t = (r(t) + \lambda - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t$

Notons que le processus décrivant la dynamique du taux instantané reste identique dans les deux univers. Nous calibrons en effet le processus stochastique par rapport à des zéro-coupons qui sont sans risque et qui ont donc le même rendement dans l'univers risque-neutre et dans l'univers réel.

Il nous reste toutefois encore à prendre **en considération la corrélation** qui existe entre le rendement des actions et les taux d'intérêts :

$$dW_t dZ_t = dW_t^Q dZ_t = \rho dt$$

où  $\rho$  désigne le coefficient de corrélation qui reste identique, quel que soit l'univers considéré..

En effet,  $W_t$  et  $Z_t$  suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance  $t$  donc :

$$\langle W_t, Z_t \rangle = t\rho \Rightarrow d\langle W_t, Z_t \rangle = \langle dW_t, dZ_t \rangle = \rho dt$$

Or, comme  $dW_t^Q = dW_t + \frac{\lambda}{\sigma} dt$ ,

$$\text{nous avons } \langle dW_t, dZ_t \rangle = \langle dW_t^Q - \frac{\lambda}{\sigma} dt, dZ_t \rangle \Rightarrow \langle dW_t, dZ_t \rangle = \langle dW_t^Q, dZ_t \rangle = \rho dt$$

$$\text{car } \langle dt, dZ_t \rangle = d\langle t, Z_t \rangle = 0.$$

Pour décorréler les variables, nous utilisons **la décomposition de Choleski** (voir *Annexe 8*). Nous posons alors :

- pour l'univers réel :
 
$$\begin{cases} dZ_t = d\tilde{Z}_t \\ dW_t = \rho d\tilde{Z}_t + \sqrt{1-\rho^2} \rho d\tilde{W}_t^Q \end{cases} \text{ où } \tilde{Z}_t \text{ et } \tilde{W}_t^Q \text{ sont des mouvements browniens indépendants ;}$$
- pour l'univers réel :
 
$$\begin{cases} dZ_t = d\tilde{Z}_t \\ dW_t = \rho d\tilde{Z}_t + \sqrt{1-\rho^2} \rho d\tilde{W}_t \end{cases} \text{ où } \tilde{Z}_t \text{ et } \tilde{W}_t \text{ sont des mouvements browniens indépendants.}$$

Ainsi, le taux court instantané  $r$  et l'action  $S$  sont décrits par les processus suivants :

- $dr_t = a(b - r_t)dt + \phi\sqrt{r_t}d\tilde{Z}_t$ ,
- $dS_t = (r(t) - q) S_t dt + \sigma \rho S_t d\tilde{Z}_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} S_t d\tilde{W}_t^Q$   
 $\Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left\{ r(t) - q - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \rho \tilde{Z}_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} \tilde{W}_t^Q \right\}$  dans l'univers risque-neutre ;
- $dS_t = (r(t) + \lambda - q) S_t dt + \sigma \rho S_t d\tilde{Z}_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} S_t d\tilde{W}_t$   
 $\Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left\{ r(t) + \lambda - q - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \rho \tilde{Z}_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2} \tilde{W}_t \right\}$  dans l'univers réel.

Pour pouvoir effectuer des simulations au cours du temps, il reste encore à discrétiser ces processus.

### 1.3. Discrétisation des processus

Nous choisissons d'appliquer **l'approximation d'Euler** (pour plus de détails, voir la partie « *Modélisation stochastique* »). Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation. Nous obtenons alors pour le processus de taux :

$$r(t + \Delta t) = a(b - r(t))\Delta t + \phi\sqrt{r(t)\Delta t} Z_1$$

Dans le cas de l'action, nous avons :

- en univers risque neutre :  $S(t + \Delta t) = S_t \exp \left\{ \left( r(t) - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \rho \sqrt{\Delta t} Z_1 + \sigma \sqrt{(1 - \rho^2)} \Delta t W_1 \right\}$
- en univers réel :  $S(t + \Delta t) = S_t \exp \left\{ \left( r(t) + \lambda - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \rho \sqrt{\Delta t} Z_1 + \sigma \sqrt{(1 - \rho^2)} \Delta t W_1 \right\}$

Les variables  $Z_1$  et  $W_1$  sont des variables gaussiennes indépendantes d'espérance nulle et de variance égale à  $\Delta t$ . Pour simuler les réalisations de ces variables normales, nous appliquons **la méthode de Box Muller avec rejection**. Cette méthode permet en effet de produire des couples de réalisations de variables aléatoires normalement distribuées standards (centrées et réduites) et indépendantes. Nous appliquons cet algorithme:

- soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$  ;
- posons :  $V_1 = 2 * U_1 - 1$  ;  
 $V_2 = 2 * U_2 - 1$  ;
- si  $R = V_1^2 + V_2^2 < 1$ , alors les variables  $X_1$  et  $X_2$  définies de la manière suivante sont normalement distribuées et de corrélation nulle :

$$\begin{cases} X_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2 * \text{Ln}(R)}{R}} \\ X_2 = V_2 \sqrt{\frac{-2 * \text{Ln}(R)}{R}} \end{cases}$$

Dans la pratique, nous obtenons des réalisations des variables uniformes à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires sur l'intervalle compris entre 0 et 1.

### 1.4. Détermination et validation des jeux de scénarios

Pour le processus de prix des actions, nous retenons les paramètres suivants :

Paramètre	Dénomination	Valeur
$\lambda$	Prime de risque	4.3%
$q$	Taux de dividende	3%
$\sigma$	Volatilité	20%
$\rho$	Corrélation avec les taux d'intérêts	-40%

Dans le cadre des simulations, le taux de dividende est fixé à 0 de sorte à produire le rendement total des actions. Nous raisonnons sur une valeur initiale  $S_0$  égale à 1. La volatilité et la corrélation entre les rendements sur action et le taux court ont été estimées à partir d'une analyse des données historiques.

Pour chaque année de projection, nous effectuons 1000 simulations dans chacun des univers en procédant de la façon qui suit :

- des réalisations de variables normales sont générées ;
- la valeur du taux court est calculée suivant le processus de taux discrétisé ;
- les prix des zéro-coupons sont estimés suivant la relation qui les lie au taux court;
- le processus discrétisé de l'évolution de l'action permet de déterminer son rendement total.

Ces scénarios nous communiquent donc l'ensemble des éléments dont nous avons besoin pour faire une MCEV ou pour estimer un EC. Mais avant de pouvoir les utiliser en pratique, nous devons procéder à **quelques vérifications de sorte à s'assurer de la cohérence des résultats**.

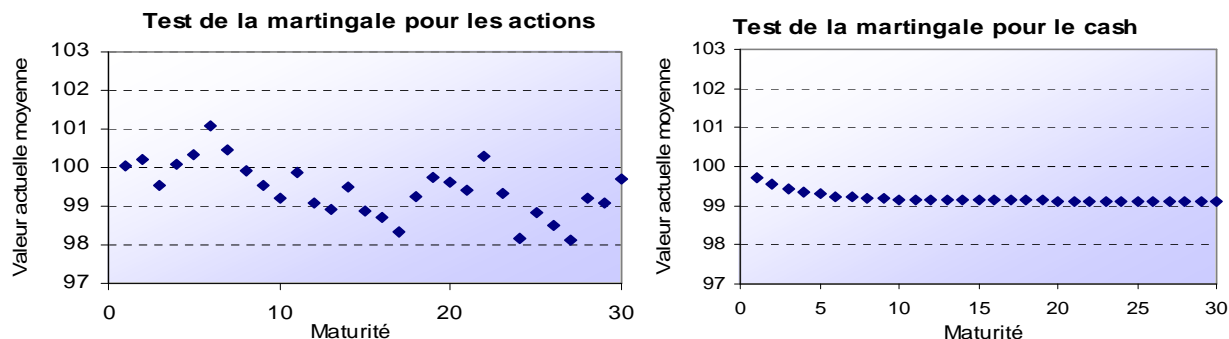
Dans le cas du scénario risque-neutre, nous effectuons **le test de la martingale**. Ce test consiste à vérifier que les valeurs escomptées sont des martingales par rapport à la probabilité risque-neutre. Nous devons donc vérifier la relation suivante :

$$E[ A_t P(s, t) | F_s ] = A_s \Leftrightarrow E[ A_t P(0, t) ] = A_0$$

Comme le rendement de tout actif est égal au taux sans risque, l'investissement d'une unité monétaire dans une classe d'actif à la date de début de projection doit avoir une valeur future actualisée d'une unité monétaire, quelque soit la durée de détention.

En partant d'un prix initial égal à 100, nous projetons donc le prix suivant chacun des 1000 scénarios que nous actualisons suivant le taux approprié à chaque simulation et à chaque maturité. Nous devons retrouver en moyenne une valeur égale à 100.

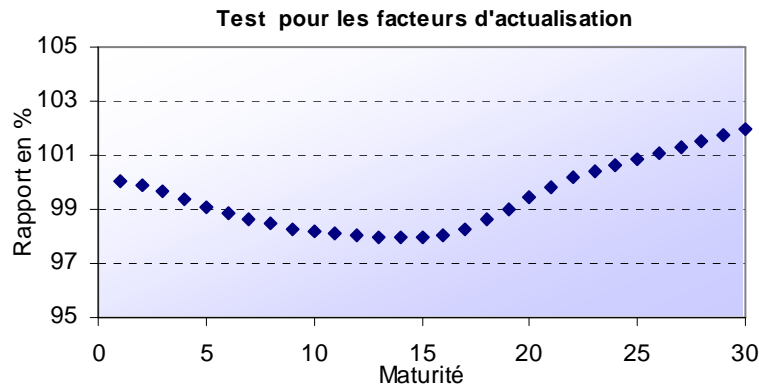
Nous effectuons ce test pour les rendements des actions et pour le cash (investissement au taux court).



Les valeurs se répartissent au tour de 100 avec un écart maximale de 0.89 pour le cash et de 1.86 pour les actions.

Le rendement moyen des actifs est donc égal au taux sans risque ce qui permet de dire que **le contexte de la théorie risque-neutre est bien pris en compte dans les simulations**.

Pour vérifier la cohérence des facteurs d'actualisation, nous calculons le rapport entre la moyenne des facteurs d'actualisation pour chaque date de la projection et celui déduit de la courbe de taux initiale.



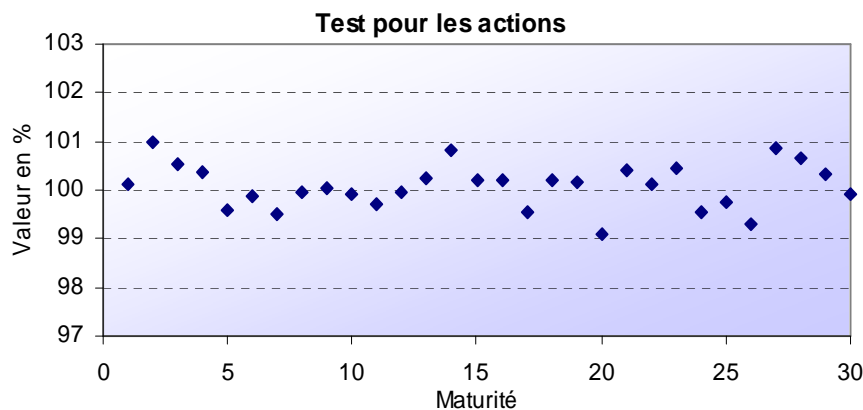
L'écart maximal est de 2.04%.

Dans le cas des scénarios Monde Réel, nous vérifions que les rendements simulés pour chaque période sont en moyenne égaux au rendement du taux sans risque plus la prime de risque :

$$E[ S_{t+1} | F_t ] = S_t \exp\{r(t) + \lambda\} .$$

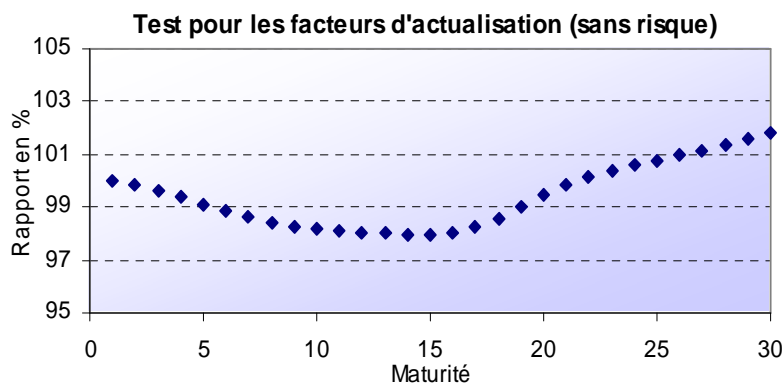
Par conséquent, l'expression  $E[ \frac{S_{t+1}}{S_t} | F_t ] \bar{P}(t-1, t) \exp^{-\lambda}$  devrait être très proche de 1.

$\bar{P}(t-1, t)$  représente le prix moyen du zéro-coupon à la date t-1 et de maturité un an.



Nous obtenons un écart maximal de 0.97%. **Les actions gagnent donc en moyenne le taux sans risque plus la prime de risque.**

Nous vérifions également la cohérence des facteurs d'actualisation (sans risque) en procédant comme dans le cas du scénario risque-neutre. Nous observons que le rapport entre le prix moyen des facteurs d'actualisation et le facteur d'actualisation déduit de la courbe initiale ne dépasse pas 2.07%.



Notons que ces facteurs ne seront pas directement utilisables pour l'actualisation des flux: le taux d'actualisation appliqué dans le monde réel pour évaluer les flux futurs d'une compagnie doit prendre en compte une prime de risque en rapport avec les risques encourus par la société. Il s'agit juste ici de vérifier la cohérence des données simulées.

Comme le nombre de scénarios est limité à 1000, il est logique de voir apparaître certains écarts, mais ceux-ci restent toutefois minimes. **Nous validons donc les jeux de scénarios obtenus** qui pourront donc être utilisés dans la suite de l'étude.

## 2. Données et hypothèses utilisées pour l'application

### 2.1. Description des éléments de la compagnie d'assurance

Nous considérons une compagnie d'assurance fictive représentative du marché français de l'assurance vie. Le portefeuille étudié comporte 5 500 contrats d'épargne en euros, avec un encours total de 50 millions d'euros. Il s'agit d'un même type de contrat présentant les caractéristiques suivantes :

- contrat d'assurance vie entière (pas de date d'échéance),
- versement périodique de primes (fréquence mensuelle),
- taux minimum garanti,
- clause de participation aux bénéfices,
- possibilité de rachat.

Pour faciliter la modélisation, nous avons choisi **d'agréger les contrats du portefeuille par rapport à l'année de souscription**. Nous sommes donc en présence de 15 polices qui sont détaillées dans le tableau ci-dessous:

Portefeuille de contrats d'épargne au 31/12/2005

	Année de souscription	Nombre d'assurés	Age actuariel moyen à la souscription	Provision mathématique	Taux garantis	Prime annuelle agrégée	Prime annuelle par assuré	Répartition
1	1991	103	52	1 760 274	4.5%	82 400	800	3.5%
2	1992	189	50	3 388 153	4.5%	179 550	950	6.8%
3	1993	280	50	4 752 718	4.5%	280 000	1 000	9.5%
4	1994	333	50	5 745 803	4.0%	374 625	1 125	11.5%
5	1995	378	51	5 893 980	3.5%	434 700	1 150	11.8%
6	1996	350	50	4 950 301	3.5%	418 250	1 195	9.9%
7	1997	428	51	5 445 559	3.5%	526 440	1 230	10.9%
8	1998	396	51	4 206 332	3%	475 200	1 200	8.4%
9	1999	402	49	3 426 813	3%	462 300	1 150	6.9%
10	2000	433	50	3 300 854	3.5%	541 250	1 250	6.6%
11	2001	455	49	2 800 185	3%	580 125	1 275	5.6%
12	2002	478	49	2 093 794	3%	578 380	1 210	4.2%
13	2003	402	51	1 233 620	2.5%	502 500	1 250	2.5%
14	2004	441	52	729 146	2.5%	529 200	1 200	1.5%
15	2005	432	51	272 468	2%	550 800	1 275	0.5%
<b>Total</b>		5 500		50 000 000				100.0%

L'âge actuariel moyen à la souscription est déterminé de la manière suivante :

- nous calculons pour chaque assuré  $i$  la probabilité de décès selon l'âge à la souscription  $q_i$ ;

- nous calculons la moyenne suivant l'année de souscription  $\bar{q}_x$  :  $\bar{q}_x = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}$  où  $N$  correspond au nombre d'assurés ayant souscrit une assurance vie durant l'année de souscription considérée ;

- la table de mortalité nous fournit l'âge correspondant : il s'agit de l'âge actuariel moyen.



Cet élément permet donc de déterminer la sinistralité potentielle de la police agrégée en tenant compte de la probabilité de décès moyenne de l'ensemble des têtes ayant souscrit une assurance vie la même année.

Nous pouvons constater que les contrats les plus anciens possèdent les taux garantis les plus élevés.

La compagnie considérée pour notre application numérique possède un **portefeuille simplifié d'actifs** composé :

- d'actions,
- d'obligations sans risque de défaut,
- de liquidités.

Ces actifs, dits de couverture, sont les suivants :

Portefeuille d'actifs au 31/12/2005						
<b>OBLIGATIONS</b>						
Maturité	Valeur nominale	Valeur comptable	Valeur de marché	Plus-value latente	Coupon	Fréquence
01/02/2006	437 094	438 463	439 284	821	9.50%	semestriel
01/07/2006	4 105 709	4 126 793	4 228 880	102 087	8.75%	semestriel
09/07/2008	279 706	291 103	292 460	1 357	5.13%	annuel
01/07/2007	1 820 465	1 857 239	1 924 232	66 992	6.75%	semestriel
24/06/2008	209 779	212 261	225 702	13 440	6.40%	annuel
01/11/2007	523 609	545 106	551 779	6 674	6.00%	semestriel
01/05/2008	769 191	769 191	804 958	35 767	5.00%	semestriel
28/02/2007	139 853	139 580	143 363	3 783	5.13%	annuel
26/10/2007	419 559	417 482	437 432	19 950	5.50%	annuel
31/01/2008	279 706	287 463	288 237	774	4.63%	annuel
12/05/2009	631 931	607 831	660 115	52 284	4.63%	annuel
25/10/2009	1 263 862	1 274 602	1 310 372	35 769	4.00%	annuel
18/03/2009	1 579 827	1 527 040	1 641 993	114 953	4.50%	annuel
01/11/2010	505 545	559 217	558 677	-540	5.50%	semestriel
24/06/2010	1 263 862	1 258 943	1 307 591	48 648	4.25%	annuel
12/11/2010	1 453 441	1 488 282	1 523 497	35 215	4.50%	annuel
05/11/2011	1 742 828	1 718 930	1 934 017	215 087	5.60%	annuel
25/10/2012	1 244 877	1 280 151	1 365 631	85 480	4.75%	annuel
27/09/2011	1 659 837	1 796 601	1 863 665	67 064	5.88%	annuel
16/02/2011	1 659 837	1 667 317	1 838 933	171 616	5.75%	annuel
25/10/2015	1 717 419	1 654 734	1 675 343	20 609	3.00%	annuel
17/06/2013	1 030 452	994 417	1 153 797	159 379	5.13%	annuel
10/03/2014	515 226	512 801	558 968	46 167	4.50%	annuel
05/12/2013	3 434 839	3 433 362	3 614 137	180 776	5.13%	annuel
25/04/2019	5 735 595	5 507 218	6 249 504	742 286	4.25%	annuel
01/02/2019	1 496 242	1 507 150	1 596 191	89 041	4.25%	semestriel
22/01/2018	1 246 868	1 222 204	1 490 631	268 427	5.50%	annuel
01/08/2034	796 686	949 115	954 350	5 235	5.00%	semestriel
31/01/2037	612 835	605 788	681 687	75 900	4.20%	annuel
15/07/2027	306 418	399 994	429 760	29 766	6.25%	annuel
01/11/2027	2 573 908	3 077 318	3 599 610	522 292	6.50%	semestriel
29/09/2029	1 225 670	1 222 496	1 336 839	114 343	5.88%	annuel
<b>Total</b>	<b>42 682 673</b>	<b>43 350 191</b>	<b>46 681 633</b>	<b>3 331 442</b>		
<b>ACTIONS</b>						
		Valeur comptable	Valeur de marché	Plus-value latente		
		4 337 332	5 491 957	1 154 624		
<b>TRESORERIE</b>						
		Valeur comptable				
		2 745 978				

Rappelons que la plus-value latente correspond à la différence entre la valeur de marché et la valeur comptable.

Les actifs sont présents dans la société suivant ces proportions :

	Valeur comptable	Valeur de marché
Actions	8.6%	10.0%
Obligations	86.0%	85.0%
Trésorerie	5.4%	5.0%
Total	100.0%	100.0%

L'ensemble de ces données nous permet d'établir le **Bilan comptable de la compagnie**, au 31/12/2005 (date de notre évaluation):

Bilan comptable au 31/12/2005			
Actif		Passif	
Actions	4 337 332	Réserve de capitalisation	433 502
Obligations	43 350 191	Provisions mathématiques	50 000 000
Trésorerie	2 745 978		
Total	50 433 502	Total	50 433 502

La réserve de capitalisation (plus-values réalisées sur les obligations) représente 1% de la valeur comptable des obligations et appartient dans sa totalité aux actionnaires.

## 2.2. Hypothèses générales

Les flux relatifs à l'activité d'assurance sont projetés mensuellement sur une période de 30 ans. A l'issue de cette durée, les effectifs du portefeuille deviennent quasiment nuls au regard des hypothèses de chutes que nous adoptons.

En ce qui concerne la gestion courante des contrats, nous appliquons les hypothèses suivantes :

- taux de chargement sur primes : 5% ;
- frais d'acquisition sur primes : 4% ;
- taux de chargement sur encours: 0.80% ;
- frais de gestion sur encours : 0.40% ;
- pas de frais de commission ;
- pas de pénalité de rachat ;
- participation aux bénéfices : distribution de 90% du rendement financier net;
- taux d'imposition : 34.43% ;
- cotisations sociales annuelles : 11%.
- inflation : les frais sont exprimés en pourcentage donc nous n'avons pas besoin de prendre en compte le phénomène d'inflation.

Le rendement financier est calculé sur la base du taux de rendement réel des actifs en représentation des provisions mathématiques. Le rendement réel des actifs tient compte des coupons liés aux obligations, des dividendes, des intérêts en rapport avec la trésorerie, et des gains ou pertes réalisés au cours de la stratégie d'investissement. Par conséquent, pour chaque contrat, **le taux servi ou crédité sera égal à :**

$$\text{Taux crédité} = \text{Max} (\text{TMG}; T_{PB} * \text{TRA} - \text{déduction})$$

Où : TMG = taux minimum garanti,  
 $T_{PB}$  = taux de participation aux bénéfices,  
 TRA = taux de rendement réel des actifs,  
 déduction = taux de chargement sur encours.

■ Taux de chutes

■ Mortalité

Nous retenons pour la mortalité une table d'expérience qui se définit comme la table de mortalité TD 88-90, abattue de 20 % (voir *Annexe 9*). Concrètement, nous partons de la probabilité de décès  $q_x$  de la table TD 88-90 (probabilité qu'un individu d'âge  $x$  années décède dans l'année) et nous appliquons le pourcentage d'abattement  $A = 20\%$ . Nous obtenons alors un  $q_x$  abattu et une nouvelle table de mortalité :

$$\begin{aligned} q_x' &= q_x * (1-A) \\ l_0 &= 100\ 000 \\ l_{x+1}' &= l_x' (1- q_x') \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

Où :  $q_x'$  = probabilité qu'un individu d'âge  $x$  années décède dans l'année, pour notre population d'épargnants ;

$l_x'$  = nombre de survivants à l'âge  $x$ .

■ Rachats

Il est assez difficile de définir un comportement rationnel pour les assurés qui effectuent des rachats de contrats d'assurance vie. En effet, ce genre de décision fait intervenir **plusieurs éléments qui sont de natures diverses**. Il peut s'agir notamment :

- d'un changement dans la situation personnelle de l'assuré impliquant un besoin inattendu de liquidités (la perte de son emploi, une naissance, la concrétisation de nouveaux projets, ...) ;
- du contexte économique : les variations des taux d'intérêt peuvent pousser les gens à racheter leur contrat en vue d'en souscrire d'autres plus avantageux ;
- de l'aspect juridique et fiscal : les contrats d'assurance vie bénéficient d'une fiscalité plus ou moins avantageuse suivant la durée courue par le contrat.

C'est d'ailleurs cette dernière caractéristique qui constitue l'une des principales causes de rachat. Différents cas sont à envisager **suivant la date de souscription du contrat** :

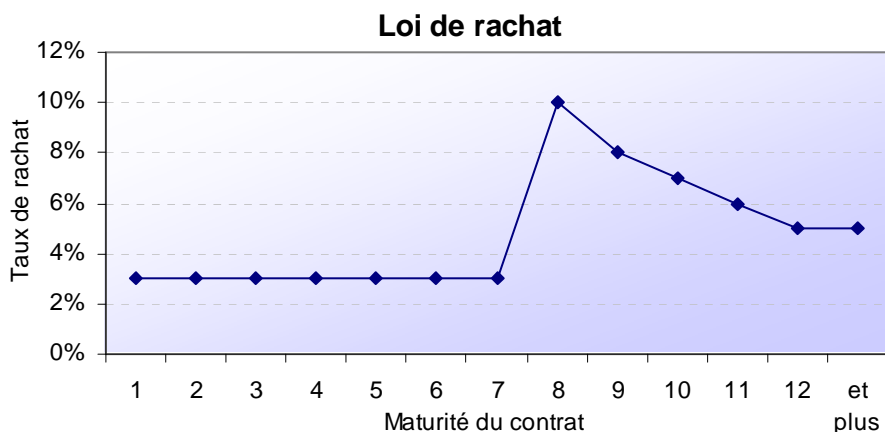
- *contrats souscrits entre le 1<sup>er</sup> janvier 1983 et le 26 septembre 1997* : les rachats sont soumis à l'impôt sur le revenu à moins d'une option pour un prélèvement libératoire (35% si le rachat intervient avant 4 ans et 15% si le rachat intervient entre 4 et 8 ans) mais au-delà d'une détention de 8 ans, le rachat est exonéré ;
- *contrats souscrits à compter du 26 septembre 1997* : les produits acquis à compter du 1er janvier 1998 et attachés sont imposables à l'impôt sur le revenu, avec la possibilité d'opter pour le prélèvement libératoire au taux de 7.5% lorsque le rachat du contrat intervient après 8 ans (il s'agit des primes versées à compter du 26 septembre 1997 sur les contrats souscrits à compter de cette date, et des primes versées à compter du 01 août 1998 sur les contrats souscrits avant le 26 septembre 1997).

Notons que le capital est toujours exonéré d'impôt jusqu'à une limite annuelle de 4 600 € (pour les personnes seules) ou 9 200 € pour les contribuables mariés soumis à l'imposition commune.

Nous allons donc adopter **une loi de rachat en fonction de la durée de détention du contrat**, avec un saut significatif au cours de la 8<sup>ième</sup> année lié au passage d'une imposition beaucoup moins élevée.

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 et plus
Taux de rachat	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	10%	8%	7%	6%	5%

Graphiquement, la loi de rachat se présente de la façon suivante :



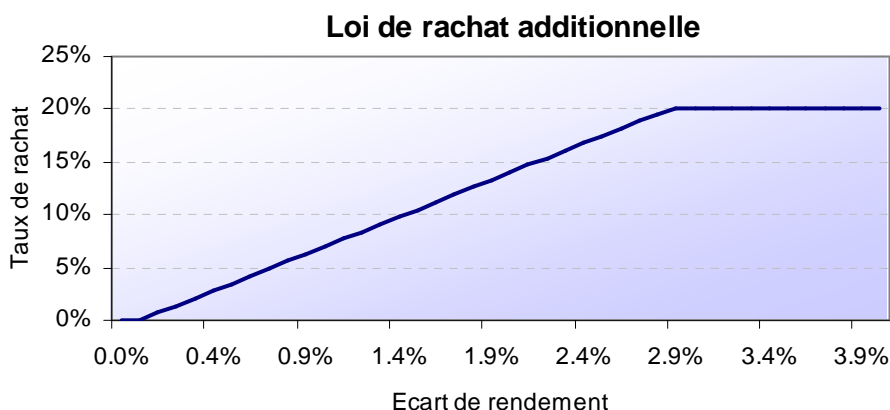
Il reste encore à **prendre en compte les rachats liés aux fluctuations des taux d'intérêts qui prévalent sur le marché**. Ces rachats peuvent avoir un impact non négligeable sur la valeur du portefeuille. En effet, un écart élevé entre le taux crédité au contrat et le taux de référence du marché peut conduire certains assurés à racheter leurs contrats dans le but trouver une meilleure opportunité de placement, avec un taux garanti plus élevé par exemple. Ainsi, quand le taux de référence est élevé, les rachats ont tendance à augmenter alors qu'une baisse des taux n'induit pas de vague supplémentaire de rachats.

Nous allons donc modéliser ce comportement en déterminant **une loi de rachat dynamique additionnelle** à la loi de rachat précédemment établie. Pour ce faire, nous considérons une fonction linéaire entre les rachats et les écarts de taux (nous ne disposons pas de suffisamment d'informations pour affiner le processus). Nous limitons de plus le taux des rachats suivant un seuil  $\beta$  :

$$\text{Taux de rachat additionnel} = \text{Min} \{ \alpha * \text{Max}(\text{Taux de référence} - \text{Taux crédité au contrat}; 0); \beta \}$$

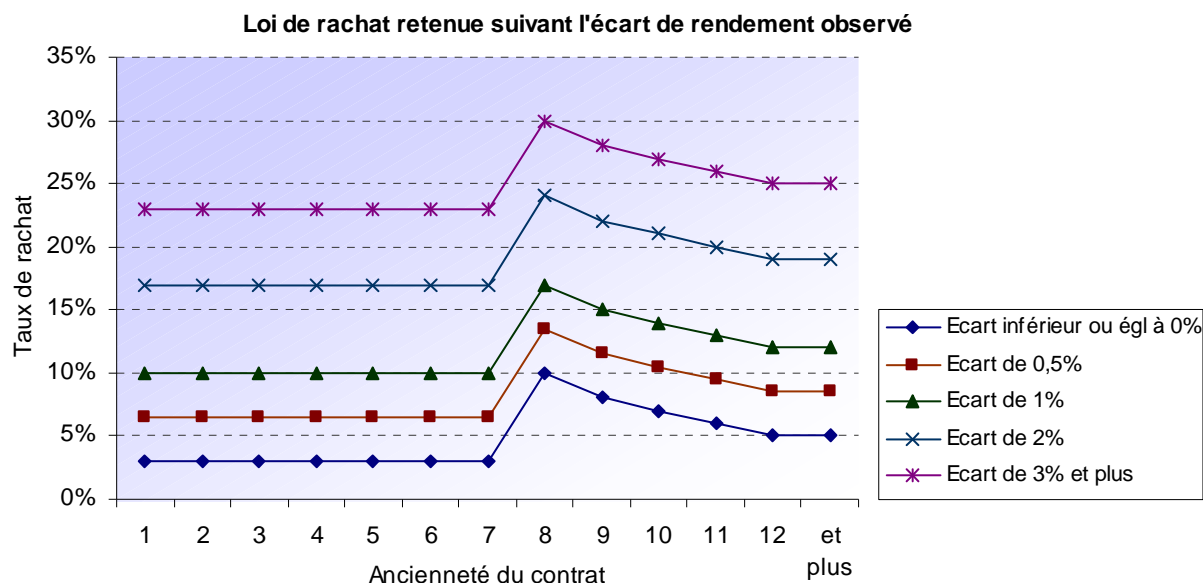
Nous fixons  $\alpha = 7$  et  $\beta = 20\%$ .

**Le taux de référence correspond au taux d'un zéro-coupon sans risque de maturité 10 ans** (obtenu grâce à la gamme des taux évaluée à la date considérée).



Plus l'écart entre le taux de référence et le taux crédité est grand, plus les rachats vont être importants.

Finalement, nous obtenons **une loi de rachat globale** qui se comporte de la façon suivante :



### ■ Politique d'investissement

La stratégie d'investissement consiste à définir l'allocation cible (i.e. les proportions de chaque classe d'actifs à détenir en portefeuille) et les règles d'achat et de vente d'actifs de sorte à atteindre cette allocation.

Nous choisissons **une allocation stratégique des actifs qui conserve la répartition initiale du portefeuille en valeur de marché**, à savoir :

- actions : 10%,
- obligations : 85%,
- trésorerie : 5%.

De plus, nous affinons la répartition au niveau des obligations en définissant 7 classes suivant la durée restante à courir par les obligations jusqu'à leur date de maturité:

Classe	Répartition par rapport aux obligations	Répartition par rapport au portefeuille d'actifs
durée inférieure ou égale à 1 an	10%	8.5%
durée comprise entre 1 et 3 ans	10%	8.5%
durée comprise entre 3 et 5 ans	15%	12.75%
durée comprise entre 5 et 7 ans	15%	12.75%
durée comprise entre 7 et 10 ans	15%	12.75%
durée comprise entre 10 et 15 ans	20%	17%
durée supérieure à 15 ans	15%	12.75%
<b>Total</b>	<b>100%</b>	<b>85%</b>

**Le rééquilibrage du portefeuille** (l'achat et la vente d'actifs pour maintenir la répartition cible des classes d'actifs) est effectué annuellement par rapport à la valeur de marché au niveau de chaque classe d'actifs. Il consiste à :

- calculer les montants des achats et des ventes nécessaires par classe d'actifs pour atteindre l'allocation cible ;
- réaliser les achats et les ventes d'actifs.

Si le rééquilibrage requiert une vente, la stratégie consiste à vendre chaque actif d'une même classe dans les mêmes proportions de sorte à toujours garder la répartition initiale du portefeuille.

Si le rééquilibrage nécessite l'achat d'obligations, nous choisissons alors d'investir dans des obligations avec une maturité de milieu de classe. Par exemple, pour la classe d'obligations ayant une durée résiduelle comprise entre 1 et 3 ans, la stratégie d'achat portera sur une obligation de maturité 2 ans. Pour les deux classes extrêmes (une maturité inférieure à 1 an et supérieure à 15 ans), nous considérerons respectivement des obligations de maturité 1 an et 15 ans.

Il faut ajouter que la vente des obligations engendre des plus-values ou des moins-values qui doivent être prises en compte dans le calcul de la réserve de capitalisation.

### ■ Coût du capital

Conformément à la **réglementation concernant les contrats d'épargne en euros sous Solvabilité I**, la compagnie supporte une exigence de marge de solvabilité égale à 4% du montant des provisions mathématiques. Ce sont les seuls fonds propres que nous modélisons. Nous supposons que les autres fonds propres de la compagnie n'existent pas.

Cette marge de solvabilité va impliquer un coût. De manière générale, ce coût du capital est calculé à chaque fin de période suivant cette relation :

$$CMS_i = MS_{i-1} * (Tact - TRA_{\text{après impôts}})$$

Où :  $CMS_i$  = coût de la marge de solvabilité à la date  $i$  ;

$MS_{i-1}$  = marge de solvabilité estimée à la date de projection précédente,

$Tact$  = taux d'actualisation pour la période  $[i-1 ; i]$ ,

$TRA_{\text{après impôt}}$  = taux de rendement des actifs après impôt placés en couverture de la marge de solvabilité (supposé identique à celui du fond).

Dans le cas d'une approche Monde Réel, le taux d'actualisation est égal au taux sans risque plus une prime de risque. Nous utilisons un unique taux d'actualisation (conformément à la formule d'équilibre du MEDAF). Pour chaque scénario  $j$ , le coût de la marge de solvabilité est donc obtenu suivant cette formule :

$$CMS[j] = \sum_{i=1}^{\text{fin de projection}} \frac{MS_{i-1} * (Tact - TRA(i-1;i)_{\text{après impôts}})}{(1 + Tact)^i}$$

Où :  $CMS[j]$  = coût total de la marge de solvabilité pour la simulation  $j$  ;

$MS_{i-1}$  = marge de solvabilité estimée à la date  $i-1$  ;

$Tact$  = taux d'actualisation ;

$TRA(i-1;i)_{\text{après impôt}}$  = taux de rendement des actifs après impôt pour la période  $[i-1;i]$ .

La loi des grands nombres donne alors le coût global de la marge de solvabilité (CMS):

$$CMS = \frac{\sum_{i=1}^n CMS[j]}{n}$$

avec  $n$  le nombre de scénarios considérés.

En revanche, dans le cas de l'approche risque-neutre, le taux de rendement des actifs et le taux d'actualisation sont égaux au taux sans risque. Par conséquent, le coût de la marge de solvabilité à la date  $i$  pour un certain scénario  $j$  devient (nous gardons les mêmes notations que ci-dessus):

$$\text{CMS}_i = \text{MS}_{i-1} * \text{Taux d'imposition} * \text{TRA}(i-1;i)$$

Pour le scénario  $j$ , le coût de la marge de solvabilité se calcule alors de la manière suivante :

$$\text{CMS}[j] = \sum_{i=1}^{\text{findelaprojection}} \text{MS}_{i-1} * \text{Taux d'imposition} * \text{TRA}(i-1;i)P(0;i)$$

Où  $P(0;i)$  = prix d'un zéro-coupon à la date de calcul d'échéance  $i$  (i.e. facteur d'actualisation).

Nous retrouvons en fait **le concept de double taxation**. Rappelons que la double taxation caractérise le fait que l'actionnaire est taxé sur les dividendes qu'il perçoit à titre personnel, alors que ces dividendes ont déjà fait l'objet de l'impôt sur les sociétés. Par contre, si l'actionnaire ne passait pas par l'intermédiaire de la compagnie pour ses investissements, il devrait seulement s'acquitter de la taxe sur les dividendes.

Concrètement, la double taxation est estimée par la moyenne sur les 1000 scénarios de la somme pour toutes les maturités de la différence actualisée entre les produits financiers avant et après impôt en rapport avec la marge de solvabilité.

### ■ **Traitement de la réserve de capitalisation (RdC)**

Nous supposons que la RdC appartient aux actionnaires. C'est donc un élément à prendre en compte dans le calcul de la valeur de la compagnie.

Il existe **deux méthodes de traitement sur le marché français** (mais il n'y a pas de consensus pour l'application de l'une ou l'autre) :

- la RdC peut être utilisée pour diminuer la marge de solvabilité et donc le coût de la marge de solvabilité ;
- la RdC peut être intégrée dans la valeur actuelle des profits futurs et servir à « éponger » les mauvais rendements des obligations à taux fixe en cas de variation des taux.

Dans le premier cas, il peut arriver que la RdC excède la marge de solvabilité et que le coût de la marge de solvabilité devienne positif. Mais dans la pratique, ce cas ne se rencontre pas puisque une partie de la valeur de la RdC est transférée sur les affaires nouvelles à venir, qui ne sont pas envisagées dans le calcul.

Nous préférons donc utiliser la deuxième méthode : nous calculons la valeur actualisée des rendements après impôt sur la réserve de capitalisation que nous ajoutons à la PVFP.

### ■ **Fin de projection**

A la fin de la projection, nous libérons la RdC qui est alors distribuée aux actionnaires. Il nous faut de plus tenir compte de la valeur résiduelle de l'actif (après impôt). Si la différence entre la valeur de marché et la valeur comptable est négative (i.e. en cas de moins-value), la valeur actualisée vient diminuer le profit de l'actionnaire. Dans le cas contraire (i.e. en cas de plus-value), nous versons à l'actionnaire la part qui lui revient suivant deux critères :

- par rapport au taux de participation aux bénéfices dans le cas des actifs qui couvraient le portefeuille de contrats,
- la totalité pour les actifs en représentation de la réserve de la RdC.

### 3. Etude de l'impact de différents facteurs de risques

#### 3.1. Protocole

##### ■ Calcul de la MCEV

La MCEV ou valeur économique de la compagnie correspond à la valeur actuelle des profits futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures, calculée en appliquant une méthodologie cohérente avec les valeurs de marché. Suivant une approche bilancielle, il s'agit de la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur de marché des passifs. Mais, la MCEV peut également être obtenue suivant cette formule :

$$\text{MCEV} = \text{ANR} + \text{VIF},$$

$$\text{Soit : MCEV} = \text{ANR} + \text{PVFP} - \text{CMS},$$

Où : ANR = Actif Net Réévalué,

VIF = Valeur de l'In Force (valeur du stock),

PVFP = Valeur actuelle des profits futurs nets distribuables,

CMS = Coût de la marge de solvabilité.

Dans notre application, nous nous concentrons sur un portefeuille de contrats d'épargne sans modéliser de fonds propres (mis à part la RdC mais dont l'évaluation est intégrée à la PVFP). Par conséquent, **la MCEV est ici égale à la VIF**. C'est cette dernière que nous allons donc étudier suivant les différentes situations envisagées.

Sa valeur sera obtenu en appliquant la simulation de Monte Carlo suivant une approche risque-neutre. Ainsi, nous procédons comme suit :

- pour chaque simulation et pour chaque date d'évaluation de la projection (le 31/12 de chaque année sur 30 ans), nous déterminons :
  - le résultat net probable distribuable aux actionnaires (en y incluant le rendement sur la RdC) ;
  - le coût de la marge de solvabilité (en rapport avec la détention de la marge de solvabilité réglementaire de Solvabilité I) ;
- nous actualisons ensuite les flux obtenus au taux sans risque selon le taux d'actualisation approprié pour le scénario considéré ;
- la moyenne des valeurs actuelles nous fournit alors la PVFP et le CMS ;
- il nous suffit enfin de faire la différence pour obtenir la VIF moyenne (qui correspond à l'estimation de la MCEV):  $\text{VIF} = \text{PVFP} - \text{CMS}$ .

##### ■ Calcul de l'EC

L'EC correspond au montant de capital nécessaire à la couverture des engagements envers les assurés selon un critère de risque a priori. Son calcul nécessite plusieurs étapes :

- déterminer le taux d'actualisation à appliquer (noté RDR),
- déterminer la distribution de la PVFP ;
- choisir une mesure de risque.

En effet, nous raisonnons en univers réel donc nous ne pouvons pas actualiser les flux au taux sans risque. Il nous faut donc **déterminer un RDR ajusté au risque**. Dans la pratique, il correspond au taux de rendement attendu par les actionnaires et repose sur une analyse du profil des risques en rapport avec la société (par rapport au risque financier et au risque d'assurance) et sur l'approche de valorisation financière classique (formule d'équilibre de MEDAF).



Pour notre étude, nous ne disposons pas des informations suffisantes pour établir le taux d'actualisation de cette manière. Ainsi, pour être le plus objectif possible, nous nous basons sur le fait que, sous une approche Monde Réel, **nous sommes censés retrouver au final la même valeur économique que celle obtenue suivant la théorie risque-neutre**. En effet, deux phénomènes se compensent toujours exactement : la modification de l'espérance de rentabilité des actifs et le taux employé lors de l'actualisation.

Par conséquent, **nous utilisons l'unique taux d'actualisation ajusté au risque global qui permet d'égaliser la VIF moyenne issue de l'approche risque-neutre et celle issue de l'approche Monde Réel**. Ceci nous permettra d'avoir un indicateur supplémentaire concernant le profil de risque de la compagnie, puisque **le RDR sera adapté à chaque situation**.

Une fois le RDR déterminé, nous pourrions mettre en évidence la distribution de la PVFP réelle (sans considérer le rendement sur la RdC pour rester au plus proche des flux de trésorerie résultants du compte de résultat de la compagnie). C'est sur cette base que nous calculerons l'EC.

Nous choisissons d'utiliser **les indicateurs de risque les plus fréquemment rencontrés** et qui seront **probablement employés par la réglementation**, à savoir :

- la **VaR** avec une probabilité de défaillance de **0.5%** ;
- la **TVaR** avec une probabilité de défaillance de **1%** ;

Notons que, dans le cas de 1000 simulations, nous sommes très proches d'une situation où la distribution de la PVFP est continue. C'est pourquoi nous n'étudions pas la CTE car nous retrouvons des résultats similaires à ceux de la TVaR (la différence réside dans le fait de prendre ou non la borne qui limite les valeurs intervenant dans le calcul).

L'EC sera évalué de la façon suivante :

- dans le cas de la VaR :  $EC = -\min\{PVFP_{(k)} \mid k = 1..N, k > 5\} = -PVFP_{(6)}$
- dans le cas de la TVaR :  $EC = -\frac{1}{10} \sum_{l=1}^{10} PVFP_{(l)}$

Où  $(PVFP_{(k)})$  correspond à la distribution ordonnée des 1000 réalisations de la variable PVFP.

### **3.2. Situation de référence**

Nous allons nous baser sur la situation de référence décrite précédemment, à partir de laquelle nous allons modifier certains paramètres de sorte à **pouvoir observer l'impact des différents facteurs de risque** sur la VIF et sur l'EC.

Nous rappelons les principales hypothèses retenues pour cette situation de référence :

- rachats déterministes et dynamiques ;
- garantie de taux minimum (TMG);
- participation aux bénéfices : distribution de 90% du rendement financier net;
- politique d'investissement : maintenir en valeur de marché la répartition de 10% en actions, 85% en obligations, et 5% en trésorerie ;
- une RdC égale au 31/12/2005 à 1% de la valeur comptable des obligations.

Nous appelons « Base » l'évaluation qui ne prend pas en compte la garantie de TMG et les rachats dynamiques en rapport avec le taux de référence sur le marché (nous ne considérons alors que les rachats déterministes).

A partir de la situation de base, nous évaluons la VIF moyenne en ajoutant d'abord uniquement la garantie de TMG, puis nous procédons de même avec l'option de rachats dynamiques. Enfin, pour arriver à notre situation de référence, nous calculons la VIF moyenne en combinant la garantie de TMG et l'option de rachats dynamiques.

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
Base	5 848 198		571 782		5 276 415	
Avec garantie de TMG	1 154 331	-80%	587 260	3%	567 071	-89%
Avec les rachats dynamiques	3 780 723	-35%	361 024	-37%	3 419 699	-35%
<b>Situation de référence</b>	<b>1 264 824</b>	<b>-78%</b>	<b>445 748</b>	<b>-22%</b>	<b>819 076</b>	<b>-84%</b>

Nous en déduisons ensuite les niveaux de RDR à appliquer pour obtenir ces mêmes valeurs en univers réel pour la situation de base et la situation de référence: l'écart entre les deux correspond à l'augmentation de la prime de risque résultant de la modification du profil de risque (à cause de la présence des options et des garanties).

	RDR	Variation
Base	4.51%	
<b>Situation de référence</b>	<b>7.87%</b>	<b>75%</b>

Nous calculons enfin le niveau d'EC suivant les deux mesures de risques que nous avons choisies.

Capital Economique	
VAR(0.5%)	TVAR(1%)
747 810	836 751

Pour la situation de référence, nous obtenons une VIF moyenne égale à 819 076€, soit une perte de valeur de 84% par rapport à une situation sans option ni garantie, ce qui est très significatif.

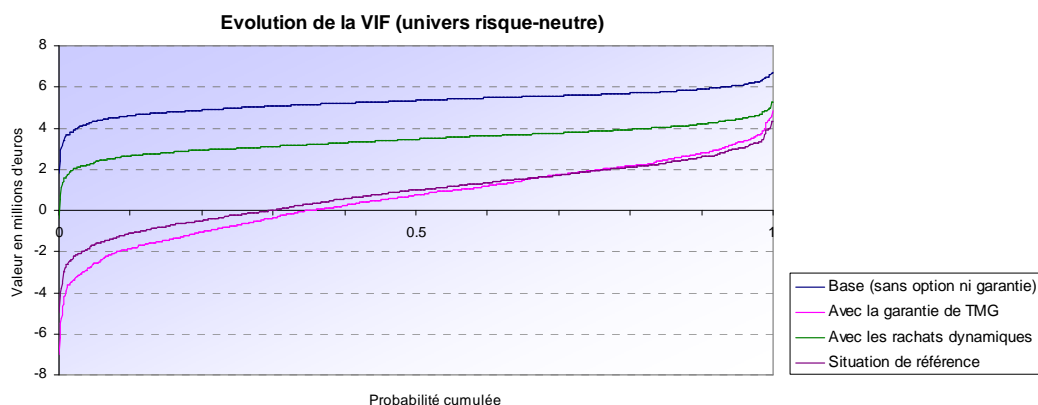
Le coût des garanties s'élève à 4 583 374€ (= 5 848 198 - 1 264 824). Nous pouvons remarquer que **la garantie de TMG et les rachats dynamiques se compensent** puisque ce coût global ne correspond pas à la somme des coûts de chaque garantie prise isolément. Celle-ci vaut en effet 6 761 342€, dont :

- 4 693 867€ pour la garantie de TMG (soit une diminution de 80% de la PVFP moyenne);
- 2 067 475€ pour l'option de rachats dynamiques (soit une baisse de 35% de la PVFP moyenne).

**La perte de valeur est donc surtout liée à la garantie de TMG**, même si le coût de cette garantie est allégé lorsque nous introduisons le phénomène des rachats dynamiques. Ainsi, nous pouvons déjà dire qu'il est plus intéressant (notamment lorsque le rendement des actifs est faible) pour l'assureur que l'assuré rachète son contrat d'épargne par anticipation, plutôt que de devoir supporter la charge liée à la garantie de TMG.

La présence des rachats dynamiques diminue le CMS car elle provoque une diminution plus rapide des provisions mathématiques (base de calcul du CMS). En revanche, le CMS augmente légèrement avec la garantie de TMG: les TMG impliquent un taux de revalorisation de l'épargne plus important ce qui se traduit par un accroissement plus rapide des provisions mathématiques. L'effet combiné de la garantie de TMG et des rachats dynamiques aboutit à un CMS plus faible par rapport à la situation de base (l'impact des rachats étant plus significatif) avec une diminution de 22%.

Afin d'émettre des explications plus précises, il semble pertinent d'étudier plus en détails la distribution de la VIF.



De manière générale, quand le rendement du portefeuille d'actifs est faible (i.e. dans le cas de mauvais scénarios), la VIF est faible (partie gauche des courbes). Par contre quand le rendement du portefeuille d'actifs est élevé (i.e. dans le cas de bons scénarios), la VIF est forte (partie droite des courbes).

### ■ Rachats dynamiques

Quand nous considérons juste les rachats dynamiques, nous voyons que la VIF évolue globalement de la même manière que celle issue de la situation de base mais avec des valeurs nettement inférieures. L'écart entre les deux courbes est toutefois légèrement plus grand quand les rendements des actifs sont faibles.

Comme le taux crédité au contrat dépend d'un taux de participation aux bénéfices et d'un taux de chargement en rapport avec la gestion du fond, **il peut s'avérer que le taux servi soit inférieur au taux de référence du marché même dans le cas de bons rendements**, d'où la présence de rachats dynamiques quelque soit le type de simulation. Ces rachats impliquent **une perte de valeur liée à la perte sur la marge des chargements futurs**.

En effet, les contrats rachetés par anticipation ne procureront plus à l'assureur le revenu lié aux différents chargements imputés aux assurés. Ce manque à gagner sera d'autant plus important que la différence entre le taux de référence et le taux crédité sera grande.

### ■ Garantie de TMG

Lorsque le rendement du portefeuille d'actifs est faible, la garantie de TMG provoque un coût supplémentaire pour l'assureur puisque c'est à lui de combler la différence (en puisant dans ses fonds propres) lors de la revalorisation de l'épargne. De plus, par hypothèse, le taux de déduction lié à la gestion n'est prélevé aux assurés que lorsque le taux crédité est supérieur au TMG : ceci représente donc un manque à gagner supplémentaire, qui ne servira pas à couvrir les frais de la compagnie (ces frais doivent être payés quelque soit l'évolution du marché). Par conséquent, **nous observons une VIF très basse dans le cas de mauvais rendements**.

Par contre, lorsque les simulations aboutissent à de forts rendements, la courbe de la VIF tend à se rapprocher de la courbe sans option ni garantie. **La garantie de taux devient moins coûteuse à mesure que les produits financiers augmentent**. L'assureur sert en effet les TMG sans avoir à supporter une charge additionnelle et verse aussi une participation aux bénéfices. Il reçoit dans ce cas les chargements liés à la gestion, ce qui lui permet de couvrir plus aisément ses frais et alimentent ainsi ses bénéfices probables.

### ■ Combinaison des deux garanties

Lorsque nous considérons la garantie de TMG et l'option de rachat, nous retrouvons les caractéristiques précédemment expliquées : **en cas de mauvais rendements, nous avons une perte de valeur principalement à cause de la garantie de TMG, et dans le cas de bons rendements, la perte de valeur est due à la présence de rachats dynamiques.**

Il existe toutefois une **interaction entre les deux types de garanties en présence** : celles-ci ont tendance à se compenser, spécialement dans le cas de rendements faibles du portefeuille d'actifs. En effet, dans le cas de mauvais scénarios, le coût de la garantie de TMG implique une VIF négative mais de manière moins importante que dans le cas où nous considérons cette garantie isolément. Le fait de servir le TMG ne veut pas nécessairement dire que celui-ci est meilleur que le taux de référence du marché. Ainsi, le phénomène des rachats subsiste et vient contrecarrer le coût lié à la garantie de TMG. Il est dans ce cas plus intéressant pour l'assureur que l'assuré rachète son contrat par anticipation, plutôt que de devoir supporter le coût de la garantie de TMG.

Mais lorsque le rendement du portefeuille d'actifs devient élevé, le coût lié à la garantie de TMG disparaît et il ne reste que le coût lié aux rachats dynamiques.

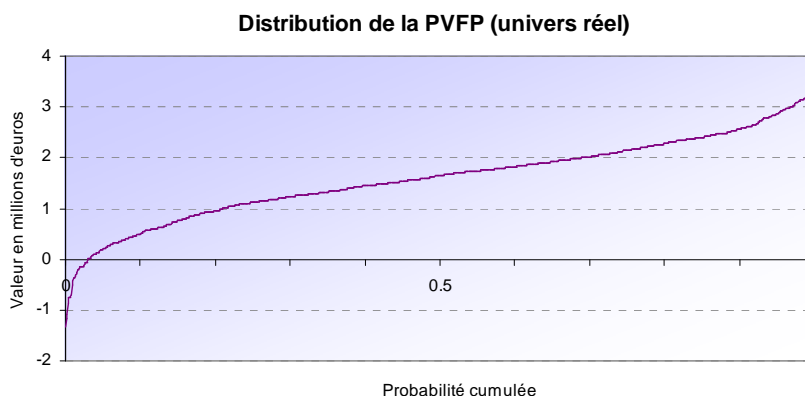
### ■ Evolution du RDR

Le fait de tenir compte des options et des garanties financières implique **un accroissement de 75% du RDR** qui passe de 4.51% à 7.87%. Cela signifie que **la compagnie est soumise à un risque d'insolvabilité plus important en rapport avec l'optionalité comprise dans les contrats**. En effet, quelque soit le taux de rendement des actifs, elle doit assurer au minimum le niveau des TMG pour la revalorisation de l'épargne. Elle doit donc supporter un risque d'investissement en rapport avec la volatilité de son portefeuille d'actifs. Elle doit d'autre part faire face à un risque opérationnel avec le phénomène des rachats dynamiques (les chargements des contrats rachetés ne seront pas encaissés).

### ■ Montant de l'EC

**L'exposition au risque d'insolvabilité implique un besoin en capital.** La VaR nous indique un EC à 747 810€ et la TVaR nous fournit un EC de 836751€ , ce qui représente une augmentation de 12% (soit une différence de 88 941€). Les deux mesures de risques nous donnent donc des EC équivalents, dont la valeur est assez proche de la valeur obtenue pour la VIF moyenne.

Mais pour l'instant, ces montants ne peuvent servir à une interprétation. Nous les utiliserons dans la suite de l'analyse.



Nous pouvons enfin noter que la probabilité de ruine pour la situation de référence (probabilité que la PVFP réelle devienne négative) s'élève à 3%.

Ces résultats, à eux seuls, ne permettent pas de dégager le potentiel de la société. En effet, diffuser une valeur, sans la mettre en relation avec les risques auxquelles la compagnie peut être confrontée, n'a aucun intérêt. C'est pourquoi, nous allons faire varier différents paramètres pour comprendre les risques auxquelles la société est soumise et les conséquences que cela peut avoir sur la VIF et l'EC.

### 3.3. Impact des rachats dynamiques

Nous choisissons d'étudier l'impact des rachats dynamiques **en faisant varier le taux de référence utilisé lors du calcul de l'écart avec le taux crédité au contrat**:

- « Taux\_ref » fait référence à la situation de référence (avec la garantie de TMG) ;
- « Taux\_ref -0.3% » correspond à une évaluation où nous diminuons de 0.3% le taux de référence ;
- « Taux\_ref +0.3% » correspond à une évaluation où nous augmentons de 0.3% le taux de référence.

Rappelons que le taux de rachat dynamique s'obtient suivant cette formule :

$$\text{Taux de rachat dynamique} = \text{Min} \{ 7 * \text{Max} (\text{Taux de référence} - \text{Taux crédité au contrat}; 0); 0.2 \}$$

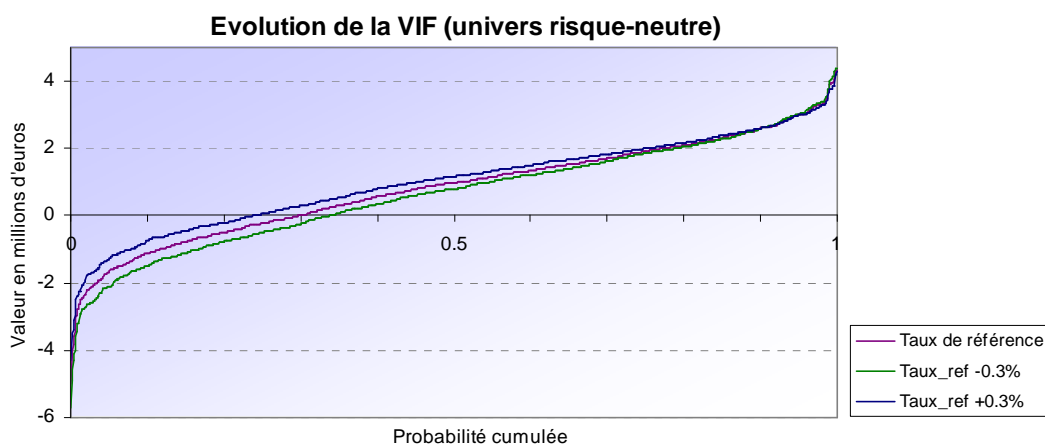
Le taux de référence du marché correspond au taux d'une obligation zéro-coupon sans risque, de maturité 10 ans.

	<b>PVFP</b>	<b>Variation</b>	<b>CMS</b>	<b>Variation</b>	<b>VIF</b>	<b>Variation</b>
Taux_ref	1 264 824		445 748		819 076	
Taux_ref -0.3%	1 132 512	-10%	485 223	9%	647 289	-21%
Taux_ref +0.3%	1 417 700	12%	409 677	-8%	1 008 023	23%

**Toutes choses égales par ailleurs**, si le taux de référence utilisé pour calculer le taux de rachat dynamique augmente, nous devrions observer un accroissement des rachats dynamiques (l'écart entre le taux de référence et le taux servi étant plus élevé) et par conséquent une baisse de la VIF moyenne. En effet, les assurés qui rachètent leur contrat par anticipation n'alimentent plus les profits potentiels que peut réaliser l'assureur par rapport aux chargements, ce qui constitue un manque à gagner et donc une perte de valeur par rapport à une situation sans rachat dynamique.

Pourtant, nous observons que le fait d'augmenter de 0.3% le taux de référence implique une baisse de 21% de la VIF moyenne (qui passe de 819 016€ à 647 289€), alors que le fait d'augmenter de 0.3% ce même taux provoque l'effet inverse, à savoir une augmentation de 23 % de la VIF moyenne (qui se monte alors à 1 008 023€)

Nous devons en fait **garder à l'esprit l'interaction qui existe entre la garantie de TMG et les rachats dynamiques** : le fait que les rachats diminuent implique que le coût de la garantie de TMG est moins bien contrebalancé et que celui-ci a plus d'ampleurs, provoquant alors une baisse significative de la VIF moyenne.



Dans le cas où le rendement du portefeuille d'actifs est élevé (partie des courbes avec une forte VIF), l'écart entre le taux de référence du marché (quelque soit sa valeur) et le taux servi est faible voire négatif donc les rachats dynamiques sont peu influencés par une variation du taux de référence. De plus, étant donné que les rendements sont élevés, les taux servis résultent dans la majorité des cas de la participation aux bénéficiaires (les TMG sont assurés sans difficulté) donc nous ne constatons pas de perte de valeur liée à la garantie de TMG. Ainsi, **pour les VIF les plus hautes, les courbes se confondent.**

**La différence réside en fait pour les VIF les plus faibles.** En effet, quand le rendement du portefeuille d'actifs est bas, l'assureur subit une charge supplémentaire liée à la garantie de TMG. Ce coût est alors plus ou moins compensé par le phénomène des rachats dynamiques. Si les rachats dynamiques diminuent (i.e le taux de référence diminue), ils ne viendront plus contrecarrer le coût de la garantie de TMG qui aura plus d'impacts négatifs sur la VIF (d'où une valeur plus faible).

Comme nous l'avons déjà précisé, **il est parfois plus profitable pour l'assureur que l'assuré rachète son contrat par anticipation** (même s'il ne participe plus à la marge sur chargements futurs) et aille voir la concurrence, **plutôt que de subir le coût de la garantie de TMG en cas de faibles rendements.**

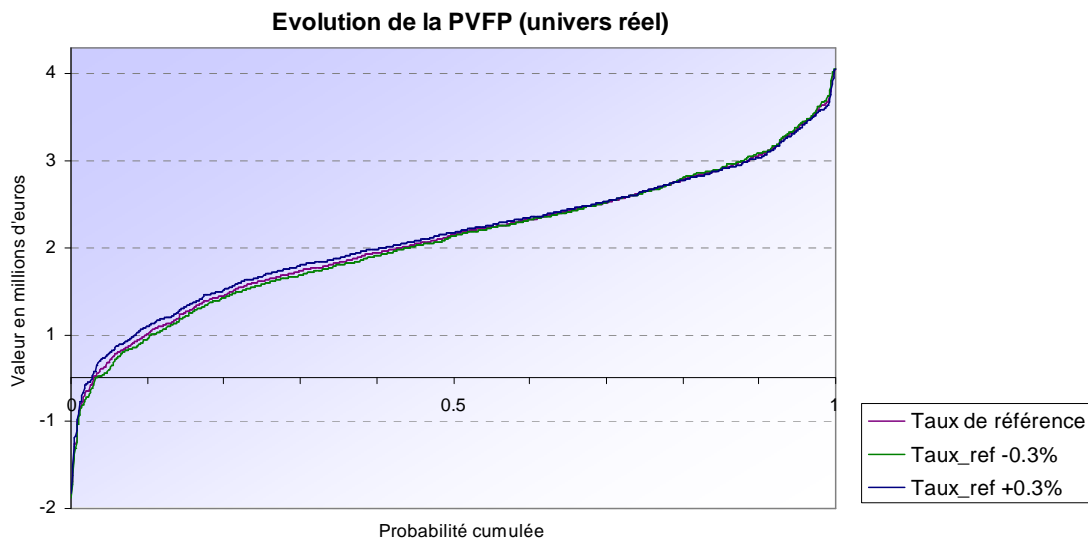
C'est aussi ce que traduit les variations du RDR : si le taux de référence baisse de 0.3%, alors le RDR augmente de 3% (il passe de 7.87% à 8.12%), alors qu'il diminue dans les mêmes proportions suite à un accroissement de 0.3% du taux de référence.

	RDR	Variation
Taux_ref	7.87%	
Taux_ref -0.3%	8.12%	3%
Taux_ref +0.3%	7.60%	-3%

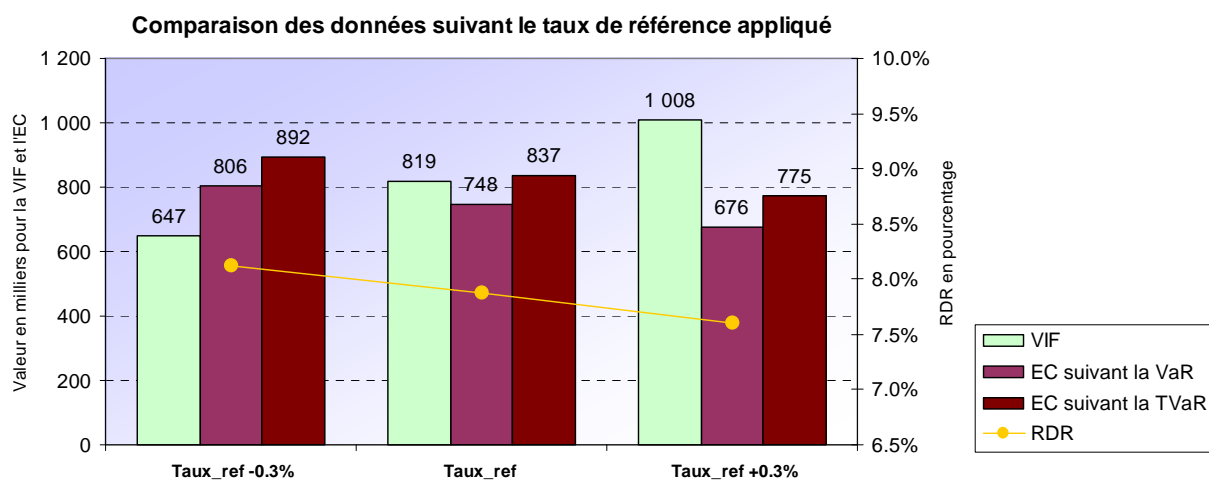
La situation semble donc un peu plus risquée dans le cas où le taux de référence diminue. C'est ce que confirme le calcul de l'EC, qui nous donne des résultats compris entre 650 000€ et 900 000€ :

	Capital Economique			
	VAR(0.5%)	Variation	TVAR(1%)	Variation
Taux_ref	747 810		836 751	
Taux_ref -0.3%	805 958	8%	892 322	7%
Taux_ref +0.3%	676 380	-10%	774 631	-7%

Le besoin en capital augmente de 7 à 8% suite à une augmentation du taux de référence, alors qu'il diminue de 7 à 10% dans le cas inverse. Nous pouvons noter que l'impact est plus significatif quand nous étudions la VaR.



Nous observons que les courbes sont assez proches les unes des autres (d'où l'impact peu significatif sur les variations de l'EC). Elles se différencient surtout dans le cas où la compagnie connaît de mauvais rendements, à cause du coût de la garantie de TMG plus ou moins bien contrebalancée par le phénomène des rachats dynamiques.



Ainsi, quand le taux de référence utilisé pour les rachats dynamiques augmente, le coût des rachats dynamiques s'amplifie mais permet de compenser le coût lié à la garantie de TMG, **ce qui crée de la valeur** : la VIF moyenne s'accroît. **L'exposition au risque tend en revanche à diminuer**, ce qui se traduit par une diminution de l'EC.

Nous pouvons enfin noter que la variation de l'EC (de l'ordre de 8%) est négligeable par rapport la variation de la VIF moyenne (de l'ordre de 22%).

### 3.4. Impact de la garantie de taux

Nous faisons varier l'ensemble des TMG de 0.1%, dans un premier cas à la baisse (situation notée « TMG -0.1% »), et dans un second cas à la hausse (situation notée « TMG +0.1% »). Nous notons « TMG\_ref » la situation de référence.

Portefeuille de contrats d'épargne au 31/12/2005

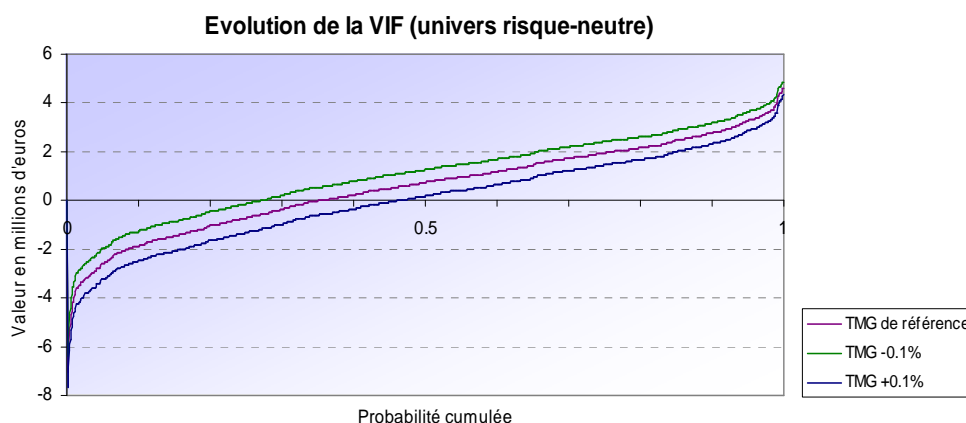
	Année de souscription	TMG_ref	TMG -0.1%	TMG +0.1%
1	1991	4.5%	4.4%	4.6%
2	1992	4.5%	4.4%	4.6%
3	1993	4.5%	4.4%	4.6%
4	1994	4.0%	3.9%	4.1%
5	1995	3.5%	3.4%	3.6%
6	1996	3.5%	3.4%	3.6%
7	1997	3.5%	3.4%	3.6%
8	1998	3%	2.9%	3.1%
9	1999	2.75%	2.7%	2.9%
10	2000	3.25%	3.2%	3.4%
11	2001	3%	2.9%	3.1%
12	2002	3%	2.9%	3.1%
13	2003	2.5%	2.4%	2.6%
14	2004	2.5%	2.4%	2.6%
15	2005	2%	1.9%	2.1%

Nous allons d'abord étudier l'impact de cette garantie de manière isolée puis nous ajouterons les rachats dynamiques.

#### ■ Sans option de rachats dynamiques

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
TMG_ref	1 154 331		587 260		567 071	
TMG -0.1%	1 666 901	44%	585 070	0%	1 081 831	91%
TMG +0.1%	612 435	-47%	589 587	0%	22 848	-96%

Le fait de diminuer de 0.1% l'ensemble des TMG implique une augmentation de la VIF moyenne de 91% (avec une valeur de 1 081 831€), alors que l'effet inverse implique une diminution de la VIF moyenne égale à 96 % (nous obtenons une valeur de 22 848€). Il semble donc évident que **la VIF soit très sensible aux TMG appliqués.**



Dans le cas de simulations défavorables, **le fait d'avoir un TMG plus ou moins important implique une charge plus ou moins conséquente pour l'assureur.** De plus, comme nous l'avons vu précédemment, dans ce genre de situations, l'assureur ne reçoit pas les chargements de gestion, ce qui alourdit d'autant plus la perte de la valeur. Par contre, dans le cas de bons scénarios, les valeurs ont tendance à converger **puisque le coût lié à la garantie de TMG tend vers 0.**



Ainsi, plus les TMG sont élevés, plus la compagnie aura des difficultés à assurer ces taux. Il en résulte que le profil de risque augmente avec les TMG, comme en témoignent les niveaux de RDR permettant de retrouver la VIF moyenne dans l'univers réel :

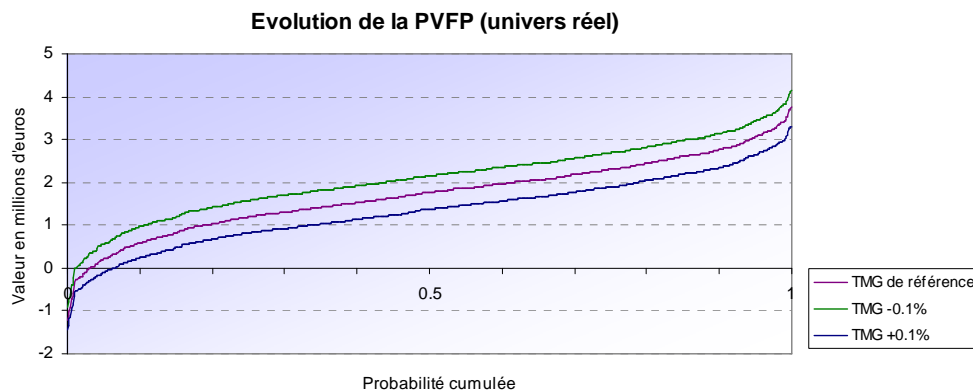
	RDR	Variation
TMG_ref	8.03%	
TMG -0.1%	7.36%	-8%
TMG +0.1%	8.98%	12%

Lorsque les TMG sont élevés, **la probabilité de déclencher les garanties augmente ce qui signifie que la compagnie est plus sensible aux variations des taux**. Cette exposition au risque se manifeste dans le besoin en capital. C'est pourquoi nous constatons que le niveau d'EC varie significativement suivant le TMG appliqué :

	Capital Economique			
	VAR(0.5%)	Variation	TVAR(1%)	Variation
TMG_ref	722 225		822 293	
TMG -0.1%	412 232	-43%	522 729	-36%
TMG +0.1%	973 640	35%	1 050 439	28%

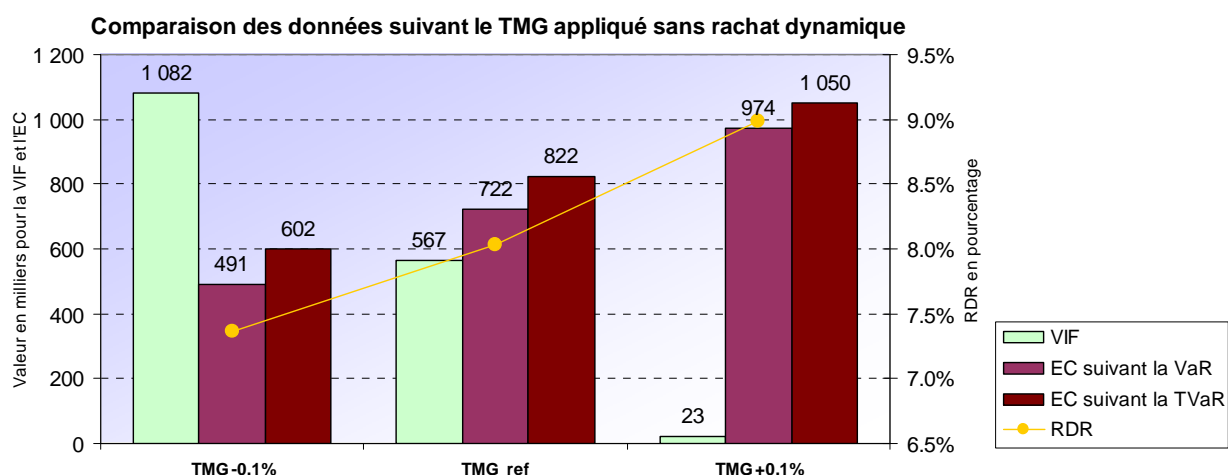
Une modification d'à peine plus ou moins 0.1% de l'ensemble des TMG a pour effet une variation de plus de 25% du niveau de l'EC.

La distribution de la PVFP subit une translation vers le haut quand les TMG diminuent, et vers le bas quand les TMG augmentent. La probabilité de ruine s'en trouve donc directement affectée : pour la situation « TMG -0.1% », nous avons une probabilité de ruine de 1.1%, tandis que pour la situation « TMG +0.1% », nous obtenons une probabilité de ruine de 6.5%.



Ainsi, **la VIF et l'EC sont très sensibles aux TMG** : suite à une variation de plus ou moins 0.1% de l'ensemble des TMG appliqués au portefeuille, nous notons une variation de l'ordre de 95% pour la VIF moyenne et de 35% pour l'EC. Plus les niveaux de TMG augmentent, plus la VIF diminue et plus l'EC s'accroît (et inversement).

Ceci s'explique par le fait que la compagnie est confrontée à des risques importants : **même une légère chute des marchés peut déclencher les garanties de taux et impliquer une lourde charge pour l'assureur** qui est dans l'obligation d'honorer ses engagements, d'où une perte de valeur et un besoin en capital plus conséquent.



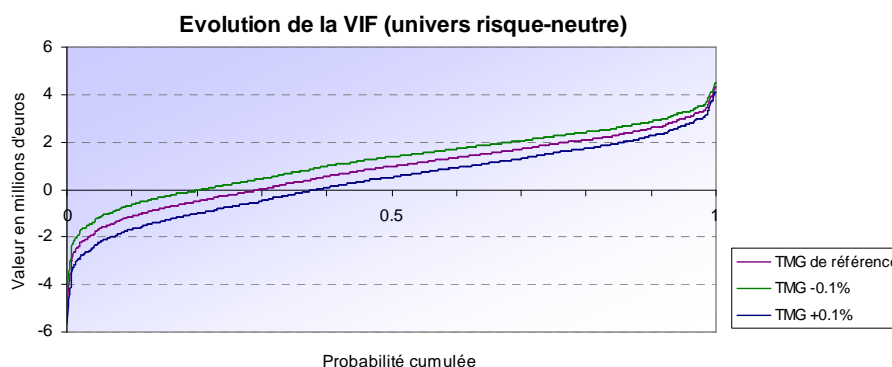
Nous allons à présent voir ce qui se passe quand nous ajoutons les rachats dynamiques.

■ **Avec l'option de rachats dynamiques**

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
TMG_ref	1 264 824		445 748		819 076	
TMG -0.1%	1 645 143	30%	435 867	-2%	1 209 276	48%
TMG +0.1%	835 257	-34%	456 846	2%	378 411	-54%

**La prise en compte des rachats dynamiques diminue de moitié les variations de la VIF moyenne** : la baisse de 0.1% de l'ensemble des TMG produit un gain de 48% sur la VIF moyenne, et la hausse de 0.1% de l'ensemble des TMG aboutit à une perte de 54%.

Les rachats dynamiques, bien que limitant la marge sur frais futurs, ont donc un impact plutôt positif, puisqu'ils contrebalancent le coût lié à la garantie de TMG.



**Globalement la situation est moins risquée** : le RDR de référence est de 7.87%, au lieu de 8.03% dans le cas d'une situation sans rachat dynamique.

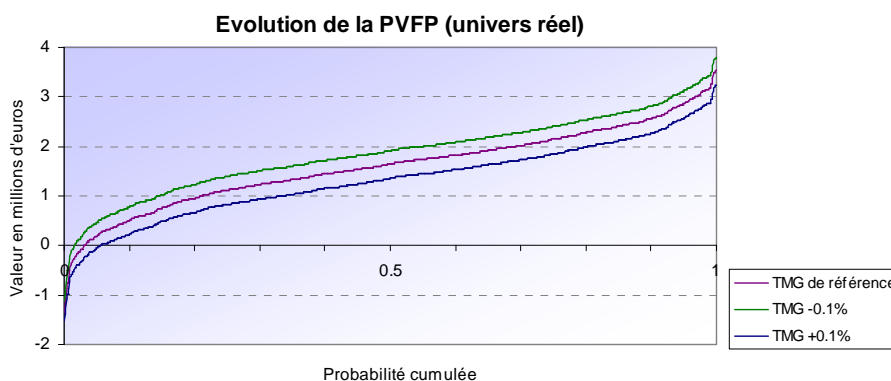
	RDR	Variation
TMG_ref	7.87%	
TMG -0.1%	7.34%	-7%
TMG +0.1%	8.62%	10%

Nous remarquons que les variations d'EC sont légèrement moins importantes :

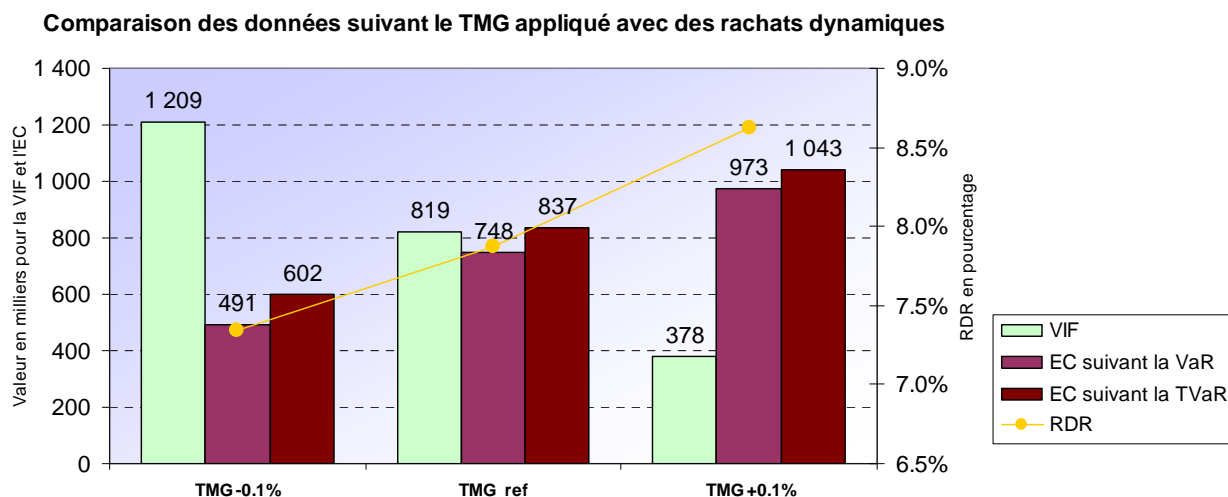
	Capital Economique			
	VAR(0.5%)	Variation	TVAR(1%)	Variation
TMG_ref	747 810		836 751	
TMG -0.1%	491 337	-34%	601 587	-28%
TMG +0.1%	973 252	30%	1 042 624	25%

Les rachats dynamiques compensent la garantie de TMG dans le cas de scénarios défavorables, donc le besoin en capital se fait moins ressentir.

Mais l'EC reste tout de même très sensible au niveau des TMG appliqués, notamment quand il est déterminé par rapport à la TVaR. En effet, dans ce cas, l'EC passe de 836 751 € à 601 587€ (soit une baisse de 28%) suite à une baisse de 0.1% des TMG. Il atteint 1 042 624€ suite à une hausse de 0.1% des TMG (soit une augmentation de 25%).



Ainsi, même si la présence de rachats dynamiques freine les coûts liés à la garantie de TMG, la VIF et l'EC restent très sensibles à une variation des niveaux de TMG appliqués : nous observons une variation d'environ 40% pour la VIF moyenne et aux alentours de 28% pour l'EC. Ce constat est encore plus évident pour l'EC quand nous considérons la TVaR qui tient compte de la sévérité de la ruine : plus les rendements du portefeuille d'actifs sont faibles, plus la charge en rapport avec la garantie de TMG se fait ressentir, d'où un besoin en capital plus grand pour assurer la solvabilité de la compagnie.



### 3.5. Impact de la composition des actifs

Nous étudions à présent l'impact que peut causer une modification de la politique d'investissement. Pour ce faire, **nous considérons des stratégies plus ou moins risquées en faisant varier la proportion investie en actions et en obligations**. En plus de la situation de référence (qui se caractérise par une proportion d'actions égale à 10% et une proportion d'obligations égale à 85%), nous envisageons deux situations :

- « Actions\_5% » : le portefeuille d'actifs se compose alors de 5% d'actions, 90% d'obligations et de 5% de liquidités;
- « Actions\_15% » : le portefeuille d'actifs se compose alors de 15% d'actions, 85% d'obligations et de 5% de liquidités;

Avant de les confronter avec la situation de référence, nous commençons par analyser chaque situation.

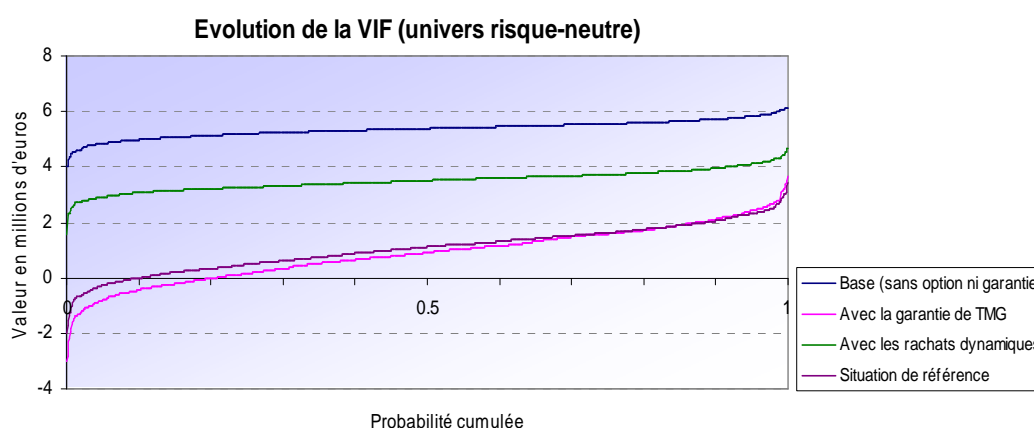
#### ■ Situation « Actions 5% »

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
Base	5 934 676		566 863		5 367 813	
Avec garantie de TMG	1 449 440	-76%	581 448	3%	867 992	-84%
Avec les rachats dynamiques	3 866 107	-35%	360 051	-36%	3 506 056	-35%
<b>Situation totale</b>	<b>1 495 336</b>	<b>-75%</b>	<b>437 414</b>	<b>-23%</b>	<b>1 057 922</b>	<b>-80%</b>

Nous obtenons dans ce cas une VIF moyenne de 1 057 922€, soit une perte de valeur de 80% par rapport à la situation de base qui ne tient compte ni de la garantie de TMG, ni de l'option de rachats dynamiques.

Le coût des options et des garanties s'élève à 4 439 340€ (= 5 934 676 – 1 495 336) avec **une domination du coût de la garantie de TMG**.

Le CMS se monte à 437 414 € ; la baisse de 23% par rapport à la situation de base s'explique en partie par le phénomène des rachats (l'encours diminue plus rapidement).



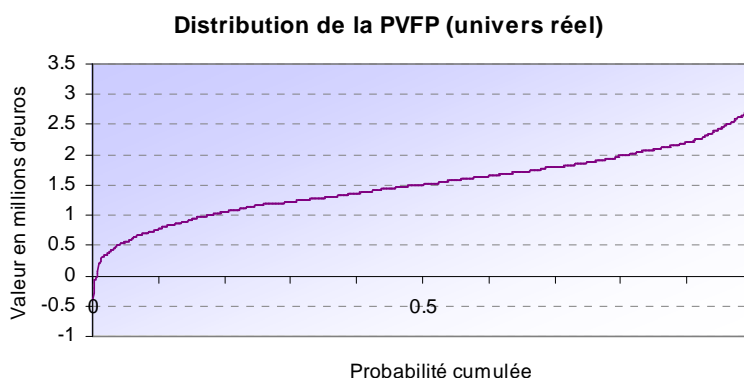
Nous sommes ici en présence d'une **politique d'investissement que nous pouvons qualifier de sécuritaire**, car la part importante des obligations implique un rendement pour le portefeuille quasi certain, **avec très peu de volatilité**. De ce fait, la probabilité d'avoir un très mauvais rendement (suite à une chute du cours des actions par exemple) est assez faible. Par conséquent, l'assureur est plus rarement confronté à des situations où il est dans l'obligation de puiser dans ses fonds propres pour pouvoir garantir les taux promis.

Il en résulte que la prime de risque reflétant le profil de risque de la compagnie est assez faible (le RDR passe de 4.16% à 6.26%, soit une augmentation de 50%) et que l'estimation de l'EC nous fournit des résultats très peu élevés de celui-ci.

	RDR	Variation
Base	4.16%	
<b>Situation totale</b>	<b>6.26%</b>	<b>50%</b>

Capital Economique	
VAR(0.5%)	TVAR(1%)
38 107	76 533

En effet, nous obtenons une valeur de 38 107€ pour la VaR et une valeur de 76 533€ pour la TVaR. La différence de valeur provient du fait que la TVaR tient compte de l'ensemble des valeurs de la queue de la distribution. Or, comme nous l'avons déjà signalé, quand la garantie de TMG est déclenchée, elle engendre tout de suite une charge importante (qu'il y ait ou non présence de rachats dynamiques). C'est pourquoi nous arrivons à un EC doublé quand nous comparons celui estimé à l'aide de la VaR et celui évalué sur la base de la TVaR (soit une différence de 38 426€).



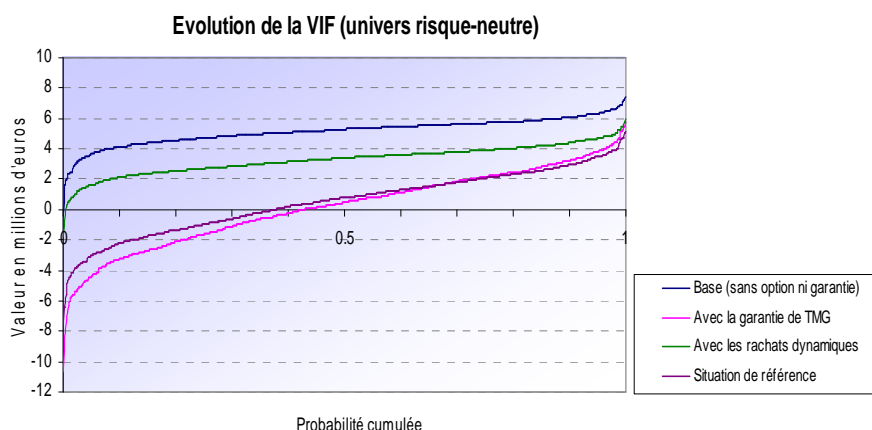
Envisageons à présent le cas d'une politique plus agressive.

■ **Situation « Actions 15% »**

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
Base	5 736 530		576 853		5 159 678	
Avec garantie de TMG	766 236	-87%	593 642	3%	172 593	-97%
Avec les rachats dynamiques	3 648 549	-36%	361 284	-37%	3 287 266	-36%
<b>Situation totale</b>	<b>958 533</b>	<b>-83%</b>	<b>453 122</b>	<b>-21%</b>	<b>505 411</b>	<b>-90%</b>

La VIF moyenne est ici égale à 505 411€, ce qui correspond à **une perte de valeur de 90%** par rapport à la situation de base, ce qui est très significatif. Cette chute est essentiellement la conséquence de la prise en compte de la garantie de TMG (qui, pris isolément, entraîne une perte de valeur de la PVFP moyenne de 87%).

Le coût des options et des garanties s'élève à 4 439 340€ (= 5 736 530 – 958 533) et celui du CMS à 453 122 €.



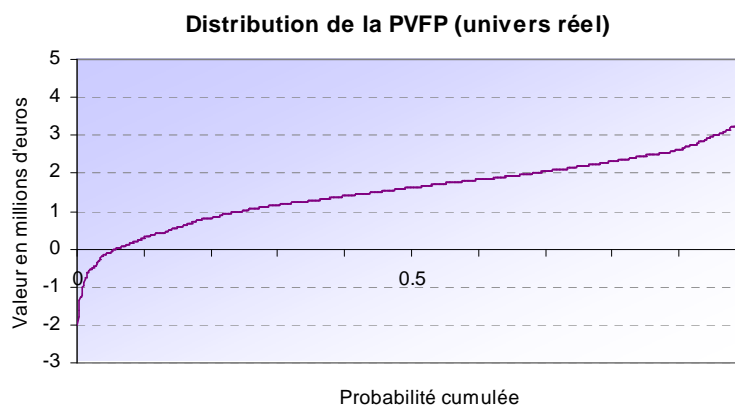
En observant la distribution de la VIF, nous pouvons remarquer que dans le cas de mauvais rendements, la VIF devient fortement négative quand nous envisageons la garantie de la TMG. Le coût de cette garantie n'est que légèrement atténué avec la présence des rachats dynamiques. **La garantie de TMG est donc extrêmement coûteuse en cas de bas rendements.** L'assureur doit donc supporter les aléas des marchés financiers qui se feront plus ressentir si la proportion des actions dans le portefeuille est grande.

La compagnie est donc soumise ici à **un risque d'investissement très important**, étant donné la volatilité élevé de son portefeuille (en rapport avec une forte proportion d'actions). C'est ce que traduit les niveaux de RDR. Ce dernier est en effet quasiment multiplié par deux entre la situation de base et la situation finale :

	RDR	Variation
Base	4.88%	
<b>Situation totale</b>	<b>9.59%</b>	<b>97%</b>

**Cette forte exposition au risque se manifeste également dans le besoin en capital nécessaire pour diminuer la probabilité de ruine (égale à 5.7%) au niveau cible, puisque l'EC est d'environ 1.3 millions d'euros.**

Capital Economique	
VAR(0.5%)	TVAR(1%)
1 264 072	1 374 806



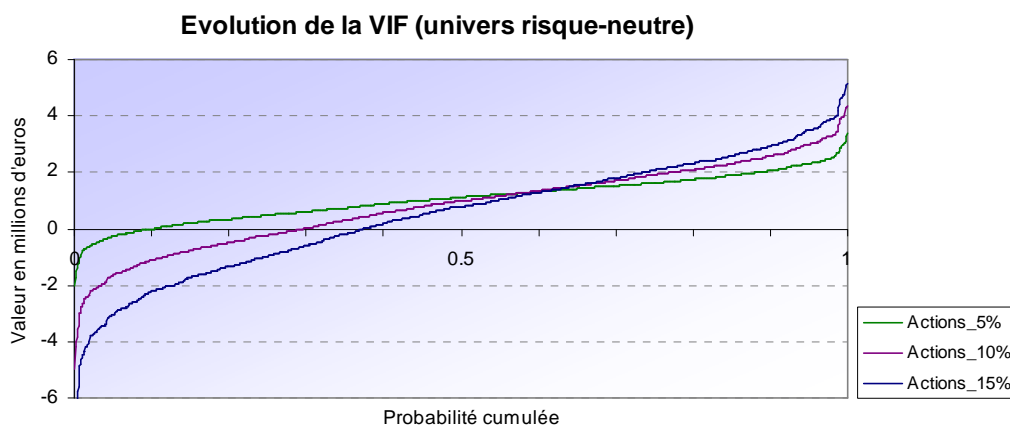
### ■ Confrontation des résultats avec la situation de référence

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
Référence (10%)	1 264 824		445 748		819 076	
Actions_5%	1 495 336	18%	437 414	-2%	1 057 922	29%
Actions_15%	958 533	-83%	453 122	-21%	505 411	-90%

La VIF moyenne paraît très sensible à la composition du portefeuille d'actifs. En effet, le fait de varier de plus ou moins 5% la proportion des actions (au détriment ou en faveur des obligations) provoque des modifications très importantes de la VIF moyenne.

Plus la stratégie est risquée, plus l'optionnalité présente dans les contrats d'épargne est coûteuse, et plus la VIF moyenne diminue. Ce constat est surtout à mettre en relation avec le coût de la garantie de TMG. En effet, si le portefeuille d'actifs est très volatile (en raison d'une grande proportion d'actions), les rendements du portefeuille auront une probabilité plus grande de devenir faibles voire négatifs, ce qui déclenchera plus fréquemment la garantie de TMG, provoquant ainsi un coût supplémentaire à l'assureur. Ce dernier est en effet dans l'obligation de servir les taux promis, quelque soit les aléas du marché financier. Comme nous l'avons déjà précisé, les rachats dynamiques permettent d'estomper le phénomène en période de bas rendements : il est préférable pour l'assureur de perdre une partie de sa marge sur chargements futurs que de devoir servir les taux promis.

Par contre, dans le cas de bons rendements, une forte détention d'actions permettra à la compagnie de profiter pleinement des bonnes conditions économiques (puisque les conditions de TMG seront remplies sans difficulté) et donc de créer de la valeur.



Mais au vue des résultats, **les bonnes conditions économiques ne sont pas suffisantes pour compenser les pertes potentielles en cas de mauvais rendements du portefeuille d'actifs** : la VIF chute de 90% quand nous appliquons une stratégie d'investissement plus risquée que celle employée dans la situation de référence.

L'exposition au risque (surtout en rapport avec la volatilité du portefeuille d'actifs) s'exprime aussi dans les RDR : **plus la proportion d'actions est grande, plus le revenu espéré supplémentaire exigé par les investisseurs augmente, d'où une prime de risque plus importante.**

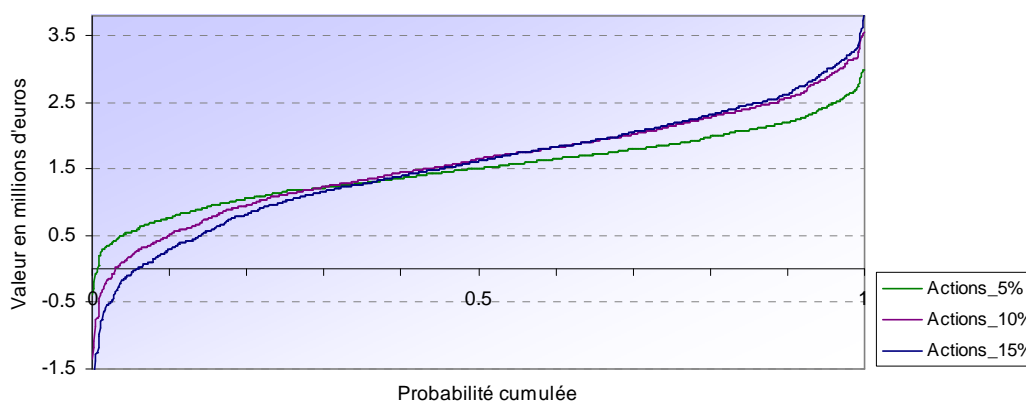
	RDR	Variation
Référence (10%)	7.87%	
Actions_5%	6.26%	-20%
Actions_15%	9.59%	22%

Quand nous observons les variations de l'EC, nous aboutissons aux mêmes conclusions : un portefeuille d'actifs composé d'une forte proportion d'actions se manifeste par un profil de risque plus marqué. **Il en résulte que le besoin en capital pour faire face aux déviations potentielles négatives de l'activité s'accroît :**

	Capital Economique			
	VAR(0.5%)	Variation	TVAR(1%)	Variation
Référence (10%)	747 810		836 751	
Actions_5%	38 107	-95%	76 533	-91%
Actions_15%	1 264 072	69%	1 374 806	64%

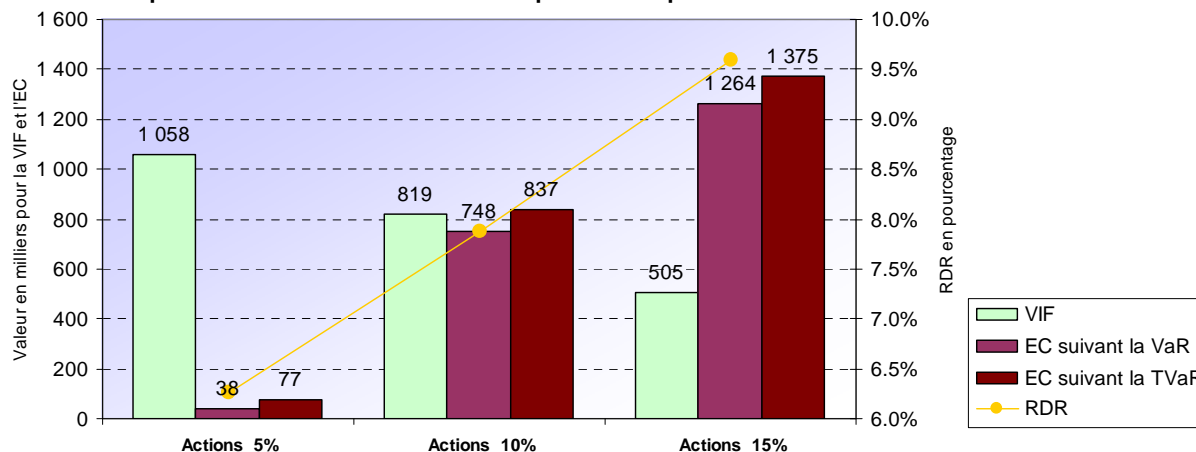
Un investissement majoritairement réalisé dans des obligations (cas de « Actions\_5% ») assure un rendement quasi certain, avec une faible volatilité. Le risque d'insolvabilité est donc restreint, ce qui se traduit par des valeurs très faibles d'EC (38 107€ pour la VaR et 76 533 pour la TVaR). Nous obtenons par contre l'effet inverse à la suite d'une stratégie d'investissement plus risquée : le fait de passer d'une proportion en actions de 10% à 15% implique une augmentation de l'EC de plus de 60%.

Evolution de la PVFP (univers réel)



**Une politique d'investissement en actifs plus risqués se traduit par une espérance de rentabilité plus élevée mais aussi par une exposition au risque plus grande (liée à la volatilité du portefeuille investi). Il faut donc faire un bon compromis entre risque et rentabilité : le fait d'avoir une espérance de rentabilité plus attractive implique un coût lié au risque supporté qui peut induire des pertes potentielles plus lourdes de conséquences que les gains probables créateurs de valeur.**

Comparaison des données suivant la répartition du portefeuille d'actifs





### 3.6. Effet de la réserve de capitalisation

La RdC est destinée à lisser les rendements des instruments financiers à taux fixe (i.e. les placements obligataires à taux fixe) en cas de variation des taux. Les plus values réalisées sont affectées à la RdC alors que les moins values lui sont imputées (pour plus de détails, voir la partie « *Le contrat d'épargne* »). Nous allons essayer de comprendre l'effet que cela peut avoir sur la VIF et l'EC.

Dans la situation de référence, la RdC au 31/12/2005 s'élevait à 1% de la valeur comptable des obligations (qui sont toutes à taux fixe). **Nous choisissons d'augmenter la RdC en prenant un pourcentage de 3%**. Par simplification d'écriture, nous parlerons de RdC à 1% et de RdC à 3%, sans préciser qu'il s'agit d'un pourcentage en fonction de la valeur comptable des obligations.

Le Bilan comptable se présente de la manière suivante (la répartition des actifs en valeur de marché est la même que celle de la situation de référence, à savoir 10% d'actions, 85% d'obligations et 5% de liquidités):

**Bilan comptable au 31/12/2005**

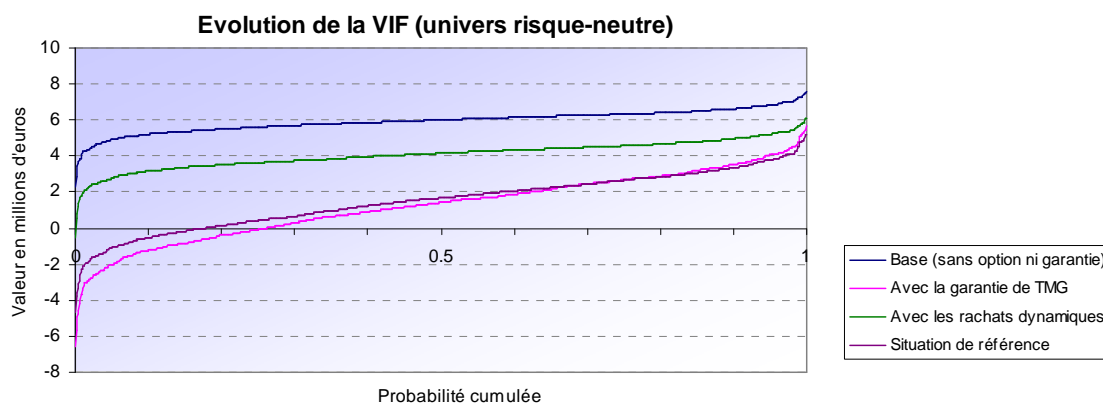
Actif		Passif	
Actions	4 413 869	Réserve de capitalisation	1 323 455
Obligations	44 115 151	Provisions mathématiques	50 000 000
Trésorerie	2 794 434		
<b>Total</b>	<b>51 323 455</b>	<b>Total</b>	<b>51 323 455</b>

Ainsi, la RdC passe de 433 502€ à 1 323 455€, soit une augmentation de 889 953€ (i.e. un accroissement de 205%). La compagnie est donc plus riche au départ, ce qui se traduit par une augmentation générale de la VIF moyenne (quelques soient les situations considérées):

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
Base	6 539 235		589 172		5 950 063	
Avec garantie de TMG	1 852 890	-72%	604 530	3%	1 248 360	-79%
Avec les rachats dynamiques	4 466 199	-32%	378 303	-36%	4 087 897	-31%
<b>Situation totale</b>	<b>1 975 216</b>	<b>-70%</b>	<b>462 720</b>	<b>-21%</b>	<b>1 512 496</b>	<b>-75%</b>

La VIF moyenne est égale à 1 515 496€, soit une perte de valeur de 75% par rapport à une situation sans option, ni garantie. Le coût des options et des garanties représentent 4 564 019€ (= 6 539 235 – 1 975 216).

La perte de valeur est à nouveau principalement causée par la garantie de TMG (qui représente individuellement un coût deux fois plus important que le coût lié à l'option de rachats dynamiques). Le phénomène de compensation entre la garantie de TMG et les rachats dynamiques est toujours présent.



Les niveaux de RDR nous permettant de retrouver ces chiffres en appliquant une évaluation de type Monde Réel sont les suivants:

	RDR	Variation
Base	4.52%	
<b>Situation totale</b>	<b>7.21%</b>	<b>60%</b>

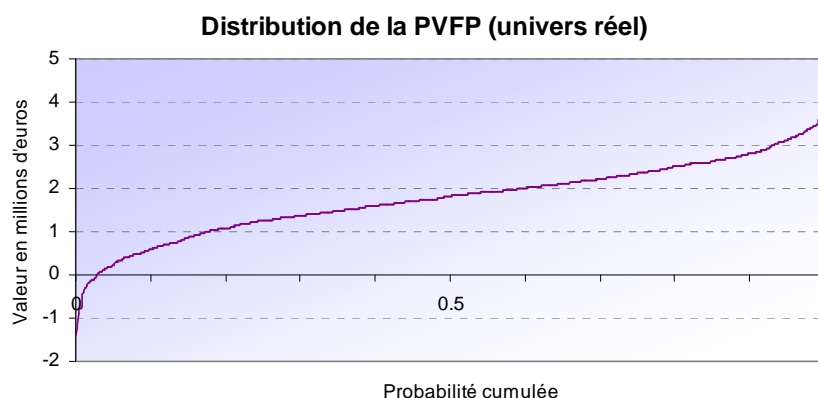
Le RDR augmente de 60% entre la situation de base et la situation totale, **ce qui confirme le fait que les garanties et les options augmentent les risques supportés par la compagnie.** Au final, la probabilité de ruine s'élève à 2.9%.

L'estimation de l'EC suivant la VaR et la TVaR nous fournit ces résultats :

Capital Economique	
VAR(0.5%)	TVAR(1%)
771 240	869 159

L'EC représente donc environ 53% de la VIF.

Nous notons une différence de 97 919€ entre la TVaR et la VaR (soit une augmentation de 13% entre la VaR et la TVaR) mais l'ordre de grandeur reste similaire.



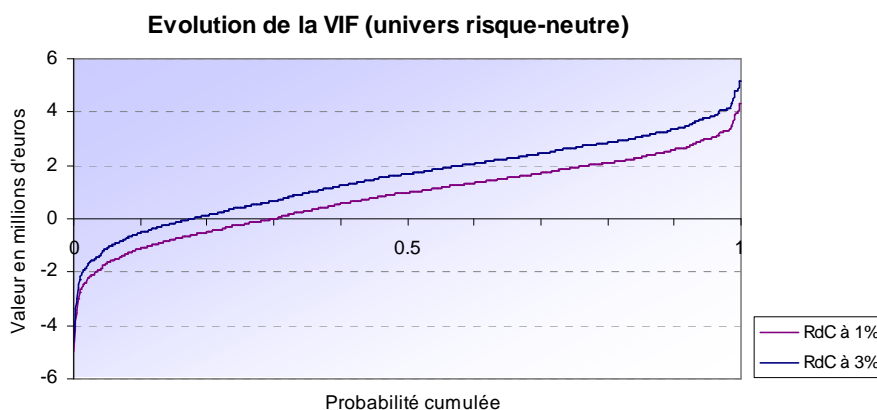
Nous allons à présent comparer ces résultats avec la situation de référence.

	PVFP	Variation	CMS	Variation	VIF	Variation
RdC à 1%	1 264 824		445 748		819 076	
RdC à 3%	1 975 216	56%	462 720	4%	1 512 496	85%

	Capital Economique			
	VAR(0.5%)	Variation	TVAR(1%)	Variation
RdC à 1%	747 810		836 751	
RdC à 3%	771 240	3%	869 159	4%

	RDR	Variation
RdC à 1%	7.87%	
RdC à 3%	7.21%	-8%

Le fait d'augmenter la RdC de 205% implique une augmentation de la VIF de 85%. **L'impact n'est donc pas proportionnel.** Malgré cela, la courbe de la VIF avec une RdC à 3% reste toujours supérieure à la courbe de la VIF avec une RdC à 1%.



Nous pouvons donner plusieurs explications à ce phénomène.

Dans le cas de bons rendements, la RdC est alimentée par les plus valeurs réalisées, ce qui augmente le rendement sur la RdC et favorise la création de la valeur.

Dans le cas de mauvais rendements, **la RdC participe à l'atténuation du coût des garanties.** En effet, elle permet de lisser les rendements des actifs à taux fixe : les rendements faibles peuvent être compensés par une reprise sur la RdC. Ceci a des conséquences, à la fois sur le coût de la garantie de TMG et sur l'option des rachats dynamiques.

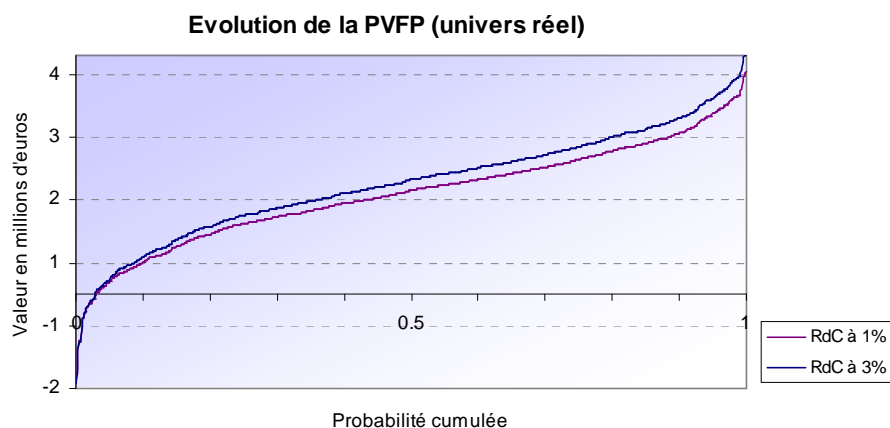
La reprise sur la RdC permet à l'assureur de servir de meilleurs taux et donc de transférer une partie de la charge liée à la garantie de TMG. C'est pourquoi la perte de valeur constatée sur la PVFP n'est ici que de 72% au lieu de 80% dans la situation de référence. Il en va de même pour les rachats dynamiques : l'écart entre le taux de référence est le taux servi diminue grâce à une reprise sur la RdC, d'où un ralentissement des rachats. La perte de valeur liée à l'option de rachats dynamiques est de 32%, au lieu de 35% dans la situation de référence.

De ce fait, l'impact global de la garantie de TMG et de l'option de rachats dynamiques sur la valeur se fait moins ressentir avec une RdC initiale à 3%. Nous constatons en effet une baisse de la VIF de 75% par rapport à une situation sans option ni garantie, alors qu'avec une RdC à 1%, nous avons obtenu une baisse de 84%.

**Avec une RdC à 3%, l'assureur dispose donc de plus de souplesses pour assurer ses engagements et inciter les assurés à conserver leurs contrats.**

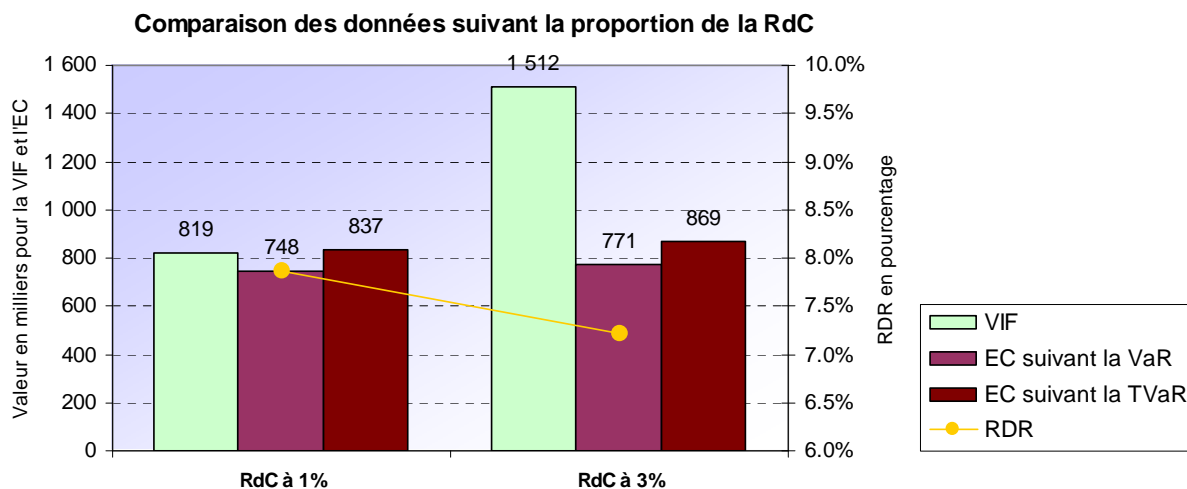
Il faut toutefois signaler que des reprises sur la RdC peuvent diminuer la VIF, étant donné que cela implique une perte de rendement sur la RdC qui ne participe plus à la création de valeurs. Mais apparemment, ce manque à gagner semble largement contrebalancé par le gain obtenu sur le coût des garanties et des options (puisque la valeur de la VIF augmente).

Dans le cas de l'EC, nous observons que le besoin en capital augmente légèrement (de 3 à 4%), **ce qui est un peu contradictoire avec le fait que la situation semble moins risquée** (le RDR n'augmente que de 60% au lieu de 75% dans la situation de référence et la probabilité de ruine passe de 3% à 2.9%). **Mais ceci reste négligeable par rapport à l'augmentation de la RdC.** En fait, si nous nous basons sur une RdC initiale identique, le besoin en fonds propres va fortement diminuer : l'augmentation de la RdC est largement suffisante pour couvrir l'augmentation du besoin en capital.



Ainsi, **une augmentation de la RdC accroît la richesse de la compagnie**. L'assureur dispose alors de fonds plus importants pour faire face aux aléas du marché et lisser les mauvais rendements, ce qui permet d'atténuer les coûts liés à la garantie de TMG et à l'option de rachats dynamiques. Mais l'effet n'est pas nettement significatif car il ne faut pas oublier que le fait de puiser dans la RdC constitue un manque à gagner par rapport aux rendements que la RdC peut procurer.

Par contre, **cela ne change quasiment rien aux risques que doit supporter la compagnie par rapport à son activité**. C'est pourquoi, nous n'observons pas de modifications significatives par rapport aux exigences de capital. Ces dernières peuvent toutefois être largement « absorbés » par l'augmentation de la RdC.



Il semble intéressant ici de mesurer la sensibilité de la VIF et de l'EC par rapport au niveau de la RdC. Pour la VIF, nous avons :

$$\text{Sensibilité} = \frac{\frac{\Delta \text{VIF}}{\text{VIF}}}{\frac{\Delta \text{RdC}}{\text{RdC}}} = 41\%$$

Pour l'EC (quelque soit la mesure de risque considérée), nous obtenons :

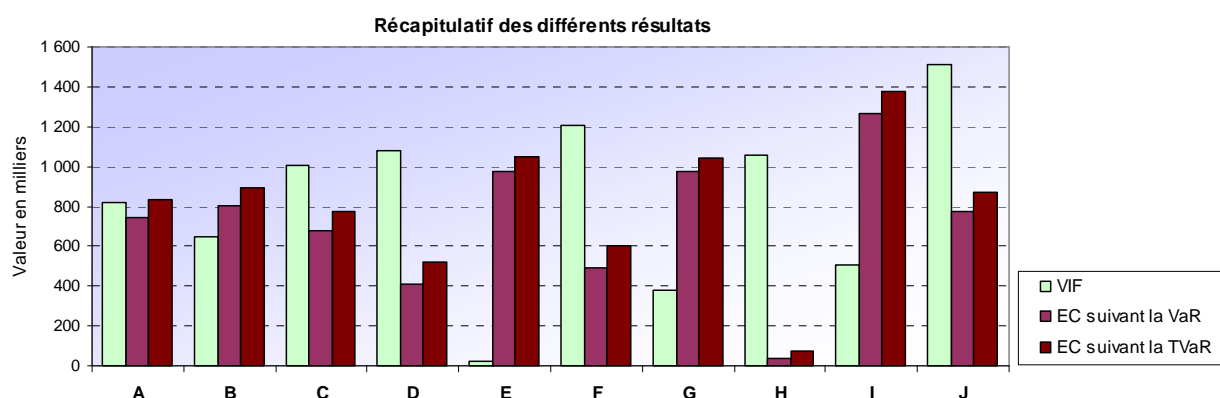
$$\text{Sensibilité} = \frac{\frac{\Delta \text{EC}}{\text{EC}}}{\frac{\Delta \text{RdC}}{\text{RdC}}} = 2\%$$

La VIF est donc très sensible à une variation de la RdC (il s'agit d'une composante qui participe de manière directe à la création de la valeur) ; ce qui n'est pas vraiment le cas de l'EC (l'exposition au risque, sans tenir compte des fonds propres disponibles initialement, n'est pas modifiée dans le sens où l'assureur doit faire face aux mêmes engagements).

### 3.7. Récapitulatif des résultats

Le tableau suivant résume l'ensemble des résultats fournis au cours de l'application :

	VIF	Variation	EC (VaR)	Variation	EC (TVaR)	Variation	Graphe
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats (référence)	819 076	-	747 810	-	836 751	-	A
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats -0.3%	647 289	-21%	805 958	8%	892 322	7%	B
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats +0.3%	1 008 023	23%	676 380	-10%	774 631	-7%	C
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG -0.1% ; sans rachat	1 081 831	32%	412 232	-45%	522 729	-38%	D
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG +0.1% ; sans rachat	22 848	-97%	973 640	30%	1 050 439	26%	E
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG -0.1% ; avec rachats	1 209 276	48%	491 337	-34%	601 587	-28%	F
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG +0.1% ; avec rachats	378 411	-54%	973 252	30%	1 042 624	25%	G
Répartition 5%/90%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats	1 057 922	29%	38 107	-95%	76 533	-91%	H
Répartition 15%/80%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats	505 411	-38%	1 264 072	69%	1 374 806	64%	I
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 3% ; TMG ; rachats	1 512 496	85%	771 240	3%	869 159	4%	J



De manière générale, l'EC et la VIF varient en sens opposé. C'est pourquoi nous obtenons des résultats négatifs (sauf dans le cas où nous avons étudié l'effet de la RdC), lorsque nous mesurons la sensibilité de l'EC par rapport à la VIF (en prenant comme situation initiale notre situation de référence):

$$\text{Sensibilité} = \frac{\frac{\Delta \text{EC}}{\text{EC}}}{\frac{\Delta \text{VIF}}{\text{VIF}}}$$

	Sensibilité pour la VaR	Sensibilité pour la TVaR
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats (référence)	-	-
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats -0.3%	-37%	-32%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats +0.3%	-41%	-32%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG -0.1% ; sans rachat	-140%	-117%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG +0.1% ; sans rachat	-31%	-26%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG -0.1% ; avec rachats	-72%	-59%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 1% ; TMG +0.1% ; avec rachats	-56%	-46%
Répartition 5%/90%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats	-325%	-312%
Répartition 15%/80%/5% ; RdC à 1% ; TMG ; rachats	-180%	-168%
Répartition 10%/85%/5% ; RdC à 3% ; TMG ; rachats	4%	5%

En fait, quand la compagnie est exposée à des risques peu importants (notamment le risque d'investissement, le risque de taux d'intérêt, ou le risque opérationnel), les coûts des options et des garanties liés à ces risques tendent à diminuer, donc la VIF augmente. En d'autres termes, l'assureur aura plus de facilités à honorer ses engagements, ce qui se caractérise par un risque d'insolvabilité plus faible : la compagnie aura des besoins en fonds propres (i.e. un EC) moins

élevés. Nous pouvons toutefois remarquer que l'EC et la VIF ne varient pas suivant des proportions similaires (les mesures de sensibilités étant très distinctes).

**La VIF est influencée par l'ensemble des éléments que nous avons étudié (les variations de la VIF étant toutes supérieures à 20%), et particulièrement quand ils sont tributaires du rendement du portefeuille d'actifs.**

Nous avons vu que la VIF était surtout sensible à une augmentation de l'ensemble des TMG du portefeuille de contrats, car ceci implique une perte significative de la valeur. Cette garantie est en effet extrêmement coûteuse en cas de mauvais rendements du portefeuille (qui sont accentués si la proportion investie en actions est importante). Dans ce genre de situations, l'assureur est obligé de puiser dans ses réserves pour pouvoir servir les taux promis. De plus, il subit un manque à gagner en rapport avec le non versement des chargements de gestion par les assurés.

Nous constatons que l'impact de la RdC est l'effet qui accroît le plus significativement la VIF. D'une part, la RdC permet d'augmenter la richesse initiale de la compagnie et participe à la création de la valeur (grâce aux rendements qu'elle procure). D'autre part, elle permet de lisser les rendements dans des situations défavorables et freine ainsi le coût des options et des garanties supportées par l'assureur.

**L'EC est quant à lui surtout sensible au niveau des TMG et à la composition du portefeuille d'actifs. Les variations de l'EC sont alors supérieures à 30%.**

Le fait de devoir assurer un niveau de taux quelque soit les aléas du marché financier, implique une lourde charge à l'assureur, ce qui peut mettre en péril la survie de sa compagnie et la continuité de son activité. C'est pourquoi le besoin en capital en rapport avec cette garantie de TMG est très important.

Le constat est similaire quand nous étudions la politique d'investissement du portefeuille d'actifs. Une forte proportion d'actions se traduit par une volatilité plus élevée. La compagnie a donc une probabilité plus grande de devoir faire face à des rendements faibles voire négatifs (d'où un déclenchement plus fréquent des garanties de TMG). Il est alors nécessaire dans ce cas de disposer de plus de fonds propres pour couvrir les pertes potentielles liées à l'activité, d'où une variation significative du niveau de l'EC.

Il faut aussi ajouter que dans le cas de l'EC, la mesure de risque est à choisir avec précaution, car cela peut avoir un impact non négligeable sur les résultats et leurs interprétations. Dans notre application, nous avons choisi des niveaux de tolérance au risque pour la VaR et la TVaR de sorte à retrouver des résultats similaires (conformément à ceux que la réglementation utiliserait). Les écarts observés sont par conséquent insignifiants.

Malgré cela, nous pouvons signaler que l'EC estimé à l'aide de la TVaR est toujours supérieur à l'EC estimé grâce à la VaR. Ceci résulte du fait que **la TVaR tient mieux compte de la sévérité de la ruine puisque son calcul fait intervenir l'ensemble des données issues de la queue de la distribution.** C'est donc cette mesure de risque qu'il faudrait privilégier.

## **4. Conclusion**

La MCEV est une EV stochastique cohérente avec le marché, qui permet de déterminer la valeur économique de la compagnie d'assurance vie (résultat de la différence en valeurs de marché des actifs et des passifs de la compagnie). Mais, de but en blanc, cela ne permet pas de se forger une opinion sur le potentiel de la société. C'est pourquoi, sa publication est toujours accompagnée de mesures de sensibilités, susceptibles de mettre en évidence les risques auxquelles la compagnie s'expose au cours de ses activités. De manière générale, **si la compagnie est globalement soumise à des risques plus importants, alors il y aura destruction de la valeur.**

L'EC permet de déterminer le montant de capital nécessaire à la couverture des engagements envers les assurés selon un critère de risque a priori. **Le besoin en capital (sans changer le niveau de risque que la société est prête à accepter) est corrélé positivement à une modification de l'exposition au risque de la compagnie.**

Nous pouvons conclure, suite à cette application numérique, qu'il existe **une certaine synergie** entre les résultats obtenus pour l'EC et ceux obtenus pour la MCEV (qui est ici équivalente à la VIF puisque nous avons considéré que les fonds propres étaient nuls, mise à part la RdC qui est traitée de manière spécifique). En effet, une analyse des variations de l'EC et une étude des évolutions de la MCEV permet d'aboutir à **des conclusions analogues concernant la perception des risques auxquels la compagnie est confrontée.**

Il réside cependant **des différences au niveau des raisonnements employés** pour la détermination de la MCEV et de l'EC. Bien que leurs calculs s'appuient sur une modélisation stochastique (méthodologie la plus à même de capturer le caractère volatil des éléments étudiés), la MCEV s'évalue suivant la théorie risque-neutre et l'EC s'estime suivant une approche Monde Réel.

La théorie risque-neutre permet d'actualiser les flux au taux sans risque, tandis que dans le cas de l'approche Monde Réel, le taux d'actualisation est égal au taux sans risque plus une prime de risque. Cette dernière doit refléter le profil de risque de la compagnie et toute modification de ce celui-ci. Il est donc assez difficile d'estimer a priori cette prime de manière objective (nous avons d'ailleurs pu observer que le RDR était très sensible à la situation envisagée).

C'est pourquoi, il semble essentiel pour une compagnie d'assurance vie qui veut diffuser des informations fiables et pertinentes au sujet de sa santé financière, de calculer à la fois une MCEV et un EC, car ce sont **deux outils qui se complètent**. En effet, la MCEV fournit une valeur économique qui permet ensuite de déterminer un taux d'actualisation ajusté au risque le moins subjectif possible. Ce taux nous permet alors de raisonner en univers réel et d'estimer l'EC (qui dépendra de la mesure de risque choisie pour représenter le niveau de risque que la compagnie est prête à supporter).

**Les deux concepts (et leurs analyses de sensibilité) nous permettent alors de disposer d'indicateurs cohérents, capables de retracer le profil de risque de la compagnie et de fournir des informations rigoureuses quant à son potentiel.**





## CONCLUSION

En Europe, l'assurance vie et sa réglementation sont en train de vivre une période d'évolutions considérables, où le risque constitue une préoccupation primordiale.

Les normes IFRS définissent un référentiel comptable commun unique, fondé sur le principe de « Fair Value », à savoir une valorisation des actifs et des passifs en juste valeur, offrant ainsi une vision économique de la société. Le projet Solvabilité II crée un cadre européen prudentiel qui permet d'apprécier la solvabilité globale des compagnies, en adoptant une approche intégrée des risques et une évaluation des actifs et des passifs qui soit cohérente avec le marché. Les entreprises d'assurance sont donc amenées à mieux connaître et gérer leurs risques.

Afin de retracer une image fidèle de la compagnie et communiquer des informations pertinentes concernant sa santé et sa performance, il faut donc disposer d'outils susceptibles de contrôler les processus de connaissance et de gestion des risques. Les approches utilisées doivent être conformes avec les principes de la réglementation, fondées sur la réalité des aspects économiques, et capables de tenir compte au plus juste du profil de risque de la société.

Pour ce faire, l'évaluation des actifs et des passifs doit se faire en valeur de marché. Or, il n'existe pas de prix de marché pour la majorité des passifs d'assurance vie. Tout le problème réside alors dans la manière de valoriser ces passifs. Nous avons vu que dans ce cas, seule une modélisation stochastique permet de tenir compte de la volatilité des phénomènes étudiés (en particulier dans le cas des options et des garanties financières présentes dans certains contrats d'épargne) et d'obtenir une estimation qui soit le plus proche de la réalité économique.

Pour mesurer la performance et la création de la valeur, nous avons vu qu'il existait le concept de Valeur Intrinsèque ou d'Embedded Value (EV). Il s'agit du prix théorique de la compagnie qu'un investisseur est prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la société (sans tenir compte de la richesse en rapport avec la production future). Différentes techniques peuvent être appliquées. La méthode traditionnelle déterministe est la plus couramment utilisée mais elle a montré certaines limites, notamment suite à la chute significative des marchés boursiers et des taux d'intérêt de ces dernières années. De nouvelles techniques stochastiques sont ainsi apparues, comme l'European Embedded Value (une EV stochastique standardisée, calculée selon les normes du CFO Forum) ou la Market-Consistent Embedded Value (une EV stochastique cohérente avec les valeurs de marché). C'est cette dernière technique d'évaluation (suivant une approche risque-neutre) que préconise actuellement Towers Perrin-Tillinghast. Créant un cadre robuste mêlant économie financière et finance d'entreprise, la MCEV semble la plus adéquate pour obtenir une valeur économique reflétant la situation financière réelle de la société, et la plus à même à répondre aux exigences de la réglementation.

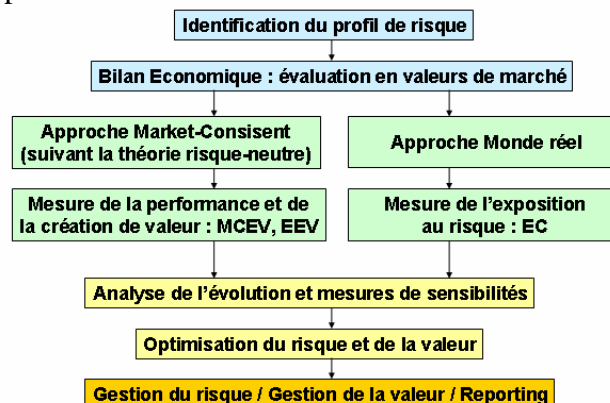
Pour mesurer l'exposition au risque, nous avons envisagé le concept de Capital Economique (EC) qui se définit comme le montant de capital nécessaire pour couvrir les pertes potentielles liées à l'activité, à un niveau de tolérance au risque donné, et suivant un horizon de temps spécifié. Ne pas détenir assez de fonds propres peut remettre en cause l'aptitude de l'assureur à tenir ses engagements; mais en posséder trop nuit à la rentabilité des actionnaires. L'objectif de l'EC est donc de trouver un niveau de capital susceptible de concilier, d'une part, les attentes des assurés et de la réglementation (au sujet de la solvabilité de la société), et d'autre part, les exigences de rentabilité des actionnaires (l'EC traduit le risque qu'ils sont prêts à prendre pour atteindre un certain rendement). Son calcul est réalisé sur la base d'une vision économique de la compagnie, cohérente avec les valeurs de marché. L'EC est en effet déterminé à partir de la

distribution empirique de la valeur actuelle des résultats futurs nets distribuables aux actionnaires (sur la base du portefeuille existant et de simulations stochastiques) et suivant une mesure de risque. Notons que le choix de cette dernière (qui doit être cohérente) joue un rôle primordial.

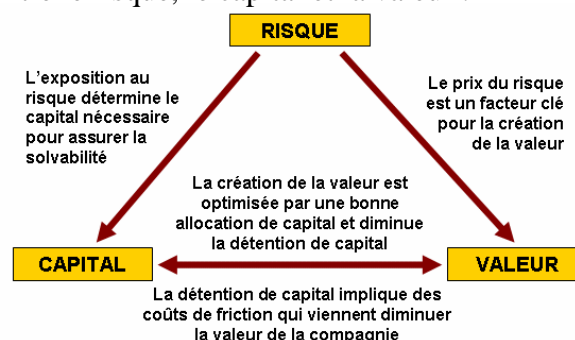
Les deux concepts d'EV et d'EC sont donc des outils utiles à la prise de décision, puisqu'ils permettent de se forger une opinion sur la compagnie, tant par rapport à sa performance et à son aptitude à créer de la valeur, que par rapport à son exposition au risque. Comme ils sont souvent calculés au sein de la compagnie par des équipes différentes (à l'inventaire pour l'EV et au sein de la gestion Actif/Passif pour l'EC), il semblait intéressant de faire une étude comparative sur la base d'un portefeuille type de contrats d'épargne en euros. Cette application numérique nous a permis de mettre en évidence que, de manière générale, plus la compagnie supporte des risques importants, plus elle perd de la valeur (i.e. les risques ont un coût plus élevé ce qui diminue la MCEV) et plus son besoin en capital augmente (i.e. l'exposition au risque et l'EC s'accroissent). Ainsi, bien que la méthodologie appliquée soit différente (nous raisonnons en univers risque-neutre pour la MCEV et en univers réel pour l'EC), il existe une certaine convergence des informations communiquées par la MCEV, l'EC et leurs mesures de sensibilités.

Cette application numérique a de plus confirmé la nécessité d'une modélisation stochastique dans la valorisation des options cachées. Les simulations stochastiques, contrairement à une méthode déterministe, permettent en effet de tenir compte des coûts liés à ces options, qui peuvent représenter une lourde charge pour l'assureur. Nous avons d'ailleurs pu remarquer que l'impact le plus significatif sur la MCEV et l'EC était la garantie de taux : son coût est fortement corrélé aux fluctuations du marché et peut devenir très important, notamment si le portefeuille d'actifs est composé d'une forte proportion d'actions (i.e. si le portefeuille présente une forte volatilité) ou si les niveaux de taux garantis sont élevés. Nous avons tout de même vu qu'il pouvait être légèrement atténué par l'option de rachats dynamiques.

Ainsi, l'EV (stochastique) et l'EC se rejoignent et permettent de disposer d'indicateurs cohérents, capables de retracer le profil de risque de la compagnie et de fournir des informations rigoureuses quant à son potentiel :



Il est donc indispensable d'intégrer ces concepts dans la gestion des risques d'entreprise, afin de pouvoir prendre des décisions en connaissance de causes et de piloter de manière optimale les interactions qui existent entre le risque, le capital et la valeur :



## ANNEXES

ANNEXE 1 : DESCRIPTION DE L'INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD (IASB)	154
ANNEXE 2 : LISTE DES ACTIFS ADMIS EN COUVERTURE	155
ANNEXE 3 : NOTIONS DE PROBABILITÉ	156
ANNEXE 4 : EXTENSIONS DU MODÈLE DE BLACK ET SCHOLES	161
ANNEXE 5 : UTILITÉ MARGINALE ET DÉFLATEURS, DÉMONSTRATION	164
ANNEXE 6 : DESCRIPTION DU CFO FORUM	166
ANNEXE 7 : LES 12 PRINCIPES DE L'EUROPEAN EMBEDDED VALUE (EEV)	167
ANNEXE 8 : DÉCOMPOSITION DE CHOLESKI	169
ANNEXE 9 : TABLE DE MORTALITÉ ET TABLE D'EXPÉRIENCE	171

## Annexe 1 : Description de l'International Accounting Standards Board (IASB)

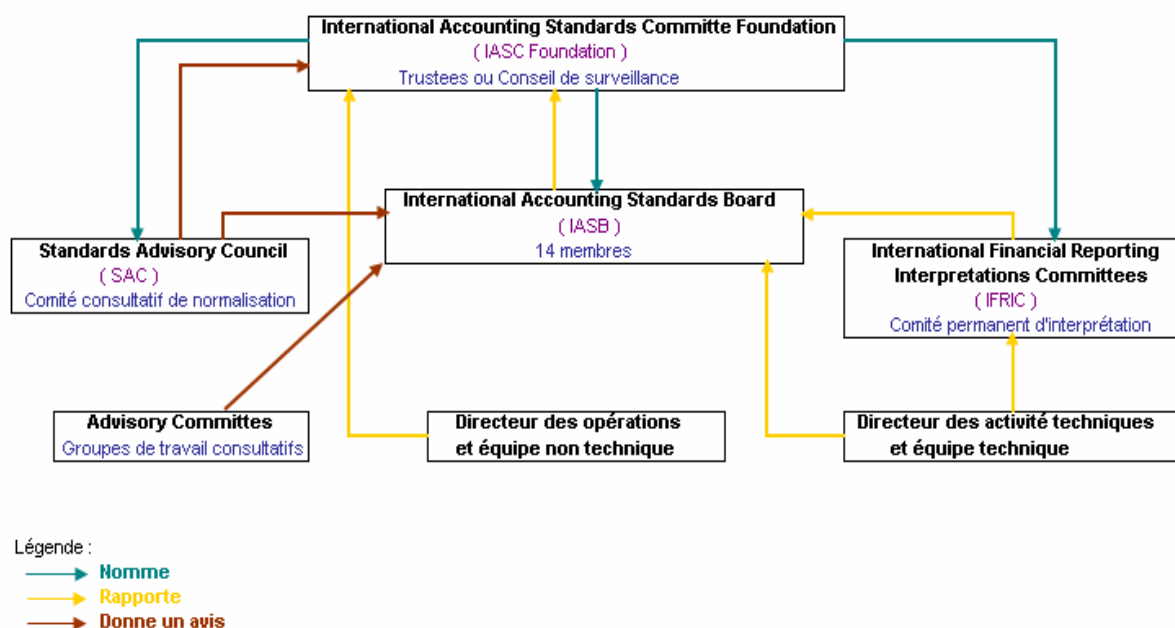
L'IASB, connu avant 2001 sous le nom de IASC (International Accounting Standards Committee), est un organisme privé basé à Londres. Ce n'est donc pas une instance intergouvernementale.

L'IASB est chargé d'édicter des normes applicables au niveau international et bénéficie notamment de personnel mis à disposition par les grands cabinets d'audit.

Il doit respecter un certain équilibre et compter parmi ses 14 membres, au moins :

- 5 experts-comptables,
- 3 financiers d'entreprise,
- 3 investisseurs,
- 1 universitaire.

C'est une filiale à 100 % de l'IASC Foundation :



L'IASB participe ainsi à l'harmonisation internationale des pratiques comptables. Cet organisme a été chargé par la Commission Européenne d'établir un référentiel comptable, commun et unique (les normes IFRS, International Financial Reporting Standards), applicables aux comptes des sociétés cotées sur les marchés européens et compatible avec le cahier des charges établi par l'Union Européenne.

**Annexe 2 : Liste des actifs admis en couverture**

ETAT RECAPITULATIF DES PLACEMENTS ADMIS EN COUVERTURE						
Nature des Placements R212-31	2002 (en Euros)			Répartition	Dispersion	
	Valeur Brute	Valeur Nette	Valeur de Réalisation			
1. Obligations et emprunts d'Etats OCDE et Emprunt CADES					Sans limite	
2. Obligations, parts de FCC et TP, négociés sur un marché reconnu, autres que 1.(OCDE)					< 5% ou 10% (2)	
3. Titres de créances négociables d'un an au plus (OCDE)					< 5% ou 10% (2)	
4. Bons à moyen terme négociables (OCDE)					< 5% ou 10% (2)	
5. Actions de SICAV et parts de FCP gérant des valeurs 1 à 4					Sans limite	
(I) TOTAL Placements Obligataires	-	-	-			
6. Actions et autres VMP (autres que 5, 7, 8, 12, 14) (OCDE)				<65% (1)	< 5% ou 10% (2)	
7. Actions des entreprises d'assurance, de réassurance, de capitalisation (OCDE)					< 5% ou 10% (2)(3)	
8. Actions de sociétés étrangères d'assurance (hors OCDE)					< 5% ou 10% (2)	
9. Actions, parts et droits émis par des sociétés commerciales et Obligations, TP et TS émis par société d'ass mutuelles, Mutuelles et IP (OCDE)					< 0,5%	
10. Parts de FCP à risques et innovation					< 0,5%	
11. Actions des SICAV					< 0,5%	
12. Actions des SICAV et FCP (autres que 5, 10 et 11)					< 5% ou 10% (2)	
(II) TOTAL Placements Actions et Titres assimilés	-	-	-			
A. TOTAL Placements en Valeurs Mobilières et assimilées (I) + (II)	-	-	-			
13. Droits réels immobiliers (OCDE)					<40%	< 10% / Immo
14. Parts de sociétés immobilières ou foncières non cotées (SCI) (OCDE)						< 10% / Immo
B. TOTAL Placements Immobiliers	-	-	-			
15. Prêts obtenus ou garantis par des Etats membres de l'OCDE ou assimilés				<10% (1)	Sans limite	
16. Prêts hypothécaires (OCDE)					< 5% ou 10% (2)	
17. Autres prêts et créances (OCDE) dont prêts mentionnés à l'article R.212-45-I al.3					< 5% ou 10% (2)	
C. TOTAL Prêts	-	-	-	(1)	< 0,5%	
18. Dépôts dont compte de dépôts dont cautionnement en espèces dont cautionnement auprès du Système Fédéral de Garantie dont avoirs en banque (liquidité)					Sans limite	
D. TOTAL Dépôts	-	-	-			
TOTAL des Placements admis en couverture	-	-	-			
Dont: • valeurs affectables à la représentation des provisions techniques • autres affectations ou sans affectation						

(1) les prêts accordés aux emprunteurs solides mentionnés au troisième alinéa du I de l'article R.212-45 sont rapportés dans la limite de 5% pour les placements 9,10,11, par conséquent intégrés dans la limite des 65% des placements actions et déduits des

(2) le ratio de droit commun de 5% peut atteindre 10% pour les titres d'un même émetteur, à condition que la valeur des titres de l'ensemble des émetteurs dont les émissions sont admises au-delà du ratio de 5% n'excède pas 40%

(3) le groupement ne peut affecter à la représentation de ses engagements réglementés plus de 50% des actions émises par une même société

### Annexe 3 : Notions de probabilité

#### ❖ DEFINITIONS

##### ▪ Définition 1 : Filtration

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Une filtration sur  $\Omega$  est une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous tribus de  $\mathcal{F} = \{F_t, t \in [0, T]\}$ , i.e.  $F_t \subseteq F_s \forall t \leq s$ .

La tribu  $F_t$  représente l'information disponible à la date  $t$  ( $t \in \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}^+$ ).

##### ▪ Définition 2 : Processus stochastique

L'évolution aléatoire d'une variable au cours du temps peut être modélisée par un processus stochastique. Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires  $(X_t, t \in [0, \infty])$  définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . C'est donc une suite de variables indexées par le temps.

Un processus stochastique  $X = (X_t, t \geq 0)$  est dit adapté par rapport à la filtration  $F_t$  si  $X_t$  est  $F_t$ -mesurable pour tout  $t$ .

Nous pouvons associer à un processus stochastique sa filtration naturelle  $F_t^X$ , c'est-à-dire la famille croissante de tribus  $F_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ .

Il existe deux catégories de processus stochastiques: les processus en temps discret (les changements de valeur de la variable se produisent à des dates précises) et les processus en temps continu (la variable évolue à n'importe quel instant).

Le processus est dit à trajectoires continues (ou est continu) si les applications  $t \rightarrow X_t(w)$  sont continues pour presque tout  $w \in \Omega$ .

##### ▪ Définition 3 : Martingale

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé muni d'une filtration  $F$ .

Une famille de variables aléatoires  $(M_t, t \in [0, \infty])$  est une martingale par rapport à la filtration  $F_t$  si et seulement si :

- $M_t$  est intégrable pour tout  $t$  :  $E[|M_t|] < \infty$
- $M_t$  est  $F_t$ -mesurable
- pour tout  $0 \leq s < t$ ,  $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$  p.s.

Une martingale est un processus constant en espérance conditionnelle : c'est une fonction qui reste constante en moyenne, elle n'a tendance ni à croître, ni à décroître.

En particulier :  $E(M_t) = E(M_0)$ .

##### ▪ Définition 4 : Processus de Markov

C'est un cas particulier de processus stochastique pour lequel la valeur présente d'une variable est utile pour anticiper sa distribution future. L'historique et la façon dont le présent a émergé d'une trajectoire passée sont sans importance (propriété d'absence de mémoire).

$\forall n, \forall$  la fonction  $f$  borélienne et bornée dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$  :

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | F_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | X_s), \quad \forall s$$

▪ **Définition 5 : Mouvement brownien**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et un processus  $(W_t, t \in [0, \infty[)$  sur cet espace.

Le processus  $(W_t, t \in [0, \infty[)$  est un mouvement brownien si :

- $W_0 = 0$  p.s (i.e.  $P(W_0 = 0) = 1$ ) ;
- $W_t$  est à accroissements stationnaires : pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  est une variable réelle de loi gaussienne centrée et de variance  $(t-s)$  ;
- $W_t$  est à accroissements indépendants :  $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , les variables  $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_0, W_0)$  sont indépendantes; ou de manière équivalente, pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  est indépendante de la tribu du passé avant  $s$ , soit  $\sigma\{W_s, s \leq t\}$ .

Le mouvement brownien est donc un processus stochastique à trajectoires continues et markovien. C'est aussi une martingale.

❖ **LEMME D'ITO**

Le lemme d'Itô a été établi par le mathématicien Kiyosi Itô en 1951.

Supposons que la valeur d'une variable aléatoire  $x$  suive un processus d'Itô :

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz$$

Où  $z$  est un mouvement brownien ou aussi appelé Wiener standard (source d'incertitude sous-jacente),

$a(x,t)$  et  $b(x,t)$  sont des fonctions de  $x$  et  $t$ .

Nous avons :  $d\langle x, x \rangle = \langle dx, dx \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle a(x,t) dt + b(x,t) dz, a(x,t) dt + b(x,t) dz \rangle \\ &= \langle a(x,t) dt, a(x,t) dt \rangle + 2 \langle a(x,t) dt, b(x,t) dz \rangle + \langle b(x,t) dz, b(x,t) dz \rangle \\ &= a^2(x,t) d\langle t, t \rangle + 2 a(x,t) b(x,t) d\langle t, z \rangle + b^2(x,t) d\langle z, z \rangle \\ &= b^2(x,t) dt \end{aligned}$$

Ainsi, la variable  $x$  a un paramètre de tendance centrale égal à  $a$  et un paramètre de variance égal à  $b^2$ .

Le lemme d'Itô montre qu'une fonction  $G$ , ayant pour paramètres  $x$  et  $t$ , est caractérisée par le processus suivant :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t) \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b(x,t) dz$$

Par conséquent,  $G$  suit également un processus d'Itô avec un paramètre de tendance centrale égal à :

$$\frac{\partial G}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t)$$

et un paramètre de variance égal à :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t)$$

Ce lemme peut être assimilé à une extension des résultats issus du calcul différentiel.

Pour démontrer le résultat, il suffit d'appliquer la formule de Taylor (à l'ordre 2) :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} d \langle x, x \rangle + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} d \langle t, t \rangle + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} d \langle x, t \rangle \right)$$

Or :  $d \langle t, t \rangle = 0$ ,

$$d \langle x, t \rangle = 0,$$

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz,$$

$$d \langle x, x \rangle = b^2(x,t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } dG &= \frac{\partial G}{\partial x} (a(x,t) dt + b(x,t) dz) + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t) dt \\ &\Leftrightarrow dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t) \right) dt + b(x,t) \frac{\partial G}{\partial x} dz \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc la formule annoncée.

### ❖ FORMULE EXPLICITE D'UN MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE

Soit un processus X défini par l'équation différentielle suivante :

$$dX_t = \mu(X_t, t) X_t dt + \sigma(X_t, t) X_t dW_t$$

Où  $W_t$  est un mouvement brownien standard,

$\mu(X_t, t)$  et  $\sigma(X_t, t)$  sont des fonctions de X et t.

Nous avons donc :  $d \langle X, X \rangle_t = \sigma^2(X_t, t) X_t^2 dt$

Appliquons le lemme d'Itô à la fonction  $\ln(X_t)$  :

$$\begin{aligned} \ln(X_t) &= \ln(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{X_s^2} d \langle X, X \rangle_s \\ &\Leftrightarrow \ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} (\mu(X_s, s) X_s ds + \sigma(X_s, s) X_s dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{X_s^2} (\sigma^2(X_s, s) X_s^2 ds) \\ &\Leftrightarrow \ln(X_t) = \ln(X_0) + \int_0^t \left( \mu(X_s, s) - \frac{\sigma^2(X_s, s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s \\ &\Leftrightarrow X_t = X_0 \exp \left\{ \int_0^t \left( \mu(X_s, s) - \frac{\sigma^2(X_s, s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s \right\} \end{aligned}$$



Dans le cas où les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont constants, l'équation devient :

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

C'est cette expression qui caractérise en général le processus de prix des actions : il s'agit d'un mouvement brownien géométrique standard.

### ❖ THEOREME DE GIRSANOV

Ce théorème permet de passer de la mesure physique ou historique  $P$ , à la mesure de probabilité risque-neutre  $Q$ .

#### Théorème :

« Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé où  $\mathcal{F}$  est la filtration naturelle du mouvement brownien standard  $W = (W_t, t \in [0; T])$

Soit  $\lambda = (\lambda_t, t \in [0; T])$  un processus adapté à la filtration  $\mathcal{F}$  satisfaisant la condition de Novikov.

Condition de Novikov :

Le processus satisfait la condition de Novikov si et seulement si :  $E_P \left[ \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds\right\} \right] < +\infty$

Soit  $L = (L_t, t \in [0; T])$  le processus défini par :  $L_t = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds\right\}$ .

Alors le théorème de Girsanov affirme que :

- Le processus  $L$  est une  $P$ -martingale ;
- Le processus  $W_t^Q$  défini par  $W_t^Q = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$  est un mouvement brownien standard sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, Q)$  où  $Q$  est caractérisé par :  $\frac{dQ}{dP} = L_T$ . »

Notons que dans le modèle de Black et Scholes, le changement de probabilité est réalisé en posant :

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement le taux de croissance espéré et la volatilité du prix  $S$  d'un actif quelconque défini par le processus de diffusion suivant:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Nous avons donc dans ce cas :

$$L_t = \exp\left\{-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right\}.$$

Le paramètre  $\lambda$  est appelé prix de marché du risque. Il mesure le taux de substitution entre rentabilité (en excès du taux sans risque) et risque pour les actifs dépendant de  $W$ .

### ❖ THEOREME D'EVALUATION PAR CHANGEMENT DE NUMERAIRE

#### Théorème :

« Soit  $Q$  la probabilité risque-neutre.

Etant donné un nouveau numéraire  $X$  tel que  $X(t) \exp\left\{\int_0^t r(u) du\right\}$  soit une  $Q$ -martingale, il existe

une mesure de probabilité  $Q_X$  sur  $F$  sous laquelle les actifs financiers de base exprimés dans ce nouveau numéraire, sont des martingales, et qui est définie par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ_X}{dQ} \Big|_{F_T} = \frac{X(T)}{X(0) P(T)}$$

La valeur d'équilibre  $f(S,t)$  de l'actif dérivé de cours  $S$ , de payoff  $H(t)$  en  $T$  s'écrit alors :

$$f(S, t) = X(t) E_{Q_X} \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \Big| F_t \right] \gg$$

### ❖ THEOREME DE FEYNMAN-KAC

#### Théorème :

« Soient  $V$  une fonction de classe  $C^{1,2}$ , et  $\mu(x,t)$ ,  $\sigma(x,t)$  et  $r(x,t)$  trois fonctions lipchitziennes, bornées sur  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\sigma^2(x,t)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu(x,t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} - r V = 0$$

avec la condition de frontière :  $V(x, T) = H(x)$ .

En supposant que,  $\forall t \leq T, \int_0^t E \left[ \left( \sigma(X(s), s) \frac{\partial V}{\partial x}(X(s), s) \right)^2 \right] ds < \infty$ , alors :

$$V(x, t) = E^Q \left[ \exp \left\{ \int_t^T r(x, s) ds \right\} H(X(T)) \right]$$

où  $X$  est un processus stochastique continu tel que  $dX_t = \mu(X, t) dt + \sigma(X, t) dW_t$  et  $W_t$  est un mouvement brownien pour la mesure de probabilité  $Q$ . »

## Annexe 4 : Extensions du modèle de Black et Scholes

### ❖ Evaluation des options sur actions versant des dividendes

#### Hypothèses :

- les marchés financiers sont parfaits (absence d'opportunité d'arbitrage, complétude) et continus;
- l'option à évaluer est européenne ;
- la rentabilité du support dépend d'un mouvement brownien (et est donc de loi normale) ;
- le sous-jacent verse des dividendes dont le montant et les dates de paiements sont connus pendant la durée de vie de l'actif dérivé ;
- la volatilité  $\sigma$  du support est constante;
- le taux sans risque  $r$  est constant et identique sur toutes les maturités.

Comme le modèle de base évalue les options sans dividendes et que nous sommes en présence d'un support versant un dividende, il nous faut effectuer une petite manipulation de sorte à remplir les conditions d'application du modèle.

La formule de Black et Scholes est applicable à condition de déduire du cours de l'action la valeur actualisée des dividendes payables pendant la durée de vie de l'option. L'actualisation se fait au taux sans risque à partir des dates de détachement.

Ceci résulte du fait que lors du détachement du dividende, le cours de l'action diminue d'un montant à peu près équivalent au dividende. En effet, en cas de versement de dividendes, l'actif a pour valeur à la date  $T$  :

$$S_T = S_0 * \text{rendement} - \text{valeur en date } T \text{ des dividendes versés.}$$

Alors, en l'absence de dividendes et toutes choses égales par ailleurs, l'actif aurait à la date  $T$  un cours égal :

$$S_T' = S_0 * \text{rendement} = S_T + \text{valeur en date } T \text{ des dividendes versés.}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } S_T &= S_0 * \text{rendement} - \text{valeur en date } T \text{ des dividendes versés} \\ &= (S_0 - \text{valeur actuelle des dividendes à verser}) * \text{rendement} \end{aligned}$$

Ainsi, comme nous raisonnons avec une valeur à terme égale à  $S_T$ , il faut partir de la valeur initiale de l'actif diminuée de la valeur actuelle des dividendes payés durant la durée de vie de l'option. Finalement, pour évaluer une option européenne sur un actif d'échéance  $T$  versant des dividendes connus, il suffit de retrancher à la valeur initiale de l'actif la valeur actuelle des dividendes payés au cours de la durée de vie de l'option, et de procéder ensuite comme si l'actif ne versait pas de dividende.

Soient :  $S_0$  le cours du sous-jacent à la date 0,

$K$  le prix d'exercice de l'option,

$T$  la date d'échéance de l'option,

$r$  le taux d'intérêt sans risque,

$D$  la valeur actuelle des dividendes payés au cours de la période.

La formule de Black et Scholes nous donne alors la valeur actuelle des options européennes :

$$\text{Pour le call } C : C_0 = (S_0 - D) \Phi(d_1) - K * \exp^{-rT} \Phi(d_2),$$

$$\text{Pour le put } P : P_0 = K * \exp^{-rT} \Phi(-d_2) - (S_0 - D) \Phi(-d_1),$$

$$\text{Avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Et  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi normale standard.

La manipulation est identique dans le cas pour d'un taux de dividende connu et égal à  $q$  : il suffit de poser :  $D = \exp^{(-qT)}$ .

### ❖ Evaluation des options avec un taux dépendant du temps

#### Hypothèses :

- les marchés financiers sont parfaits (absence d'opportunité d'arbitrage, complétude) et continus;
- l'option à évaluer est européenne ;
- la rentabilité du support dépend d'un mouvement brownien (et est donc de loi normale) ;
- le sous-jacent ne verse pas de dividende pendant la durée de vie de l'actif dérivé;
- la volatilité  $\sigma$  du support est constante;
- le taux sans risque est une fonction dépendante du temps suivant un paramètre  $\rho_t$ .

La normalité du rendement du support implique que l'actif  $S$  suit une loi log-normale. Son processus de prix est donc défini par l'équation suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \Leftrightarrow S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique  $P$ .

Sous l'hypothèse d'un taux sans risque dépendant du temps, la valeur escomptée de l'actif  $S$

$$\text{s'écrit : } \hat{S}_t = \exp\left\{-\int_0^t \rho_s ds\right\} S_t \Leftrightarrow \hat{S}_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \left(\mu - \rho_s - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \sigma W_t\right\}$$

En appliquant le lemme d'Itô, nous obtenons :  $d\hat{S}_t = (\mu - \rho_t) \hat{S}_t dt + \sigma \hat{S}_t dW_t$  .

Or, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dans un marché complet nous permet d'affirmer qu'il existe une unique probabilité risque-neutre  $Q$  telle que les valeurs escomptées de tout actif du marché sont des  $Q$ -martingales :  $\hat{S}_s = E^Q[\hat{S}_t | F_s] \quad \forall 0 \leq s < t$ .

Le théorème de Girsanov nous permet de passer de l'univers réel à l'univers risque-neutre.

Posons  $W_t^Q = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$  avec  $W_t^Q$  un mouvement brownien sous la probabilité  $Q$ .

Nous en déduisons que :  $dW_t = dW_t^Q - \lambda_t dt$

D'où :  $d\hat{S}_t = (\mu - \rho_t - \sigma \lambda_t) \hat{S}_t dt + \sigma \hat{S}_t dW_t^Q$

Pour que  $\hat{S}_t$  soit une martingale, il faut nécessairement que  $\mu - \rho_t - \sigma \lambda_t = 0 \Leftrightarrow \lambda_t = \frac{\mu - \rho_t}{\sigma}$

Remarquons que la condition de Nivokov est satisfaite puisque :  $E_P\left[\exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{\mu - \rho_t}{\sigma}\right)^2 ds\right\}\right] < +\infty$

Finalement, le processus de prix de l'actif S vérifie l'équation :

$$dS_t = \rho_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t^Q \right\}$$

Nous pouvons à présent évaluer une option européenne sur l'actif S, de prix d'exercice K et d'échéance T. La valeur actuelle de l'option V correspond à :

$$V = E^Q \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} \max[\theta (S_T - K); 0] \right]$$

Où  $\theta$  vaut 1 pour un call et -1 pour un put.

Dans le cas du call, nous avons :

$$V = E^Q \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} \max \left[ S_0 \exp \left\{ \int_0^T \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma W_T^Q \right\} - K; 0 \right] \right]$$

$$\Leftrightarrow V = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} \max \left[ S_0 \exp \left\{ \int_0^T \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma W_T^Q \right\} - K; 0 \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left( - \frac{W_T^{Q^2}}{2T} \right) dW_T^Q$$

Posons  $A = \frac{\ln \left( \frac{K}{S_0} \right) - \int_0^T \rho_s ds + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma}$  ; nous en déduisons que :

$$\Leftrightarrow V = \int_A^{\infty} \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} \left[ S_0 \exp \left\{ \int_0^T \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma W_T^Q \right\} - K \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left( - \frac{W_T^{Q^2}}{2T} \right) dW_T^Q$$

$$\Leftrightarrow V = \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{2} T \right\} S_0 \int_A^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ \sigma W_T^Q - \frac{W_T^{Q^2}}{2T} \right\} dW_T^Q - \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} K \int_A^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left( - \frac{W_T^{Q^2}}{2T} \right) dW_T^Q$$

$$\Leftrightarrow V = S_0 \int_A^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ - \frac{(W_T^Q - \sigma T)^2}{2T} \right\} dW_T^Q - \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} K \int_A^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left( - \frac{W_T^{Q^2}}{2T} \right) dW_T^Q$$

$$\Leftrightarrow V = S_0 \Phi \left( - \frac{A - \sigma T}{\sqrt{T}} \right) - \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} K \Phi \left( - \frac{A}{\sqrt{T}} \right) \quad \text{Avec } \Phi \text{ la fonction de répartition de la loi normale } N(0;1)$$

$$\Leftrightarrow V = S_0 \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^T \rho_s ds + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} K \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^T \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

Nous démontrons de la même manière le prix actuel du put :

$$\Leftrightarrow V = \exp \left\{ - \int_0^T \rho_s ds \right\} K \Phi \left( - \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^T \rho_s ds - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - S_0 \Phi \left( - \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \int_0^T \rho_s ds + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

## Annexe 5 : Utilité marginale et déflateurs, démonstration

### Objectif :

Soit un modèle à deux périodes avec  $s$  états possibles.

Notons  $w^*$  la stratégie d'investissement optimal qui maximise l'espérance de la fonction d'utilité en  $T = 1$  :  $w^* = \arg \max_w \{E[U(w)]\}$ .

Il s'agit de montrer que le déflateur d'un état particulier  $s$  est un multiple constant de l'utilité marginale du portefeuille optimal dans cet état :

$$D_1(s) = \frac{w_0^*}{E[w_1^* U'(w_1^*)]} U'(w_1^*(s)) \quad (1)$$

où :  $w_0^*$  est la richesse initiale du portefeuille optimal,

$w_1^*$  est la richesse finale du portefeuille optimal,

$w_1^*(s)$  est la richesse dans l'état  $s$  du portefeuille optimal.

### Démonstration :

Considérons une autre stratégie d'investissement  $w$  donnant la distribution de richesse  $w_1$  (qui est une fonction de l'état  $s$ ), à partir de la richesse initiale  $w_0^*$ , identique à celle du portefeuille optimal.

Une combinaison de cette stratégie avec la stratégie optimale nous permet de construire une nouvelle stratégie  $w^\alpha$  (fonction d'un certain paramètre  $\alpha$ ) ayant pour distribution de richesse finale :  $\alpha w_1 + (1-\alpha) w_1^*$ .

Soit la fonction  $F(\alpha) = E[U(\alpha w_1 + (1-\alpha) w_1^*)]$ .

Nous avons donc :

$$F(0) = E[U(w_1^*)],$$

$$F'(\alpha) = E[U'(\alpha w_1 + (1-\alpha) w_1^*) * (w_1 - w_1^*)] \text{ par linéarité de l'espérance,}$$

$$F'(0) = E[U'(w_1^*) * (w_1 - w_1^*)].$$

La condition d'optimalité ( $w^*$  maximise l'espérance de la fonction d'utilité) nous permet de dire que la stratégie  $w^\alpha$  a une espérance d'utilité inférieure à celle obtenue en appliquant la stratégie optimale  $w^*$ . Par conséquent, la fonction  $F$  est maximale pour  $\alpha^*$  réalisant :

$$F(\alpha^*) = E[U(w_1^*)] \text{ c'est-à-dire pour } \alpha^* = 0.$$

Cela implique que la dérivée de la fonction  $F$  en ce point est nulle :

$$F'(0) = E[U'(w_1^*) * (w_1 - w_1^*)] = 0$$

D'où :

$$E[U'(w_1^*) w_1] = E[U'(w_1^*) w_1^*] \quad (2).$$

Si la relation (1) définit un déflateur, il faut montrer que pour tout portefeuille  $Y$  (de valeur initiale  $Y_0$  et de valeur finale  $Y_1$ ), nous avons nécessairement :

$$E[D_1 Y_1] = Y_0 \quad (3).$$

Pour démontrer cette relation, nous allons d'abord effectuer le calcul pour la stratégie d'investissement  $w$  défini précédemment, puis nous généraliserons la méthode à n'importe quel portefeuille.

Pour la stratégie d'investissement  $w$ , nous avons :

$$\begin{aligned} E[D_1 w_1] &= \sum_s p(s) D_1(s) w_1(s) \\ \Leftrightarrow E[D_1 w_1] &= \sum_s \frac{p(s) U'(w_1^*(s)) w_1(s) w_0^*}{E[w_1^* U'(w_1^*)]} \\ \Leftrightarrow E[D_1 w_1] &= \frac{w_0^*}{E[w_1^* U'(w_1^*)]} \sum_s p(s) U'(w_1^*(s)) w_1(s) \\ \Leftrightarrow E[D_1 w_1] &= \frac{w_0^* E[w_1^* U'(w_1^*)]}{E[w_1^* U'(w_1^*)]} \end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité (2), nous obtenons :

$$E[D_1 w_1] = \frac{w_0^* E[w_1^* U'(w_1^*)]}{E[w_1^* U'(w_1^*)]} = w_0^*$$

La relation (3) est vérifiée pour la stratégie  $w$  : nous retrouvons bien la valeur initiale liée à cette stratégie.

Pour généraliser le résultat à tout portefeuille  $Y$ , il suffit de remarquer que sa valeur finale peut s'écrire comme un multiple de la richesse finale de la stratégie  $w$  :  $Y_1 = a w_1$  où  $a$  est une constante.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage permet alors d'affirmer que la valeur actuelle de ce portefeuille sera égale à  $Y_0 = a w_0^*$ .

Ceci nous permet facilement de prouver la relation (3) :

$$\begin{aligned} E[D_1 y_1] &= E[D_1 a w_1] \\ \Leftrightarrow E[D_1 y_1] &= a E[D_1 w_1] \\ \Leftrightarrow E[D_1 y_1] &= a w_0^* \\ \Leftrightarrow E[D_1 y_1] &= y_0 \end{aligned}$$

## **Conclusion**

La relation (1) définit bien un déflateur : les déflateurs sont donc proportionnels à l'utilité marginale du portefeuille optimal.

## **Annexe 6 : Description du CFO Forum**

Le CFO Forum (Chief Financial Officers) est un groupement des directeurs financiers issus des plus importantes compagnies d'assurance et de réassurance européennes. Les participants sont au nombre de 19:

- AEGON
- Allianz
- Aviva
- AXA
- Credit Suisse
- Fortis
- Generali
- Hannover RE
- ING
- Legal & General
- Munich Re
- Old Mutual
- Prudential
- Scottish Widows
- Skandia
- Standard Life
- Swiss Life
- Swiss Re
- Zurich Financial Services.

Le forum a été créé en 2002. L'objectif était de considérer les possibilités de mesure concernant la valeur d'une compagnie d'assurance et de proposer des normes d'évaluation susceptibles de standardiser et d'harmoniser les méthodes en vigueur, susceptibles de mieux tenir compte des risques inhérents à un portefeuille d'assurance vie.

**Publications** : (voir le site [www.cfoforum.nl](http://www.cfoforum.nl))

- 2004, «European Embedded Value Principles » : 12 principes clés définissant l'European Embedded Value et une préconisation sur 65 points ;
- 2004, « Basis for conclusions European Embedded Value Principles » : Commentaires sur les principes et les règles ;
- 2005, « Additional guidance on European Embedded Value Disclosures » : guide supplémentaire concernant la communication et la diffusion des résultats.



## **Annexe 7 : Les 12 principes de l'European Embedded value (EEV)**

### **1. L'Embedded Value (EV) est une mesure**

L'EV est une mesure de la valeur consolidée des intérêts des actionnaires par rapport à l'activité considérée.

### **2. L'activité couverte ; périmètre d'application**

L'activité entrant dans le champ d'application de l'EV doit être clairement identifiée et communiquée.

### **3. Composantes de l'EV**

L'EV est la valeur actuelle des profits distribuables aux actionnaires issus des actifs alloués pour l'activité couverte, après une allocation suffisante des actifs servant à couvrir les risques agrégés de l'activité considérée.

L'EV se compose des éléments suivants :

- l'excédent libre ;
- le capital requis ou exigence en capital, diminué de son coût de détention ;
- la valeur présente des profits futurs distribuables aux actionnaires provenant des affaires en cours de l'activité entrant dans le périmètre d'application (PVIF).

La production future ne fait pas partie de l'évaluation.

### **4. Définition de l'excédent**

L'excédent libre, ou capital non requis, est la valeur de marché de tout capital ou excédent qui n'est pas nécessaire pour supporter les affaires en cours de l'activité couverte à la date d'évaluation.

### **5. Définition du capital requis et du coût du capital**

Le capital requis doit inclure tout montant d'actifs attribué à l'activité considérée qui sont nécessaires pour couvrir les engagements liés à l'activité couverte et dont la distribution aux actionnaires est réglementée. L'évaluation doit tenir compte du coût de portage du capital requis.

### **6. Définition de la Present Value of In Force (PVIF)**

La PVIF de l'activité entrant dans le périmètre d'évaluation correspond à la valeur actuelle des profits futurs distribuables aux actionnaires résultant des actifs placés en couverture des passifs liés aux affaires en cours de l'activité couverte. Cette valeur est réduite du coût des options et des garanties financières défini dans le principe 7.

### **7. Traitement des options cachées et des garanties financières**

Il faut prendre en compte dans l'évaluation l'impact potentiel sur les profits futurs distribuables aux actionnaires de toutes les options et garanties financières par rapport aux affaires en cours entrant dans le périmètre d'application de l'évaluation. Cette allocation doit inclure la valeur

spéculative de ces options et garanties, évaluée sur la base de techniques stochastiques cohérentes avec la méthodologie et les hypothèses retenues pour l'évaluation.

## **8. Valorisation des affaires nouvelles (New Business) et des renouvellements**

Les affaires nouvelles sont définies comme le montant des ventes de nouveaux contrats pendant l'année d'évaluation. La valeur de ces affaires nouvelles doit inclure la valeur des renouvellements espérés et les modifications espérées contractuelles futures par rapport à ces nouveaux contrats.

L'EV ne doit refléter que les affaires existantes à la date d'évaluation, ce qui exclut la prise en compte de la production future nouvelle.

## **9. Hypothèses de projection**

L'évaluation repose sur des hypothèses appropriées de l'expérience future qui doivent être établies en fonction de l'expérience passée et présente, mais également selon les prévisions de l'expérience future. Des modifications de l'expérience future peuvent être pris en compte dans l'évaluation des affaires en cours si ces changements sont identifiés de manière évidente et qu'ils sont raisonnablement certains.

Les hypothèses doivent régulièrement être mises à jour.

## **10. Hypothèses économiques**

Les hypothèses économiques doivent être cohérentes avec les observations internes et avec les données du marché. Il n'est permis ni de lisser les valeurs du marché, ni celles inscrites au Bilan, ni des gains non réalisés, ni du rendement d'investissement.

## **11. Produits avec participations aux bénéfices**

Pour les contrats avec une clause de participation aux bénéfices, la méthode doit faire des hypothèses sur les taux futurs de revalorisation et sur la répartition du profit entre les actionnaires et les assurés. Ces hypothèses doivent être établies sur une base cohérente avec les hypothèses de projection établies suivant les pratiques de la compagnie, des données contractuelles et du marché local.

## **12. Publication et communication des résultats au marché**

Les résultats de l'évaluation doivent être communiqués au niveau du groupe consolidé en utilisant une classification cohérente des activités.

## Annexe 8 : Décomposition de Choleski

Ce résultat d'algèbre permet de décorréler des vecteurs gaussiens.

### ❖ Théorème de Choleski

« Si  $\Gamma$  est une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure  $A$  telle que :  $\Gamma = A A^t$ . »

Si nous imposons que les éléments diagonaux de la matrice soient tous positifs, alors la décomposition (ou factorisation) est unique.

La matrice  $A$  est appelée la « racine carrée de  $\Gamma$  » ou « décomposée de Choleski de  $\Gamma$  ». Nous notons par convention :  $A = \sqrt{\Gamma}$ .

### ❖ Application aux vecteurs gaussiens

Considérons deux vecteurs gaussiens  $X$  et  $Y$  tels que :

- $X \sim N(0, Id_d)$  de loi gaussienne centrée  $d$ -dimensionnelle ;
- $Y \sim N(m, \Gamma)$  avec  $\Gamma$  une matrice symétrique, définie positive.

Il existe alors une unique matrice  $A$  triangulaire inférieure à diagonale positive telle que :

- $\Gamma = A A^t$ ;
- $Y = m + AX$ .

En effet, nous avons :

- $E[Y] = E[m + AX] = m + A E[X] = m$  par linéarité de l'espérance;
- $E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = E[(m + AX - E[m + AX])(m + AX - E[m + AX])^t]$   
 $\Leftrightarrow E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = E[(AX)(AX)^t]$   
 $\Leftrightarrow E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = E[A X X^t A^t]$   
 $\Leftrightarrow E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = A E[X X^t] A^t$   
 $\Leftrightarrow E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = A A^t$   
 $\Leftrightarrow E[(Y - E[Y])^t (Y - E[Y])] = \Gamma$

Ajoutons que toute combinaison linéaire de  $X$  est un vecteur gaussien donc il en va de même pour  $Y = m + AX$ .

### ❖ Cas particulier où $d = 2$

Soit un vecteur  $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N(m, \Gamma)$  avec  $\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$  ( $\rho$  représente le coefficient de corrélation entre  $Y_1$  et  $Y_2$ ).

Dans ce cas, la décomposition de Choleski s'écrit :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 = a^2 \\ \sigma_1\sigma_2\rho = ab \\ \sigma_2^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2\rho = b \\ \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = c \end{cases}\end{aligned}$$

Car la matrice A est à diagonale positive.

La matrice A est donc égale à :

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Si  $Y_1$  et  $Y_2$  ont des distributions marginales normales centrées et réduites ( $m = 0 ; \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ) alors nous avons la relation :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1 \\ \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Où  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables normales centrées réduites qui sont indépendantes.

**Annexe 9 : Table de mortalité et table d'expérience**

TD 88-90			TD 88-90			TD 88-90 abattu de 20%			TD 88-90 abattu de 20%		
x	qx	lx	x	qx	lx	x	qx	lx	x	qx	lx
0	0.008710	100 000	54	0.009612	88 011	0	0.006968	100 000	54	0.00769	90 292
1	0.000726	99 129	55	0.010601	87 165	1	0.000581	99 303	55	0.00848	89 598
2	0.000474	99 057	56	0.011421	86 241	2	0.00038	99 245	56	0.009137	88 838
3	0.000333	99 010	57	0.012257	85 256	3	0.000267	99 208	57	0.009806	88 026
4	0.000293	98 977	58	0.013395	84 211	4	0.000234	99 181	58	0.010716	87 163
5	0.000273	98 948	59	0.014431	83 083	5	0.000218	99 158	59	0.011545	86 229
6	0.000243	98 921	60	0.015656	81 884	6	0.000194	99 136	60	0.012525	85 234
7	0.000212	98 897	61	0.016861	80 602	7	0.00017	99 117	61	0.013488	84 166
8	0.000212	98 876	62	0.018121	79 243	8	0.00017	99 100	62	0.014497	83 031
9	0.000202	98 855	63	0.019433	77 807	9	0.000162	99 084	63	0.015546	81 827
10	0.000212	98 835	64	0.020644	76 295	10	0.00017	99 068	64	0.016515	80 555
11	0.000213	98 814	65	0.022016	74 720	11	0.00017	99 051	65	0.017612	79 225
12	0.000223	98 793	66	0.023387	73 075	12	0.000178	99 034	66	0.01871	77 829
13	0.000263	98 771	67	0.025320	71 366	13	0.000211	99 016	67	0.020256	76 373
14	0.000334	98 745	68	0.027372	69 559	14	0.000267	98 995	68	0.021898	74 826
15	0.000456	98 712	69	0.029650	67 655	15	0.000365	98 969	69	0.02372	73 187
16	0.000618	98 667	70	0.032080	65 649	16	0.000495	98 933	70	0.025664	71 451
17	0.000872	98 606	71	0.035535	63 543	17	0.000698	98 884	71	0.028428	69 618
18	0.001157	98 520	72	0.038737	61 285	18	0.000926	98 815	72	0.03099	67 639
19	0.001311	98 406	73	0.042352	58 911	19	0.001049	98 723	73	0.033882	65 543
20	0.001425	98 277	74	0.046051	56 416	20	0.00114	98 620	74	0.036841	63 322
21	0.001528	98 137	75	0.050764	53 818	21	0.001223	98 507	75	0.040611	60 989
22	0.001602	97 987	76	0.055495	51 086	22	0.001282	98 387	76	0.044396	58 512
23	0.001564	97 830	77	0.061491	48 251	23	0.001251	98 261	77	0.049193	55 915
24	0.001566	97 677	78	0.068037	45 284	24	0.001253	98 138	78	0.05443	53 164
25	0.001548	97 524	79	0.074924	42 203	25	0.001239	98 015	79	0.059939	50 270
26	0.001551	97 373	80	0.082401	39 041	26	0.001241	97 894	80	0.06592	47 257
27	0.001563	97 222	81	0.092285	35 824	27	0.001251	97 772	81	0.073828	44 142
28	0.001586	97 070	82	0.101421	32 518	28	0.001269	97 650	82	0.081137	40 883
29	0.001620	96 916	83	0.111499	29 220	29	0.001296	97 526	83	0.089199	37 566
30	0.001674	96 759	84	0.122564	25 962	30	0.001339	97 400	84	0.098051	34 215
31	0.001739	96 597	85	0.134109	22 780	31	0.001391	97 269	85	0.107287	30 860
32	0.001804	96 429	86	0.146109	19 725	32	0.001444	97 134	86	0.116887	27 549
33	0.001912	96 255	87	0.160898	16 843	33	0.001529	96 994	87	0.128718	24 329
34	0.002009	96 071	88	0.177457	14 133	34	0.001607	96 845	88	0.141966	21 198
35	0.002107	95 878	89	0.192344	11 625	35	0.001685	96 690	89	0.153875	18 188
36	0.002226	95 676	90	0.207796	9 389	36	0.001781	96 527	90	0.166237	15 390
37	0.002367	95 463	91	0.225195	7 438	37	0.001894	96 355	91	0.180156	12 831
38	0.002520	95 237	92	0.245185	5 763	38	0.002016	96 172	92	0.196148	10 520
39	0.002642	94 997	93	0.261839	4 350	39	0.002114	95 978	93	0.209471	8 456
40	0.002850	94 746	94	0.279041	3 211	40	0.00228	95 775	94	0.223233	6 685
41	0.003112	94 476	95	0.293737	2 315	41	0.00249	95 557	95	0.234989	5 193
42	0.003334	94 182	96	0.318043	1 635	42	0.002667	95 319	96	0.254434	3 972
43	0.003761	93 868	97	0.336323	1 115	43	0.003008	95 065	97	0.269058	2 962
44	0.004085	93 515	98	0.387838	740	44	0.003268	94 779	98	0.31027	2 165
45	0.004359	93 133	99	0.419426	453	45	0.003487	94 469	99	0.335541	1 493
46	0.004659	92 727	100	0.448669	263	46	0.003727	94 140	100	0.358935	992
47	0.005006	92 295	101	0.475862	145	47	0.004005	93 789	101	0.38069	636
48	0.005456	91 833	102	0.513158	76	48	0.004364	93 413	102	0.410526	394
49	0.006066	91 332	103	0.540541	37	49	0.004853	93 006	103	0.432432	232
50	0.006687	90 778	104	0.588235	17	50	0.005349	92 554	104	0.470588	132
51	0.007319	90 171	105	0.714286	7	51	0.005856	92 059	105	0.571429	70
52	0.008044	89 511	106	1	2	52	0.006435	91 520	106	1	30
53	0.008785	88 791	107		0	53	0.007028	90 931	107		0



## Bibliographie

### ▪ Ouvrages

- Foata : *Processus stochastiques* ; Dunot (2002)
- Hull : *Options, futures et autres actifs dérivés* ; 5<sup>ième</sup> édition, Pearson Education France (2004)
- Le Vallois, Palski, Paris, Tosetti : *Gestion Actif Passif en Assurance Vie, Réglementation, outils, méthodes* ; Economica (2003)
- Planchet, Thérond, Jacquemin : *Modèles financiers en assurances, Analyses de risques dynamiques* ; Economica (2005)
- *Code des assurances*

### ▪ Publications

- Artzner : *Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance*; North American Actuarial Journal, Volume 3, Number 2 (1999)
- Artzner, Delbaen, Eber, Heath: *Coherent Measures of Risk* (1998)
- Bauer, Enz: *Solvabilité II: une approche intégrée des risques pour les assureurs européens* ; Sigma n°4/2006, Swiss Re (2006)
- Bice, Blight, Kapel : *Market-Consistent Economic Valuations for the Wealth Management Industry* ; The Institute of Actuaries of Australia (2003)
- Carrett, Wong : *Executive options : valuation and projection methodologies* ; The Institute of Actuaries of Australia (2002)
- CFO forum : *European Embedded Value Principles* (2004)
- CFO forum : *Basis for conclusions European Embedded Value Principles* (2004)
- CFO forum : *Additional guidance on European Embedded Value Disclosures* (2005)
- Hilbert, Turnbull : *Measuring and managing the economic risks and costs of with-profits business* ; Institute of Actuaries (2003)
- Jarvis, Southall, Varnell : *Modern Evaluation Techniques* ; the Staple Inn Actuarial Society (2001)
- Planchet, Thérond : *Simulation de trajectoires de processus continus* ; ISFA-Laboratoires SAF, JWA-Actuaires (2004)

### ▪ Mémoires

- Autier, Cayeux : *Garanties implicites d'un contrat d'assurance-vie en euros* ; Mémoire ENSAE (2002)
- Fétiveau : *La Fair Value d'une compagnie d'assurance vie et comparaison avec l'approche Embedded Value* ; Mémoire ISUP (2002)

- Gravier : *Evaluation en valeur de marché : Market Consistent Embedded Value d'un portefeuille d'assurance vie avec valorisation des options cachées et application dans Moses* ; Mémoire ISFA (2004)
- Grigorov : *Capital économique en assurance IARD : méthodologie et mise en œuvre*; Mémoire ULP (2000)
- Koch : *L'évaluation d'un portefeuille de contrats selon les recommandations du CFO Forum* ; Mémoire ULP (2005)
- Thion : *Embedded Value d'un système de retraite* ; Mémoire ULP (2001)
- Schosger : *Modélisation prévisionnelle des contrats en portefeuille et valeur intrinsèque d'une compagnie d'assurance vie* ; Mémoire ULP (2004)
  
- **Cours de la formation d'actuaire de l'ULP**
  - Broihanne, Merli : *Théorie financière* (2004 et 2005)
  - Bufflier : *Droit des assurances* (2006)
  - Eisele : *Calculs actuariels* (2004 et 2005)
  - Heinrich : *Comptabilité des assurances* (2006)
  - Korn : *Optimisation de portefeuille* (2006)
  - Merli, Roger : *Options et gestion du risque de taux* (2006)
  - Rubio : *Assurance vie* (2004 et 2005)
  
- **Sites Internet**
  - [www.agf.fr](http://www.agf.fr)
  - [www.axa.fr](http://www.axa.fr)
  - [www.cfoforum.nl](http://www.cfoforum.nl)
  - [www.cnp.fr](http://www.cnp.fr)
  - [www.fbf.fr](http://www.fbf.fr)
  - [www.ffsa.fr](http://www.ffsa.fr)
  - [www.iasb.org](http://www.iasb.org)
  - [www.institutdesactuaire.com](http://www.institutdesactuaire.com)
  - [www.legifrance.gouv.fr](http://www.legifrance.gouv.fr)
  - [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)
  
- **Publications et documentations internes de Towers Perrin-Tillinghast**



## Liste des abréviations

- **ANC** : Actif Net Comptable
- **ANR** : Actif Net Réévalué
- **AOA** : Absence d'Opportunité d'Arbitrage
- **AV** : Appraisal Value
- **CADES** : Caisse d'Amortissement de la Dette Sociale
- **CAPM** : Capital Asset Pricing Model
- **CECAPP** : Comité Européen des Contrôleurs des Assurances et des Pensions Professionnelles
- **CEL** : Compte Epargne Logement
- **CFO** : Chief Financial Officers
- **CIR** : Cox Ingersoll Ross
- **CMS** : Coût de la Marge de Solvabilité
- **CRDS** : Contribution pour le Remboursement de la Dette Sociale
- **CSG** : Contribution Sociale Généralisée
- **CTE** : Conditional Tail Expectation
- **DSK** : Anciens contrats d'assurance vie investis en actions
- **EC**: Capital Economique (Economic Capital)
- **EDP** : Equation aux Dérivées Partielles
- **EDS** : Equation Différentielle Stochastique
- **EEV** : European Embedded Value
- **EV** : Valeur Intrinsèque (Embedded Value)
- **FCC** : Fonds Commun de Créances
- **FCP** : Fond Commun de Placement
- **FMG** : Fond Minimum de Garantie
- **FPC** : Financial Product Capital
- **IAIS** : International Association of Insurance Supervisors
- **IAS** : International Accounting Standards
- **IASB** : International Accounting Standards Board
- **IASC** : International Accounting Standards Committee
- **IFRIC** : International Financial Reporting Interpretations Committee
- **IFRS** : International Financial Reporting Standards

- **LEP** : Livret d'Epargne Populaire
- **LLPO** : Option de vente de passif limité (Limited Liability Put Option)
- **MC** : Cohérent avec les valeurs de marché (Market-Consistent)
- **MCEV** : Market-Consistent Embedded Value
- **MCR** : Exigence minimale de capital sous Solvabilité II (Minimum Capital Requirement)
- **MEDAF** : Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers
- **MS** : Marge de solvabilité réglementaire sous Solvabilité I
- **NAV** : Net Asset Value
- **NSK** : Nouveaux contrats d'assurance vie investis en actions
- **OAT** : Obligation d'Etat
- **OCDE** : Organisation de Coopération et de Développement Economiques
- **OPCVM** : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
- **PAF** : Provision pour Aléas Financiers
- **PB** : Participation aux Bénéfices
- **PDD** : Provision pour Dépréciation Durable
- **PEA** : Plan d'Epargne en Actions
- **PEL** : Plan d'Epargne Logement
- **PEP** : Plan d'Epargne Populaire
- **PGG** : Provision Globale de Gestion
- **PGP** : Provision pour la Garantie Plancher
- **PM** : Provision Mathématique
- **PPB** : Provision pour Participation aux Bénéfices
- **PPE** : Provision pour Participation aux Excédents
- **PRE** : Provision pour Risques d'Exigibilité
- **PVFP** : Valeur actuelle des profits nets distribuables aux actionnaires (Present Value of Future Profits)
- **PVIF** : Valeur actuelle du stock de contrats (Present Value of In Force)
- **RdC** : Réserve de Capitalisation
- **RDR** : Taux d'actualisation (Risk Discount Rate)
- **ROE** : Rentabilité sur Fonds Propres (Return on Equity)
- **SCI** : Société Civile Immobilière
- **SCPI** : Société Civile de Placements Immobiliers
- **SCR** : Exigence de capital de solvabilité sous Solvabilité II (Solvency Capital Requirement)
- **SIC** : Standing Interpretations Committe

- **SICAV** : Société d'Investissement à Capital Variable
- **SOA** : Society of Actuaries
- **TEV** : Méthode traditionnelle du calcul de la Valeur Intrinsèque (Traditional Embedded Value)
- **TME** : Taux Moyen des Emprunts d'Etat
- **TMG** : Taux Minimum Garanti
- **TP** : Titre Participatif
- **TRA** : Taux de Rendement des Actifs
- **TS** : Titre Subordonné
- **TVaR** : Tail-Value-at-Risk
- **VaR** : Value-at-Risk
- **VIF** : Valeur du stock (Value of In Force)
- **VMP** : Valeur Mobilière de Placement
- **WACC** : Coût moyen pondéré du capital (Weight Average Cost of Capital)



## Glossaire

- **Absence d'Opportunité d'Arbitrage** : Il n'est pas possible de construire un portefeuille sans risque qui ait un rendement plus élevé que le taux sans risque ; chaque séquence de flux futurs ne peut avoir qu'une seule valeur actuelle qui est identique à la valeur du portefeuille utilisé pour le répliquer
- **Actif d'Arrow-Debreu** : Actif qui paye une unité monétaire dans un état de la nature et à un moment particulier dans le futur ; il ne donne cependant aucun flux dans les autres états possibles
- **Approche bottom-up** : Une des méthodologies applicables dans une EEV pour la détermination du taux d'actualisation ; il s'agit d'une méthodologie qui consiste à évaluer le risque associé aux différents flux issus des produits
- **Approche Market-Consistent** : Méthode de valorisation cohérente avec les valeurs de marché, où les risques sont calibrés à partir d'une évaluation de marché des flux de trésorerie issus des produits
- **Approche Monde Réel ou Real World** : Méthode traditionnelle de valorisation financière, basée sur des données historiques et observables, où les risques sont calibrés sur le prix de marché des flux de trésorerie versés aux actionnaires et aux créanciers (suivant la formule d'équilibre du MEDAF)
- **Approche top-down** : Une des méthodologies applicables dans une EEV pour la détermination du taux d'actualisation ; il s'agit de la méthodologie de valorisation financière classique (utilisation de la formule d'équilibre du MEDAF et du bêta de la compagnie)
- **Bâle II** : Directive applicable au secteur bancaire et regroupant l'intégralité des exigences en fonds propres
- **Bilan économique** : Bilan d'une compagnie présentant ses actifs et ses passifs sur la base de leur valeur de marché
- **Capital Economique, Economic Capital** : Montant de capital suffisant pour couvrir les pertes potentielles à un niveau de tolérance au risque donné et pour un horizon de temps spécifié
- **Contrat d'assurance** : « contrat selon lequel une partie (l'assureur) accepte de couvrir un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un évènement futur incertain spécifié (l'évènement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police »
- **Coût amorti** : Valeur d'acquisition minorée ou majorée des coûts de transaction internes et externes y afférant
- **Déflateur** : Fonction d'actualisation stochastique

- **Discrétisation approchée** : La loi du processus continu à simuler est approchée aux instants de discrétisation par des processus discrets qui convergent vers le processus à simuler
- **Discrétisation exacte** : La loi du processus à simuler est connue à n'importe quel moment du temps et en particulier aux instants de discrétisation
- **EEV** : Valeur Intrinsèque stochastique, calculée selon les normes du CFO Forum
- **Engagements réglementés** : Engagements dont les groupements pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation doivent être en mesure de justifier l'évaluation ; ils comportent les provisions techniques, les dettes privilégiées, les dépôts de garantie des adhérents et des tiers, la réserve pour amortissement des emprunts et le passif social
- **Epargner** : Placer de l'argent qui devient indisponible pour les paiements immédiats et la consommation courante
- **Fonction d'utilité** : Fonction croissante et différentiable (avec une utilité marginale décroissante), qui caractérise la richesse d'un investisseur et qui permet à ce dernier d'établir un classement entre les différents portefeuilles disponibles
- **Fonds propres** : somme du capital social, du résultat non distribué de l'exercice et des réserves
- **Juste Valeur, Fair Value** : « montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif atteint, entre des parties consentantes et bien informées dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale » (valorisation des éléments en valeur de marché)
- **Marché complet** : Marché où le nombre de sources de risques est égal au nombre d'actifs dans le modèle
- **Marché efficient** : Marché caractérisé par le fait qu'à tout moment, les prix reflètent l'information disponible ; les prix ne sont jamais « éloignés » de la valeur fondamentale des entreprises
- **Marge de solvabilité** : Montant de capital devant être disponible à tout moment qui est imposé par la réglementation aux entreprises pratiquant des opérations d'assurance et de capitalisation, dans le but de protéger les assurés et de garantir le respect des engagements de l'assureur
- **Market to market** : Les prix du marché sont utilisés comme une référence
- **MCEV** : Valeur Intrinsèque stochastique cohérente avec les valeurs de marché
- **Mesure de risque** : Toute application  $\rho$  associant au risque  $X$  un réel positif  $\rho(X)$
- **Mesure de risque cohérente** : Mesure de risque qui satisfait les 4 axiomes suivants : invariance par translation, sous-additivité, homogénéité positive, monotonie
- **Modèle stochastique** : Modèle visant à prendre en compte la volatilité des phénomènes étudiés dans ses résultats, en tirant aléatoirement de nombreux scénarios (correspondant à autant d'état de la nature) et en évaluant statistiquement les risques

- **Norme IAS 32** : Norme comptable décrivant les informations à fournir et à présenter par une compagnie dans le cadre de la comptabilisation des instruments financiers
- **Norme IAS 39** : Norme comptable décrivant la comptabilisation et l'évaluation des instruments financiers
- **Norme IFRS 4** : Norme comptable visant à décrire la comptabilisation des contrats d'assurance
- **Normes IFRS** : Normes comptables internationales fondées sur le principe de « Juste Valeur », élaborées par l'IASB, auxquelles doivent se soumettre les entreprises cotées sur les marchés européens (pour les comptes 2005 et suivants)
- **Options cachées (pour un contrat d'épargne)** : Garanties ou droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par clauses contractuelles, afin de rendre les contrats d'épargne plus souples et plus attractifs
- **Participation aux bénéfices** : Redistribution aux assurés d'une partie des bénéfices techniques et financiers réalisés par la compagnie
- **Prime de risque** : Revenu espéré supplémentaire exigé par les investisseurs lors d'achats dans des actifs risqués, tels que les actions
- **Probabilité de ruine** : Probabilité que le total des actifs de la compagnie soit insuffisant pour couvrir l'ensemble des engagements (en valeur actuelle) que l'assureur a envers ses assurés ; autrement dit, il s'agit de la probabilité que la valeur actuelle des résultats nets probables distribuables aux actionnaires devienne négative
- **Réserve de capitalisation** : Provision concernant la gestion des placements qui permet de se parer à la dépréciation des valeurs de certains actifs de l'entreprise et à la diminution de leurs revenus ; l'objectif est de lisser les résultats financiers des placements en cas de variation des taux
- **Risque** : Tout événement aléatoire qui réduit la capacité de l'assureur à faire face à ses engagements
- **Risque diversifiable** : Risque spécifique à un risque qui n'est pas lié au marché et qui n'a donc pas à être réméré par ce dernier
- **Ruine** : Évènement caractérisant le fait que la valeur actuelle des engagements de l'assureur envers ses assurés dépasse la valeur de marché des actifs de la compagnie d'assurance (i.e. la valeur actuelle des résultats nets probables distribuables aux actionnaires devient négative)
- **Simulation de Monte Carlo** : Procédure numérique permettant de créer un échantillon aléatoire d'un processus stochastique et d'estimer ensuite les caractéristiques de la loi de probabilité en rapport avec ce processus
- **Simulation stochastique** : Simulation permettant de créer des réalisations de variables aléatoires (en particulier des variables économiques ou financières) dans une situation plus ou moins complexe

- **Solvabilité I** : Régime de solvabilité actuellement en vigueur dans l'Union Européenne
- **Solvabilité II** : Projet visant à réformer Solvabilité I grâce à une approche intégrée des risques
- **Solvable** : Capacité d'une compagnie de respecter à tout instant ses engagements envers les membres participants et les autres créanciers
- **Swap** : Contrat de gré à gré entre deux compagnies qui leur permet d'échanger des flux financiers futurs suivant une formule prédéterminée ; par exemple, une compagnie peut utiliser un swap pour transformer un prêt à taux variable en un prêt à taux fixe et vice versa
- **Taux actuariel** : Taux qui égalise au moment de l'achat d'un titre, le prix d'acquisition et la valeur obtenue par l'actualisation de l'ensemble des flux à venir relatifs à ce titre
- **Taux au pair** : Taux de coupon d'une obligation qui permet d'égaliser son prix avec sa valeur nominale
- **Taux minimum garanti** : Taux de rémunération de l'épargne que l'assureur s'engage à garantir lors de la souscription d'un contrat d'épargne
- **Taux swap** : les institutions financières qui jouent le rôle de market-makers sur les swaps affichent pour différentes devises et différentes maturités les taux fixes (offerts et demandés) auxquels elles sont prêtes à conclure des swaps contre LIBOR ; le taux de milieu de fourchette entre le taux offert et le taux demandé correspond au taux swap
- **Test de la martingale** : Test consistant à vérifier que la valeur escomptée de tout actif est une martingale par rapport à la probabilité risque-neutre
- **TEV** : Méthode déterministe traditionnelle utilisée lors du calcul d'une Valeur Intrinsèque
- **Univers réel** : Univers dans lequel les agents économiques sont averses au risque ; ils sont prêts à détenir des actifs risqués uniquement si le risque supporté par leur position est compensée par une espérance de rentabilité plus élevée que le taux sans risque
- **Univers risque-neutre** : Univers dans lequel les agents économiques sont neutres face au risque ; le rendement de tout actif est alors égal au taux sans risque
- **Valeur cohérente avec les marchés** : Valeur en adéquation avec les prix échangés sur les marchés
- **Valeur économique** : Valeur qui est fonction du prix d'échange sur les marchés ; résultat de la différence entre les actifs et les passifs évalués en valeurs de marché et inscrits au Bilan économique d'une compagnie
- **Valeur historique** : Valeur au coût d'acquisition
- **Valeur Intrinsèque, Embedded Value** : Valeur actuelle des profits futurs probables distribuables à l'actionnaire, hors ventes futures (prix théorique qu'un investisseur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la société)



