



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon
le 17 octobre 2011

Par : Khalil MECHAHOUGUI

Titre: INTEGRATION DES CONTRAINTES DE CAPITAL EN REASSURANCE NON-
PROPORTIONNELLE VIE

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☒ 1 an ☐ 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaires

M. Pierre THEROND

Entreprise :

RGA International

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Gurvan LE RHUN

Invité :

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

REMERCIEMENTS

Je remercie Frédéric PLANCHET, directeur de ce mémoire, pour son suivi, ses nombreuses relectures et le temps qu'il a passé à corriger et orienter mon étude.

Je remercie aussi Gurvan LE RHUN, responsable de l'actuariat chez RGA et tuteur en entreprise lors de mon stage et de mon alternance, pour ses remarques toujours pertinentes et tout le temps qu'il m'a accordé pour les revues et réflexions au cours de cette année.

Enfin, je remercie l'ensemble des équipes technique et commerciale de RGA qui ont toujours apporté aide, soutien et intérêt pour ce mémoire.

SOMMAIRE

RESUME.....	5
ABSTRACT	6
Introduction	7
I. Contexte.....	9
1. Introduction à la réassurance non-proportionnelle vie et son marché.....	9
a) Une prédominance de la réassurance proportionnelle en assurance-vie.....	9
b) La réassurance non-proportionnelle	10
c) Les traités non-proportionnels les plus courants.....	11
2. Enjeux de la nouvelle réglementation en réassurance non-proportionnelle.....	13
a) Les bouleversements dans les méthodes de tarification.....	13
b) Caractéristiques du marché de la réassurance-vie	14
c) Prise en compte de la réassurance non-proportionnelle dans le capital économique ..	16
II. Méthodes de modélisation	18
1. Les données de modélisation	19
a) Définitions	19
b) Distinction des modèles collectif et individuel	21
c) Traitement des données dans le modèle collectif	22
2. Modélisation de la charge sinistre dans le modèle collectif	24
a) Le modèle non-paramétrique : Le <i>Burning Cost</i> (BC)	24
b) Le modèle paramétrique sur expérience : la méthode fréquence- coût.....	25
c) Calcul de la variance dans le modèle fréquence-coût.....	34
3. Modélisation de la charge sinistre dans le modèle individuel	37
a) Tarif pur de réassurance	37
b) Approximation de la distribution de la charge sinistre	37
c) Impact de la réduction de variance sur la distribution des sinistres.....	40
III. Intégration du coût du capital dans la tarification	43
1. Cadre de l'étude	43
a) Les nouvelles spécifications techniques	43
b) Définitions	44
2. Calcul théorique du capital économique.....	46
a) La formule standard	46

b) Le modèle interne.....	50
3. Intégration du capital dans la tarification	52
a) Cibles de rentabilité.....	52
b) Intégration du coût du capital dans la tarification	52
IV. Simulations et résultats	55
1. Profils de portefeuille	55
a) Portefeuilles individuels	55
b) Traité collectif	57
c) Modélisation du collectif par exposition	61
2. Méthodologie et résultats	65
a) Comparaisons des modèles	65
b) Tests de sensibilité	72
c) Impact des clauses particulières.....	75
3. Optimisation de la réassurance.....	76
a) Effet de diversification du réassureur.....	76
b) Arbitrage entre le coût du capital et la prime de réassurance	76
c) Allocation du capital	78
Conclusion.....	82
Bibliographie	83

RESUME

Malgré son approche détaillée du risque à travers la distinction des modules et les chocs sur le *best estimate*, la formule standard dédiée à la Vie ne fait pas de distinctions entre les principales branches concernées par la réassurance-vie non-proportionnelle : la prévoyance individuelle et la prévoyance collective. Or, nous montrons que dans une logique de modèle interne, ces deux branches présentent des profils de risque différents, dont la volatilité ne peut être appréhendée par une formule standard et unique.

Par ailleurs, la volatilité intrinsèque des traités de réassurance n'est pas justement représentée à travers les chocs sur exposition. Nous montrons que le modèle interne donne un poids particulièrement significatif à un traité non-proportionnel.

Le modèle interne du traité de réassurance s'appuie principalement sur deux modélisations : la méthode par exposition qui utilise des méthodes Vie et la méthode fréquence-coût qui utilise des méthodes Non-Vie.

Nous développons dans ce mémoire une première partie dédiée à l'analyse du marché de la réassurance-vie et le marché sous-jacent de la prévoyance. Dans un second temps, dans une logique de cohérence entre la tarification technique et la modélisation du capital, nous donnons des éléments de tarification pure d'un traité non-proportionnel puis, dans une troisième partie, des méthodes de chargement de la prime pure qui intègrent le coût du capital. Enfin, nous appliquons ces méthodes à plusieurs types de traités de réassurance ainsi qu'à un portefeuille de réassurance pour la France.

Nos calculs montrent une sensibilité importante des modèles aux paramètres du traité : la portée, les clauses AAD/AAL, et surtout la priorité. En effet, la volatilité croît particulièrement lorsque la priorité augmente car les expositions par tête sont peu nombreuses et demeurent élevées, ce qui confirme le besoin d'utiliser un modèle interne pour approcher au mieux le risque de réassurance.

En conséquence, il est nécessaire que le modèle d'allocation du capital soit adapté à l'ensemble des tarifications non-proportionnelles du réassureur. Nous montrons que l'approche basée sur des facteurs de l'écart-type (plutôt que la prime pure) est la mieux adaptée pour approcher le capital économique modélisé.

Mots-clés : Tarification non-proportionnelle, modèle interne, méthode fréquence-coût, méthode par exposition, formule standard, réassurance-vie, Poisson-GPD, allocation du capital, effet de diversification.

ABSTRACT

Despite a more comprehensive approach (modules, sub modules, stress tests, etc.) than Solvency 1, the standard formula for Life Underwriting does not take into account some specificities of the Life reinsurance underlying markets: Individual protection and group protection. Yet, we show that both of these markets have very different risk profiles, whose volatility can't be assessed by a common formula.

Moreover, reinsurance treaties include intrinsically more volatility, which can't be assessed by stress tests on exposed heads. We show that an internal model for non-proportional Life reinsurance has a significant impact on capital reduction.

The internal model for life reinsurance mainly relies on two models: the individual risk model, based mainly on life techniques and the collective risk model, based on non-life techniques.

First, we develop in this report an analysis of the life reinsurance market in France and the specific underlying market of protection. Then, in a coherent approach between pricing and capital valuation, we introduce pure premium pricing methods for non-proportional treaties, and, in a third part, we analyze how to assess the cost of capital immobilization and how to include it in reinsurance loadings. Eventually, those methods were applied to several individual and collective non-proportional treaties, first on a scale of the treaty and then on a scale of a reinsurance portfolio to obtain the effects of diversification.

Our studies show significant sensitivity of the models to the parameters of the treaty: limit, aggregate features (AAD/AAL) and, above all, deductible. Indeed, volatility grows especially when the deductible increases because the exposure is less homogeneous and sums at risk remain at a high level. This confirms the necessity of an internal model for a best estimate approach of the reinsurance risk.

As a consequence, capital allocation models need to be adapted to all the types of non-proportional reinsurance treaties – both working and high deductible layers. We show that a capital allocation based on the standard deviation (rather than the pure premium) is a better fit to approach the economic capital target.

***Keywords:** Non-proportional pricing, internal model, collective risk model, individual risk model, standard formula, life reinsurance, Poisson-GPD, capital allocation, diversification effect.*

Introduction

Avec la réforme Solvabilité 2, la réassurance prend une dimension supplémentaire dans l'impact sur fonds propres des entreprises d'assurance. Précédemment, la réassurance proportionnelle y participait certes à la hauteur de son transfert de risque - dans la limite toutefois de 50 % - tandis que la réassurance non-proportionnelle (NP) n'était souvent prise en compte ni à l'échelle réglementaire, ni en modélisation interne. Cette dernière a souvent été utilisée comme un outil de gestion, permettant avant tout de protéger et lisser le compte de résultat d'une cédante. Par ailleurs, l'aspect intrinsèquement non-proportionnel et purement annuel - donc sans perspective à long terme - des traités de réassurance NP rendait leur impact moins simple à évaluer qu'une simple quote-part. Enfin, le volume de prime sensiblement inférieur à celui de la réassurance proportionnelle n'a pas incité les cédantes à quantifier l'apport d'un traité de réassurance NP dans leur mesure de protection financière.

La directive Solvabilité 2, qui exige des méthodes probabilistes d'évaluation de la charge sinistre, donne désormais dans ses spécifications techniques des méthodes de calcul et, donc, un rôle significatif de la réassurance NP dans la réduction de la volatilité, et a fortiori de l'exigence en capital. On a ainsi en annexe N de la cinquième Quantitative Impact Study (QIS) 5, un premier élément de prise en compte de la réassurance non-proportionnelle des branches non-vie à travers le NP_{lob} .

Du point de vue du réassureur, cette réduction de capital constitue par symétrie un engagement à charge qu'il se doit d'évaluer afin de pouvoir exercer son activité, de maintenir sa solidité financière, de gérer son risque et de mieux appréhender les engagements vis-à-vis de ses apporteurs en capital (actionnaires, sociétaires). C'est pourquoi ces nouvelles normes constituent des contraintes pour l'assureur et le réassureur car elles définissent de nouvelles orientations lors du processus opérationnel d'étude du risque et de tarification.

La directive établit une différenciation de principe entre l'assurance-vie et l'assurance non-vie, les considérant comme deux familles de risque fondamentalement différentes. Si l'assurance non-vie fait historiquement appel de manière fréquente et ciblée à la réassurance NP, l'assurance de personnes l'utilise de manière moins répandue mais plus globale, souvent à l'échelle de toute une entité.

Les risques, les pratiques et les approches étant par définition différentes, ce mémoire aura pour but de développer un modèle interne propre à un réassureur de personne pour mesurer son capital économique pour les affaires NP, c'est-à-dire son niveau de fonds propres tel que sa solvabilité soit assurée avec un certain niveau de probabilité et pour un horizon d'un an.

Nous présenterons dans un premier temps le contexte et les spécificités propres à la réassurance de personnes en France en définissant ses concepts, puis nous développerons dans une seconde partie les méthodes utilisées pour la tarification des traités NP. Nous analyserons ensuite, comment, à partir de ces méthodes, nous pouvons exprimer la distribution de la charge sinistre en réassurance, le montant des quantiles et donc le coût du capital exigé,

sans toutefois directement traiter des problématiques liées à l'actif de réassurance et du risque de contrepartie. Enfin, nous appliquerons numériquement ces méthodes à des exemples de traité afin de mesurer l'impact de la nouvelle réglementation.

I. Contexte

1. Introduction à la réassurance non-proportionnelle vie et son marché

a) Une prédominance de la réassurance proportionnelle en assurance-vie

Les grands réassureurs-vie sont principalement présents sur les produits de prévoyance, collective ou individuelle. Cela s'explique par une présence plus significative du risque technique vie (mortalité, longévité, incapacité-invalidité, etc.) par rapport au risque financier dans le résultat final de la cédante. De par sa présence sur plusieurs traités, auprès d'un grand nombre de cédantes et sur plusieurs marchés différents, le réassureur acquiert une expertise technique sur le marché. Il y apporte par exemple des bases de risque fiables sur plusieurs segments : mesures des catégories socioprofessionnelles, distinction fumeur/non fumeur, bases d'incidences, etc.

La coassurance est la forme la plus sollicitée en assurance vie. Elle se traduit concrètement par :

- **Un soutien technique** du réassureur dans la conception et l'innovation des produits de prévoyance de la cédante mais aussi dans le suivi comptable.
- **Un soutien financier** du réassureur avec des commissions de réassurance qui peuvent par exemple être relevées, donc plus incitatives, lors des premières années de production. Elles peuvent permettre dans ce cas de soutenir la mise en place des réseaux de gestion et de distribution.
Sur certains traités, ce soutien financier peut également être de la forme d'un « quote-part de marge (ou de financement) », qui permet alors surtout à la cédante de diminuer son effort en capital économique.
- **Un soutien dans l'évaluation de la souscription et des sinistres** : Le réassureur propose un service de sélection médicale approprié aux risques de pointe de l'assurance-vie (somme sous risque élevées, domiciliations hors de France, métiers et activités à risque) et aux risques aggravés (maladies hors exclusions).

Ces fonctions ne peuvent être assumées par le réassureur que dans une perspective à long terme, d'où un engagement sur plusieurs exercices et par génération de souscription, jusqu'à extinction des contrats.

Le plus souvent, le réassureur reçoit un pourcentage global des primes d'assurance du portefeuille et verse en contrepartie le même pourcentage du montant des sinistres, des commissions de réassurance et une éventuelle participation aux bénéfices. Il s'agit du **quote-part**.

L'autre forme proportionnelle est **l'excédent de plein**. Il consiste à recevoir une quote-part spécifique à chaque tête du portefeuille. Cette part varie en fonction d'un plein de rétention, c'est-à-dire la limite au-delà de laquelle, le réassureur prend entièrement à sa charge le coût de sinistre. Il reçoit une portion de prime égale à son engagement. De même que pour le quote-part, cette forme est utilisée lorsqu'elle permet à la cédante de non seulement se protéger contre les coûts de sinistres élevés (au-delà du plein de rétention) mais aussi de bénéficier de la sélection des risques du réassureur.

Nous verrons par la suite que cet excédent de plein, lorsqu'il est seulement annuel et sous forme de prestations forfaitaires, peut être assimilé à de la réassurance non-proportionnelle.

b) La réassurance non-proportionnelle

Dans les traités non-proportionnels, le réassureur a un rôle restreint au risque et ne fait pas appel à la même « logistique » que lors du développement d'un produit en quote-part.

Ici, le réassureur reçoit une prime unique annuelle et verse à la cédante un montant qui ne dépend pas seulement de la survenance ou non d'un sinistre mais aussi de deux paramètres : la priorité et la portée. La première définit le seuil à partir duquel le réassureur commence à payer le sinistre et la portée représente l'engagement maximum par sinistre du réassureur.

La structure de réassurance peut changer de priorité, comporter des options ou viser une certaine partie du portefeuille. Elle dépendra donc toujours des besoins spécifiques à chaque cédante. En prévoyance individuelle ou collective, les objectifs d'une couverture en réassurance non-proportionnelle peuvent donc être divers :

- Une priorité (et une portée) basse: La cédante privilégie la couverture d'une partie dite « travaillante » de son portefeuille, c'est-à-dire que les sinistres dans l'année sont quasi-certains. La cédante se couvre alors principalement contre les augmentations de fréquence, ce qui permet de maîtriser le résultat.
- Une priorité élevée : La cédante se protège contre les risques de pointe, rares et coûteux. Ici aussi, le but est de protéger le résultat de la cédante.

Il est ainsi assez fréquent qu'une cédante demande la cotation de plusieurs tranches ou options car elle cible alors des parties spécifiques de son portefeuille. La réassurance non-proportionnelle participe donc aussi du pilier 2 de Solvabilité 2, relatif au pilotage de l'activité et au *Risk Management*.

La réassurance non-proportionnelle est également fréquemment utilisée par les cédantes qui n'ont pas une estimation précise de leurs limites d'engagement. C'est particulièrement le cas pour les contrats de prévoyance collective car :

- La souscription se fait auprès d'entreprises aux activités et populations diverses, et donc aux risques de mortalité ou d'incapacité/invalidité très différents.
- La souscription est à l'échelle de l'ensemble de l'entreprise, d'où une grande disparité des sommes sous risque entre toutes les catégories socioprofessionnelles présentes dans l'entreprises (PDG, cadres, employés, ouvriers, etc.).
- La souscription et la gestion sont parfois déléguées à des courtiers, ce qui entraîne une certaine opacité quant aux engagements par tête.

c) Les traités non-proportionnels les plus courants

- L'excédent de sinistre par tête

Dans l'excédent de sinistre par risque (ou par tête), le sinistre en réassurance peut être constitué par :

- Un capital décès
- Une rente de conjoint en cas de décès
- Une rente éducation en cas de décès
- Une rente d'invalidité

Le réassureur est engagé à payer un montant inférieur ou égal à la portée dès lors qu'une police est sinistrée et « touche » la priorité.

Cette forme de réassurance permet donc à la cédante de limiter quoi qu'il arrive son engagement sur des sinistres à développements potentiellement longs comme les rentes.

- L'excédent de plein annuel

L'excédent de plein est une structure proportionnelle. Le réassureur prend en charge uniquement la portion des risques dépassant un niveau de capital appelé plein de rétention. Le réassureur reçoit en contrepartie une portion de prime équivalente à celle de l'excédent de capital assuré retenu. Autrement dit, la quote-part retenue par le réassureur est individuelle, mais à l'échelle d'un portefeuille réassuré annuellement et sur la base de prestations forfaitaires, elle procède du même principe qu'un excédent de sinistre car elle protège un portefeuille contre un sinistre au-delà d'un certain plein de rétention, équivalent à une priorité.

En théorie, il peut y avoir des décalages avec un excédent de sinistre classique si l'évaluation d'un capital constitutif est différente du montant effectif total d'une rente : En excédent de plein, le réassureur paiera systématiquement la part qu'il avait convenu de prendre au moment de la cotation du traité alors que l'excédent de sinistre l'engage indéfiniment au-delà de la priorité. Les structures de réassurance restent donc différentes même s'il y a de grandes similarités dans la tarification.

En réassurance vie (annuelle), la différence entre un excédent de plein et un excédent de sinistre consiste dans la pratique à une distinction entre un portefeuille individuel avec des

données tête par tête (et des sommes sous risque identifiables individuellement) et un portefeuille collectif avec uniquement des données d'historique.

- L'excédent de sinistre par événement

Dans le cas des XS par événement, le sinistre en réassurance n'est plus constitué par une seule police mais par plusieurs sinistres nés d'une même cause : catastrophe naturelle, accident industriel, déraillements de train, attentats, etc.

Les clauses de ces traités sont généralement restrictives dans le temps et l'espace pour éviter que ne soient inclus « trop » de sinistres provenant d'un même événement :

- Clause de limitation géographique

L'événement sera constitué de polices sinistrées par le même événement et dans un périmètre géographique limité.

- Clause de limitation dans le temps

Le traité comporte une durée maximale pendant laquelle les sinistres imputables à une même cause sont pris en compte. Cette période peut généralement varier de 72 à 168h en fonction des événements couverts (inondations, accident industriel chimique, etc.).

Ces clauses peuvent avoir des répercussions importantes et nécessitent souvent une grande précision dans les termes utilisés. Par exemple, lors des attentats du World Trade Center, cédantes et réassureurs s'étaient opposés sur l'existence d'un seul ou de deux événements lors du crash des deux tours.

L'XS par événement est généralement pris en complément d'un XS par risque lorsque l'assureur veut être sûr de ne payer qu'une fois la priorité lorsqu'un événement touche au moins deux ou trois polices de son portefeuille. La branche CAT présente dans les QIS 5 amène également les acteurs du marché à se prémunir de ce risque en souscrivant des couvertures CAT.

- Le Stop Loss

Cette couverture est différente des autres car le sinistre est constitué par un résultat financier : L'élément déclencheur de la couverture est un ratio intégrant des éléments financiers et administratifs, comme par exemple le S/P. Le réassureur protège alors le résultat à concurrence d'un montant maximum.

2. Enjeux de la nouvelle réglementation en réassurance non-proportionnelle

a) Les bouleversements dans les méthodes de tarification

i. Un capital significatif à immobiliser

La législation actuelle donne des niveaux de capital uniforme en assurance-vie. Le capital requis pour exercer une activité d'assurance n'est donc pas différencié selon que le risque sous-jacent soit volatile ou non. Or, les réassureurs souscrivant des affaires non-proportionnelles vont désormais devoir prendre en compte le contexte dans lequel ils exercent leur activité afin d'évaluer leur besoin en capital. En effet, la couverture d'un risque qui est par nature plus volatile en raison des effets de seuil va entraîner une augmentation des besoins en fonds propres du fait du pilier I de Solvabilité 2 relatif à l'évaluation technique *best estimate* du risque et du recours à un quantile élevé.

ii. Un contexte opérationnel difficile

Le marché des excédents de sinistre par tête en France est caractérisé par des usages qui peuvent accentuer l'incertitude dans le processus de tarification :

- Absence de données détaillées individuellement
- Absence d'information sur les sommes sous risque maximales
- Données incomplètes (sinistres au dessus d'un seuil seulement)
- Périmètres les plus volatiles de la cédante (hauts capitaux assurés)

Ces contraintes doivent donc également être mesurées dans le cadre des piliers II et III de Solvabilité 2, liés au contrôle du risque opérationnel et de la transparence des pratiques. L'objet de ce mémoire est aussi de mettre en cohérence l'évaluation du risque pour le capital économique avec la tarification d'un traité.

iii. Une mise en cohérence de la tarification et de la modélisation du capital

Les méthodes de cotation non-paramétriques comme le *Burning-Cost* (cf. II.2.a) sont d'usage fréquent et ne prennent alors en compte que la prime pure sans appréhender, à travers la queue de distribution, l'aspect plus « volatile » et donc plus risqué d'un traité non-proportionnel. L'augmentation du capital économique, et a fortiori du coût du capital, auront nécessairement un impact sur la vision plus « risquée » que les réassureurs ont de cette activité.

b) Caractéristiques du marché de la réassurance-vie

Dressons un bref recensement des contrats pouvant faire l'objet d'un traité de réassurance non-proportionnelle en décès et en incapacité-invalidité :

i. Prévoyance collective

Les contrats de prévoyance pour les entreprises comportent certes des garanties « vie » mais ont des profils de risque spécifiques :

- **Des contrats de groupe**

Les contrats en prévoyance collective sont souscrits par une personne morale (une entreprise ou une association par exemple) suite à un accord collectif ou conventionnel. Un changement dans la convention collective ou un referendum peuvent en être à l'origine. Il s'agit alors d'une couverture obligatoire avec un taux de prime unique pour des salariés qui ont un même lien objectif entre eux, comme le statut Cadre ou Non-Cadre. La nature obligatoire de la police neutralise l'effet d'antisélection mais intègre un large spectre de sommes sous risque : les rentes ou capitaux-décès sont indexés sur les salaires, de celui de l'employé à celui du cadre dirigeant. Autrement dit, la population est souvent assez hétérogène et intègre des montants assurés potentiellement très élevés.

Enfin, ces contrats ont pour caractéristique significative d'être annuels et généralement non-garantis sur plusieurs exercices. Le risque de marché, au sens de Solvabilité 2, est alors marginal car la prime demandée aux assurés est une prime de risque annuelle (comme la prime de réassurance du traité non-proportionnel), qui ne nécessite pas de provisions de prime.

- **Un marché de la prévoyance collective très intermédié**

Le marché de la prévoyance collective donne une place significative aux sociétés de courtage, à qui sont délégués les rôles de prospection, de gestion et de distribution auprès des clients, c'est-à-dire des entreprises ou associations. Les organismes assureurs occupent *in fine* une fonction de porteur de risque et de pilotage du portefeuille à travers la tarification. Cette intermédiation, et donc la distance, entre l'assureur et les assurés a pour conséquence une communication moins rapide et moins complète des données détaillées entre le courtier et l'organisme assureur.

- **Une tarification à l'expérience et des méthodes « Non-Vie »**

Il arrive fréquemment qu'une institution de prévoyance ou un assureur ne fasse une tarification de prévoyance décès en renouvellement qu'avec des données de sinistre, sans tout le détail de la démographie. Par ailleurs, les garanties prévoyance (Rente de réversion au conjoint, rente d'éducation, rente d'incapacité 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème} catégories, etc.) sont particulièrement complexes à modéliser et demandent des bases d'incidence précises et à jour. C'est pourquoi, les tarifications - qui interviennent par ailleurs dans un contexte de marché compétitif – sont souvent entièrement basées sur les données d'expérience et le ratio Sinistres sur Primes (S/P). La

directive Solvabilité 2 est donc particulièrement contraignante pour ce type de contrat car elle prévoit des méthodes – « Vie » et probabilistes - qui ne sont pas d'usage dans cette branche.

ii. Prévoyance individuelle

L'assurance emprunteur et les temporaires-décès sont les contrats individuels les plus répandus en prévoyance. Ces produits sont généralement plus ciblés et les populations assurées sont mieux connues. Il en résulte une vision globale du risque moins étendue par son périmètre et plus précise que celle de la prévoyance collective :

- Un périmètre de couverture plus ciblé

Le marché des produits de prévoyance individuelle en décès est principalement composé des produits Emprunteur et temporaires-décès (capital décès, frais d'obsèques, homme-clé) qui se caractérisent par une forte segmentation des tarifs avec des bases de mortalité ajustées aux cibles de clientèle de la cédante. On trouve ainsi des tarifs qui dépendent de l'âge, du sexe, des montants de capitaux assurés, du statut de fumeur ou de la catégorie socioprofessionnelle. Par ailleurs, l'assurance en cas de décès, qui représente une part majoritaire du marché, est presque systématiquement versée sous forme de capital et non en rentes (de conjoint, d'éducation), ce qui facilite le traitement des sinistres et de l'information.

- Un marché moins intermédié

Les sociétés de courtage sont ici moins présentes, hormis dans l'intermédiation entre assureur et réassureur. Dans ce type de contrats, la gestion des assurés reste souvent dans le périmètre de la cédante car les organismes assureurs privilégient leur propre réseau pour mettre en avant leur marque. L'organisme assureur peut plus facilement communiquer avec l'assuré car c'est ce dernier, et non plus une personne morale (entreprise ou association) qui a entrepris la démarche de s'assurer. Cependant, de nombreuses sociétés de courtage, notamment en ligne, se développent sur le marché emprunteur.

- Des données détaillées

Le marché donne également une place importante à la sélection des risques, individu par individu. La sélection à la souscription est ainsi particulièrement importante dans le résultat de l'assureur car son engagement est potentiellement long et élevé et ses tarifs sont ajustés à des bases de mortalité spécifiques à une cible de population. Un organisme assureur doit donc déterminer pour chaque nouvelle demande de souscription si elle doit faire l'objet d'une étude médicale ou financière pour éviter l'antisélection. Elle permet aussi souvent de se constituer une base historique détaillée (sexe, risque de santé aggravé, domiciliation, etc.) pour mettre à jour sa connaissance du risque.

c) **Prise en compte de la réassurance non-proportionnelle dans le capital économique**

Les facteurs de capital réglementaire étant déterministes, il n'existe pour le moment pas de variable d'ajustement qui permette de prendre en compte la réduction de volatilité induite par un traité non-proportionnel. Il est donc rarement déduit dans l'impact en fonds propres des cédantes. Par ailleurs, sous Solvabilité 1, les cédantes négligent souvent cet aspect dans la modélisation de leur capital économique car l'apport d'un traité non-proportionnel est plus complexe à évaluer qu'un traité proportionnel en quote-part et ne représente souvent qu'une part très réduite du portefeuille.

La nouvelle directive apporte des méthodes de quantification de la réassurance non-proportionnelle à travers le coefficient NP_{lob} des branches « Non-Vie », tandis qu'en « Vie », il est exigé de modéliser l'ensemble du portefeuille, tête par tête, *éventuellement* net de réassurance. La directive actuelle ne fait effectivement pas mention de la réassurance dans la formule standard Vie. Les distinctions Vie/Non-Vie amènent donc à certaines discordances qui ne permettent pas d'intégrer la réassurance non-proportionnelle de façon identique.

i. **Prévoyance collective**

La nouvelle classification du EIOPA pose une difficulté dans la distinction entre les différents contrats couvrant l'assurance de personnes car le modèle standard n'intègre pas les contextes de tarification sur un historique de sinistres. Dans ce cas, les cédantes ne disposent pas de données de sommes sous risque par tête précises et ne peuvent donc pas déduire la réassurance de leur charge de capital.

Concrètement, la réassurance non-proportionnelle ne peut être précisément prise en compte en prévoyance collective qu'à travers un modèle interne.

ii. **Prévoyance individuelle**

Nous développons dans ce mémoire des modèles à engagement annuel car les traités non-proportionnels sont traditionnellement annuels. Or, les contrats sous-jacents au traité de réassurance peuvent être classés en assurance-vie (« Life ») et à engagement long, comme par exemple les contrats emprunteur, qui intègrent également les risques liés aux provisions mathématiques de primes.

La réassurance non-proportionnelle est difficile à quantifier sur ce type de contrats car elle ne tient pas entièrement compte des autres risques : constitution de provisions, risque financier, financement de première année, etc.

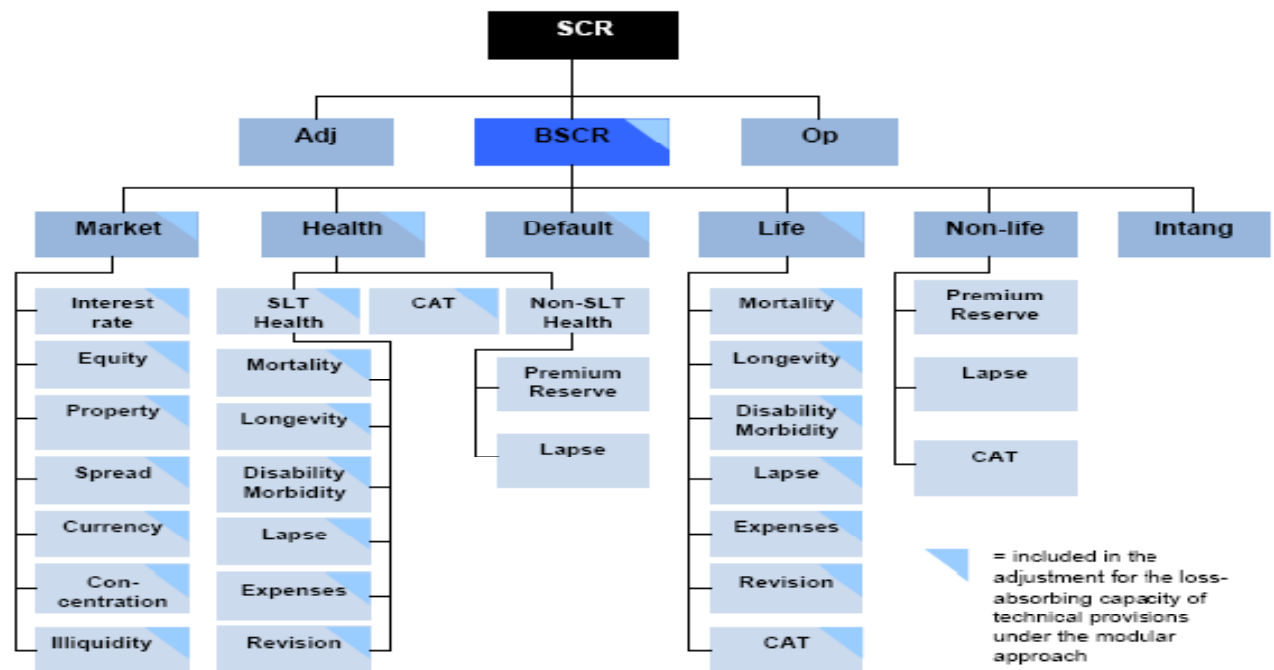


Schéma 1 - Classification de l'ensemble des assurance-décès (hors complémentaires) dans le module « Life »

II. Méthodes de modélisation

Les entreprises de réassurance ont généralement un nombre important de portefeuilles (prévoyance collective, temporaires décès individuels, emprunteurs), aux profils de risque différents. Le pilier I de la directive Solvabilité 2 a pour objectif d'adapter les besoins en capital économique des entreprises d'assurance à leur propre risque *best estimate*.

Dès lors, dans le cadre d'une entreprise de réassurance, se posent deux alternatives dans la modélisation :

- Une vision affaire par affaire : Les cibles de solvabilité sont atteintes pour chaque traité et le capital économique estimé s'ajuste au profil de risque, pour chaque produit de réassurance. Ainsi, le coût du capital est lui aussi variable et peut prendre un poids plus ou moins important dans le prix final.
- Une vision globale : Le *best estimate* global est déterminé à partir de données agrégées de portefeuille. Autrement dit, il faut avoir une vision suffisamment détaillée de l'ensemble des expositions du groupe pour pouvoir se donner une distribution de sinistres annuels de l'ensemble. Le coût du capital peut alors être déterminé a priori et appliqué de manière constante sur l'ensemble des affaires en cours et à venir.

Dans ces deux cas, il est important que la vision économique du risque, à travers le capital économique, soit liée à la cotation du réassureur. Or, aujourd'hui certaines méthodes de tarification répandues comme le Burning Cost ne sont pas paramétriques et ne donnent donc pas d'estimation de quantile. Elles posent ici la problématique de la cohérence entre le chargement du tarif et l'estimation du poids des contraintes de solvabilité, tous deux sous-jacents au risque.

Par ailleurs, les méthodes de tarification peuvent être différentes selon les données qu'obtient le réassureur de la part de la cédante. Dans le cas de la réassurance non-proportionnelle annuelle, il est fréquent que les données de portefeuille soient peu détaillées :

- Historique des sinistres (3 à 8 ans)
- Historique de volume de prime couvert par la réassurance
- Couvertures d'assurance sous-jacentes (rente invalidité, capital décès, rente de conjoint, etc.)
- Provisions de sinistre en cours

Il faut dès lors utiliser des techniques actuarielles pour néanmoins déterminer un prix de l'excédent de sinistre.

Cependant, les cédantes peuvent fournir des données plus détaillées sur leur portefeuille, avec :

- Des données tête par tête
- Date de naissance de chaque assuré
- Sexe

- Type de couverture
- Somme sous risque

Dans ce cas, une tarification basée sur l'exposition sera privilégiée.

Pour la tarification des tranches en excédent de sinistre par risque, il existe donc principalement trois méthodes :

- La tarification non-paramétrique sur expérience : Le *Burning Cost*
- La tarification paramétrique (ou probabiliste) sur expérience : Le *Curve Fitting* dans le modèle fréquence-coût
- La tarification probabiliste sur l'exposition d'un portefeuille : L'utilisation des tables de mortalité ou d'incidence

1. Les données de modélisation

a) Définitions

L'excédent de sinistre est une couverture de réassurance non-proportionnelle qui permet à la cédante de se couvrir pour chaque risque au-delà d'un certain montant de sinistre, appelé priorité et dans une certaine limite, appelée portée. Pour chaque assuré, le montant à charge S_i du réassureur est déterminé par la relation :

$$S_i = \text{Max}(\text{Min}(X_i - F, P), 0)$$

Avec :

- X_i le montant du sinistre *au premier euro*, c'est-à-dire le montant de sinistre total avant réassurance.
- F la priorité
- P la portée

Le but de la tarification d'un traité en excédent de sinistre est de déterminer le montant moyen de cette charge sur l'ensemble d'un portefeuille (somme agrégée des sinistres) pour déduire la prime.

Le réassureur est engagé de la même manière que la cédante sur l'ensemble des polices qu'il couvre. En effet, il arrive souvent que les cédantes, principalement en prévoyance de groupe, « mélangent » tous les contrats de groupe qu'elles souscrivent. Ainsi, le réassureur est engagé sur plusieurs périmètres de polices sans avoir a priori les caractéristiques précises du contrat et de la démographie correspondante.

Dans le cas de « l'excédent de plein annuel », on ne réassure qu'un seul type de police et les données pour chaque assuré sont disponibles. Il sera alors fait appel à d'autres concepts pour modéliser le risque.

Certains paramètres fondamentaux peuvent intervenir dans un traité non-proportionnel et ont, dans toutes les circonstances, une influence sur l'étendue de la couverture et donc sur le prix de l'excédent de sinistre ainsi que l'engagement du réassureur :

La priorité : C'est le montant de sinistre à partir duquel le réassureur est engagé à couvrir la cédante. C'est une forme de franchise.

La portée : C'est le montant maximum pour lequel le réassureur est engagé lorsque le montant de sinistre a dépassé la priorité.

Le traité en XS se lit de la manière suivante : portée XS priorité

AAL (Annual aggregate limit) : C'est le montant maximum annuel que le réassureur paiera au titre du traité. C'est une forme de limite de paiement, et donc de sécurité, pour le réassureur.

AAD (Annual aggregate deductible) : C'est le montant de la charge sinistre au dessus de la priorité à partir de laquelle le réassureur est engagé. C'est une forme de franchise globale sur l'ensemble du traité.

La participation aux bénéfices : C'est un pourcentage du résultat du traité de réassurance qui est reversé à la cédante. Les clauses de participation aux bénéfices existent mais ont un coût élevé car l'asymétrie de la distribution des résultats crée un effet de levier.

La reconstitution (reinstatement) : C'est lorsque la tranche de l'XS est entièrement traversée mais que la couverture se poursuit pour un éventuel autre sinistre. Les traités XS en réassurance vie ont généralement des reconstitutions gratuites et illimitées mais elles peuvent néanmoins être tarifées dans les traités où la volatilité est particulièrement importante (priorité et portée élevées). Si des clauses « aggregate » (AAD, AAL) coexistent avec des reconstitutions payantes, l'ordre d'application des clauses doit alors être explicitement écrit dans le traité.

Nous nous occuperons dans le cas présent des traités de réassurance non-proportionnelle des personnes physiques, en souscription de groupe (prévoyance collective) ou individuelle (temporaire-décès, emprunteur). Par assurance de personnes, on entend au sens large les garanties décès, invalidité, dépendance ou accidents de la vie.

L'incapacité n'est *de facto* pas couverte car elle dépasse très rarement la priorité de l'excédent de sinistre, mais peut cependant mener à une consolidation en invalidité et doit donc également être prise en compte dans l'évaluation des sinistres.

Même si les traités en excédent de sinistre regroupent parfois plusieurs contrats différents, ils doivent connaître le même cadre : un capital à verser en cas de sinistre (décès, GAV, etc.) ou une rente payée par le réassureur exprimée par un capital constitutif (rente d'éducation, d'orphelin, de conjoint, etc.). A partir de ces données ainsi que les données de portefeuille, il sera alors possible de tarifier le coût de la tranche en excédent de sinistre.

b) Distinction des modèles collectif et individuel

La charge sinistre S détermine la prime du traité de réassurance et peut être déterminée selon les approches collective ou individuelle :

- Le modèle collectif

Dans ce modèle, nous considérons un nombre aléatoire N de sinistre touchant le traité de réassurance au cours de l'année et nous notons X_i le $i^{\text{ème}}$ sinistre de l'année. La charge sinistre s'exprime alors comme la somme des sinistres de l'année, c'est-à-dire :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Les données nécessaires à l'estimation de la charge sinistre sont alors théoriquement seulement les sinistres enregistrés au cours des périodes précédentes qui permettront de connaître :

- Une estimation de la loi de fréquence N
- Une estimation de la loi de coût unitaire X_i

Les variables aléatoires N et X_i sont indépendantes.

Cette modélisation a pour principale conséquence de ne pas tenir compte de chaque risque du portefeuille réassuré, de façon isolée. Elle induit que les couvertures sous-jacentes au traité ne sont pas évaluées dans le détail dès lors qu'on considère que le comportement global du portefeuille est homogène au cours des années et cohérent par rapport aux lois de fréquence et de coût.

La principale difficulté de cette approche est d'évaluer la loi de S qui est une somme composée de variables aléatoires. Le produit de convolution est alors particulièrement complexe à calculer et des techniques de simulations sont souvent utilisées pour déterminer une distribution de la charge annuelle globale de sinistre.

- Le modèle individuel

On note X_i le montant du sinistre annuel relatif au $i^{\text{ème}}$ assuré du portefeuille. La charge totale de sinistres pour un portefeuille donné de n assurés est donc :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

Dans notre cas, les X_i seront des variables aléatoires indépendants et suivront des lois de Bernoulli, donc à deux valeurs possibles : 0 ou le montant de sinistre à charge.

Une telle modélisation demande des données détaillées et amène à évaluer le risque de chaque assuré présent dans le portefeuille. De même que dans le modèle collectif, la somme composée de variables aléatoires permet difficilement de donner une forme analytique fermée de la loi de S . Cependant :

- n est un chiffre fixe et généralement « grand »
- X_i est une loi discrète (toujours une loi de Bernoulli dans le cas présent)

Ces différences par rapport au modèle collectif permettent d'approcher plus facilement la distribution de sinistre par des lois asymptotiques.

c) Traitement des données dans le modèle collectif

Les valeurs d'historique de sinistre peuvent être anciennes et ne tiennent alors pas compte des évolutions du portefeuille et du traité de réassurance, ni des évolutions macro-économiques qui ont lieu durant la période d'observation. Plusieurs facteurs peuvent en effet changer la vision que l'on a d'un risque au cours du temps :

	<i>Indicateurs</i>
<i>Facteurs économiques</i>	- Inflation - Indexation sur le PMSS - Age légal de départ à la retraite (pour le calcul des provisions de rentes éducation, conjoint, etc.)
<i>Facteurs de souscription</i>	- Degré de sélection à la souscription - Suivi des sinistres en cours - Structure de réassurance préalable - Structure de chargement des primes
<i>Facteurs techniques</i>	- Améliorations de mortalité - Intégration de nouveaux portefeuilles dans le périmètre de réassurance - Changements de tarifs - Le taux d'actualisation

Tableau 1 - Facteurs de correction de la fréquence et du montant des sinistres

Les données doivent donc être corrigées en données « As if » de manière à ce que les sinistres passés et présents soient comparables entre eux, peu importe leur année de survenance.

On voit par ailleurs que les données d'historique doivent être suffisamment « larges » sous la priorité, car il faut pouvoir réévaluer les sinistres passés qui ne touchaient pas le traité lors des renouvellements précédents mais qui le feraient dans le contexte de la tarification.

- Indexation des primes :

La prime est utilisée comme un indicateur pour suivre l'évolution de l'exposition, elle permet aussi d'ajuster l'estimation de la fréquence. En effet, nous considérons que le montant global de prime suit la même tendance que le nombre de têtes assurées. Les primes dépendent de deux principaux paramètres :

- Les fluctuations monétaires (inflation)
- Les indicateurs propres aux produits d'assurance-vie (indice du PMSS pour le collectif).

Si l'on pose :

- $EPI_{i,n}$ le volume de prime de l'année i , vu à l'année n (« As if »)
- I_n l'indice (inflation, PMSS ou autre) d'indexation de l'année n

On a donc $EPI_{i,n} = EPI_i * \frac{I_n}{I_i}$

Année de souscription	EPI	Indice de l'inflation	EPI ajusté
2006	78 931 218	114,24	83 432 765
2007	88 402 964	115,94	92 074 540
2008	99 138 524	119,20	100 432 025
2009	105 459 014	119,32	106 724 522
2010	108 028 313	120,76	108 028 313

Tableau 2 – Ajustement du volume de prime avec l'indice d'inflation

Le volume de prime peut également être ajusté en fonction d'autres paramètres : changements de tarif, changement de taux technique ou de table, etc.

- Ajustement pour sinistres non déclarés (à payer) :

Lors de la période des renouvellements, la charge des sinistres de l'année en cours n'est pas encore complètement connue et les données sont donc censurées. Il faut par conséquent ajuster le volume de prime à la période d'exposition des sinistres déclarés.

- Indexation des sinistres

De la même manière, les sinistres sont réévalués pour tenir compte des évolutions du traité.

Année de survenance i	Sinistres unitaires	Montant de sinistre initial	Indice	Facteur d'ajustement	Montant de sinistre ajusté
2006	S1	293 919	114,24	1,057	310 681
2006	S2	371 850	114,24	1,057	393 057
...	...	...	...	...	...
2007	S16	275 000	115,94	1,042	286 421
...	...	...	...	...	...
2008	S18	1 150 136	119,20	1,013	1 165 142
...	...	...	...	...	...
2009	S30	202 458	119,32	1,012	204 887

Tableau 3 – Ajustement des sinistres historiques avec l'indice d'inflation

Les indices généralement utilisés pour rendre les montants de sinistres « As if » sont l'indice de l'inflation ou l'indice du PMSS car les montants assurés en assurance-vie évoluent en moyenne de la même manière que la consommation et les revenus des ménages.

2. Modélisation de la charge sinistre dans le modèle collectif

a) Le modèle non-paramétrique : Le *Burning Cost* (BC)

Le *Burning Cost* est une méthode de tarification de traité entièrement empirique, c'est-à-dire qu'elle ne fonctionne qu'avec des données historiques suffisamment robustes et sans distribution de probabilité a priori. Il s'agit de déterminer un « taux de prime moyen ». En effet, nous supposons que dès lors qu'il y a une régularité dans la sinistralité, nous pouvons utiliser les données historiques actualisées pour déterminer le prix BC. Dans un premier temps, le taux de réassurance τ peut être exprimé de la manière suivante :

$$\tau = \frac{\sum_n \sum_i S_{i,n}}{\sum_n EPI_n}$$

Où :

- $S_{i,n}$ représente le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre unitaire en réassurance de l'année n
- EPI_n représente le volume global de prime en assurance

On a ici, après réindexations des primes et des sinistres :

$$\tau_{BC} = \frac{\sum_n \sum_i S_{i,n}}{\sum_i EPI_{i,n}}$$

La tarification BC a pour avantage de donner un taux fiable et crédible eu égard à l'expérience lorsque les tranches tarifées sont travaillantes, c'est-à-dire lorsqu'il y a une large quantité de sinistres qui traversent la tranche régulièrement chaque année.

Aussi, les inconvénients de la méthode du *Burning Cost* sont les hypothèses sous-jacentes qui sont particulièrement contraignantes :

- Régularité de l'historique de sinistre, ce qui suppose une stabilité du marché, de la rigueur de la souscription médicale ou des méthodes de provisionnement des rentes.
- Une branche travaillante qui traverse régulièrement la tranche, avec des coûts de sinistres constants : Les portefeuilles à fréquence faible et à coût élevé comme en invalidité ou en décès dans des tranches élevées sont par exemple peu adaptés à cette méthode.

La seconde limite significative du *Burning Cost* est l'absence de distribution de probabilité explicite. Ainsi, si l'on a bien une indication du prix basée sur l'expérience, une autre modélisation – paramétrique – doit être faite afin d'intégrer le traité à un calcul de Value at Risk.

b) Le modèle paramétrique sur expérience : la méthode fréquence- coût

Le modèle collectif (ou fréquence-coût) est utilisé non seulement car l'hypothèse d'indépendance entre le nombre de sinistres et leur montant est respectée, mais il permet surtout de prendre en compte l'historique et donc d'inclure une part totale de crédibilité dans la tarification tout en ayant une approche paramétrique du risque, d'où la possibilité de calculer des VaR (ou dérivés) et d'effectuer des tests de sensibilité sur les paramètres des distributions.

Il s'agit in fine de déterminer la prime de réassurance, égale à l'espérance de la variable :

$$S = \sum_{i=1}^N \text{Max}(\text{Min}(X_i - F, P), 0)$$

Avec X_i le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre et N le nombre (aléatoire) de sinistre.

Il faut donc modéliser les lois de fréquence (N) et de sévérité (X_i) en ne tenant compte que du comportement des sinistres au-delà d'un certain seuil S_0 . Dans un traité en excédent de sinistre, le réassureur ne dispose en effet souvent que des données partielles comme par exemple les données de sinistres concernées par les tranches de l'XS ou un peu en dessous de la priorité.

Cela implique que la modélisation de la sinistralité ne peut se faire de manière complète, la loi est donc tronquée car les données ne sont disponibles que lorsqu'elles ont franchies le seuil S_0 .

i. Loi de fréquence

Pour évaluer la fréquence de sinistre, il faut une nouvelle fois « redresser » les données. En effet, le portefeuille peut évoluer au cours du temps : s'il grandit, la fréquence sera nécessairement plus élevée tandis que s'il diminue, la fréquence diminuera logiquement.

- La loi de Poisson

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda \end{cases}$$

Elle est la plus répandue et la plus simple à estimer. En effet, pour obtenir l'estimateur de la loi de Poisson tronquée, il suffit de calculer une simple moyenne du nombre de sinistres répertoriés au dessus du seuil S_0 au cours des dernières années d'historique, ou de faire une régression pour tenir compte d'une tendance. Concrètement, le critère le plus commun pour choisir une loi de Poisson est l'égalité de la moyenne et de la variance.

Le processus de Poisson (homogène) est particulièrement utilisé en réassurance pour modéliser les événements rares, qui sont d'espérance et de variance proches. Si ce n'est pas le cas, d'autres lois de comptage peuvent être envisagées : la loi binomiale et la loi binomiale négative.

- La loi binomiale

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\} \\ P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p) \end{cases}$$

L'utilisation de la loi binomiale dans l'assurance en cas de décès ou d'invalidité comme loi de fréquence correspond à un contexte de population assurée très homogène en âge et en classe de risque de mortalité. Ainsi, si l'on prend l'hypothèse d'un taux de mortalité moyen annuel q_x sur l'ensemble du portefeuille, la fréquence s'écrit :

$$N = \sum_{i=1}^n X_i$$

Avec n le nombre d'assurés dans le portefeuille et X_i une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) de Bernoulli, de paramètre q_x .

Alors $N \sim \mathcal{B}(n, q_x)$ et $E(N) > Var(N)$.

- La loi binomiale négative

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k \\ E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \text{ et } V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} \end{array} \right.$$

La loi binomiale négative peut être interprétée comme une « loi de Poisson mélange », c'est-à-dire une loi de Poisson dont le paramètre λ suit une loi Gamma.

La loi binomiale négative se caractérise notamment par $E(N) < Var(N)$.

ii. Loi du coût de la charge sinistre unitaire

Les lois usuelles pour l'estimation de la sévérité en réassurance sont les lois de valeurs extrêmes classiques telles que la loi de Pareto ou la loi de Weibull, et la loi log-normale comme loi intermédiaire. Ces lois ont la caractéristique d'avoir une queue de distribution « lourde », c'est-à-dire qui tient compte de la possibilité d'événements rares et coûteux. En réassurance non-proportionnelle, la couverture commençant uniquement à partir de la priorité, les cédantes ne communiquent souvent que les sinistres proches ou supérieurs à celle-ci. Cela amène les réassureurs à estimer les coûts de sinistres au-dessus de la priorité sans avoir ni les expositions maximales par tête (outre la portée du traité), ni la distribution des sommes par tête. Il faut donc pouvoir estimer le montant d'un sinistre à charge du réassureur à partir d'un historique partiel de coûts de sinistres « As-if ».

Pour ce faire, nous estimons alors les excédents au-delà de la priorité, *sachant* que les données dépassent la priorité. On fait alors appelle aux lois tronquées, c'est-à-dire des lois conditionnelles dont la condition et l'événement sous-jacent dépendent de la même loi de probabilité.

Les deux lois les plus communément utilisées pour modéliser les « excès » sont la loi de Pareto et la loi log-normale.

- Rappel sur les lois tronquées :

Dans notre problème, étant donné que les données ne sont disponibles qu'au-delà d'un certain seuil (proche de la priorité de l'XS), nous utiliserons des lois tronquées (cf. Planchet et Thérond, 2006) pour estimer les montants de sinistres avec des données partielles.

Pour une variable X de fonction de répartition F , la restriction de F à l'intervalle $[a,b]$ donne :

$$P(X \leq x | a \leq X \leq b) = \frac{P(a \leq X \leq x)}{P(a \leq X \leq b)} = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}$$

Ici $a = S0$ et correspond au seuil optimal à partir duquel la courbe estimée sera la mieux adaptée aux données de sinistres. Lors de l'estimation des paramètres de la loi conditionnelle, le seuil doit lui aussi être estimé, de telle sorte que la troncature ne conserve que les données amenant la meilleure adéquation. Dans la loi de Pareto, le seuil est considéré comme un paramètre.

iii. Estimation des paramètres de la loi de coût

- La loi log-normale

La loi log-normale est une loi continue de coût, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$E(X) = e^{m+\sigma^2/2} \text{ et } V(X) = e^{2m+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad \mu_k = e^{k\mu+k^2\sigma^2/2}$$

Cette loi est généralement utilisée comme loi de valeur extrême car elle permet, bien qu'elle soit une loi intermédiaire (domaine de Gumbel), de modéliser des événements rares et coûteux.

On souhaite déterminer la loi du coût des sinistres en réassurance $(X_i - S0)$. La loi log-normale dispose des paramètres μ et σ .

- Estimation des paramètres de la loi log-normale

Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour la loi tronquée à partir du seuil $S0$ sont :

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{N(S0)} \frac{\ln(X_i - S0)}{N(S0)}$$

$N(S0)$ correspond au nombre de sinistre au dessus du seuil $S0$ et les X_i sont les montants de sinistres au dessus de ce seuil.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N(S0)} \frac{(\ln(X_i - S0) - \hat{\mu})^2}{N(S0)}}$$

L'estimateur varie ensuite en fonction du seuil $S0$ que l'on adaptera, en fonction des valeurs du test du χ^2 au mieux aux données.

$S0$	μ	χ^2	Nb Obs.
237 000,0	11,21	4,04	15
...	...	...	...
238 428,6	11,10	3,09	15
238 714,3	11,07	2,84	15
239 000,0	11,02	2,54	15
239 285,7	10,94	0,95	15
239 571,4	11,35	1,39	14
241 571,4	11,63	3,16	13
...	...	...	...
242 714,3	11,61	3,07	13
243 000,0	11,61	3,05	13

Tableau 3 – Ajustement du seuil d'information $S0$ par la méthode du χ^2

On appelle parfois cette loi conditionnelle loi log-normale à trois paramètres : μ , σ et $S0$.

- La loi de Pareto généralisée (GPD)

La loi de Pareto généralisée est une loi dérivée de la loi de Pareto à classique mais comporte un paramètre d'échelle supplémentaire :

$$\text{On a : } F_{(\sigma, \xi, S0)}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x-S0}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} & (\xi \neq 0) \\ 1 - e^{-\frac{x-S0}{\sigma}} & (\xi = 0) \end{cases}$$

La loi de Pareto généralisée est une alternative à la Pareto « américaine » pour l'estimation des sinistres car elle permet d'obtenir plus de flexibilité dans la forme de la courbe de distribution à travers les paramètres d'échelle et de forme. Par ailleurs, elle permet plus d'opérations logiques que la loi log-normale en raison de son expression exponentielle. Les lois tronquées GPD ont par exemple un paramètre de forme constant en fonction du seuil.

En effet, si les excédents de sinistre au dessus d'un seuil d'information u suivent une loi de Pareto généralisée $GPD(\xi, \beta, v)$ alors, pour un autre seuil d'information ($u > v$), les excédents de sinistre suivent également une loi de Pareto généralisée $GPD(\xi, \beta_u, u)$ où $\beta_u = \beta - \xi u$.

$$P(X - u < x | X > u) = \frac{P(u \leq X \leq x + u)}{P(X > u)} = \frac{F(x + u, \xi, \beta) - F(u, \xi, \beta)}{1 - F(u, \xi, \beta)}$$

$$\frac{(1 - \xi u/\beta)^{1/\xi} - (1 - \xi(x + u)/\beta)^{1/\xi}}{(1 - \xi u/\beta)^{1/\xi}} = 1 - (1 - \xi \frac{x}{\beta - \xi u})^{1/\xi}$$

Cette loi permet donc en théorie d'approcher les courbes de sinistralité quasi-complètes à partir de données tronquées. La sensibilité à la qualité d'estimation des paramètres ainsi que la forme de la courbe de Pareto ne permettent cependant que rarement d'obtenir une bonne qualité d'ajustement des sinistres avant le seuil d'information.

- Estimation des paramètres de la loi GPD

Méthode des médianes :

Malgré le caractère toujours exponentiel de la GPD, les estimateurs sont plus compliqués à exprimer de manière analytique. En effet, la méthode des moments ne peut s'appliquer à ce type de paramètres (paramètres de dispersion, d'échelle) et le maximum de vraisemblance n'existe pas pour certaines combinaisons de l'ensemble de définition de la loi.

On utilisera ici l'estimateur des médianes, qui permet par un algorithme, d'obtenir les deux paramètres de forme ξ et σ . La méthode consiste à mettre en équation, la médiane empirique des éléments d'observations de la fonction score S et la médiane des éléments estimés :

$$\text{médiane}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} S((x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}; \theta) = \text{médiane } S(X; \theta)$$

Peng et Welsh (2002) simplifient le problème d'équation en un autre système à deux équations :

$$\beta = -\frac{\xi}{2^{-\xi} - 1} \text{médiane}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}(x_i)$$

$$z(\xi) = \text{médiane}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{\ln\left(1 - \xi \frac{x_i}{\beta}\right)}{\xi^2} - \frac{(1 - \xi)x_i}{\beta\xi - \xi^2 x_i}$$

Où $z(\xi)$ s'exprime aussi : $z(\xi) = \frac{\ln y_1}{\xi} - \frac{1 - \xi}{\xi^2} (1 - y_1^{-\xi})$ avec $y_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. On donne alors l'équation (*):

$$\frac{\ln y_1}{\xi} - \frac{1 - \xi}{\xi^2} (1 - y_1^{-\xi}) = \frac{\ln\left(y_1 + \frac{1}{2}\right)}{\xi^2} \left(1 - \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^{-\xi}\right)$$

On implémente ensuite un algorithme développé par Juarez (2003) pour estimer ξ et β :

- 1) Fixer une précision η souhaitée. Initialiser les valeurs des paramètres (ξ, β) .

On peut utiliser un estimateur de Pickands (1975) pour l'initialisation de $\hat{\xi}$ et (par déduction) $\hat{\beta}$:

$$\hat{\xi}_{n,i}^{Pick} = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{x_{n-i+1} - x_{n-2i+1}}{x_{n-2i+1} - x_{n-4i+1}} \right) \quad i = 1, \dots, \lfloor n/4 \rfloor$$

- 2) Si $\xi \geq 1$, $y_1 = 1/2$. Sinon résoudre l'équation (*) pour $y_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3) Calculer $z(\xi)$.

$$4) r = (r_1, r_2) \text{ où } \begin{cases} r_1 = -\frac{\xi}{2^{-\xi}-1} \text{médiane}(x_i) - \beta \\ r_2 = z(\xi) - \text{médiane} \frac{\ln(1-\frac{\xi x_i}{\beta})}{\xi^2} - \frac{(1-\xi)x_i}{\beta\xi - \xi^2 x_i} \end{cases}.$$

5) $u = r + (\xi, \beta)^t$. Si $\|u - (\xi, \beta)^t\| \geq \eta$, $(\xi, \beta) = u$ et retour à 2), sinon fin.

De la même manière que pour la loi log-normale, nous déterminerons le seuil d'information en minimisant le χ^2 ou le coefficient d'Anderson-Darling.

Méthode du maximum de vraisemblance :

On a la fonction de log-vraisemblance suivante :

$$l(\xi, \beta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \xi, \beta) = n \ln \beta + (\xi^{-1} - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - \frac{\xi x_i}{\beta})$$

Le domaine de définition de (ξ, β) est $\Theta_n = \{\beta > 0, \xi < 0\} \cup \{\beta > 0, \xi > 0, \max_{0 \leq x \leq 1} x_i < \frac{\beta}{\xi}\}$.

D'après Grimshaw (1993), l'estimateur du maximum de vraisemblance (ξ_{EMV}, β_{EMV}) peut être donné par le maximum local de $l(\xi, \beta)$ si $l(\xi_{EMV}, \beta_{EMV}) > -n \ln(\max_{1 \leq i \leq n} x_i)$, $\xi = 1$ et $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ sinon.

iv. Prime de réassurance :

- La loi log-normale

On détermine le montant de sinistre unitaire moyen de l'excédent de sinistre en évaluant les espérances :

$$(1) E(X_i - F | X_i > S0)$$

$$(2) E(X_i - (F + P) | X_i > S0)$$

avec la prime pure du sinistre unitaire égale à (cf. Partrat et Besson, 2005) : $P_{XS_unit} = E(X_i - F | X_i > S0) - E(X_i - (F + P) | X_i > S0) = (1) - (2)$

$$P_{XS_unit} = \int_F^{F+P} (x - S0 + S0 - F) * dH$$

Où $H \sim \text{LogNormale}(\mu, \sigma)$

$$P_{XS_unit} = \int_F^{F+P} (x - S0) * dH - (F - S0) \int_F^{F+P} dH + P * P(X_i - S0 > F + P - S0 | X_i > S0)$$

(1) Changement de variable $h = x - S0$

$$\begin{aligned}
& \int_F^{+\infty} (x - S0) * dH - (F - S0) \int_F^{+\infty} dH = \int_{F-S0}^{+\infty} h * dH - (F - S0) \int_{F-S0}^{+\infty} dH \\
& = \int_{F-S0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln h - \mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dh - (F - S0) \int_{F-S0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln h - \mu}{\sigma})^2}}{h\sigma\sqrt{2\pi}} dh
\end{aligned}$$

Changement de variable $u = \frac{\ln h - \mu}{\sigma}$

$$(1) = \int_{\frac{\ln(F-S0)-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} * \sigma e^{u\sigma+\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dh - (F - S0) \int_{F-S0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln h - \mu}{\sigma})^2}}{h\sigma\sqrt{2\pi}} dh$$

$\int_{-\infty}^{\ln F + P} \frac{e^{-\frac{1}{2}(u-\sigma)^2}}{\sqrt{2\pi}} du$ est la valeur de la fonction de répartition d'une loi normale de moyenne σ et de variance évaluée en $\ln F + P$

$$\begin{aligned}
(1) &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{\frac{\ln(F-S0)-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(u-\sigma)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dh - (F - S0) * (1 - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F - S0) - \mu}{\sigma}\right)) \\
(1) &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} * (1 - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)) - (F - S0) * (1 - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F - S0) - \mu}{\sigma}\right))
\end{aligned}$$

De manière analogue, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(2) &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} * (1 - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)) - (F + P - S0) * (1 \\
&\quad - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu}{\sigma}\right))
\end{aligned}$$

Pour $S0 = 0$ ou $S0 = F$, la prime pure unitaire s'exprime :

$$\begin{aligned}
& E((X_i - F) * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P} + P * \mathbb{1}_{X_i > F+P}) \\
&= \int_0^{F+P} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx - \int_0^F \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx + P * (1 - \phi\left(\frac{\ln(F + P) - \mu}{\sigma}\right)) - F \\
&\quad * (\phi\left(\frac{\ln(F) - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln(F + P) - \mu}{\sigma}\right))
\end{aligned}$$

D'où :

$$P_{XS_unit} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(\phi_{\sigma,1} \left(\frac{\ln(F+P) - \mu}{\sigma} \right) - \phi_{\sigma,1} \left(\frac{\ln F - \mu}{\sigma} \right) \right) + P * \left(1 - \phi \left(\frac{\ln(F+P) - \mu}{\sigma} \right) \right) - F \\ * \left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln F - \mu}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F+P) - \mu}{\sigma} \right) \right)$$

- **La loi de Pareto Généralisée (GPD) :**

$$P_{XS_unit} = \int_F^P (x - S0) * dH - (F - S0) \int_F^P dH + P * P(X_i - S0 > F + P - S0 | X_i > S0)$$

$$E((X_i - S0) * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P}) = \int_{F-S0}^{F+P-S0} \frac{u(1 + \frac{\xi u}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}}{\sigma} du \\ = \frac{1}{\xi} \left(\left[\frac{\sigma}{(\xi-1)} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}+1} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} - \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right) \\ = \frac{1}{\xi} \left(\left[\frac{\sigma}{(\xi-1)} \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}+1} - \frac{\sigma}{(\xi-1)} \left(1 + \frac{\xi(F-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}+1} \right] \right. \\ \left. - \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \sigma \left(1 + \frac{\xi(F-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \right)$$

D'où, la prime pure pour un sinistre P_{XS_unit} :

$$P_{XS_unit} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\sigma}{(\xi-1)} \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}+1} - \frac{\sigma}{(\xi-1)} \left(1 + \frac{\xi(F-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}+1} + \sigma \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right. \\ \left. - \sigma \left(1 + \frac{\xi(F-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) - (F-S0) \left(- \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \left(1 + \frac{\xi(F-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\ + P \left(1 + \frac{\xi(F+P-S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

c) Calcul de la variance dans le modèle fréquence-coût

Il est d'usage dans la réassurance non-proportionnelle d'ajouter un chargement appelé « prime de risque » basé sur la variance ou l'écart-type, afin d'intégrer la volatilité plus élevée de ce type de couverture.

$$Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^{i=N} X_i\right) = Var\left(E\left(\sum_{i=1}^{i=N} X_i | N\right)\right) + E\left(Var\left(\sum_{i=1}^{i=N} X_i | N\right)\right)$$

$$Var(S) = Var(N * E(X_i)) + E(N * Var(X_i)) = E(X_i)^2 * Var(N) + Var(X_i) * E(N)$$

$$Var(S) = E(X_i)^2 * \lambda + Var(X_i) * \lambda$$

$$Var(S) = \lambda * (E(X_i)^2 + Var(X_i))$$

$$Var(S) = \lambda * E(X_i^2)$$

- Loi log-normale :

On cherche $E((X_i - F)^2 * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P} + P * \mathbb{1}_{X_i > F+P})$

$$E((X_i - S_0 + S_0 - F)^2 * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P}) = E(((X_i - S_0)^2 - 2(X_i - S_0)(F - S_0) + (F - S_0)^2) * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P})$$

$$E((X_i - S_0)^2 * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P}) = \int_{F-S_0}^{F+P-S_0} \frac{u^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln u - \mu}{\sigma}\right)^2}}{u\sigma\sqrt{2\pi}} du$$

Le calcul est simplifié par la formule $E(X^n) = e^{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}}$ pour la loi log-normale, que l'on détermine à partir de la fonction génératrice des moments. D'où :

$$E((X_i - S_0)^2 * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P}) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} * \left(\phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F + P - S_0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma}\right) - \phi_{0,1}\left(\frac{\ln(F - S_0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma}\right) \right)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
E((X_i - F)^2 * \mathbb{I}_{F < X_i < F+P} | X_i > S0) \\
&= e^{2(\mu + \sigma^2)} * \left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma} \right) \right) \\
&\quad - 2(F - S0) * e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\
&\quad * \left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) \right) + P^2 \\
&\quad * \left(1 - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu}{\sigma} \right) \right) + (F - S0)^2 * \left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu}{\sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu}{\sigma} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } \sigma^2(S) &= \lambda e^{2(\mu + \sigma^2)} * \left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu - 2\sigma^2}{\sigma} \right) \right) - 2(F - S0) * e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} * \\
&\left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) \right) + P^2 * \left(1 - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu}{\sigma} \right) \right) + (F - S0)^2 * \\
&\left(\phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F + P - S0) - \mu}{\sigma} \right) - \phi_{0,1} \left(\frac{\ln(F - S0) - \mu}{\sigma} \right) \right)
\end{aligned}$$

- **Loi GPD** (cf. Denuit et Charpentier - 2005):

$$E((X_i - S0)^2 * \mathbb{I}_{F < X_i < F+P}) = \int_{F-S0}^{F+P-S0} \frac{u^2 (1 + \frac{\xi u}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}}{\sigma} du = \frac{\sigma}{\xi^2} \int_{F-S0}^{F+P-S0} \frac{\xi^2 u^2 (1 + \frac{\xi u}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1}}{\sigma^2} du$$

Pour simplifier les calculs, nous utilisons la relation: $\xi^2 \frac{u^2}{\sigma^2} = (1 + \frac{\xi u}{\sigma})^2 + 1 - 2 * (1 + \xi \frac{u}{\sigma})$

$$\begin{aligned}
& E((X_i - F)^2 * \mathbb{1}_{F < X_i < F+P} | X_i > S0) \\
&= \frac{\sigma}{\xi^2} \left(\left[\frac{\sigma}{2\xi - 1} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 2} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} - 2 \left[\frac{\sigma}{(\xi - 1)} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 1} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right. \\
&\quad \left. + \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right) \\
&\quad - 2 \frac{F - S0}{\xi} \left(\left[\frac{\sigma}{(\xi - 1)} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 1} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} - \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right) \\
&\quad + (F - S0)^2 \left(- \left(1 + \frac{\xi(F + P - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \left(1 + \frac{\xi(F - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
&\quad + P^2 \left(1 + \frac{\xi(F + P - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}}
\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sigma^2(S) &= \lambda \frac{\sigma}{\xi^2} \left(\left[\frac{\sigma}{2\xi - 1} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 2} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} - 2 \left[\frac{\sigma}{(\xi - 1)} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 1} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right. \\
&\quad \left. + \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right) \\
&\quad - 2 \frac{F - S0}{\xi} \left(\left[\frac{\sigma}{(\xi - 1)} \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} + 1} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} - \left[-\sigma \left(1 + \frac{\xi u}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]_{F-S0}^{F+P-S0} \right) \\
&\quad + (F - S0)^2 \left(- \left(1 + \frac{\xi(F + P - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \left(1 + \frac{\xi(F - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \\
&\quad + P^2 \left(1 + \frac{\xi(F + P - S0)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}}
\end{aligned}$$

3. Modélisation de la charge sinistre dans le modèle individuel

a) Tarif pur de réassurance

Ici, chaque personne présente dans le portefeuille constitue un risque modélisé individuellement. Cette méthode demande donc des détails dans les données telles que l'âge, le sexe, la somme sous risque, etc. par assuré car ils permettent d'appliquer précisément des lois de mortalité à travers les tables usuelles de l'assurance-vie.

Si l'on considère uniquement le problème de tarification sous cette forme, la vie de chaque individu est modélisée par une variable aléatoire de Bernoulli avec pour paramètre $q_{x,i}$, la probabilité d'un individu i d'âge x de décéder durant l'année en cours.

On obtient alors la prime pure $P = E(S) = \sum q_{x,i} * SaR_i$

Cette méthode basique de tarification a pour principal inconvénient de donner des primes de réassurance moins en ligne avec l'historique des sinistres si le coefficient de table, ou la table elle-même, ne sont pas ajustés. Les primes de réassurance calculées sur exposition semblent ainsi, comparativement au marché, parfois trop conservatrices. Prenons un exemple de portefeuille de polices individuelles dont l'historique sinistre est également connu :

	<i>Poisson - LogNormale</i>	<i>Poisson - GPD</i>	<i>Burning Cost</i>	<i>Exposition - mortalité estimée sur expérience</i>
<i>Prime pure</i>	1 269 372	1 101 023	1 069 849	1 452 988

Tableau 4 – Comparaison des modèles et l'impact sur le prix du traité

C'est une des raisons de l'utilisation fréquente par les cédantes de l'excédent de sinistre à la place de l'excédent de plein annuel.

De plus, nous exposons ici des méthodes pour déterminer, à travers des approximations, une distribution globale de la charge sinistre à partir des données individuelles de la cédante.

b) Approximation de la distribution de la charge sinistre

Soient S la variable aléatoire des sinistres agrégés, S_i le $i^{\text{ème}}$ sinistre en réassurance et n le nombre (aléatoire ou non) de sinistres tels que :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

Si $F_{S_i}(x) = F(x)$ est la fonction de répartition des variables aléatoires S_i , on a $F_S = F^{*n} = F * F * \dots * F$

Ce calcul de convolutions est particulièrement fastidieux et n'aboutit pas à une formule fermée simple. Une approche est alors d'utiliser des techniques d'approximation dans la mesure où l'on peut faire appel aux grands nombres pour le théorème central limite et les trois moments de S pour les approximation Gamma translatée et Normal Power.

- Approximation normale

La particularité de la réassurance-vie par rapport à la réassurance non-vie plus classique est qu'elle permet de disposer d'autres lois, telles les lois de mortalité ou les incidences en incapacité - invalidité. D'après Kaas et al. (2008), si l'on connaît les sommes sous risques et qu'elles sont par ailleurs fixes, on peut déterminer non seulement le montant de la prime mais aussi avoir une distribution par une application dérivée du théorème central limite :

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes. En supposant que les X_n ont une espérance et une variance finies, avec $E(X_n) = \mu_n$ et $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$. De plus, $s_N^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2$.

Si pour un certain $\delta > 0$, les espérances $E(|X_k|^{2+\delta})$ sont finies pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la condition de Lyapounov est satisfaite, c'est-à-dire :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{s_N^{2+\delta}} * \sum_{n=1}^N E(|X_n - \mu_n|^{2+\delta}) = 0$$

Alors le théorème central limite est applicable et nous avons:

$$Z_N = \frac{\sum_{n=1}^N (X_n - \mu_n)}{s_N}$$

Z_N converge en probabilité vers une loi normale centrée réduite lorsque N tend vers un grand nombre.

Ici, nous considérons chaque tête du portefeuille de telle sorte que la probabilité de décès soit le paramètre d'une loi de Bernoulli.

Soit X_i la variable aléatoire correspondante à la probabilité de décès de chaque assuré. Pour chaque assuré, nous associons la probabilité de décès q_x spécifique à l'âge et au sexe.

Pour simplifier les calculs, nous utiliserons la table de mortalité TH00-02 corrigée en fonction de l'expérience, uniformément pour les femmes et les hommes.

Ainsi, nous obtenons une approximation de la distribution des sinistres en réassurance. L'intégralité des paramètres de la loi normale peuvent être obtenus avec les variances des lois de Bernoulli (supposées indépendantes).

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^N E(X_i)$$

$$Var(Z_n) = \sum_{i=1}^N Var(X_i)$$

Si l'échantillon est suffisamment important, il existe une distribution S des sinistres en réassurance telle que :

$$S \sim \mathcal{N}(E(Z_n), \sqrt{Var(Z_n)})$$

Cette distribution nous permettra par la suite d'évaluer la charge sinistre annuelle et déterminer le capital économique basé sur un quantile des sinistres.

- Approximation gamma traduite

Le principe est aussi d'utiliser les lois de Bernoulli pour approximer cette fois la courbe d'une loi gamma traduite à trois paramètres (cf. De Pril - 1989). En effet, la loi Gamma est communément utilisée comme loi de charge sinistre pour sa légère asymétrie à gauche, sa queue plus lourde que la loi normale et son nombre de paramètres, qui permettent un ajustement précis. Le paramètre x_0 permet de limiter le périmètre de la distribution aux données au dessus de cette valeur.

Soit S la variable aléatoire des sinistres agrégés. On fait l'approximation de la fonction de répartition de S par la fonction de répartition gamma G . D'où :

$$F_S(x) \approx G(x - x_0; \alpha, \beta)$$

α , β et x_0 sont choisis tels que les trois premiers moments soient égaux à ceux de S . Nous en déduisons donc les trois moments de la perte agrégée, par :

$$\mu = E(S) = \sum q_{x,i} * SaR_i$$

$$\sigma^2 = Var(S) = \sum q_{x,i} * (1 - q_{x,i}) * SaR_i^2$$

$$E(S - E(S))^3 = \sum (q_{x,i} - 3q_{x,i}^2 + 2q_{x,i}^3) * SaR_i^3$$

$$\gamma = \frac{E(S - E(S))^3}{\sqrt{Var(S)}^3}$$

Où :

- $q_{x,i}$ est la probabilité de décès annuelle d'un individu d'âge x , représentant la $i^{ème}$ police
- SaR_i est la somme sous risque de la $i^{ème}$ police

Nous avons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = x_0 + \frac{\alpha}{\beta} \\ \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \\ \gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \end{array} \right\}$$

D'où $\alpha = \frac{4}{\gamma^2}$, $\beta = \frac{2}{\gamma\sigma}$ et $x_0 = \mu - \frac{2\sigma}{\gamma}$

- Approximation Normal Power

De la même manière nous pouvons approcher la distribution normale autrement avec le facteur d'asymétrie (cf. C.M. Rhamsey – *A note on the Normal Power approximation*). Il s'agit de transformer la variable standard $\tilde{S}$ (telle que $\tilde{S} = \frac{S-\mu}{\sigma}$) en une variable symétrique $\tilde{Z} = \nu(\tilde{S})$, avec ν choisi de telle sorte que $\tilde{Z}$ soit une loi normale centrée réduite. En utilisant la méthode de Newton, on peut obtenir : $\tilde{S} \approx \tilde{Z} + \frac{\gamma}{6}(\tilde{Z}^2 - 1)$

Si $E(S) = \mu$, $Var(S) = \sigma^2$ et $\gamma(S) = \gamma$ alors pour $s > 1$,

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq s + \frac{\gamma}{6}(s^2 - 1)\right) \approx \varphi(s)$$

Soit :

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6\tilde{x}}{\gamma} + 1} - \frac{3}{\gamma}\right)$$

Où $\tilde{x} = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Cette approximation est valide pour $\tilde{x} > 1$ et demeure précise si $\gamma \in [0,1]$, la précision diminuant lorsque γ augmente.

c) Impact de la réduction de variance sur la distribution des sinistres

$$S = \sum_{i=1}^n X_i * SaR_i$$

Avec $X_i \sim \text{Bernoulli}(q_{x,i})$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ indépendants.

D'où : $Var(S) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^2$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) * (SaR_i^{net} + SaR_i^{re})^2$$

Où SaR_i^{net} correspond à la somme sous risque nette de réassurance de l'assuré i et

$$Var(S) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{net2} + \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{re2} + 2 \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{net} SaR_i^{re}$$

Or, les calculs séparés des variances de la cédante et du réassureur sont :

$$Var(S^{net}) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{net2}$$

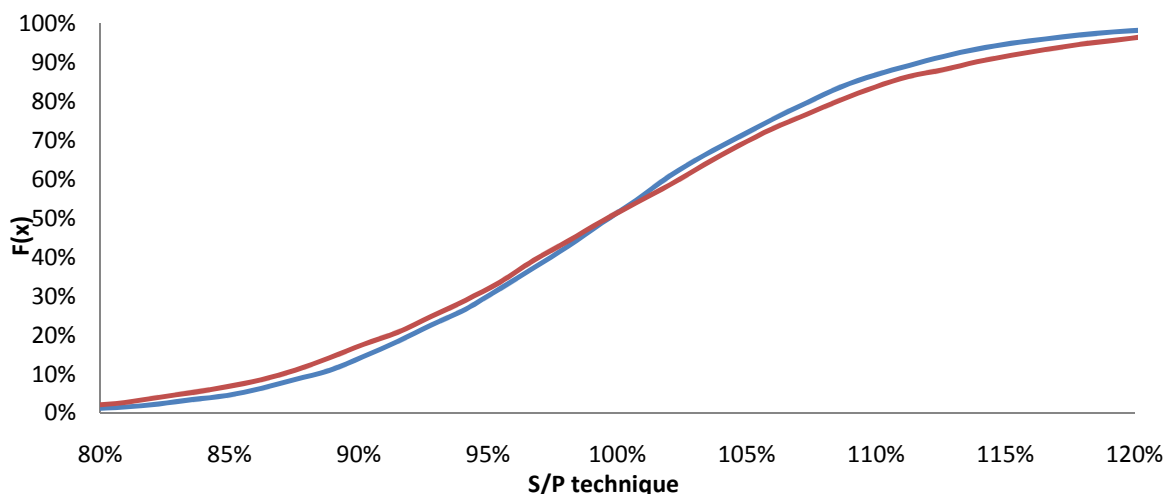
$$Var(S^{re}) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{re2}$$

Comme $2 \sum_{i=1}^n Var(X_i) * SaR_i^{net} SaR_i^{re} > 0$, il vient :

$$Var(S) > Var(S^{net}) + Var(S^{re})$$

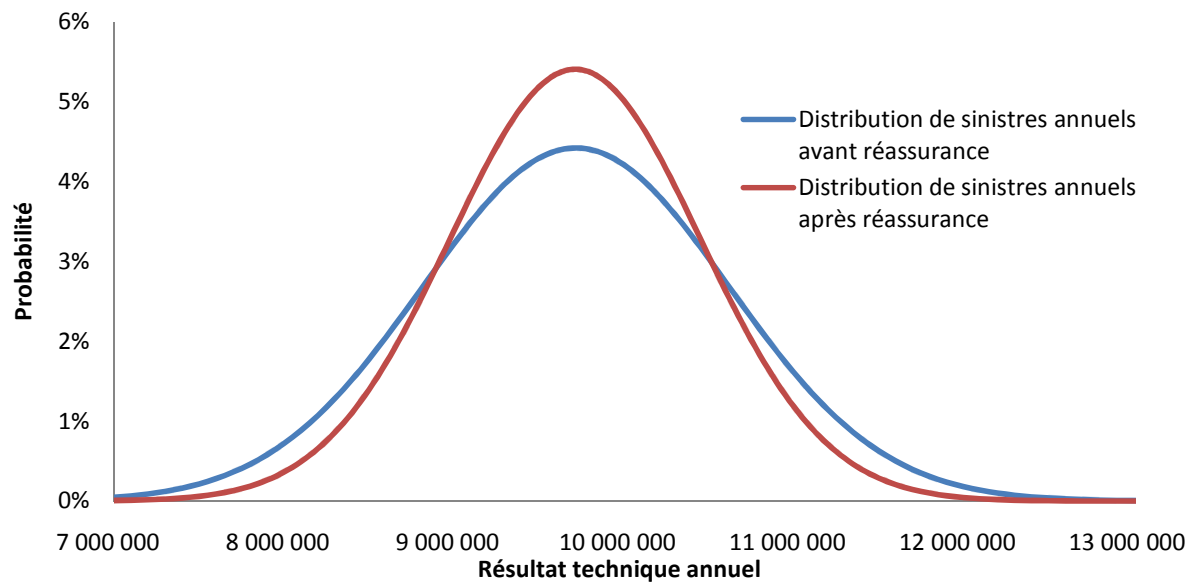
Partager le risque avec un réassureur amène donc non seulement à céder de la volatilité issue de la queue de distribution, au réassureur mais élimine également une partie de la volatilité initiale uniquement du fait de la répartition du risque sur plusieurs intervenants.

La réassurance non-proportionnelle est traditionnellement utilisée pour l'impact sur le résultat de la cédante lors de « mauvaises » années. En effet, lorsque le ratio S/P dépasse 100 %, c'est-à-dire lorsque le contrat sous-jacent est en perte, l'augmentation du S/P sera en partie atténuée par le traité non-proportionnel. L'effet sera inverse en cas de « bonne » année, en raison de la prime de réassurance payée.



Graphique 1 - Distribution des S/P avant et après réassurance (vision cédante)

Quant à la volatilité retenue par le réassureur, elle entraîne une plus grande concentration de la sinistralité autour de la moyenne (la prime pure est ici considérée comme un sinistre certain) :



Graphique 2 - Distribution de la charge sinistre de la Cédante (modélisation Normale)

III. Intégration du coût du capital dans la tarification

La prime de réassurance doit intégrer les différents éléments suivants sous contrainte de rentabilité :

- La prime pure
- Les éventuelles commissions de réassurance
- Les éventuels frais de courtage
- Les frais du réassureur
- Le coût du capital immobilisé
- Les taxes

Il est donc important de déterminer tous les engagements que le réassureur prend au cours du traité afin de les répercuter dans la cotation finale. Par ailleurs, les éléments précités sont eux-mêmes interdépendants : par exemple, le coût du capital dépend de la cible de rentabilité, qui elle-même est impactée par tous les autres éléments de chargement du tarif.

1. Cadre de l'étude

a) Les nouvelles spécifications techniques

Dans le bilan, le capital (ou fonds propres) d'une entreprise est un élément du passif. Il se définit comme la différence entre les actifs et le passif « réel », c'est-à-dire les engagements comptables (provisions, dettes). Il inclut in fine le résultat non distribué, les réserves historiques et les actions propres de la société.

Le capital **réglementaire** est le montant minimal exigé d'une entreprise d'assurance pour qu'elle ait le droit d'exercer son activité. Il permet en effet de garantir la solvabilité de l'entreprise lors de pertes exceptionnelles. Ce montant minimal de capital est particulièrement contrôlé dans les organismes financiers, a fortiori en assurance, car le cycle de production est inversé : Le prix d'un produit est déterminé a priori, avant la connaissance du coût réel de l'opération commerciale.

Sous Solvabilité 1, le capital réglementaire est égal, pour les traités non-proportionnels (vie ou non-vie), au maximum entre 16 % des primes et 18 % des sinistres. L'approche est donc déterministe et fait appel à des facteurs applicables à des grandeurs (somme sous risque, primes, sinistres attendus, etc.).

Avec Solvabilité 2, le capital réglementaire est déterminé stricto sensu par le *Minimum Capital Requirement* (MCR), qui représente le niveau de fonds propres nécessaire à l'exercice d'une activité d'assurance ou de réassurance. Autrement dit, si les fonds propres sont inférieurs à ce niveau, les autorités de contrôle doivent constater un problème de solvabilité et intervenir.

Le MCR est une combinaison linéaire entre un montant minimum forfaitaire et un pourcentage du *Solvency Capital Requirement* (SCR), qui est le capital requis pour assurer la solvabilité de l'entreprise d'assurance.

Le SCR est le socle de la nouvelle directive prudentielle européenne et constitue la principale « innovation » dans la réglementation des assurances car il introduit pour la première fois des règles basées sur des distributions de probabilité, des tables de risque et des méthodes de calcul sur exposition.

Des formules standards ont été données afin de calculer de manière simplifiée le SCR de telle sorte que le montant du capital requis soit adapté à la nature du portefeuille de l'entreprise d'assurance ou de réassurance. Elles sont calibrées pour que le risque de faillite soit limité à 0,5% à horizon un an.

b) Définitions

• Le capital économique

Il peut avoir plusieurs définitions mathématiques selon la manière utilisée pour mesurer le risque. Solvabilité 2 propose la méthode de la Value at Risk (VaR). Il existe cependant d'autres mesures généralement acceptées : la Tail Value at Risk (TVaR) ou l'Expected Shortfall (ES). Nous nous proposerons donc d'abord de faire un rapide recensement de ces approches d'évaluation des engagements de sinistre. Le *Solvency Capital Requirement* (SCR) de Solvabilité 2 détermine un niveau de fonds propres tel que la probabilité de ruine soit de 0.5 % sur un an. Cette capitalisation standard voulue par la directive européenne est jugée comme étant calibrée sur une note Standard & Poors (S&P) de « BBB+ ».

C'est pourquoi le capital économique doit être adapté à chaque compagnie d'assurance ou de réassurance pour qu'il corresponde au mieux aux risques de l'activité et à l'image de solidité désirée par l'entreprise. Autrement dit, le capital économique doit au moins couvrir le *Minimum Capital Requirement* (MCR).

Lors du QIS 4, l'échelle suivante était utilisée pour évaluer le capital exigible en fonction de la notation S&P :

% SCR S2	Notation
0-50 %	CCC ou inférieur/non-noté
50 %	B
70 %	BB
100 %	BBB
130 %	A
160 %	AA
200 %	AAA

Tableau 5 – Notation « Solvabilité » en fonction du ratio de solvabilité
Source : « Solvabilité II va-t-elle bouleverser les stratégies de réassurance ? », Actuaris, E-Alert 14, 2008.

Ainsi, pour maintenir sa notation à un niveau supérieur « BBB », il faudra nécessairement prendre une probabilité de ruine inférieure à 0,5 %.

De la même manière que sous Solvabilité 1, les organismes assureurs et réassureurs préfèrent continuer d'utiliser des facteurs déterministes car ils sont plus facilement manipulables, modifiables et applicables dans le cadre d'une procédure interne (« process »), d'où la nécessité de mettre en place des modèles d'allocation du capital pour représenter le besoin en fonds propres

- **Les mesures de risque :**

Comme nous l'avons vu précédemment, le capital économique selon les nouvelles méthodes d'évaluation du risque nécessite une modélisation des charges sinistres par des variables aléatoires à partir desquelles on calcule la fonction de répartition. On détermine ensuite un quantile de la distribution à un niveau de risque α donné.

- **La VaR**

L'utilisation de la VaR était particulièrement courante dans les milieux financiers avant de finalement être transposé pour le modèle de Solvabilité II.

On rappelle que si X est une variable aléatoire, $VaR(X; \alpha)$ est le quantile d'ordre α de X , soit :

$$VaR(X; \alpha) = F_{\alpha}^{-1}(x)$$

Alors la VaR est une mesure de risque.

D'après ARTZNER P. et al (1998), une mesure de risque peut être qualifiée de cohérente si elle respecte les conditions suivantes :

- Invariance par translation : $\varphi(X + a) = \varphi(X) + a$
- Sous-additivité : $\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$
- Homogénéité : $\varphi(aX) \leq a\varphi(X)$
- Monotonie : $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \varphi(X) \leq \varphi(Y)$

La VaR n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive.

- **La TVaR**

La TVaR est cohérente et permet par ailleurs d'obtenir une information sur le comportement de la distribution lorsque la VaR est dépassée. Elle représente « intuitivement » le risque moyen lorsque l'on se trouve dans le cas extrême qui a pour probabilité $1-\alpha$.

De manière analytique, elle se définit de la manière suivante :

$$TVaR(X; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, s) ds$$

La VaR et la TVaR seront testées pour déterminer les montants de capitaux économiques à immobiliser par la suite afin de connaître leur impact.

La TVaR peut aussi s'exprimer comme $TVaR(X; \alpha) = E(X|X > VaR(X; \alpha))$. Il s'agit donc de calculer un quantile des excès d'une variable X. Cette mesure, en plus d'être exigeante dans la mesure du risque, contient toujours un « chargement de sécurité » car la TVaR est non-décroissante en α ($TVaR(X; 0) = E(X)$).

2. Calcul théorique du capital économique

Il y a, dans les recommandations qui ont fait suite au QIS 5, des modes de calcul du capital réglementaire qui sont segmentées par risque : Vie, Non-Vie, Opérationnel, etc.

La réassurance non-proportionnelle n'est abordée qu'à travers le coefficient d'ajustement, qui a pour rôle de tenir compte de la réassurance non-proportionnelle dans la diminution du besoin en fonds propres de l'activité. Or, ce coefficient d'ajustement est explicité dans la rubrique « Non-Life Underwriting » car :

- Le marché de la réassurance non-proportionnelle est plus développé dans les branches Non-Vie
- Même pour des risques Vie, la tarification à l'exposition est peu utilisée
- On peut voir la réassurance non-proportionnelle Vie comme un excédent de plein à horizon un an, et donc comme une technique proportionnelle (quote-part différente pour chaque tête, en fonction du plein).

Nous pourrions alors utiliser les recommandations du EIOPA pour les branches Vie en appliquant les chocs ou par simulations sur les risques spécifiques à l'activité Vie (dérive de mortalité, longévité, etc.). Nous pourrions ainsi comparer les deux méthodes de diminution du capital économique par la réassurance.

a) La formule standard

- i. Formule standard pour la réassurance non-proportionnelle : Une approche Non-Vie

La directive solvabilité 2 donne aujourd'hui une formule pour calculer un coefficient d'ajustement pour les assureurs qui ont une part de leur portefeuille en réassurance. Ce coefficient prend en compte le partage du risque et diminue d'autant la part du capital économique à charge de l'assureur. Nous pouvons donc a fortiori également déterminer le SCR pour le réassureur, qui se déduit directement de ce coefficient d'ajustement.

La formule standard pour la réassurance non-proportionnelle en général, est inscrite dans le module « Non-Life Underwriting ». Elle se base sur la tarification, telle que nous l'avons illustré

plus haut, dans le modèle fréquence-coût. Cependant, elle se situe du côté de la cédante en faisant intervenir les sinistres sous la priorité.

Les hypothèses du EIOPA (cf. Annexe N – QIS 5) sont assez classiques dans la réassurance non-proportionnelle Non-Vie :

- La fréquence des sinistres N est modélisée par une loi de Poisson de paramètre λ
- Le coût unitaire d'un sinistre (au premier euro) X est modélisé par une loi log normale de paramètres μ et σ

Nous pouvons donc obtenir la distribution des sinistres brute de réassurance. Il est par ailleurs possible d'estimer le coût moyen net de réassurance dans un excédent de sinistre. En effet, on pose X^* le montant net de réassurance dans un excédent de sinistre P XS F , d'où :

$$X^* = \begin{cases} X & \text{si } X < F \\ F & \text{si } F < X < F + P \\ X - P & \text{si } X > F + P \end{cases}$$

Rappel : $Var(S) = Var(\sum_{i=1}^N X_i) = Var(E(\sum_{i=1}^N X_i | N)) + E(Var(\sum_{i=1}^N X_i | N))$

$$Var(S) = Var(N * E(X_i)) + E(N * Var(X_i)) = E(X_i)^2 * Var(N) + Var(X_i) * E(N)$$

$$Var(S) = E(X_i)^2 * \lambda + Var(X_i) * \lambda$$

$$Var(S) = \lambda * (E(X_i)^2 + Var(X_i))$$

D'après un document de l'AMICE (2009), nous avons :

$$\frac{Var(S^{net})}{Var(S^{brut})} = \frac{E(X_i^*)^2 + Var(X_i^*)}{E(X_i)^2 + Var(X_i)}$$

Or, le facteur d'ajustement NP proposé par Solvabilité 2 est basé sur la comparaison entre la volatilité d'un sinistre brut et d'un sinistre net. C'est donc cette perte de volatilité qui permettra de diminuer les exigences en capital.

$$NP = \sqrt{\frac{1 + vol^2(X_i^*)}{1 + vol^2(X_i)}}$$

$$\text{Où : } vol(X_i) = \frac{\sqrt{Var(X_i)}}{E(X_i)} \text{ et } vol(X_i^*) = \frac{\sqrt{Var(X_i^*)}}{E(X_i^*)}$$

On remarque que le facteur de fréquence λ n'a effectivement aucun impact dans la diminution ou l'augmentation de la volatilité de la cédante. Nous pouvons alors facilement connaître la distribution d'un sinistre pour une loi log normale :

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{Var(X)}{E^2(X)} \right)}$$

$$\mu = \ln E(X) - \frac{\sigma^2}{2}$$

Le calcul du SCR ajusté à la réassurance est donné dans le module de souscription Non-Vie :

$$SCR = P * \rho(\sigma)$$

Où :

- P est le volume de prime
- $\rho(\sigma) = \frac{\exp(\phi_{0,1}^{99,5\%} * \sqrt{\ln(1+\sigma^2)})}{\sqrt{1+\sigma^2}} - 1$ est une fonction de l'écart-type telle que, pour une loi log normale, une exigence de capital cohérente avec la probabilité de non-ruine à 99,5 % soit atteinte.

En effet, si l'on pose ψ une variable aléatoire qui suit une distribution log-normale telle que $E(\psi) = 1$ et $Var(\psi) = \sigma^2$, on a $\rho(\sigma) = \frac{\exp(\phi_{0,1}^{99,5\%} * \sqrt{\ln(1+\sigma^2)})}{\sqrt{1+\sigma^2}} - 1 = VaR_{99,5\%}^*(\psi)$

$VaR_{99,5\%}^*(\psi)$ est donc la Value at Risk à 99,5 % de la variable $\psi - E(\psi)$.

On a $\rho(\sigma) \approx 3 * \sigma$

ii. Utilisation de la formule standard « Life » : Approche vie de la tarification

On dispose désormais de données tête par tête, de sommes assurées connues. Les lois de mortalité peuvent être suffisamment étoffées de manière à caractériser tous les aspects de la population modélisée : Age, Sexe, statut fumeur/non-fumeur, catégories socioprofessionnelles, montant assuré, etc.

Elles permettent ainsi de mieux apprécier le risque d'un portefeuille à travers les caractéristiques de chaque assuré présent dans le traité et pris de manière isolée.

Le principe de l'« excédent de plein annuel » est celui d'une quote-part du réassureur individualisée, c'est-à-dire que le réassureur aura une quote-part égale à la portion de somme assurée dépassant la priorité et inférieure à la portée. Nous souhaitons alors utiliser les spécifications techniques du EIOPA en assurance-vie afin de déterminer SCR pour le réassureur dans ce cas de figure.

Le module « Life Underwriting » se décompose en sept risques principaux qui sont caractéristiques de la souscription en assurance-vie :

- Le risque de mortalité
- Le risque de longévité

- L'invalidité (en tant que couverture complémentaire de celle du décès)
- Le risque de chute
- Les dépenses de fonctionnement
- Les changements législatifs ayant un impact sur les provisions et engagements en cours

Comme nous nous occupons uniquement de contrats de prévoyance, il ne sera tenu compte que des prestations payées en cas de sinistre (temporaires-décès, emprunteur, capitaux décès, rentes invalidité temporaires).

La formule standard est supposée donner des méthodes déterministes pour atteindre un capital équivalent à un risque de ruine de 0,5 %. Pour ce faire, des « chocs » sont appliqués aux scénarios de base sur les risques liés à l'assurance-vie.

Sous-module	Choc
Mortalité	+ 15 % sur les $q_{x,i}$
Longévité	Non significatif (prévoyance)
Invalidité (provisions de sinistre)	$\begin{cases} +35 \% \text{ sur les taux d'incidence} \\ -20 \% \text{ sur la probabilité de retour à l'autonomie} \end{cases}$
Chutes	Non significatif (prévoyance)
Dépenses	+10 %
Changement législatif	+3 % des primes
Catastrophe	$q_{x,i} + 0,15 \%$

Tableau 6 – Chocs sur les sous-modules du SCR "Life"
Source : Spécifications techniques, QIS 5, p.147-160

Les chutes et la longévité ne sont pas prises en compte dans le calcul du SCR car elles n'entrent pas en compte dans l'évaluation du risque technique des contrats de prévoyance. Elles sont cependant importantes dans le calcul d'un SCR pluriannuel car les effets d'actualisation et de paiements anticipés (chutes) ont un impact négatif, tandis que la longévité peut avoir un effet positif sur le capital en cas d'engagement de paiement basé sur le décès. Enfin, nous obtenons le montant global du SCR en utilisant la matrice de corrélation donnée par le EIOPA :

	Mortalité	Longévité	Invalidité	Chutes	Dépenses	Changement législatif	Catastrophe
Mortalité	1						
Longévité	-0.25	1					
Invalidité	0.25	0	1				
Chutes	0	0.25	0	1			
Dépenses	0.25	0.25	0,5	0,5	1		
Changement législatif	0	0.25	0	0	0,5	1	
Catastrophe	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0	1

Tableau 7 : Matrice de corrélation du module de souscription Vie du QIS 5

Une fois les sous-modules calculés, on peut utiliser la formule suivante, donnée par le EIOPA :

$$SCR_{Life} = \sqrt{\sum CorrLife_{l,c} Life_l Life_c}$$

En effet, certains risques « compensent » d'autres risques (mortalité et longévité, mortalité et invalidité, etc.).

Le capital réglementaire est déterminé en soustrayant la prime sans choc de la prime avec choc aux différents modules.

Dans la pratique, cette approche ne peut être appliquée dans la majorité des cas par le réassureur dans les contrats non-proportionnels.

b) Le modèle interne

Dans le cadre de notre étude, nous souhaitons une même approche du risque dans la tarification et le calcul du capital pour risque. Nous utiliserons donc les mêmes méthodes de modélisation que celles de la tarification en distinguant les approches Non-Vie, qui correspond à notre modèle fréquence-coût, et Vie, basée sur des lois d'incidence et un portefeuille individuel.

i. Modèle fréquence-coût

Nous reprenons le modèle collectif de calcul de la charge sinistre. Pour le modèle interne, nous souhaitons une approximation de cette charge sinistre par le biais de simulations, étant donné la complexité du produit de convolution en formule fermée.

On simule:

$$S_k = \sum_{i=1}^N X_i$$

- On détermine pour chaque traité de réassurance le nombre N de sinistres en réassurance (ou au dessus d'un seuil), avec $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (ou $N|X_i > S_0 \sim \text{Poisson}(\lambda)$)
- On détermine pour chaque traité de réassurance la loi du coût unitaire de sinistre en réassurance, avec dans notre cas : $X_i \sim \text{LogNormale}(\mu, \sigma, S_0)$ ou $X_i \sim \text{GPD}(\xi, \sigma, S_0)$
- S_k est le $k^{\text{ème}}$ résultat technique annuel simulé

ii. Modèle de la somme composée de Bernoulli

Le risque des portefeuilles individuels est modélisé de la même manière dans la tarification et le capital économique :

On simule:

$$S_k = \sum_{i=1}^n X_i * SaR_i^{Ré}$$

- On connaît pour chaque assuré i la somme sous risque en réassurance $SaR_i^{Ré}$
- On connaît pour chaque assuré le taux de mortalité annuel, avec dans notre cas : $X_i \sim \text{Bernoulli}(q_{x,i})$
- S_k est le $k^{ème}$ résultat technique annuel simulé

iii. Prise en compte de la probabilité de ruine

- Critère de la Value at Risk à $(1 - \alpha) \%$

Nous cherchons ici le quantile à $(1 - \alpha) \%$, c'est-à-dire le nombre x tel que $P(S \leq x) = (1 - \alpha) \%$. Dans le cadre des simulations, nous étudions l'ensemble des n scénarios générés et nous cherchons la solution du système suivant :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{S_k > x}}{n} = \alpha \%$$

Nous utilisons cet estimateur dans la mesure où un nombre assez « grand » de simulations est fait et qu'il est particulièrement simple à déterminer. Nous avons alors $x = VaR(S_i; \alpha)$

- Critère de la Tail Value at Risk à $(1 - \beta) \%$

Le montant recherché est ici une moyenne de sinistre au-delà du quantile x trouvé précédemment :

$$TVaR(S_i; \beta) = \frac{\sum S_k * \mathbb{I}_{S_k > VaR(S_i; \beta)}}{\sum \mathbb{I}_{S_k > VaR(S_i; \beta)}}$$

Cette mesure étant plus conservatrice que la Value at Risk à 99,5 %, on a généralement des niveaux d'exigence plus bas ($\beta \approx 99 \%$) .

3. Intégration du capital dans la tarification

a) Cibles de rentabilité

Le coût du capital représente le montant que l'on aurait pu générer à partir des fonds bloqués pour le capital économique et qui n'ont souvent été placés qu'au mieux, à un taux sans risque. Il pose donc la question de la valorisation du coût d'opportunité. Pour l'évaluer, nous utiliserons des critères de profitabilité tels que le taux de rendement interne (TRI) ou le Return on Equity (RoE). En effet, ils représentent les cibles de rendement sur fonds propres que fixent les actionnaires.

- Taux de rentabilité interne (TRI) :

Le TRI est un outil de décision à l'investissement. Un projet d'investissement ne sera généralement retenu que si son TRI prévisible est suffisamment supérieur au taux bancaire, pour tenir compte notamment de la prime de risque propre au type de projet.

$$\text{Valeur actuelle nette (VAN)} = \sum_{p=1}^N \frac{FT_p}{(1 + TRI)^p} - I = 0$$

Avec :

- FT_p montant du $p^{\text{ème}}$ flux de trésorerie
- p la date à laquelle le FT_p est encaissé
- N le nombre de flux FT (hors investissement)
- I l'investissement initial à la date 0

La somme des flux actualisés au taux de rendement ciblé doit être supérieure ou égale à au capital investi.

- Le Return on Equity (RoE):

$$RoE = \frac{\text{Résultats nets}}{\text{capitaux propres}}$$

L'indice mesure en pourcentage le rapport entre le résultat net et les capitaux propres investis par les actionnaires.

b) Intégration du coût du capital dans la tarification

Le coût du capital constitue donc la rémunération attendue par l'actionnaire.

Pour calculer le coût du capital, il faut donc déterminer le « surplus » au tarif qui permet, malgré l'investissement placé au taux sans risque, d'atteindre la rentabilité souhaitée. Cette démarche comporte néanmoins une difficulté logique car on calcule le chargement de la prime en fonction du capital économique, qui est lui-même déterminé à partir de la prime encaissée. C'est pourquoi nous prendrons ici l'hypothèse que le capital économique EC est la dernière évaluation interne, qui ne tient donc pas compte de la nouvelle prime :

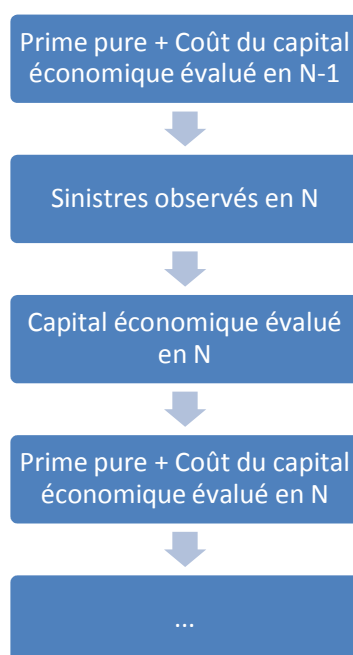


Schéma 2 : Diagramme du processus de tarification

On suppose que la prime commerciale est encaissée en début d'exercice.

Soit :

- EC le capital propre tel que $EC = \text{Max}(\text{capital économique}, \text{capital réglementaire})$
- sinistres le montant global de sinistre attendu (prime pure)
- TRI_{cible} le taux de rendement interne recherché
- τ_{sr} le taux sans risque
- $\%commissions$ le taux de commissions, basé sur la prime commerciale
- $\%courtage$ le taux de courtage, basé sur la prime commerciale
- $\%frais$ les dépenses du réassureur, que l'on basera ici également sur la prime commerciale
- P_{com} la prime commerciale finale du réassureur
- IS le taux d'imposition sur les bénéfices

	<i>T=0</i>	<i>T=1</i>
<i>Débit</i>	<i>EC</i>	<i>sinistres</i> <i>%commissions * P_{com}</i> <i>%courtage * P_{com}</i> <i>%frais * P_{com}</i> <i>Max(impôt sur les bénéfices, 0)</i>
<i>Crédit</i>	<i>P_{com}</i>	<i>Intérêts sur capital τ_{sr} * EC</i> <i>EC</i>

Tableau 8 – Compte de résultat technique en début et en fin d'exercice

- Critère du taux de rentabilité interne (TRI)

On a donc : $-EC + P_{com} = (1 - IS) * (P_{com}(1 - \%courtage - \%commissions - \%frais) - \text{sinistres} + \tau_{sr} * EC) + \frac{EC}{(1 + TRI_{cible})}$

D'où :

$$P_{com} = \frac{\left(\left(EC - \frac{EC}{(1 + TRI_{cible})} \right) * \frac{1}{(1 - IS)} \right) + \text{sinistre} + \text{courtage} + \text{commissions} + \text{frais} - \tau_{sr} * EC}{1 - \%courtage - \%commissions - \%frais}$$

- Critère du return on equity (RoE)

Avec les mêmes flux en crédit et en débit, nous pouvons également déterminer la prime commerciale en fonction d'une cible de taux RoE_{cible} :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Résultats nets}}{\text{Capitaux propres}} &= RoE_{cible} \\ &\Leftrightarrow \frac{(P_{com} - \text{sinistres} - \text{courtage} - \text{commissions} - \text{frais} + \tau_{sr} * EC) * (1 - IS)}{EC} \\ &= RoE_{cible} \end{aligned}$$

D'où :

$$P_{com} = \frac{RoE_{cible} * EC}{1 - IS} - \tau_{sr} * EC + \text{sinistres} + \text{courtage} + \text{commissions} + \text{frais}$$

Nous avons donc le coût du capital CoC tel que :

$$CoC = P_{com} - \text{sinistres} - \text{courtage} - \text{commissions} - \text{frais}$$

Le coût du capital se matérialise comme la majoration à appliquer au tarif pur.

IV. Simulations et résultats

Nous souhaitons déterminer, pour chaque méthode de tarification, le capital réglementaire correspondant. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode classique de Monte Carlo afin d'obtenir une vision de la distribution globale des sinistres en réassurance. Le risque sous-jacent au capital dépend alors des modèles de tarification précédemment décrits :

- Le modèle individuel des « sommes composées de Bernoulli »

Nous nous appuierons sur deux portefeuilles individuels A et B détaillés pour illustrer les VaR et TVaR en fonction des différents niveaux de priorité.

- Le modèle collectif « fréquence-coût »

Nous utiliserons d'abord les deux portefeuilles individuels afin de valider les hypothèses de cohérence entre les modèles collectif et individuel. Nous nous appuierons par ailleurs sur un traité collectif belge pour illustrer le comportement particulier d'un traité. Puis nous nous appuierons sur un portefeuille de plusieurs traités collectifs tarifés selon le modèle fréquence-coût pour connaître les effets de diversification à l'échelle du portefeuille de réassurance.

- Le modèle collectif par exposition

Nous utiliserons les données de modélisation (paramètres de coût de sinistre) de deux traités collectifs ainsi que les caractéristiques démographiques d'un traité individuel afin de simuler une modélisation hybride pour les traités collectifs.

- Les approximations de la charge sinistre dans le modèle individuel

Nous appliquerons les méthodes d'approximation du modèle individuel afin de les comparer aux simulations du modèle des sommes composées de Bernoulli.

1. Profils de portefeuille

a) Portefeuilles individuels

Dans le cas de la prévoyance individuelle, les données d'exposition sont généralement données. Cette réassurance non-proportionnelle est souvent abusivement appelée « excédent de plein annuel » car on estime a priori l'exposition sur chaque tête, les sommes sous risque individuelles étant connues. On utilisera deux portefeuilles aux profils de risques significativement différents pour l'application numérique au modèle individuel.

A) Un portefeuille de polices temporaire-décès

Les temporaire-décès comportent généralement des capitaux sous risque inférieurs à ceux des contrats de prévoyance collective indexés sur le salaire, ou ceux de l'assurance emprunteur

indexés sur la valeur d'un bien immobilier. Il y a par ailleurs généralement un plafond maximal par police qui permet d'éviter les considérations sur les pertes maximales probables.

	<i>Portefeuille temporaires-décès</i>
<i>Nombre d'assurés</i>	88 000
<i>Somme moyenne (€)</i>	49 000
<i>Somme sous risque globale (€)</i>	4,3 Mds
<i>Somme maximum assurée (€)</i>	400 000
<i>Répartition hommes/femmes</i>	48 % / 52 %
<i>Age (moyen, max)</i>	(45, 70)
<i>Indice de volatilité : $\sigma[X] / E[X]$</i>	92 %
<i>Montant total de sinistres attendus (€)</i>	9 650 000

Tableau 9 - Caractéristiques du portefeuille temporaires-décès

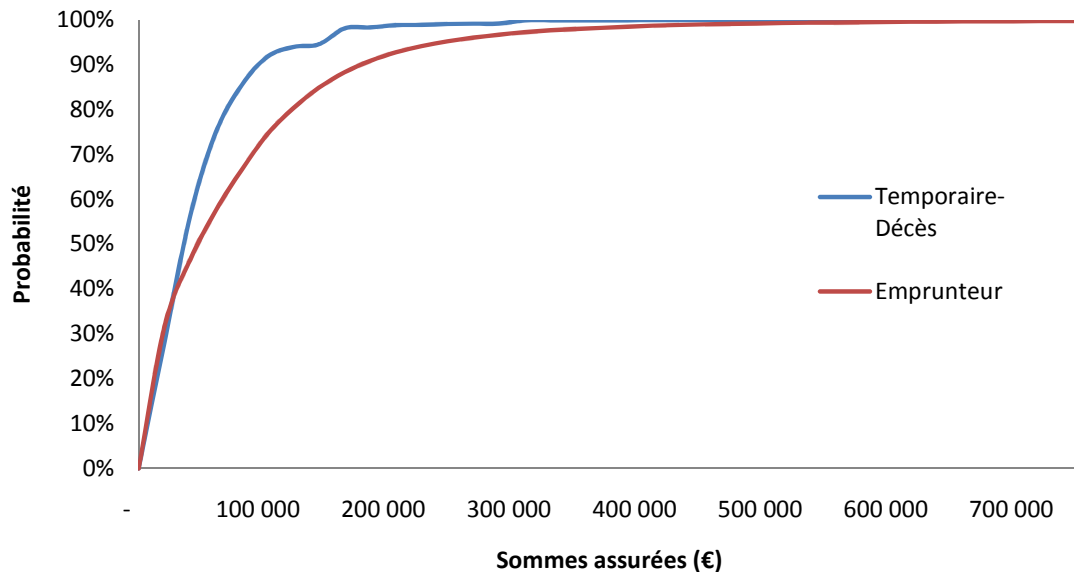
B) Un portefeuille emprunteur

Ce portefeuille contient des emprunts immobiliers pour des résidences principales et des emprunts professionnels dont les sommes assurées sont beaucoup plus importantes que la moyenne des prêts de particuliers (achat d'outils et logistique pour pharmaciens, professions médicales, artisans, etc.).

	<i>Portefeuille emprunteur</i>
<i>Nombre d'assurés</i>	189 000
<i>Somme moyenne (€)</i>	77 000
<i>Somme sous risque globale (€)</i>	14,4 Mds
<i>Somme maximum assurée (€)</i>	9 000 000
<i>Répartition hommes/femmes</i>	72 % / 28 %
<i>Age (moyen, max)</i>	(46, 84)
<i>Indice de volatilité : $\sigma[X] / E[X]$</i>	155 %
<i>Montant total de sinistres attendus (€)</i>	35 500 000

Tableau 10 - Caractéristiques du portefeuille Emprunteur

Les deux traités ont donc des profils particulièrement différents en raison non seulement de leur population mais aussi et surtout des disparités de sommes sous risque :



Graphique 3 – Fonctions de répartition des sommes sous risque des portefeuilles A et B

b) Traité collectif

i. Validation des hypothèses du modèle fréquence-coût

Utilisons les données des deux portefeuilles précédents afin de valider notre hypothèse de rattachement de la distribution des sinistres à celle des sommes sous risque dans le modèle fréquence-coût.

- Loi de coût de sinistre

Nous testerons quatre lois classiques modélisant la répartition asymétrique à gauche et une queue de distribution étalée vers la droite :

- La loi exponentielle
- La loi Gamma
- La loi de Pareto généralisée (GPD)
- La loi log-normale

	λ	α	β	μ	σ	k	$S0$
Pareto		0,6416	7377,6				
GPD				7473,8	38 991	0,0622	
LogNormale				10,316	0,94893		3322,1
Exponentielle	0,0000204						
Gamma		1,1854	41 380				

Tableau 11 – Résultats d'ajustement des sommes sous risque pour le portefeuille A

	Kolmogorov-Smirnov	Anderson Darling
Pareto	0,25604	7 864,20
GPD	0,06687	917,23
LogNormale	0,06692	418,84
Exponentielle	0,15379	2 338,10
Gamma	0,11719	1 317,90

Tableau 12 – Distances des sommes sous risque pour le portefeuille A

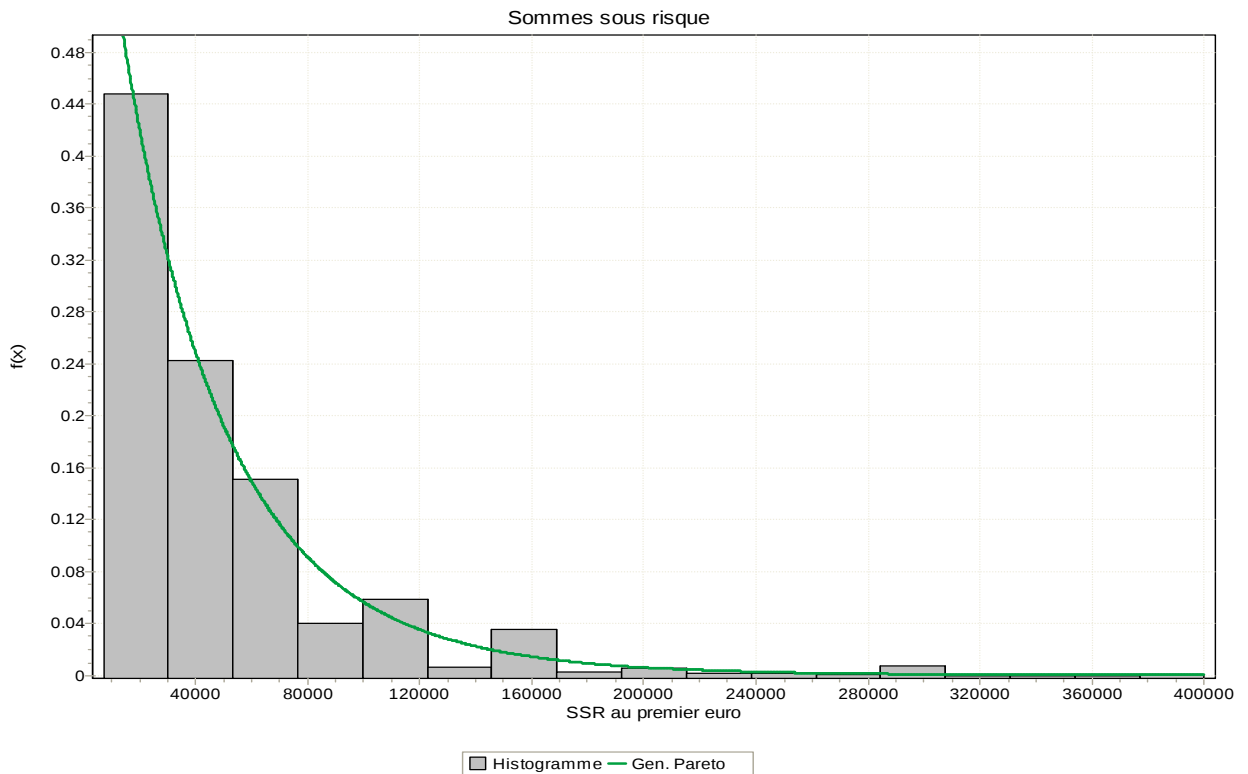
	λ	α	β	μ	σ	k	S_0
Pareto		0,11527	6				
GPD				-1833,5	61 353	0,2624	
LogNormale				10,6	1,2778		-1704,2
Exponentielle	1,23E-05						
Gamma		0,08055	1,01E+06				

Tableau 13 – Résultats d'ajustement des sommes sous risque pour le portefeuille B

	Kolmogorov-Smirnov	Anderson Darling
Pareto	0,44216	59 564
GPD	0,02982	435,1
LogNormale	0,06363	1 383,8
Exponentielle	0,09394	3 790,5
Gamma	0,58374	112 740

Tableau 14 – Distances des sommes sous risque pour le portefeuille B

On peut remarquer que les sommes assurées au premier euro peuvent être approchées dans les deux types de portefeuille par les distributions de coût usuelles telles que la Pareto généralisée ou la loi log-normale, ce qui valide notre hypothèse d'approche des sommes sous risque par les sinistres.



Graphique 4 - Ajustement des sommes sous risques à une loi GPD (portefeuille A)

- Loi de fréquence

Le choix de la loi de Poisson généralement utilisée pour modéliser le nombre de décès annuel peut s'expliquer à partir des lois de mortalité usuelles.

Soit $d_{x n}$ le nombre de décès annuels attendus dans un portefeuille de n assurés et $q_{x i}$ la probabilité de décès du $i^{\text{ème}}$ assuré d'âge x . Nous avons alors dans le modèle individuel :

$$d_{x n} = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

Avec $X_i \sim \text{Bernoulli}(q_{x i})$

D'où : $d_{x n} = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n q_{x i}$

D'autre part :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n q_{x i} * (1 - q_{x i}) \approx d_{x n}$$

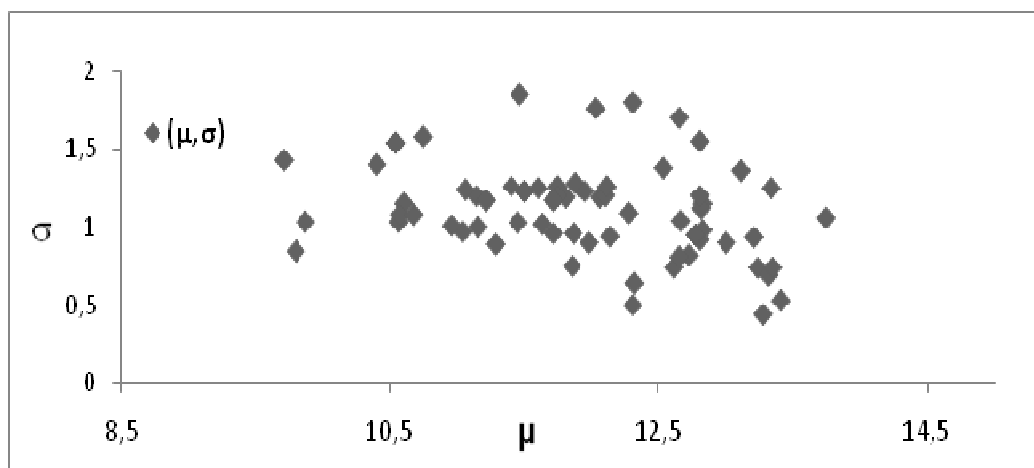
Car $(1 - q_{x i}) \approx 1$

On a donc la relation $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \approx \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$ qui valide notre approche.

ii. Données de portefeuille

Prenons 43 affaires non-proportionnelles (hors CAT) en France et en Belgique. Nous supposons que ces chiffres sont assez représentatifs du marché français de la réassurance non-proportionnelle en 2010.

La majeure partie des affaires non-proportionnelles annuelles en France sont tarifées selon la méthode fréquence-coût et plus particulièrement les modélisations des sinistres unitaires par les lois log-normale et Pareto. Pour la log-normale, dont on a ajusté les paramètres sur tous les traités, on a le nuage de points suivant :



Graphique 5 – Nuage de points des couples (μ, σ) des traités non-proportionnels

De même, nous avons estimé les paramètres de tarification selon une loi de Pareto Généralisée (GPD). Dans les deux modélisations, log-normale et GPD, les paramètres tiennent compte de données « As-If » et donc, d'un historique généralement assez conséquent, c'est-à-dire d'au moins quatre ans.

Cédante	Type	Priorité	Portée	Décès toutes causes	Décès accidentel	Invalidité
1	Groupe	180000	2500000	X		X
2	Groupe	280000	5200000	X		X
3	Indiv + Groupe	140000	3460000	X		X
4	Groupe	230000	2300000	X		
5	Groupe	150000	2300000			X
6	Groupe	933609	4205318		X	X
7	Groupe	933609	4205318	X		X
8	Indiv + Groupe	370000	3930000	X		X
9	Indiv	175000	1325000	X		X
10	Groupe	250000	3000000	X		X
11	Groupe	6000000	24000000	X		X
12	Indiv + Groupe	550000	4550000	X		X
13	Groupe	250000	5750000	X		
14	Groupe	500000	5500000			X
15	Groupe	3000000	2000000		X	X
16	Indiv	500000	500000		X	
17	Groupe	1400000	2400000	X		X

18	Indiv + Groupe	500000	1500000		X	
19	Indiv + Groupe	3000000	11000000	X		
20	Indiv + Groupe	1000000	1000000	X		
21	Groupe	450000	4050000	X		X
22	Indiv	750000	550000		X	X
23	Indiv + Groupe	300000	4700000	X		
24	Groupe	300000	4000000	X		X
25	Indiv	500000	3000000	X		X
26	Groupe	250000	750000	X		X
27	Groupe	1000000	2000000	X		X
28	Groupe	800000	5200000			X
29	Groupe	500000	500000	X		
30	Groupe	7000000	1000000	X		
31	Groupe	500000	300000			X
32	Groupe	2250000	1750000	X		X
33	Groupe	300000	1950000	X		X
34	Groupe	1000000	2000000	X		X
35	Groupe	420000	3600000	X		
36	Indiv	115000	485000		X	X
37	Groupe	175000	825000	X		X
38	Groupe	650000	1650000	X		X
39	Groupe	550000	1750000			X
40	Groupe	125000	375000	X		X
41	Groupe	500000	2500000	X		X
42	Indiv	300000	4500000	X		
43	Indiv	500000	500000		X	

Tableau 15 – Caractéristiques des traités non-proportionnels simulés dans le modèle collectif

Nous effectuerons environ 50 000 simulations de l'ensemble du portefeuille de réassurance non-proportionnelle sur les risques décès, décès accidentel et invalidité.

c) Modélisation du collectif par exposition

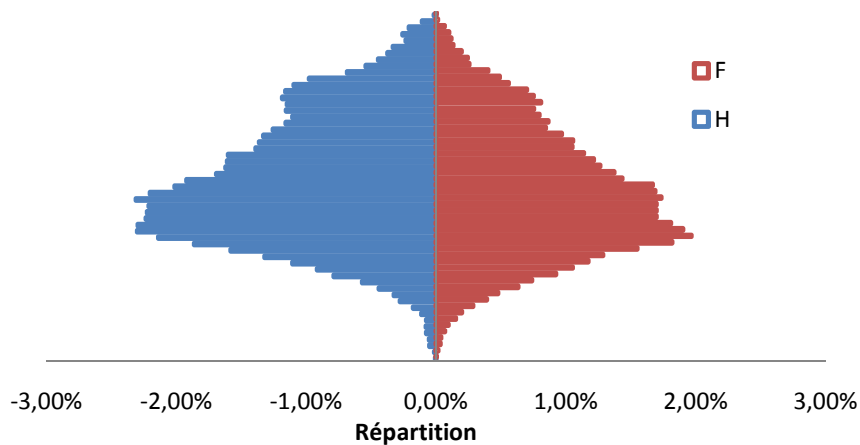
Nous souhaitons avoir une image plus détaillée du portefeuille pour pouvoir examiner tous les risques inhérents à la mortalité ou l'invalidité. En effet, une vision individualisée (« tête par tête ») du risque permet de mieux observer les contingences (subventions croisées, accroissement du risque, différences de sommes assurées, etc.) et utiliser les lois de mortalité ou d'incidence en invalidité. C'est pourquoi, dans une logique de modèle interne, nous utiliserons des hypothèses de portefeuilles conciliant l'ensemble des affaires en portefeuille du réassureur.

i. Démographie du portefeuille

Nous nous appuierons sur une répartition d'expérience d'un portefeuille temporaires-décès de marché, supposé représentatif.

Soit :

- i l'âge atteint de l'assuré ($i = 18, \dots, 72$)
- j le sexe de l'assuré ($j = 0$ si homme, $j = 1$ sinon)
- $r_{i,j}$ la probabilité que l'individu soit d'un âge i et de sexe masculin (0) ou féminin (1).



Graphique 6 – Pyramide des âges avec distinction Hommes/Femmes

Nous ajustons ensuite les répartitions par âge en fonction des montants : les sommes assurées sont croissantes avec l'âge en individuel et en groupe (salaires croissants avec l'ancienneté, patrimoine accumulé, épargne, etc.).

Soit $x = (x_{18}, x_{19}, \dots, x_{72})$ le vecteur des sommes assurées moyennes par âge. On pose :

$$\Delta_k = \frac{x_k}{\sum_{j=0}^{j=1} \sum_{i=18}^{i=72} r_{i,j} * x_i}$$

Pour refléter l'hétérogénéité du capital sous risque en fonction de l'âge, nous composerons la loi de sinistres (ou de sommes assurées) par une loi θ telle que :

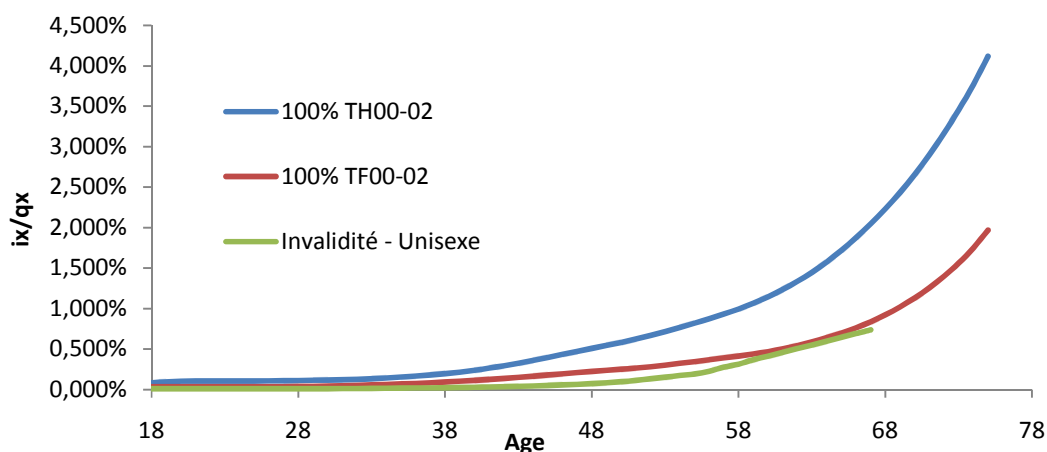
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{72}\} \text{ avec } P(\theta = \theta_k) = \Delta_k \\ E(\theta) = 1 \end{array} \right.$$



Graphique 7 – Variation des sommes sous risque par âge

ii. Mortalité/Morbidité du portefeuille

Nous choisissons d'utiliser ici les tables statutaires TH00-02 et TF00-02. Lors des simulations, nous utiliserons plusieurs choix de facteur pour générer les scénarios de sinistralité (de 25 à 50 % TH00-02/TF00-02). Si la garantie incapacité-invalidité est couverte, nous ajouterons une loi d'incidence en invalidité ainsi qu'un taux de décès accidentel uniforme avec l'âge à 0.004 % pour les couvertures accident.



Graphique 8 – Hypothèses de mortalité et d'invalidité dans le modèle collectif par exposition

iii. Distribution des sommes assurées

La réassurance non-proportionnelle a pour particularité de devoir exprimer un modèle interne à partir de données qui sont parfois très partielles. Autrement dit, un certain nombre d'hypothèses doivent être faites quant aux sommes assurées. Dans le cas de portefeuilles groupes, les données détaillées pour chaque exposition ne sont pas toujours disponibles, y compris pour les cédantes. En effet, ces dernières déléguant une partie de leur gestion à des courtiers, une partie des données de portefeuille est filtrée. Il est par ailleurs notable que sur les gros portefeuilles de prévoyance collective, les différences de prestations entre salariés d'une même entité, même lorsqu'il s'agit encore de petites/moyennes entreprises, peuvent être significatives. Dans un but de comparer les méthodes fréquence-coût et par exposition, nous souhaitons néanmoins prendre des hypothèses de distribution des sommes sous risque. Pour ce faire, nous approchons cette distribution par celle des coûts de sinistre. Nous utiliserons les paramètres estimés des lois des « excédents » en rabaisant le seuil à 30 000 euros dans le cadre d'une loi GPD.

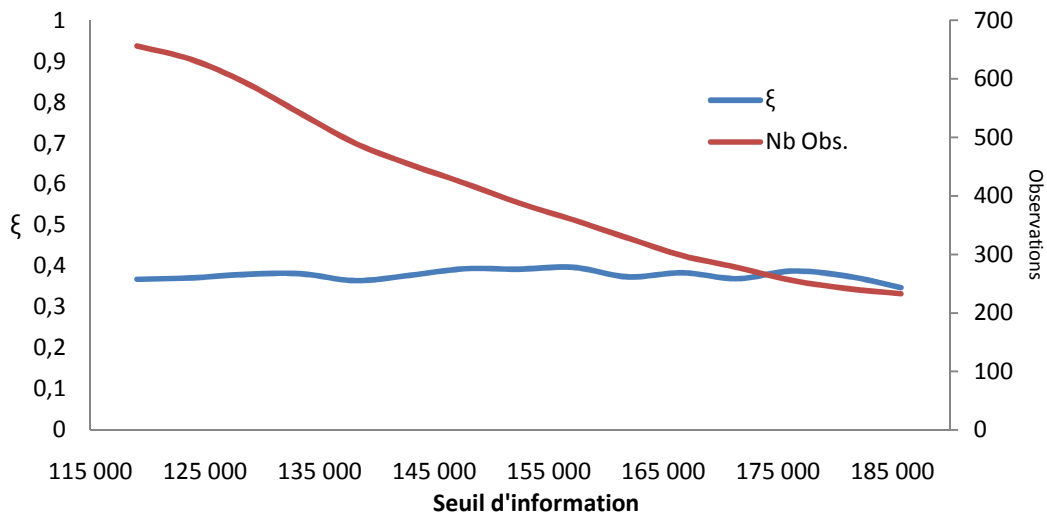
Nous prendrons deux portefeuilles collectifs qui ont un historique ancien (> 7 ans) et suffisamment de données de sinistres inférieurs et proches de la priorité :

Cédante	Type	Priorité	Portée
1	Groupe	160000	3500000
2	Groupe	180000	4600000

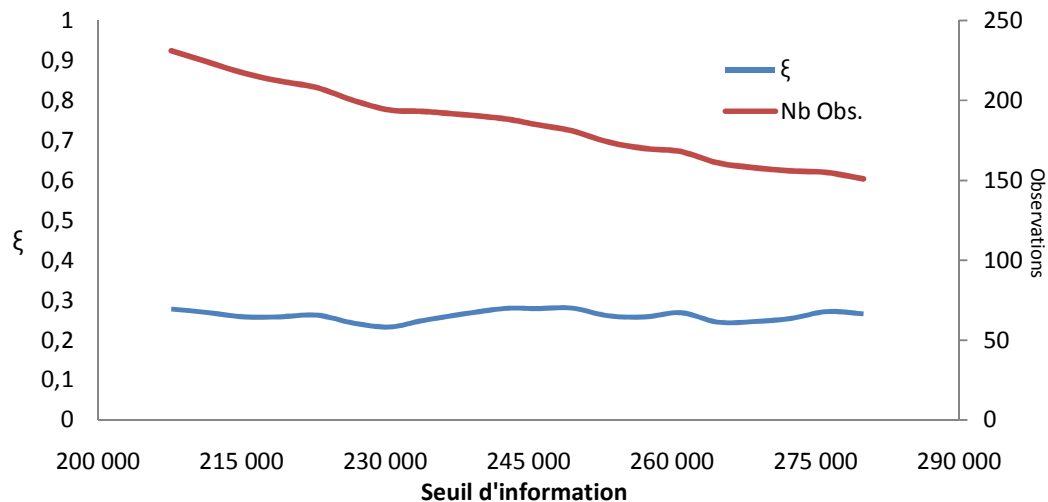
Tableau 16 – Deux traités utilisés pour simuler l'exposition aux sommes sous risque

Rappel : Si les excédents de sinistre au dessus d'un seuil d'information u suivent une loi de Pareto généralisée $GPD(\xi, \beta, v)$ alors pour un autre seuil d'information ($u > v$), les excédents de sinistre suivent également une loi de Pareto généralisée $GPD(\xi, \beta_u, u)$ où $\beta_u = \beta - \xi u$.

$$P(X - u < x | X > u) = \frac{(1 - \xi u / \beta)^{1/\xi} - (1 - \xi(x + u) / \beta)^{1/\xi}}{(1 - \xi u / \beta)^{1/\xi}} = 1 - (1 - \xi \frac{x}{\beta - \xi u})^{1/\xi}$$



Graphique 9 – Stabilité du paramètre ξ (Traité 1)



Graphique 10 – Stabilité du paramètre ξ (Traité 2)

Il est difficile d'obtenir une stabilité du paramètre ξ car il est très sensible à la qualité et la robustesse des données mais permet d'approcher la courbe avant le seuil d'information en prenant comme hypothèse une constance du paramètre.

2. Méthodologie et résultats

a) Comparaisons des modèles

i. Méthodes de simulation

- Génération de variables aléatoires

La méthode utilisée pour les variables continues est l'inversion de la fonction de répartition. Si U est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ alors :

$$X = S0 + \frac{\sigma(U^{-\xi} - 1)}{\xi} \sim GPD(S0, \sigma, \xi)$$

$$X = S0 + e^{(\mu + \sigma \Phi^{-1}(U))} \sim LogNormale(\mu, \sigma, S0)$$

$$X = \mathbb{I}_{\{U < q_x\}} \sim Bernoulli(q_x)$$

- Méthode de Monte-Carlo

L'une des techniques de simulation la plus communément utilisée est la méthode de Monte-Carlo. Elle consiste à utiliser des nombres uniformes compris entre 0 et 1 et appliquer la réciproque de la distribution de probabilité simulée, pour obtenir un grand nombre de scénarios.

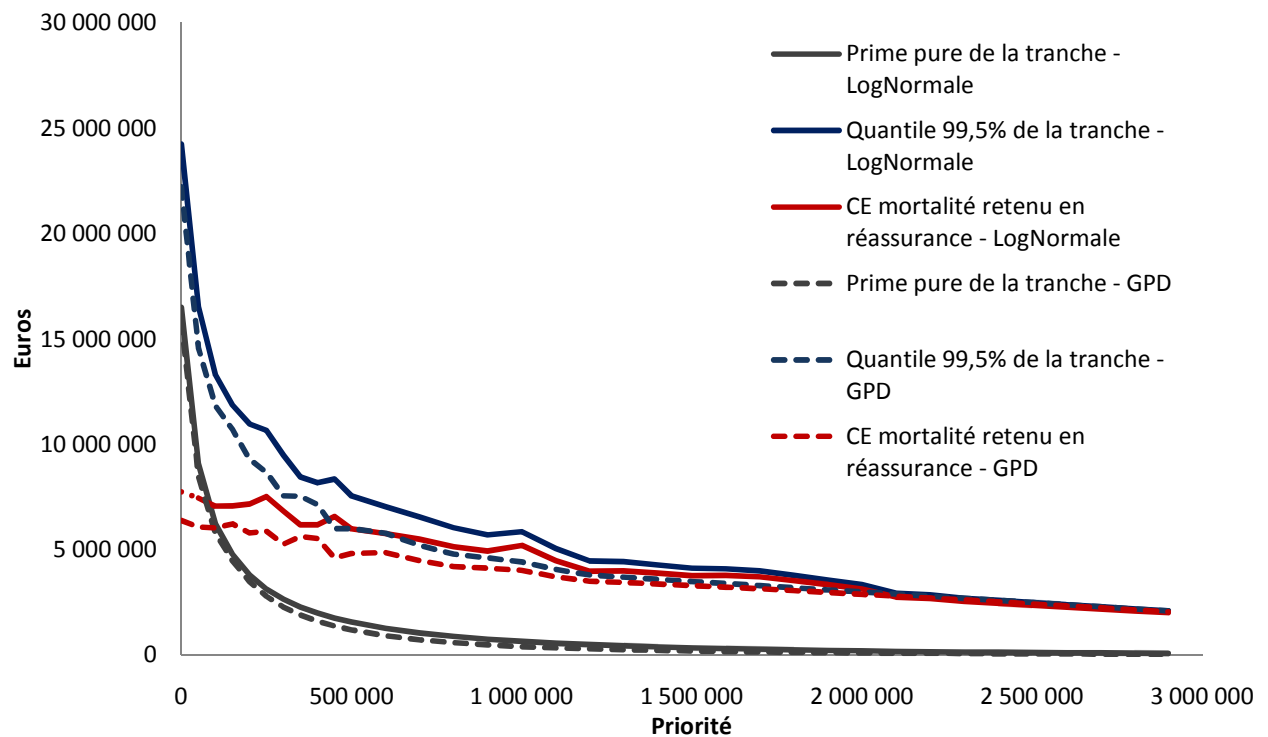
Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'on effectue des opérations entre des distributions qui ne sont pas identiquement distribuées et qui n'ont pas de formule fermée. Dans les deux modèles internes de mortalité étudiés, les modèles collectif et individuel font appel à la conjonction de plusieurs lois différentes.

ii. Résultats des simulations sur le portefeuille

Pour illustrer le comportement des exigences en fonds propres dans un contexte probabiliste, nous déterminons l'évolution du capital économique en fonction des priorités de réassurance non-proportionnelle et une portée fixe de 5 millions d'euros.

- Modèle collectif

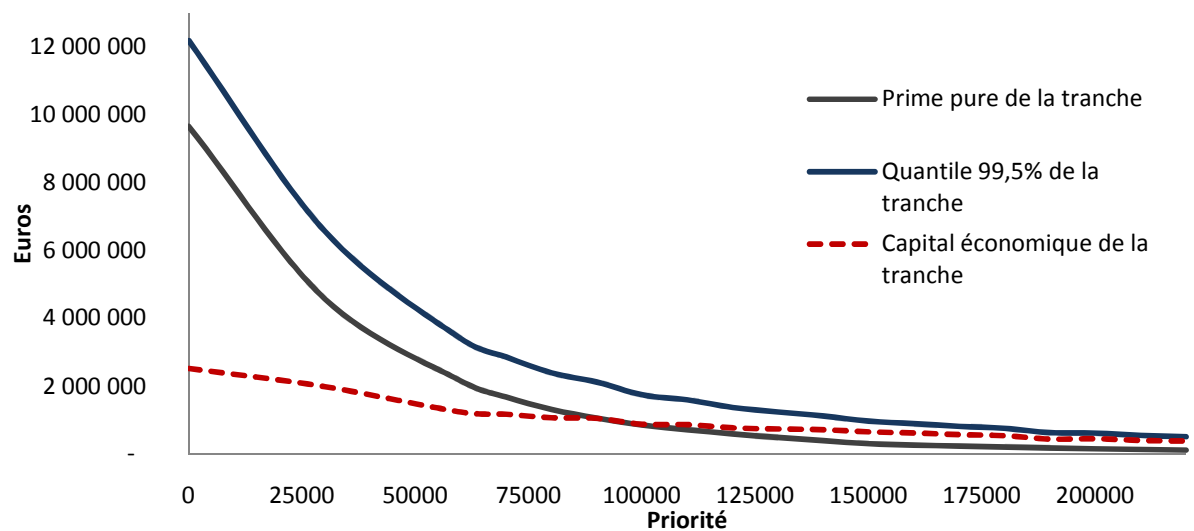
Nous modélisons un excédent de sinistre d'un traité de prévoyance collective à partir des données de sinistre As-if selon les modélisations Poisson – LogNormale et Poisson – GPD. Nous avons modélisé un excédent de sinistre avec un sinistre unitaire maximum probable de 5 millions d'euros. Autrement dit, la portée est adaptée de telle sorte que le plafond (qui est égal à la somme de la portée et de la priorité) soit toujours égal à 5 millions d'euros. Les deux modélisations donnent des primes de réassurance proches : les écarts sont inférieurs à 10 %. Mais la queue de distribution de sinistre plus lourde de la loi log-normale donne des quantiles de distribution 15 à 30 % plus élevés. Cependant, il est à noter qu'à partir de 2 millions d'euros de priorité, les quantiles convergent dans les deux distributions, vers la portée du traité.



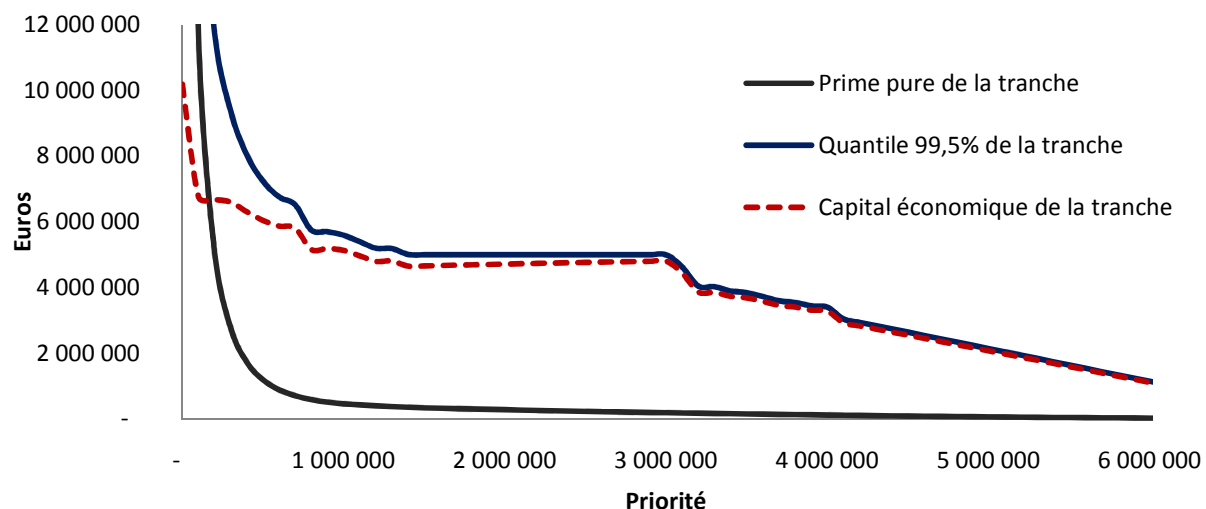
Graphique 11 - Evolution du capital économique dans le modèle fréquence-coût (Portefeuille collectif)

Le capital économique « pur » est ici analysé comme la différence entre le quantile à 99,5% des sinistres (mortalité) et la prime pure du réassureur (montant équivalent à un choc, hors frais).

- Modèle individuel



Graphique 12 - Evolution du capital économique dans le modèle individuel (Portefeuille A)

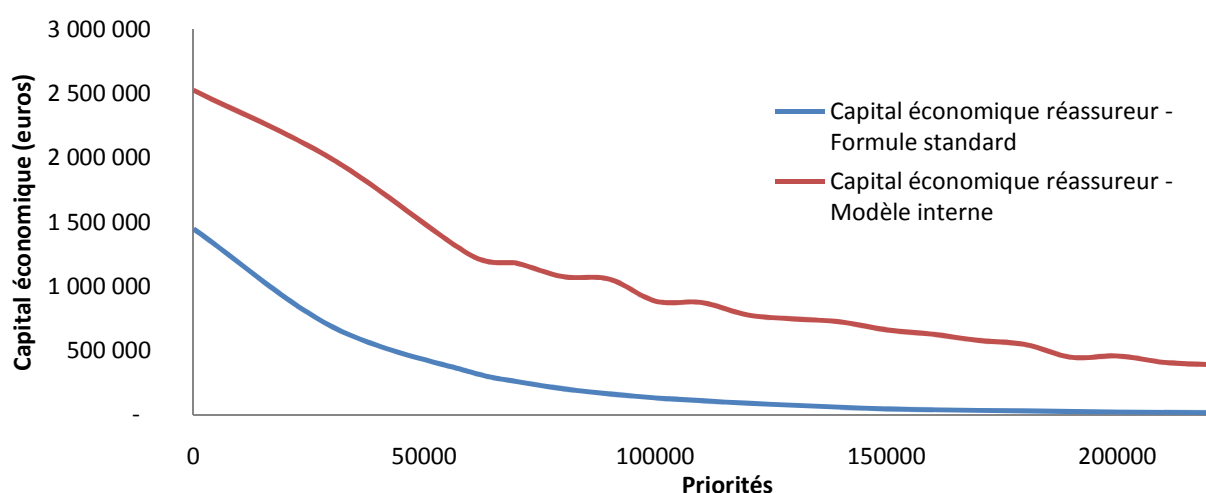


Graphique 13 - Evolution du capital économique dans le modèle individuel (Portefeuille B)

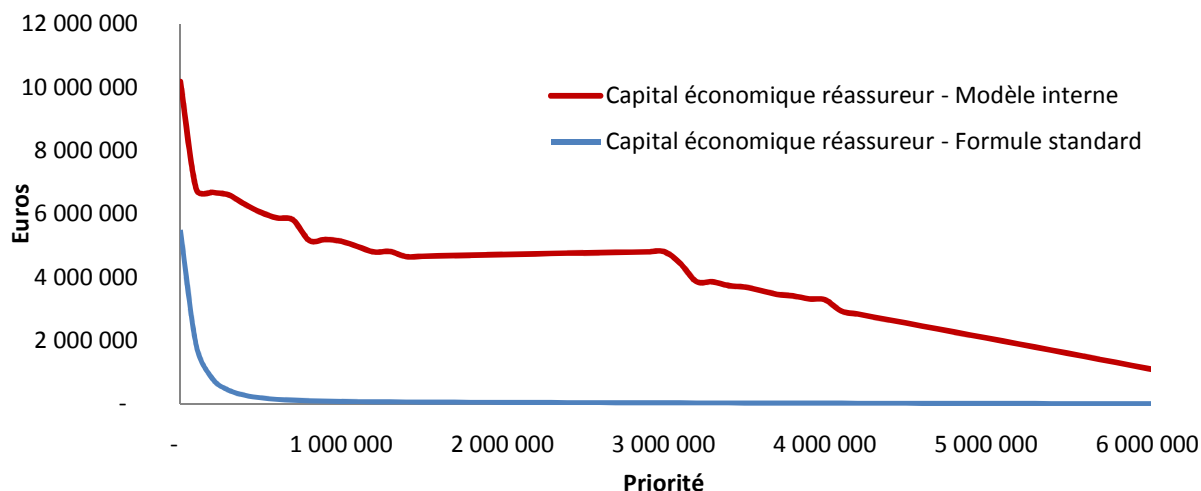
La prime pure est déterminée à partir d'une table de mortalité à 45 % de la TH00-02 pour l'ensemble du portefeuille.

La différence fondamentale entre les 2 portefeuilles est le comportement du quantile de la distribution de la charge sinistre par rapport à la prime pure : Dans le portefeuille temporaire-décès (A), la prime pure et le quantile sont très corrélés car la volatilité est faible et les valeurs extrêmes inexistantes tandis que le portefeuille Emprunteur (B) préserve un quantile de distribution élevé et constant lorsque la priorité est entre 750 000 euros et 3 millions d'euros. Ce niveau de quantile s'interprète dans les scénarios générés comme les cas où un seul sinistre intervient et traverse entièrement la tranche.

iii. Comparaison du modèle interne et de la formule standard pour la mortalité



Graphique 14 - Capital économique mortalité du réassureur: modèle interne et formule standard (Portefeuille A)



Graphique 15 - Capital économique mortalité du réassureur: modèle interne et formule standard (Portefeuille B)

Il apparaît que la formule standard pour la mortalité est sous-calibrée dans nos deux exemples. Pourtant, dans le portefeuille temporaire-décès (A) les résultats du modèle interne semblent suivre une même forme de courbe que la formule standard, quel que soit le montant de la priorité. Cependant, le modèle interne donne des montants à immobiliser pour une VaR à 99,5 % qui sont environ 60 % supérieurs à la formule standard.

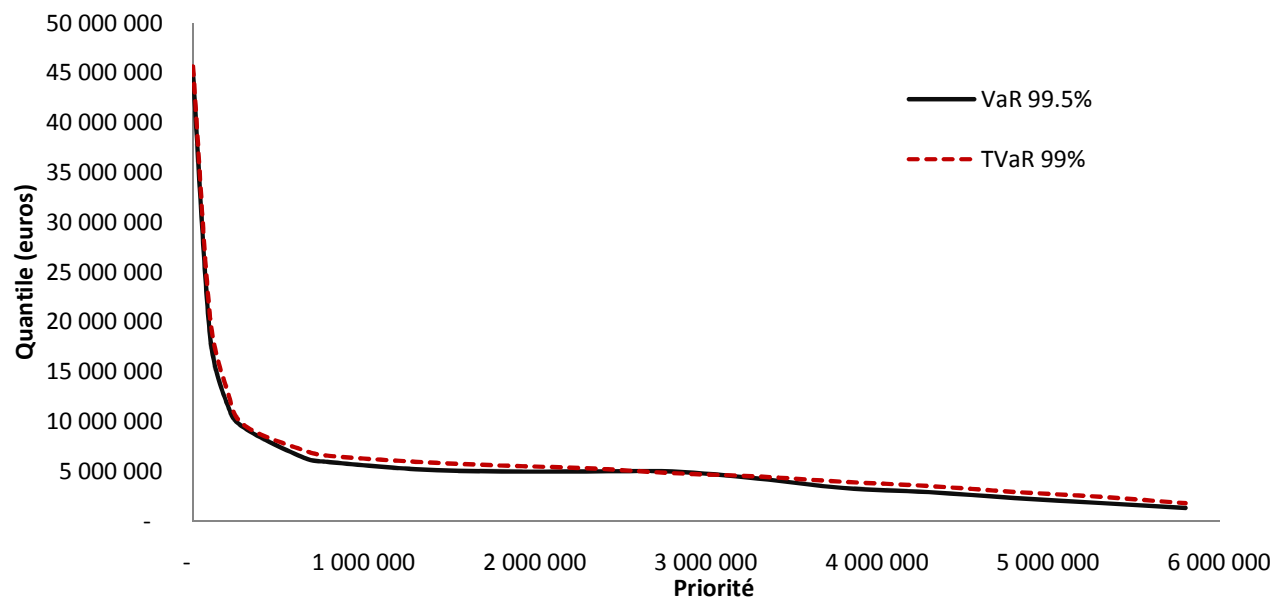
Quant au portefeuille emprunteur (B), la forme de courbe semble également identique pour des priorités faibles, c'est-à-dire inférieures ou égales à 150 000 euros, mais divergent significativement ensuite. En effet, si le modèle interne est 90 % plus élevé que la formule standard avec une priorité à 0 (sans réassurance), il passe à 1320 % pour une priorité de 300 000 euros !

Il est également notable que la formule standard donne peu de poids aux hauts capitaux puisque les priorités supérieures à 800 000 euros - qui représentent moins de 400 individus – génèrent un besoin en capital négligeable (< 1,5 % du total).

iv. Comparaison de la VaR et de la TVaR

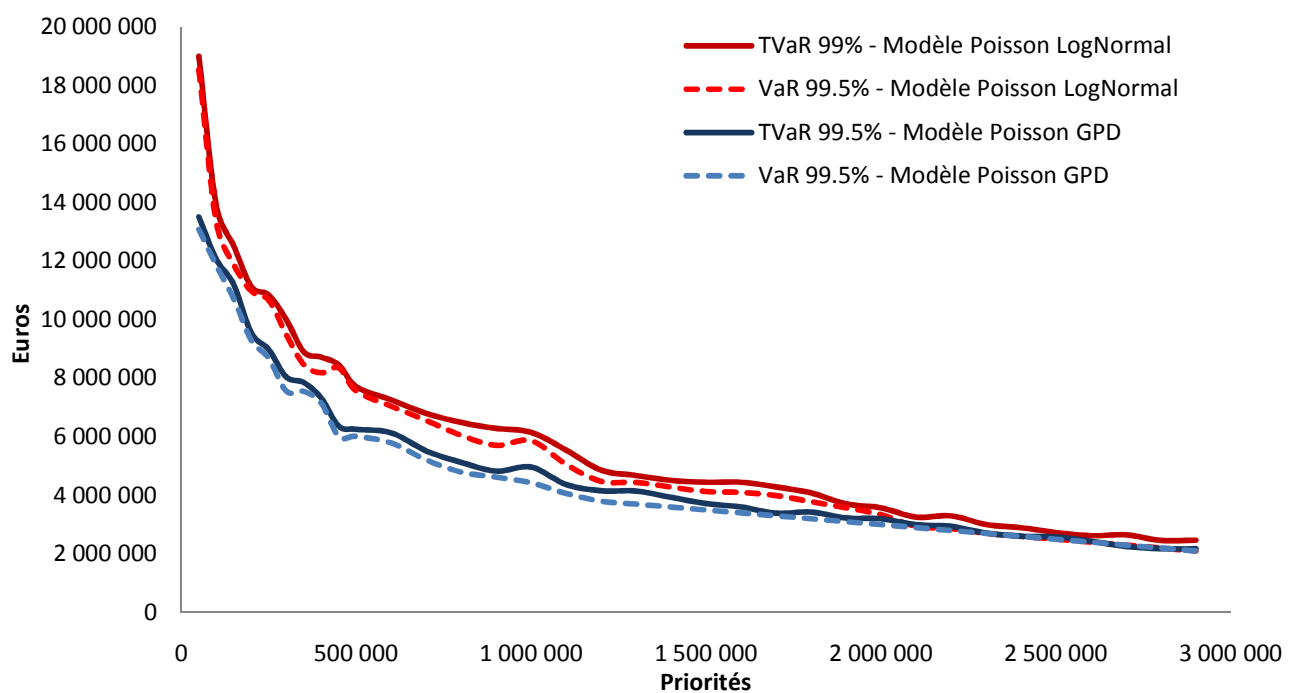
Le portefeuille A donne des VaR 99,5 % et des TVaR 99 % quasi-identiques pour tous les niveaux de priorités avec des écarts inférieurs à 0.3 %.

Les différences ne sont pas non plus significatives sur le portefeuille le plus volatile. Cette similarité dans la forme de courbe entre la VaR à 99,5 % et la TVaR à 99 % ainsi que la stabilité des écarts (entre 1 et 4 %) montrent une homogénéité des scénarios au-delà des quantiles élevés :



Graphique 16 - Comparaison de la VaR 99,5 % et TVaR 99 % des tranches de réassurance (Portefeuille B)

Le portefeuille collectif montre également un comportement identique entre la VaR et la TVaR, les écarts étant toutefois croissants pour des niveaux de priorité élevés. Les écarts varient de 10 à 18 % au-delà de 2 000 000 de priorité.



Graphique 17 - Comparaison de la VaR 99,5 % et TVaR 99 % des tranches de réassurance (Portefeuille collectif)

v. Capital « retenu » par le réassureur et capital « économisé » par la cédante

Il est difficile de comparer directement les modèles collectif et individuel car ils n'ont pas les mêmes risques sous-jacents et ne sont donc pas directement comparables entre eux. Cependant, on peut identifier une forme de courbe assez proche dans les deux modèles : la queue de distribution, même lorsqu'elle représente moins de 10 % du portefeuille, représente toujours une part significative du capital économique, supérieure à 30 %. D'autre part, il est visible dans les deux cas - excepté pour le portefeuille individuel A peu volatile et déjà très homogène sans réassurance - que la courbe du quantile à 99,5 % est bien moins « convexe » que la prime pure, ce qui signifie que la volatilité décroît moins vite que la moyenne.

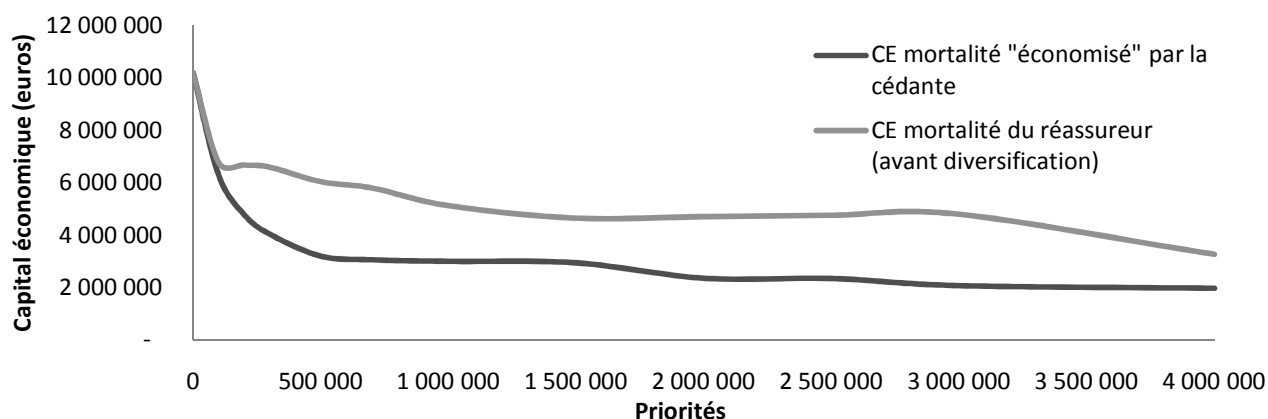
Le montant de capital calculé en réassurance pour les tranches supérieures est, dans les portefeuilles volatiles, particulièrement élevé: Sur le portefeuille Emprunteur, le capital économique calculé pour une priorité de 3 millions d'euros correspond encore à près de 50 % du capital économique du portefeuille brut de réassurance. Il est à noter que la VaR n'étant pas une mesure sous-additive, c'est-à-dire que la VaR d'une somme de variables aléatoires n'est pas nécessairement inférieure à la somme des VaR, on ne peut pas dire que le capital économique *retenu* par le réassureur correspond stricto sensu au capital économique *économisé* par la cédante. Dans le cas de la TVaR, le quantile calculé par le réassureur correspond toujours à un majorant de ce qu'économise la cédante car : $TVaR(X + Y) \leq TVaR(X) + TVaR(Y)$.

Pourtant, on a : $Var(S) \geq Var(S^{net}) + Var(S^{re})$

On ne peut donc pas directement faire un lien entre la volatilité, lorsqu'elle est représentée par la variance, et les mesures de risque présentées (VaR et TVaR).

Comparons alors le capital économique précédemment calculé, à charge du réassureur, et le capital économique économisé par la cédante (sans considérer l'effet de l'actif de réassurance et le coût du risque de contrepartie) tel que :

$$\text{capital économisé} = \text{capital brut de réassurance} - \text{capital net de réassurance}$$



Graphique 18 - Comparaison des capitaux économiques des tranches pour la cédante et le réassureur - Portefeuille B

La diminution du capital économique mortalité de la cédante par rapport à celui du réassureur est dû à l'effet de diversification au sein du portefeuille. Nous n'avons pas pris en compte les autres effets de diversifications entre portefeuilles pour la cédante et le réassureur dans le schéma ci-dessus.

vi. Comparaison des approximations et des résultats de simulations

- Modèle individuel

L'approximation normale semble naturellement robuste pour des données importantes mais sous-estime les quantiles des tranches les plus élevées car le nombre de têtes restant couvertes est particulièrement faible pour une application de la loi des grands nombres. L'approximation Gamma semble plus précise, quel que soit le niveau de priorité. Elle pourrait donc être une première approche du quantile pour la réassurance.

<i>Priorité</i>	<i>VaR 99,5 % - Approximation Normale</i>	<i>VaR 99,5 % - Approximation Gamma</i>	<i>VaR 99,5 % - 50000 Simulations</i>
-	43 580 961	45 353 042	45 597 135
100 000	17 515 346	16 959 589	18 553 725
200 000	9 875 806	12 276 092	11 779 085
500 000	4 904 651	7 993 859	7 244 471
1 000 000	3 646 710	6 866 730	5 595 581
1 500 000	3 238 940	6 380 788	5 000 000
2 000 000	2 911 313	5 898 755	5 000 000
2 500 000	2 560 752	5 312 228	5 000 000
3 000 000	2 228 990	4 735 667	5 000 000
3 500 000	1 922 520	4 212 776	4 026 196

Tableau 17 – Comparaison des simulations et des approximations (Portefeuille Emprunteur - B)

<i>Priorité</i>	<i>VaR 99,5 % - Approximation Normale</i>	<i>VaR 99,5 % - Approximation Gamma</i>	<i>VaR 99,5 % - 50000 Simulations</i>
-	11 973 376	11 670 676	12 182 213
30 000	6 210 391	6 346 500	6 569 856
60 000	3 327 105	3 472 692	3 404 119
80 000	2 275 653	2 424 356	2 397 503
100 000	1 653 553	1 801 971	1 747 798
120 000	1 256 530	1 402 818	1 375 368
150 000	816 991	954 696	972 347
200 000	488 436	593 177	619 796

Tableau 18 – Comparaison des simulations et des approximations (Portefeuille temporaires-décès - A)

Cédante	Type	Priorité	Portée	Quantile LN	Quantile GPD	Modèle collectif par exposition - 45 % TH	Modèle collectif par exposition - 35 % TH	Modèle collectif par exposition - 25 % TH
1	Groupe	160 000	3 500 000	8 632 662	10 873 026	16 756 125	13 734 529	9 810 378
2	Groupe	180 000	4 600 000	16 665 704	15 049 428	31 565 742	23 458 721	17 546 365

Tableau 19 – Comparaison des simulations et des approximations (Portefeuilles collectifs)

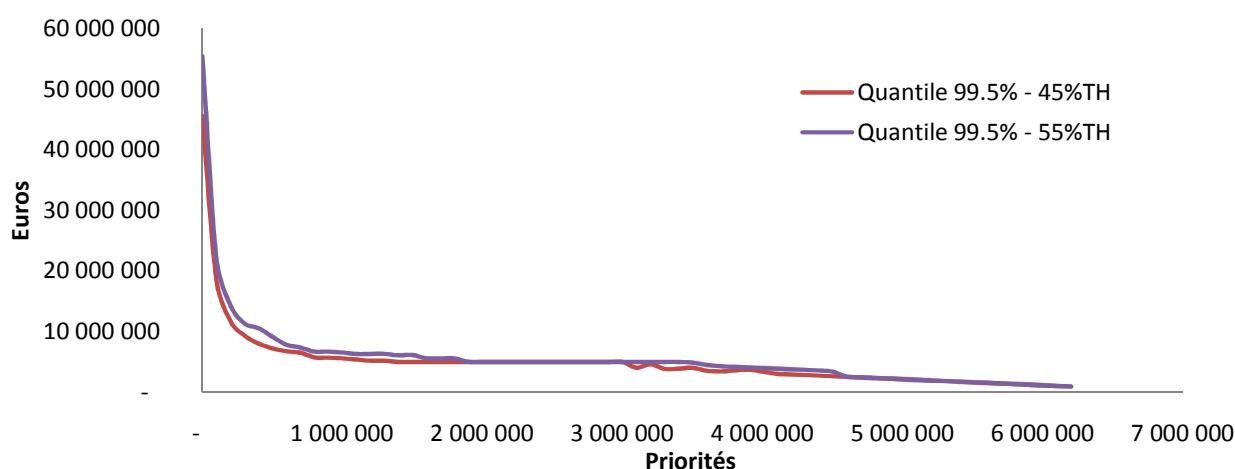
Les données de sinistre des portefeuilles collectifs n'intégrant pas l'exposition de la population assurée, il est particulièrement difficile d'estimer la mortalité à travers un coefficient de table. Dans les deux traités, le modèle semble surestimer le quantile par rapport au modèle fréquence-coût mais maintient néanmoins des écarts relativement faibles lorsque la mortalité est estimée à un niveau de 25 % de la table.

b) Tests de sensibilité

- Taux de mortalité

Nous avons vu dans la modélisation fréquence-coût la relation : $Var(S) = \lambda * E(X_i^2)$. Si le quantile à 99,5 % est un indicateur de volatilité en cohérence avec la variance, nous pouvons penser a priori que le facteur λ intervient de manière proportionnelle à la variation du quantile recherché. Le niveau de mortalité égal à 55 % de la table TH00-02 a été testé afin de mesurer la différence avec le niveau de 45 % TH00-02 initialement choisi.

Il apparaît effectivement un écart de l'ordre de 25 %, proche des 22 % de variations entre une table à 45 % TH00-02 et une table 55 % TH00-02, excepté pour la phase de stagnation de la VaR, qui est dans ce cas translatée « vers la droite ». A partir de 4 700 000 euros de priorité, nous observons cependant les mêmes valeurs de quantile car le scénario se réalise dans les deux tables lorsqu'un seul sinistre intervient.

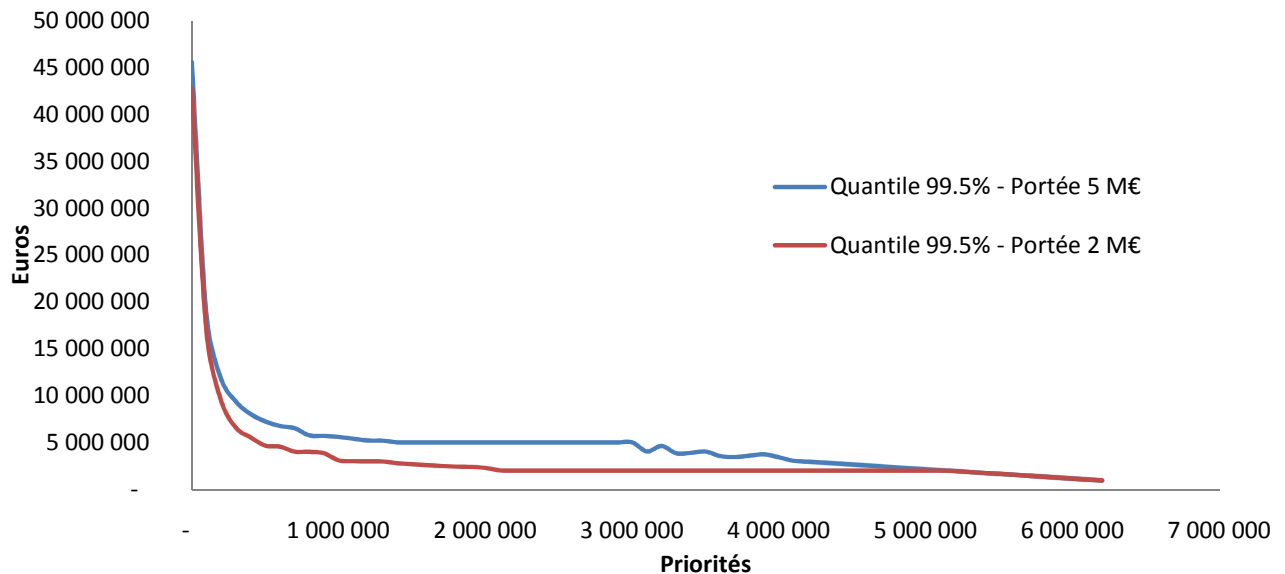


Graphique 19 - VaR 99,5 % à charge du réassureur: Impact du taux de mortalité (Portefeuille B)

- Portée

Durant l'ensemble des tests, il a été testé la portée fixe de 5 millions d'euros ou un plafond égal à 5 millions d'euros lorsque le sinistre maximal était connu.

Comparons la forme de la courbe des quantiles avec une portée plus basse de 2 millions d'euros :



Graphique 20 - VaR 99,5 % à charge du réassureur: Impact de la portée (Portefeuille B)

Nous avons noté que la VaR stagne entre 1 000 000 euros et 3 000 000 euros au niveau de la portée. C'est également le cas lorsque la portée est diminuée mais la droite constante ne s'observe qu'à une priorité plus élevée et se prolonge jusqu'à 4 900 000 euros, seuil de priorité où les deux courbes se croisent pour ensuite évoluer à l'identique (la portée n'ayant pas d'incidence lorsqu'elle dépasse le montant du sinistre maximum possible).

- Nombre de simulations

Dans le modèle individuel, les simulations ont été faites sur des portefeuilles de taille importante avec des sommes sous risques très diverses. Le nombre de polices a pour avantage de donner des statistiques robustes et significatives mais a pour principal inconvénient la lourdeur des simulations. En effet, la modélisation individuelle du portefeuille emprunteur nécessite 1 million d'opérations pour ne générer qu'un scénario avec une priorité à 100 000 euros. Le nombre de simulations qui a été sélectionné est de 50 000 pour chaque cas de figure (priorité, portée, taux de mortalité). Pour évaluer la sensibilité des résultats au nombre de simulations, nous comparerons les résultats à ceux obtenus avec 20 000 et 5 000 simulations pour l'ensemble des priorités pour une mortalité donnée (45 % TH00-02).

Nombre de simulations	Priorités					
	0	30000	50000	10000	150000	200000
20000	0,15 %	0,24 %	0,16 %	0,05 %	0,12 %	0,22 %
5000	0,51 %	0,21 %	0,28 %	0,17 %	0,05 %	0,45 %

Tableau 20 – Ecart avec les résultats obtenus en 50 000 simulations (Portefeuille individuel A)

Nombre de simulations	Priorités									
	0	100000	300000	500000	1000000	2000000	3000000	4000000	5000000	6000000
20000	0,38 %	0,25 %	0,42 %	0,32 %	0,14 %	0,82 %	2,41 %	2,57 %	0 %	0 %
5000	1 %	0,92 %	0,38 %	0,77 %	0,85 %	1,30 %	3,52 %	4,90 %	0 %	0 %

Tableau 21 – Ecart avec les résultats obtenus en 50 000 simulations (Portefeuille individuel B)

On observe que le nombre de simulations est effectivement un facteur de bonne convergence mais que dès 5 000 simulations, on atteint un niveau de précision proche de celui de 50 000 simulations avec des écarts inférieurs à 5 %.

En modélisation collective, nous décidons d'évaluer la sensibilité des simulations à travers l'écart par rapport à la moyenne (prime pure) pour un traité travaillant et une deuxième tranche de traité :

	Traité 1		Traité 2	
	280 000		1 000 000	
Priorité				
Portée	5 200 000		1 000 000	
Méthode	Poisson - LogNormale	Poisson - GPD	Poisson - LogNormale	Poisson - GPD
Prime Pure	7 704 000	7 248 000	4 169 000	4 201 000
Moyenne des simulations	7 725 000	7 201 000	4 231 000	4 269 000
Ecart	0,27 %	-0,65 %	1,49 %	1,62 %

Tableau 22 – Ecart par rapport à la moyenne dans deux traités collectifs

Sur l'ensemble des traités, la loi de Pareto généralisée semble plus stable :

Méthode	Ensemble du portefeuille de réassurance (à 100 %)	
	Poisson - LogNormale	Poisson - GPD
Moyenne des primes pures	1 704 000	1 648 000
Moyenne des simulations	1 815 000	1 628 000
Ecart	6,5 %	-1,2 %

Tableau 23 – Ecart par rapport à la moyenne dans deux traités collectifs

c) Impact des clauses particulières

- Annual Aggregate Deductible (AAD) et Annual Aggregate Limit (AAL)

Ces clauses ne peuvent être quantifiées que contrat par contrat car elles ne sont pas identiques et systématiques dans les traités de réassurance. Concrètement, le capital économique pur de mortalité se calcule :

$$CE_{AAD} = \sum_{i=1}^m \text{Max}(VaR_{99,5\%}^i - AAD_i - P_i^{com} - \text{charges } 0)$$

Avec :

- m le nombre de traités présents dans le portefeuille de réassurance
- $VaR_{99,5\%}^i$ la Value at Risk à 99,5 % du $i^{ème}$ traité
- P_i^{com} la prime finale de réassurance

De la même manière, pour l'AAL, nous obtenons :

$$CE_{AAL} = \sum_{i=1}^m \text{Max}(\text{Min}(VaR_{99,5\%}^i, AAL_i) - P_i^{com} - \text{charges } 0)$$

- Participation aux bénéfices

La clause de participation aux bénéfices s'impose généralement lorsque le prix commercial est « significativement » supérieur (au moins 30 %) à la prime pure. La cédante souhaite alors le reversement d'une partie du résultat du réassureur. Sous Solvabilité I, ce type de contrat était considéré comme faisant partie du *Solvency Relief* : la cédante met en réassurance une partie (< 50 %) de son portefeuille afin que la contrainte de capital ne repose plus seulement sur elle mais aussi sur le réassureur. Ce dernier reverse une importante partie du résultat, ce qui permet à la cédante d'effectuer un arbitrage entre le gain d'opportunité né de la libération de capital et le retour de participation aux bénéfices.

La contrainte statutaire de capital s'applique actuellement de manière « forfaitaire » à l'intégralité de la prime commerciale : Autrement dit, une partie de la prime qui ne comporte pas de risque d'assurance (la participation aux bénéfices) participe tout de même à l'effort en capital, quand bien même il n'est pas nécessaire pour se prémunir du risque sous-jacent.

Sous Solvabilité 2, ces solutions de réassurance ne seront plus forcément identiques pour les cédantes : Le capital économique n'est calculé que sur la part de la prime qui contient du risque, la part de la prime en surplus participant quand même au ratio de solvabilité globale.

3. Optimisation de la réassurance

a) Effet de diversification du réassureur

Les portefeuilles réassurés concentrent généralement une majorité, voire l'ensemble des affaires vie des cédantes. Comme nous l'avons vu précédemment, les excédents de sinistre englobent une part significative de la volatilité d'un portefeuille qui implique une participation importante au besoin en capital. Pourtant, le réassureur, à travers ses nombreux traités, va pouvoir traduire la mutualisation de son portefeuille de réassurance par une diminution globale du risque, et donc du besoin en capital. Dans les spécifications techniques du EIOPA, ce phénomène est appelé l'effet de diversification.

Jusqu'ici, nous avons en effet modélisé chaque traité individuellement et de manière isolée. Pour mesurer l'impact de la mutualisation des traités, il est nécessaire de simuler le portefeuille comme un ensemble unique. Soit le scénario S_i^{div} correspondant à la $i^{ème}$ simulation de compte de l'ensemble du portefeuille composé de m traités, alors :

$$S_i^{div} = \sum_{j=1}^m S_j^i$$

Nous avons simulé l'ensemble des traités collectifs et individuels du portefeuille (à 100 % de part), nous obtenons les résultats suivants :

	<i>Capital économique: Modèle Poisson - LogNormale</i>	<i>Capital économique: Modèle Poisson - GPD</i>
<i>Somme des capitaux économiques traité par traité</i>	170 324 716	130 215 192
<i>Capital économique du portefeuille</i>	34 597 635	20 520 420
<i>Effet de diversification</i>	79,7 %	84,2 %

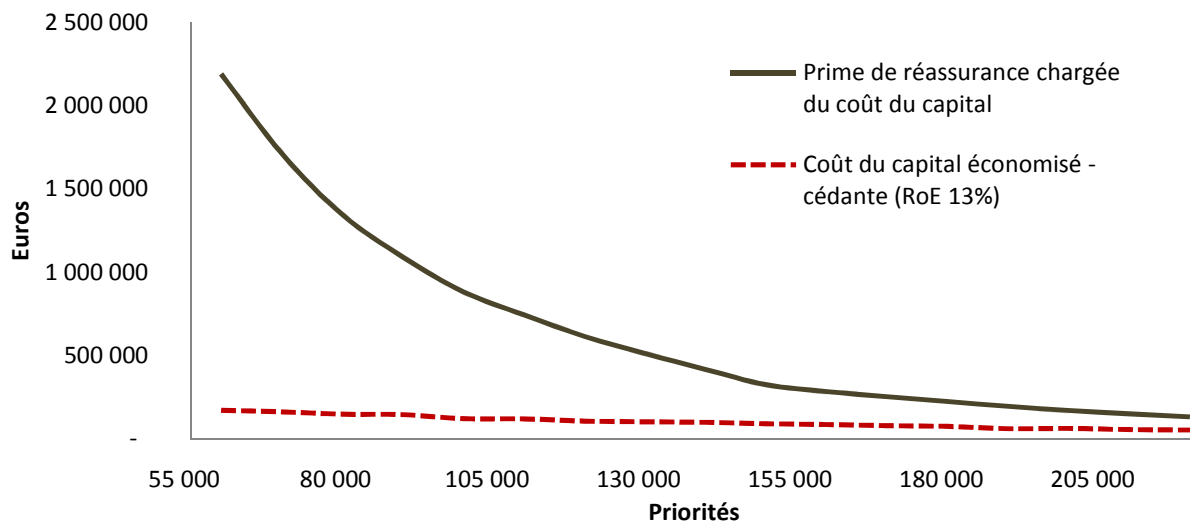
Tableau 24 – Effets de diversification du réassureur sur les traités non-proportionnels collectifs

Les portefeuilles ont été entièrement simulés avec un seul type de modèle : Poisson – LogNormale ou Poisson – GPD. Il est cependant fréquent que les modélisations changent d'un traité à l'autre, mais il apparaît avec les deux distributions que l'effet de diversification à l'échelle des 43 traités français et belges étudiés est d'environ 80 %.

b) Arbitrage entre le coût du capital et la prime de réassurance

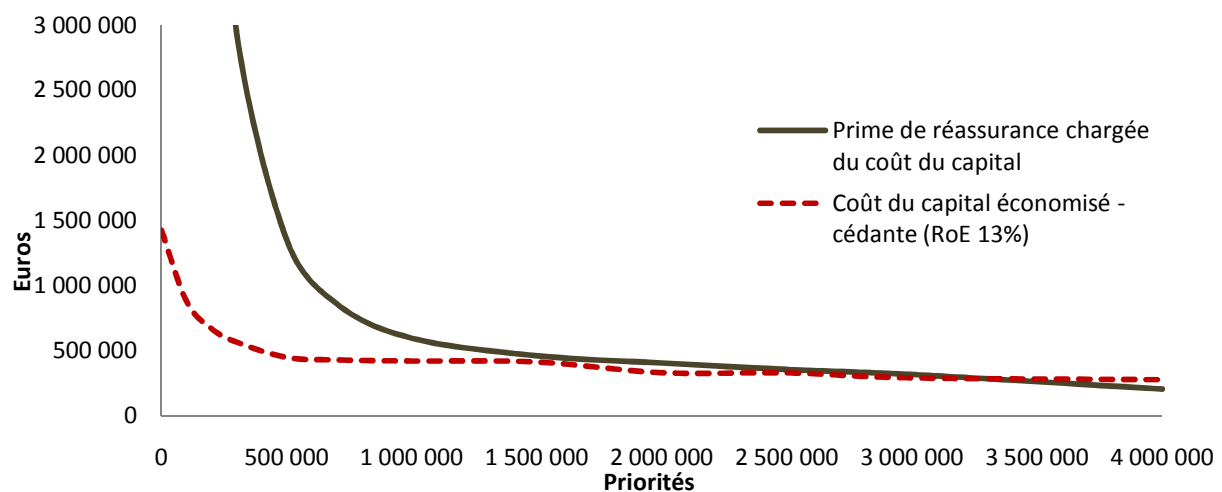
Si le capital économique hors diversification du réassureur s'avère environ 70 % supérieur à celui qu'économise la cédante dans un programme de réassurance non-proportionnelle, les effets de diversification considérables du réassureur lui permettent tout de même d'assurer les tranches pour un coût de capital plus faible. Cette différence de coût entre cédante et réassureur

génère un arbitrage dès lors que le coût du capital économisé est supérieur ou égal à la prime de réassurance. Nous modéliserons une tarification de réassurance sur la base d'un capital économique (vision réassureur) diminué de 80 % par la mutualisation du portefeuille non-proportionnel. Le coût du capital pour la cédante est calculé sur la base d'un *Return on Equity* (RoE) de 13 % incluant un taux d'imposition sur les bénéfices de 34 % et un taux sans risque de 2,5 %.



Graphique 21 - Coût du capital de la cédante (avant diversification) et prime de réassurance - Portefeuille A

Le portefeuille temporaire-décès est peu volatile et génère un besoin en capital faible pour les tranches élevées. Pourtant, si l'on considère la rémunération d'un capital comme une charge pour l'entreprise, le coût du capital est pour toutes les priorités, supérieur au chargement du réassureur, ce qui permet d'accroître la rentabilité globale avec un coût de la capitale post-réassurance inférieur au chargement initial pour capital.



Graphique 22 - Coût du capital de la cédante (avant diversification) et prime de réassurance - Portefeuille B

Si nous négligeons les diversifications supplémentaires dont peut bénéficier la cédante pour diminuer son capital, le coût du capital peut représenter, à partir de 300 000 euros de priorité, 50 % de la prime de réassurance puis être quasiment égal à celle-ci à partir de 1 500 000 euros. Cette situation permet théoriquement à la cédante de complètement compenser le tarif de réassurance par une économie de coût du capital.

c) Allocation du capital

Le capital économique estimé doit être traduit de manière synthétique dans les cotations afin que celles-ci en tiennent compte. En effet, il est difficile de recalculer un capital pour chaque renouvellement, d'autant que des effets de diversification extérieurs à l'affaire cotée interviennent pour diminuer le besoin. Il est donc commun que des facteurs de grandeurs (sommes sous risque, sinistres attendus, montant de prime, etc.) définissent le montant du capital économique.

Une manière simple d'allouer le capital est de faire supporter la charge uniformément en utilisant un montant forfaitaire proportionnel à la prime. Concrètement, il s'agit de donner un facteur déterministe de la prime pure :

$$CE = \sum_{i=1}^m P_i * c$$

Avec :

- CE le capital économique estimé en début de période
- m le nombre de traités du réassureur
- P_i la prime pure du $i^{ème}$ traité
- c le facteur appliqué à chaque prime pure du traité

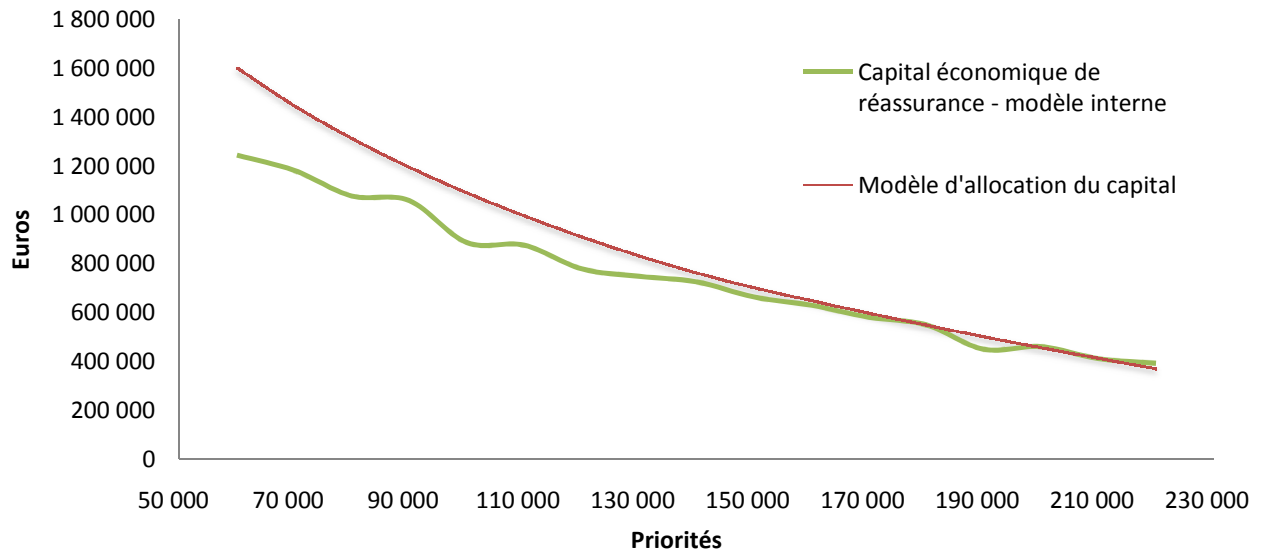
Cette méthode a pour principal avantage d'être simple et pratique dans le processus de tarification, le calcul de la prime pure étant une étape indispensable. Cependant, cette approche pénalise les traités les plus homogènes et stables qui supportent la volatilité d'autres traités. Par ailleurs, un autre inconvénient est le manque d'ajustement des affaires nouvelles au capital économique estimé en début de période.

Intuitivement, les mesures de volatilité d'une tranche comme la variance ou l'écart-type semblent plus cohérentes pour approcher un quantile que les traditionnelles grandeurs basées sur des moyennes : sommes sous risque et sinistres attendus. Nous avons également remarqué que le quantile au sens de la VaR est particulièrement sensible à la portée de la tranche. Nous estimons alors l'allocation du capital en intégrant l'écart-type avec:

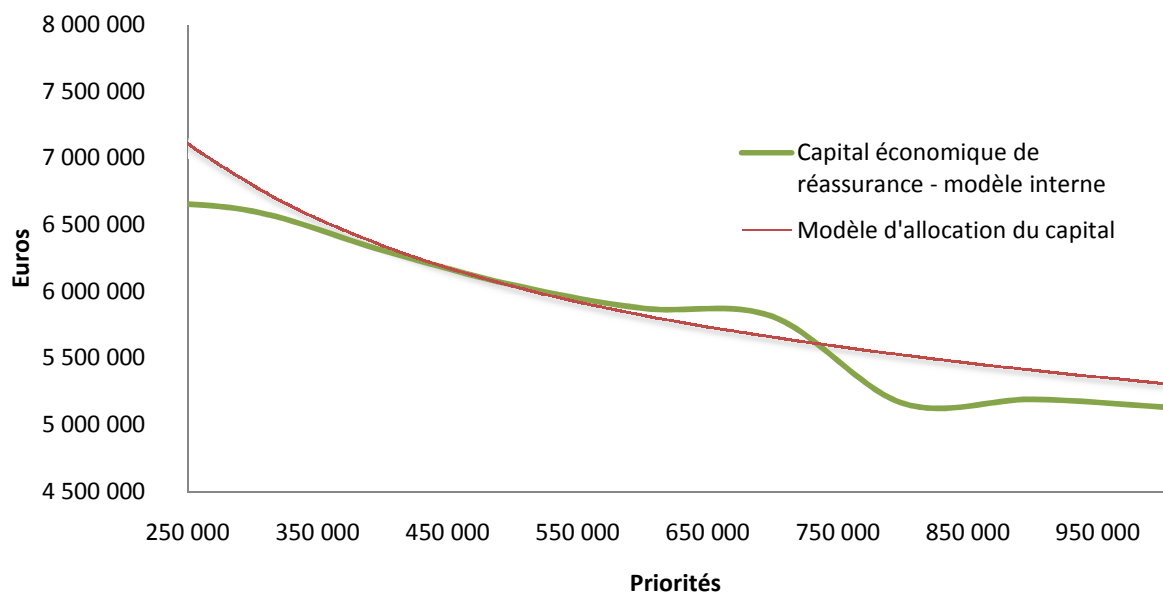
- σ_i l'écart-type du $i^{ème}$ traité
- P^i la portée du $i^{ème}$ traité
- a et b les deux facteurs déterministes uniformes pour tous les traités

On a :

$$CE = \sum_{i=1}^m (\sigma_i * a + P^i * b)$$



Graphique 23 – Allocation du capital de réassurance après diversification (priorités >50k€) – Portefeuille A

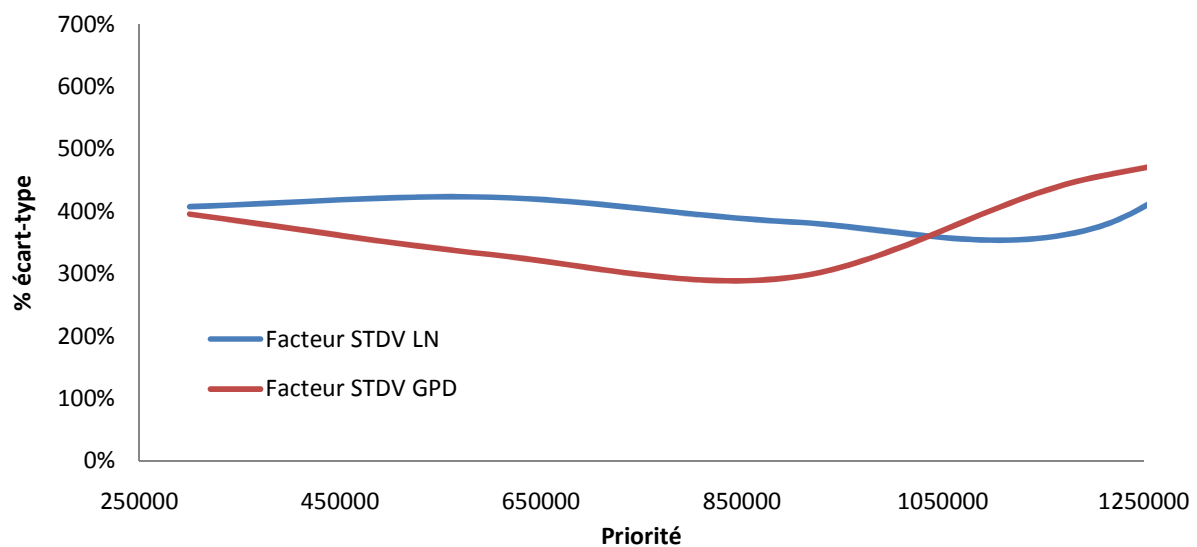


Graphique 24 – Allocation du capital de réassurance après diversification (priorités >250k€) – Portefeuille B

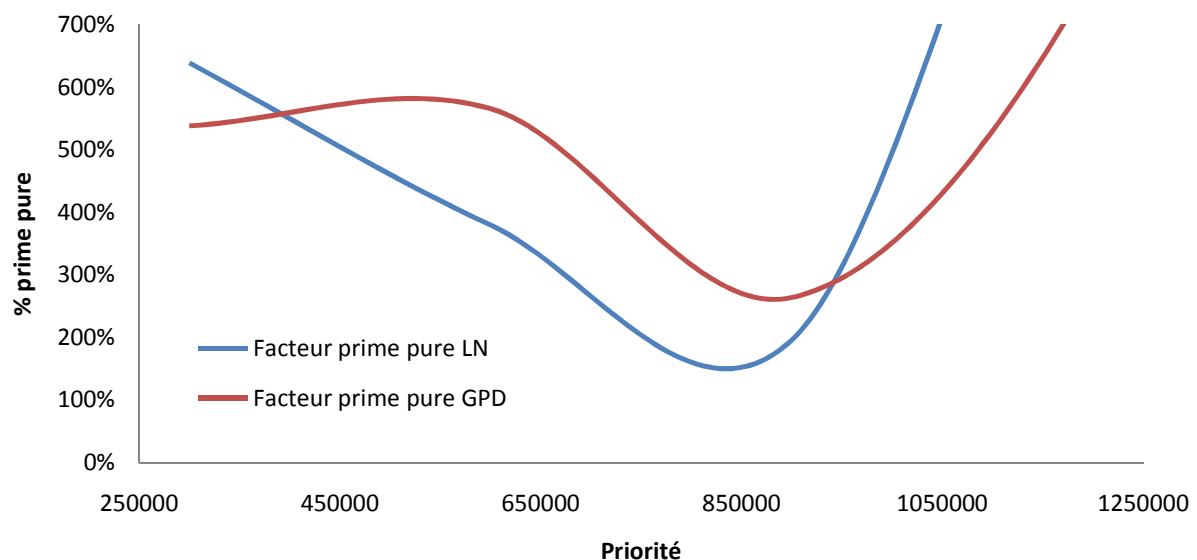
Avant diversification, nous avons estimé pour deux traités individuels, une allocation du capital à 361 % de l'écart-type de chaque traité et 12 % de la portée.

Dans le modèle collectif, les chiffres sont similaires pour des priorités inférieures à 1 000 000 euros :

- 355 % de l'écart-type et 8 % de la portée pour la loi log-normale
- 303 % de l'écart-type et 10 % de la portée pour la loi GPD



Graphique 25 – Facteurs de l'écart-type en fonction de la priorité des traités collectifs et individuels



Graphique 25 – Facteurs de la prime pure en fonction de la priorité des traités collectifs et individuels

Il est notable qu'un facteur unique basé sur l'écart-type a une dispersion moins importante qu'un facteur indexé sur la prime pure. Nous avons ainsi une répartition plus cohérente du capital car les traités les plus volatils ont un chargement plus adapté à leur risque sous-jacent et ne font

pas peser un poids trop important sur les traités plus travaillants, qui par ailleurs se négocient à des tarifs plus « tendus ». Cette manière d'allouer le capital permet donc également d'être plus compétitif sur les traités aux primes les plus importantes.

Conclusion

Nos études montrent la présence d'une grande diversité de risques et de pratiques en assurance-décès. Il apparaît que de grandes disparités apparaissent non seulement dans la définition du risque – durées d'engagement, présence de provisions, présence de rentes – mais aussi, et surtout, sur la volatilité des sommes sous risque. Si les facteurs réglementaires de capital sous Solvabilité 1 avaient l'inconvénient d'être sans distinctions de risque, les facteurs déterministes de la formule standard ne corrigent pas cette uniformité. Elle inclut certes une adaptation « locale » du besoin en capital avec les tables de mortalité internes mais néglige la volatilité des sommes sous risque.

Or, les modèles internes testés montrent que l'exigence en fonds propres pour une probabilité de ruine de 0,5 % est particulièrement sensible à cet aspect fondamental en réassurance non-proportionnelle, non seulement parce que les sommes sont ponctuellement élevées mais aussi parce que la population couverte est réduite. Des arbitrages existeront donc, aussi bien pour les cédantes que pour les réassureurs, quant à l'utilisation d'un modèle interne ou de la formule standard.

Les modèles internes ont certes montré des exigences de capital pour le réassureur bien plus élevées que celles de la formule standard pour une probabilité de ruine de 0,5 % mais ils montrent néanmoins la flexibilité qu'offrent ces modèles. Au-delà de l'utilité de mieux connaître ses propres risques, une cédante peut intégrer de manière efficiente les effets de mutualisation et les éventuelles réassurances dans sa diminution de capital exigible.

Le développement de modèles internes donne aussi l'opportunité aux réassureurs d'apporter des solutions d'optimisation en réassurance complémentaire en intégrant les traités non-proportionnels dans les réductions de coût d'immobilisation de capital pour les cédantes.

L'absence d'intérêt partagé entre cédantes et réassureurs liée à la non-proportionnalité ne favorise pas la transmission de données complètes et a pour conséquence économique un contexte tendu sur les primes de réassurance. Mais la diminution significative – de 10 à 30 % - du capital requis avec les traités non-proportionnels actuels (avant effets de l'actif de réassurance et coût du risque de contrepartie) peut amener à un changement dans les processus de placement des traités : Le réassureur a un intérêt à retenir de nouveaux traités pour augmenter sa mutualisation alors que la cédante peut faire un arbitrage entre la prime payée et le capital économisé.

La réforme Solvabilité 2 favorise également ces changements de processus opérationnels à travers le pilier 2, en exigeant des pratiques plus transparentes dans l'acquisition et le traitement des données.

Enfin, l'impact important que les traités non-proportionnels ont sur les portefeuilles volatiles, en particulier emprunteur, peut amener à de nouvelles innovations comme le développement d'excédents de sinistre à engagements pluriannuels en complément des traditionnelles réassurances proportionnelles.

Bibliographie

ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.M., HEATH D. (1998) : *Coherent measures of risk*

ASSOCIATION OF MUTUAL INSURERS AND INSURANCE COOPERATIVES IN EUROPE (2009) : *Proposal for non-proportional reinsurance*.

DE PRIL N. (1989) : *The aggregate claims distribution in the individual life model with arbitrary positive claims*, ASTIN Bulletin 19.

DENUIT M., CHARPENTIER A. (2005) : *Mathématiques de l'assurance non-vie - Tome 2 : Tarification et provisionnement*.

DHAENE J., VYNCKE D. : *The individual risk model* .

EIOPA (2010) : *QIS 5 Technical specifications*.

GRIMSHAW S.D. (1993) : *Computing maximum likelihood estimates for the Generalized Pareto Distribution*, Technometrics, 35, 185-191.

JUAREZ S.F., SCHUCANY W.R. (2003) : *Robust and efficient estimation for the Generalized Pareto Distribution*.

KAAS R., GOOVAERTS M., DHAENE J., DENUIT M. (2008) : *Modern actuarial risk theory*.

PARTRAT C., BESSON J.-L. (2005) : *Assurance Non-Vie: Modélisation, Simulation*.

PENG L., WELSH A. (2002) : *Robust estimation of the Generalized Pareto distribution*, Extremes.

PICKANDS, J (1975) : *Statistical inference using extreme order statistics*. Ann. Statist.

PLANCHET F., THEROND P.-E. (2006) : *Modèles de durée : Applications actuarielles*. Economica

PLANCHET F. (2010) : *Assurance de personnes : Un cadre de modélisation Solvabilité 2. Application à un régime de retraite*, Formation ERM.