Université Claude Bernard – Lyon 1
INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 30/11/2011

Par : Minh Tuyen LE

Titre: Analyse de la marge de commercialisation d'un panier de produits structurés

Confidentialité : X NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaires

M. Jean-Michel EYRAUD

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS
M. Alexis BIENVENÜE
M. Areski COUSIN
Mme Diana DOROBANTU
Mme Anne EYRAUD-LOISEL
M. Nicolas LEBOISNE
M. Stéphane LOISEL
Mlle Esterina MASIELLO
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
M. Frédéric PLANCHET
M. François QUITTARD-PINON
Mme Béatrice REY-FOURNIER
M. Pierre RIBEREAU
M. Christian-Yann ROBERT
M. Didier RULLIERE
M. Pierre THEROND

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

Entreprise :

SOCIETE GENERALE
Banque de détail

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Yann HENRY

Invité :

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

50 Avenue Tony Garnier
69366 Lyon Cedex 07

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

ANALYSE DE LA MARGE DE COMMERCIALISATION D'UN PANIER DE PRODUITS STRUCTURES

30/11/2011

RESUME

Le contexte du mémoire repose sur la commercialisation des produits structurés. Sur un panier de produits dont la structure de performance se ressemble mais se complexifie de plus en plus, l'objectif est de trouver la marge du produit ou plutôt de montrer l'intérêt de proposer une telle structure aux investisseurs : d'une part, de figer la marge du produit pour l'émetteur et d'autre part de donner des performances intéressantes et sécurisées aux investisseurs. L'étude réside dans la construction d'un outil d'évaluation adapté à l'échantillon de produits, qui servira ensuite à calculer leurs marges de commercialisation ainsi qu'à déterminer leur évolution en fonction des indicateurs de marché.

Pour ce faire, il est indispensable d'avoir un modèle d'évaluation du produit, qui pourrait prendre en compte des vrais paramètres du marché à l'instant de la commercialisation. D'une part, l'évaluation doit avoir recours à des techniques numériques de simulation. D'autre part, le paramétrage demande des études sur le marché des taux et de la volatilité de sous-jacents.

Mots clés : Produits structurés, Options de remboursement anticipé, Méthode de Monte Carlo, Structure par terme des taux d'intérêt.

ABSTRACT

Background of this study is the marketing of structured products activities. Among the products whose performance framework is similar but more complex, the goal is to find the margin of the product or rather to demonstrate the value of such a proposed structure for investors: first, to freeze the product margin for the issuer and the other to give interesting and secure performances to investors. The study aims to construct an assessment tool suitable for a sample of products, which will calculate their sales margin and determine their evolution as a function of market indicators.

To resolve that problem, it's essential to have a model of product evaluation, which could take into account the real parameters of the market at the moment of selling. On the one hand, the evaluation must use numerical simulation techniques. On the other hand, the configuration requires the market study's rates and the volatility of the underlying asset.

Keys words*:* Structured product, Extendible option, Monte Carlo method, Term structured interest rate.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon maître de stage M. HENRY Yann qui m'a donné la chance d'effectuer mon stage au sein du service Ingénierie financière et Actuariat de la banque Société Générale et m'a accordé sa confiance tout au long de ce mémoire.

Je souhaiterais remercier toute l'équipe du service pour son accueil afin que je puisse mener à bien mon travail dans les meilleures conditions, et particulièrement M.ALBIGOT Jean Gabriel et M. LETANG Matthieu qui m'ont fourni beaucoup d'explications lors de la réalisation et de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens également à remercier l'ISFA pour ces trois années d'enseignement et plus particulièrement M. Jean Claude AUGROS, tuteur de ce mémoire, pour son suivi et ses conseils.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenue et aidée dans la réalisation de ce mémoire.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Ce mémoire est effectué au sein du service Ingénierie financière et Actuariat (INA) de la banque de détail France de la Société Générale. Ce service réalise diverses missions de conseil et d'assistance, relatives aux techniques financières pour les entités commerciales et fonctions centrales de la banque en France. Il intervient sur la sollicitation des chargés de clientèle (particuliers, entreprises, collectives locales) ou de la Direction de la banque, et contribue à la réflexion du groupe sur l'offre des produits ou encore sur la rentabilité de la gamme des produits commercialisés.

Un des types de produits commercialisés par la banque de détail (BDDF) consiste en des produits structurés proposés par la banque de financement et d'investissement (SGCIB). Ils sont structurés par SGCIB avant d'être distribués par des agences de BDDF. Les marges venant du produit sont donc divisées entres les deux pôles d'activités. Dans l'objectif de mieux commercialiser, la direction sollicite le service INA de faire une étude sur la sensibilité du produit vis-à-vis des évolutions du marché. Mon sujet consiste alors à analyser en détail un échantillon de 6 produits structurés commercialisés par certaines institutions bancaires durant l'année 2008, afin d'en cerner les principales caractéristiques (marges, sensibilités aux conditions de marchés…). L'objectif final est de restituer ces conclusions aux directions financières et marketing de la banque de détail de la Société Générale.

Il est important de noter que le contexte du travail s'inscrit dans la phrase de la commercialisation du produit. La méthode d'évaluation est par conséquent différente à l'étape de construction du produit. En effet, en première lieu, les structureurs construisent le produit, et les traders s'engagent à le couvrir. Ils ont dans ce cas une vision de couverture : en observant le marché, ils sont censés créer un portefeuille d'actifs pour pouvoir rembourser les *pay off* aux investisseurs. Sa gestion de couverture sera en fonction de l'évolution du marché, ainsi que de ses anticipations. Il est important de retenir que sa gestion est active au cours de la vie du produit, mais son objectif doit être fixé dès le début de la période de commercialisation. Alors, en tant que distributeur, BDDF joue le rôle d'intermédiaire dans ces affaires. La distribution des marges doit se réaliser entre les agences commerciales, les structureurs et BDDF. La négociation de ces distributions s'est faite pendant la période de commercialisation qui peut s'étaler sur plusieurs mois. L'intérêt de cette étude est donc d'essayer d'avoir un résultat approché de la marge globale qui est, à priori, calculée d'une façon plus précise et aussi dans une vision différente de valorisation. Pendant cette période de commercialisation, il est possible que les paramètres de marché aient plus fluctués, ce qui peut entraîner dans certains cas des renégociations.

Les deux axes principaux de mon travail concernent la modélisation pour évaluer les produits et le paramétrage sur des informations du marché.

Après avoir évoqué les caractéristiques du produit ainsi que la notion de marge de commercialisation, la première partie s'articule autour du thème de l'évaluation des produits dérivés. Des méthodes classiques de formules fermées à la simulation de Monte Carlo sont présentées pour la modélisation des cours d'actifs. La notion de la structure par terme des taux d'intérêt ainsi que les différentes méthodes de sa construction sont expliquées, servant à l'évaluation de la partie dite « capital garanti » du produit. La deuxième partie du travail est consacrée à la présentation de l'application sur l'échantillon des produits étudiés. Après avoir présenté le panier des produits et les spécificités du paramétrage des données, elle s'achèvera par l'interprétation des résultats obtenus.

PARTIE I

PRESENTATION DES PRODUITS STRUCTURES ET MODELISATION

CHAPITRE 1. PRESENTATION GENERALE

Les produits structurés sont nés du besoin des entreprises qui souhaitent émettre des emprunts à moindre coût. Traditionnellement, l'un des moyens pour ce faire est d'émettre un emprunt obligataire convertible, c'est-à-dire des dettes qui pouvaient être convertibles en liquide/actions/obligations dans certaines circonstances. En échange de la possibilité d'avoir un rendement plus élevé par la suite, les investisseurs acceptent un taux d'intérêt plus bas en attendant. Mais ce compromis est discutable, car le mouvement des fonds d'entreprise pourrait être imprévisible. Les banques d'investissement ont alors décidé d'ajouter des fonctionnalités à la base de ces obligations convertibles, telles que l'augmentation des revenus en échange des limites de la convertibilité des stocks d'actions ou la protection du capital initial. Ces fonctionnalités sont toutes basées autour des stratégies d'investissement en utilisant les options et autres produits dérivés. Un intérêt des produits structurés est leur caractère « sur mesure » vis à vis du marché. Quelque soit l'évolution de marché, il est possible de construire une structure promettant une performance attrayante la plus souvent conjuguée à une garantie du capital. Profiter partiellement des progressions sans subir les baisses, c'est un outil idéal pour attirer de nouveaux souscripteurs pour les banques.

1. Diversification des produits

1.1 <u>Fonctionnement des produits</u>

D'un point de vue général, les produits structurés sont créés en combinant des placements sur le marché monétaire ou obligataire avec des produits dérivés et plus particulièrement des options dont la valeur dépend d'un sous-jacent (taux, change, actions, indices,…). La résultante de ces deux parties offrira alors à l'investisseur un profil de rendement bien spécifique qui garantira soit un coupon intermédiaire, soit une partie ou l'intégralité du capital en fonction de caractéristiques bien définies.

La première partie indispensable à la création d'un produit structuré repose sur des opérations de taux. Le choix de ce support de taux dépend de la maturité du produit et du support juridique que l'investisseur souhaite obtenir. Pour les maturités inférieures ou égales à un an, les supports dépôt à terme et certificat de dépôt négociable seront utilisés, alors que ces taux seront axés sur des obligations zéro coupon si les placements sont supérieurs à 12 mois.

Adossées au support de taux, les options sont utilisées pour déterminer le profil de rendement de la stratégie du produit. En fonction de la complexité du produit, cette partie a été constituée d'une ou plusieurs options vanilles ou exotiques, dont les sous-jacents peuvent être des taux d'intérêt (sur le **marché monétaire** pour les opérations de maturité inférieures à 1 an, sur le **marché obligataire** si supérieure à 1 an), des taux de change ou bien des actions ou des paniers d'actions, des indices ou des paniers d'indices géographiques.

1.2 <u>Différents types de produits</u>

2 types de produits structurés peuvent être distingués : les produits à capital non garanti et les produits à capital garanti.

Les premiers sont des structures dites *Reverse Convertible*, qui varient principalement entre 1 mois et 2 ans sur les titres actions et obligations et de 2 semaines à 6 mois sur le change, et qui offrent des taux de rémunération attractifs, moyennant un risque sur le capital, accepté par l'investisseur. Ces produits sont donc plus intéressants pour des intervenants dynamiques et aimant le risque. La caractéristique principale de ces produits est de poser une contrainte d'achat ou de vente à terme à l'investisseur, qui en contrepartie perçoit une surperformance de son placement. L'ensemble des variables (maturité, prix d'achat ou de vente, sous-jacent…) est défini au début de toute transaction.

Les deuxièmes, dites des produits à capital garanti, sont créés suite à l'exigence d'un niveau minimum de précaution dans un contexte de forte volatilité. Quelles que soient les fluctuations des placements boursiers, des cours de change et des taux, le souscripteur est certain d'être remboursé à l'échéance de son capital initial, et il a juste un manque à gagner potentiel par rapport à un placement sans risque. Le principe de base de ces produits est d'une part, d'acheter les obligations de zéro coupon pour acquérir à la maturité le niveau de capital garanti, d'autre part, une stratégie optionnelle ou une combinaison d'options pour obtenir des performances. La protection en capital est donc assurée par l'émetteur du placement taux, ce qui signifie qu'il est indispensable de vérifier la qualité du rating de ce dernier. En effet, si l'émetteur du zéro coupon fait faillite ou ne peut répondre à ses engagements de rembourser le capital à l'échéance, la garantie en capital sera fortement impactée.

1.3 Forme juridique

Les 2 formes juridiques les plus utilisées pour les produits structurés sont les OPCVM et les EMTN qu'il convient d'examiner terme à terme :

- Euro Medium Term Notes (EMTN)

Les EMTN sont des obligations de maturité moyenne émises par un émetteur (une banque dans le cadre des produits structurés) qui se porte garante de l'émission. Dans ce cas, en tant que porteur final, l'investisseur subira la défaillance si l'émetteur est en faillite. A cause de ce risque, tous les produits structurés sous cette forme sont émis plutôt par des banques ayant une bonne notation. De plus, il est important de différencier les deux notions de capital garanti : la garantie du produit en lui-même (en fonction des conditions déterminées qui forment le produit) et la garantie de l'émetteur qui structure ce produit (la promesse de la banque de rembourser le capital).

- OPCVM (Organisme de placement collectif en valeurs mobilières)

Il s'agit de produits souvent dénommés sur le marché financier des « Fonds à formule ». Selon l'AMF, « un fonds à formule est un fonds dont l'objectif est d'offrir une performance conditionnelle définie en fonction de l'évolution d'un indice, d'un panier d'indices ou de valeurs ou d'une composante de ces indices ou valeurs. Pour cela, l'OPCVM s'engage à atteindre, à une date déterminée, un montant obtenu par l'application mécanique d'une formule de calcul prédéfini, reposant sur des indicateurs de marché financiers ou d'instruments financiers».

Ces fonds peuvent différencier en trois catégories différentes selon la caractéristique du capital garanti:

- Fonds garantis : préservent la restitution totale de la mise du souscripteur à l'échéance du contrat.
- Fonds protégés : la garantie porte sur une partie du capital investi.
- Fonds à promesses : à l'échéance, un rendement dont le niveau est annoncé lors de la souscription mais subordonné à la réalisation de certaines conditions. Ils peuvent ne comporter aucun engagement sur le capital ou seulement une garantie partielle du capital.

L'investisseur du produit structuré devient dans ce cas porteur de parts du fonds. S'il s'agit d'un fond garanti ou d'un fond protégé, alors la garante du fonds va garantir soit l'intégralité soit une partie déterminée du capital investi. Si la banque garante est en faillite, l'investisseur récupère les autres actifs du fonds. Le risque porté dans ce cas est en principe moins élevé que précédemment.

Ces fonds sont gérés de façon **passive** : quoi qu'il arrive entre la création du fonds et l'échéance prévue pour la livraison de la performance, la société de gestion n'interviendra pas, même si l'évolution de la valeur liquidative devient défavorable pour les porteurs.

Ces formats juridiques influent aussi sur les classes de clientèles auxquelles sont offerts les produits. Si les OPCVM sont éligibles aux PEA (plan d'épargne d'actions, qui bénéficie d'une fiscalité favorable), les EMTN n'entrent pas dans ces catégories. Ce qui explique qu'en réalité, les particuliers s'intéressent plutôt aux produits sous formats OPCVM. Les EMTN par contre peuvent entrer dans une enveloppe d'assurance vie.

Par conséquent, le montage du fonds de ces deux formats comporte donc des caractéristiques différentes :

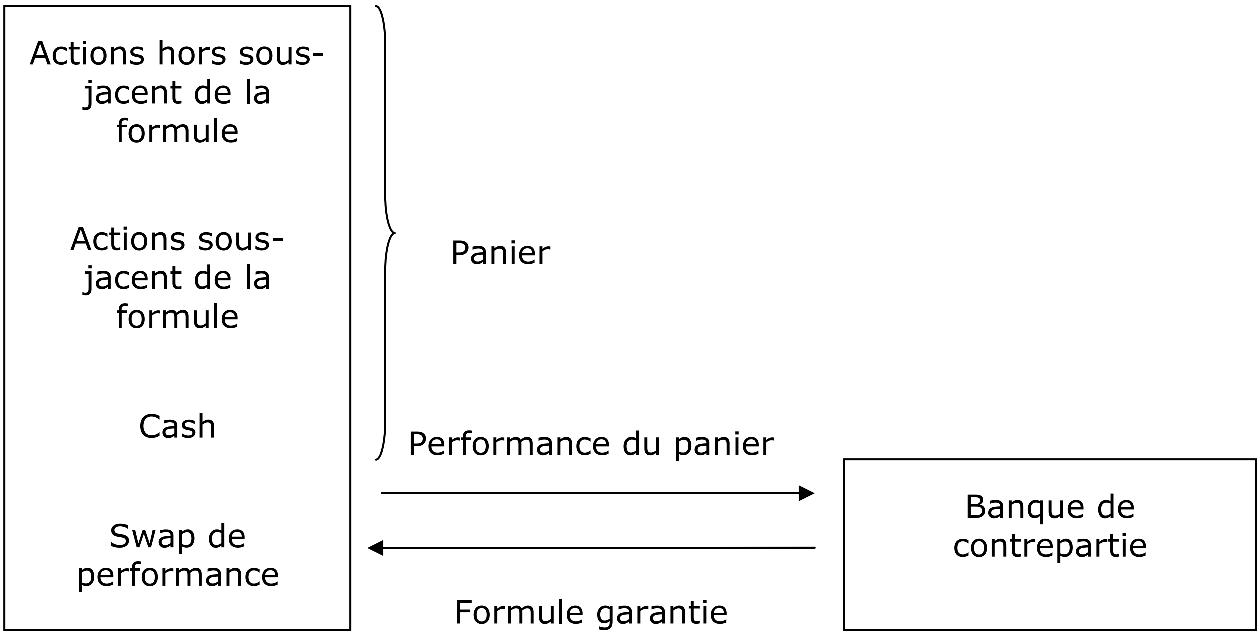


Figure 1. Montage d'un fond FCP structuré

En complément des investissements en actions faits par le OPCVM, la société de gestion de l'OPCVM établit un contrat de swap avec une banque contrepartie, lui permettant d'échanger, à échéance, pour le compte de l'OPCVM la performance du panier du fonds contre une garantie en capital, totale ou partielle. Si la banque garante fait défaut, le porteur de parts récupère au pire les titres restants de l'OPCVM.

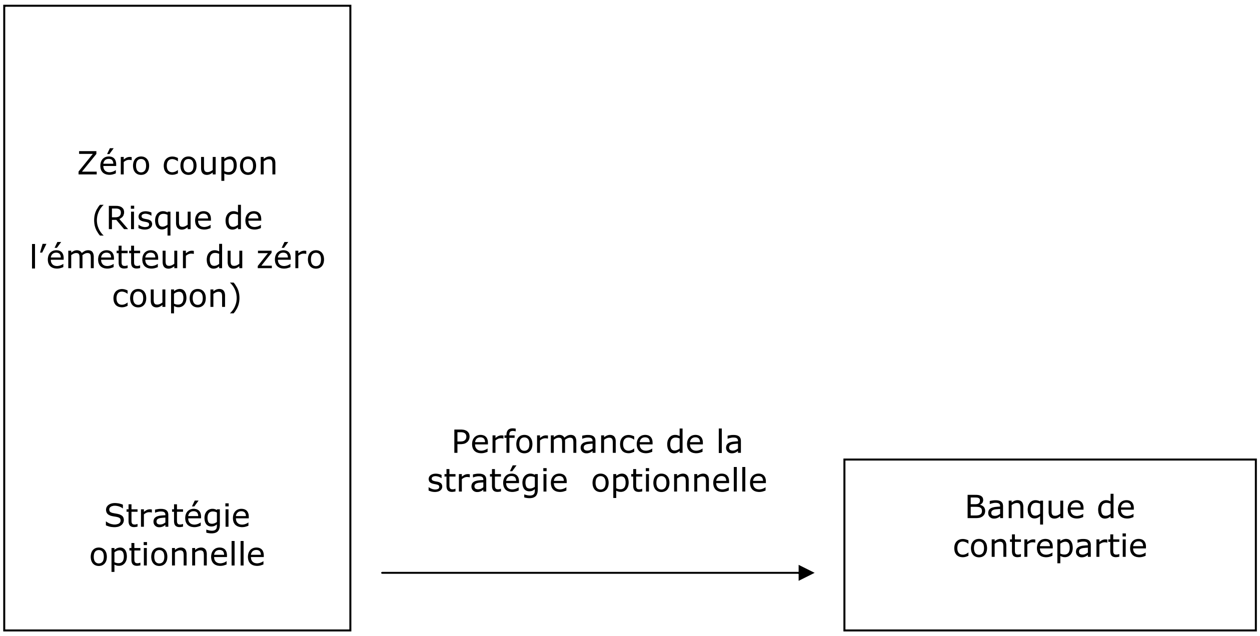
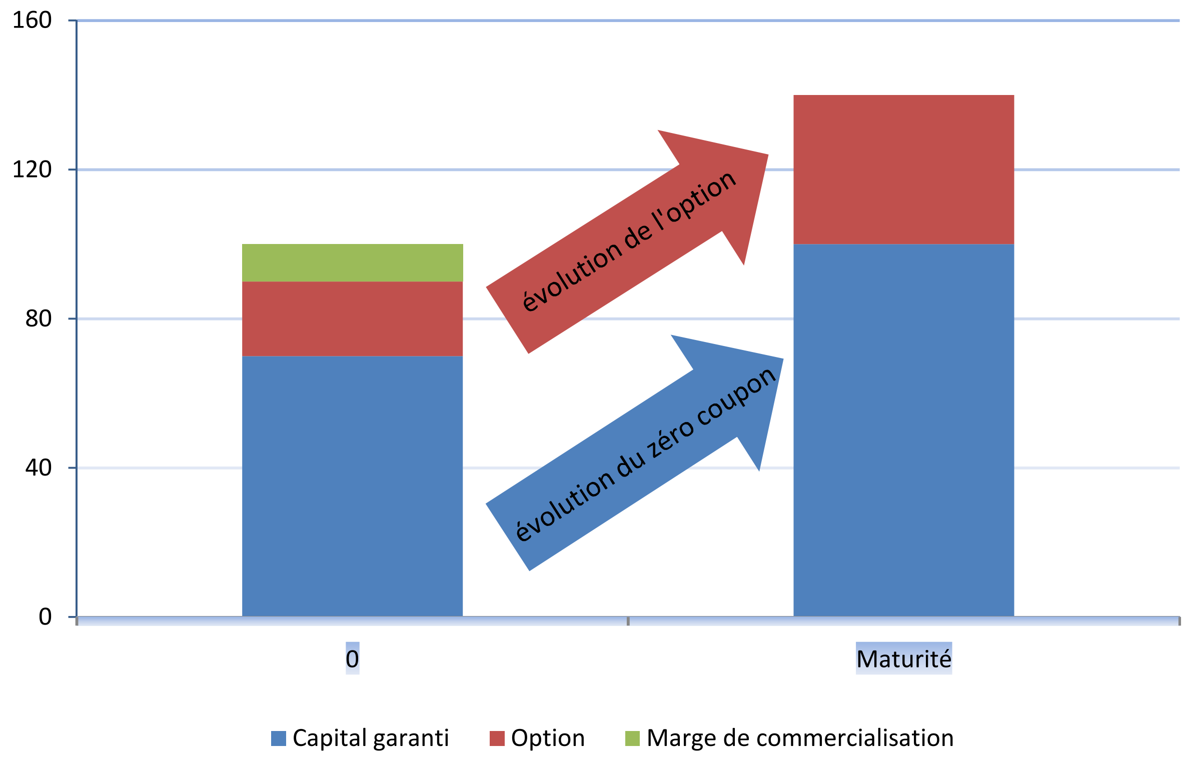


Figure 2. Montage d'un fond EMTN structuré

Dans le cas d'un EMTN, le porteur se retrouve créancier non sécurisé de la banque émettrice pour la partie de Zéro coupon.

3.4 Marge de commercialisation du produit

Dans le cadre d'évaluation du produit que nous avons retenue, **tous les produits sont évalués comme s'ils avaient la structure d'un EMTN**. Ils sont évalués par la combinaison de 2 parties (cf. Figure 2) : la partie du capital garanti avec le zéro coupon et la partie performance de la formule avec des stratégies optionnelles. Le prix du produit est écrit comme la somme des prix de ces deux composantes. Ce qui reste par rapport à l'investissement initial est la marge globale lors de la commercialisation du produit.



Soit T la maturité du produit.

Soit $V(0)$ la valeur du portefeuille à l'origine du placement $t=0$. Elle correspond à son capital initial investi C. A la maturité T, elle devient $V(T)$.

Soit $P(0)$ la valeur à investir en zéro coupon de maturité T à l'origine du placement $t=0$. $P(T)$ est la valeur de l'obligation zéro coupon en T.

Soit $r(0,T)$ le taux du zéro coupon de maturité T, on a bien : $P(T) = P(0)e^{r(0,T)T}$

En fonction de la caractéristique de la garantie du capital, la valeur $P(T)$ peut être exprimée par le capital investi $P(T) = f(C)$. En générale, cette fonction f sera une fonction linéaire.

Soit *Perf* la performance de l'option stratégique du produit. Elle est définie en fonction de la performance d'un actif sous-jacent. Dans le cas le plus simple, la *Perf* peut être gérée par l'achat d'un call de maturité T, de *strike* K et d'un sous-jacent S_T : $C(S_T, K, T)$

A la maturité T, la valeur du portefeuille devient :

$$V(T) = P(T) + (S_T - K)^+ = f(C) + (S_T - K)^+$$

A l'origine du placement $t=0$

$$C = P(0) + C(S_T, K, T) + marge$$

Cette *marge* représente donc le gain total de la commercialisation qui revient à l'émetteur du produit.

Cette marge, dite flat, va être redistribuée aux différents acteurs : les agences commerciales, les structureurs et la banque de détail **durant la vie du produit**. C'est plutôt sur la *marge annualisée* que la distribution sera partagée entre les acteurs. En effet, en considérant que la marge du produit va être ventilée sur toute la vie du produit avec un taux sans risque r, la marge annualisée sera calculée comme ci-dessous.

$$marge\ annualisée = marge\ \frac{e^r - 1}{1 - e^{-Tr}}$$

Il s'agit ensuite de faire des tests de sensibilité sur cette marge annualisée. Mais comment on peut connaître la marge réelle du produit sous le format FCP ?

Alors qu'un produit sous le format d'EMTN contient un risque de contrepartie sur la partie de zéro coupon, celui sous le format de FCP va porter le risque sur les fluctuations des actifs composants le fonds. **En considérant que tous les produits sont au format d'EMTN, pour retrouver la marge correspondante d'un FCP, on suppose alors que s'il n'y a pas de risque de défaut de l'émetteur de zéro coupon, en équivalence, tous les actifs du fonds FCP devraient rapporter comme si on investissait seulement en actif sans risque.** Connaissant la marge sous le format d'EMTN et ses sensibilités aux fluctuations des taux, une approximation de la marge réelle du produit pourrait être obtenue. L'hypothèse de réduire le risque sur les actifs du fonds FCP en zéro va certainement minorer la marge réelle du produit concerné, mais au moins cela nous donne un intervalle où elle doit être située.

Remarque : Il faut savoir que économiquement, il y a l'équivalence entre une structure de FCP à formule et celle composée par un zéro coupon et options stratégiques, par le biais de la relation de parité call-put :

Call + Cash (EMTN) = Put + Actifs (FCP)

2. Quelques statistiques du marché français

2006			2007			2008			2009		
Émetteur	**Volume commercialisé (EURm)**	**% marché**	**Émetteur**	**Volume commercialisé (EURm)**	**% marché**	**Émetteur**	**Volume commercialisé (EURm)**	**% marché**	**Émetteur**	**Volume commercialisé (EURm)**	**% marché**
Crédit Agricole	5 238	31%	Crédit Agricole	8 450	39%	Crédit Agricole	5 144	34%	Crédit Agricole	2 378	32%
BNP Paribas	3 063	18%	BNP Paribas	3 214	15%	BNP Paribas	2 749	18%	BNP Paribas	1 388	19%
Société Générale	1 920	12%	Caisse D'Épargne	2 185	10%	Caisse D'Épargne	2 211	14%	Société Générale	1 358	18%
Caisse D'Épargne	1 645	10%	Société Générale	1 979	9%	Société Générale	930	6%	Banque Populaire	350	5%
La Poste	994	6%	La Poste	1 317	6%	La Poste	765	5%	Caisse D'Épargne	280	4%
Crédit Mutuel – CIC	810	5%	Crédit Mutuel – CIC	821	4%	Barclays	462	3%	Crédit Mutuel Arkéa	249	3%
Banque Populaire	629	4%	Barclays	504	2%	Banque Populaire	453	3%	Swiss Life	212	3%
Allianz	362	2%	Banque Populaire	456	2%	Crédit Mutuel – CIC	393	3%	Crédit Mutuel – CIC	166	2%
Crédit du Nord	253	2%	HSBC	367	2%	Crédit Mutuel Arkéa	363	2%	Allianz	146	2%
Crédit Mutuel Arkéa	252	2%	Crédit Mutuel Arkéa	338	2%	Allianz	278	2%	Nortia	128	2%
Autres	1 513	9%	Autres	2 031	9%	Autres	1 546	10%	Autres	775	10%
Total	16 677	100%	Total	21 663	100%	Total	15 294	100%	Total	7 429	100%

Source: http://www.structuredretailproducts.com

Tableau 1. Répartition des produits sur le marché français de 2006 à 2009

Sur le marché des produits structurés français, le Crédit Agricole et le BNP Paribas sont les 2 plus grands émetteurs. Leurs volumes de transaction représentent plus de 50% du marché.

Après une augmentation régulière des volumes vendus de 2005 à 2007, la crise en 2008 a freiné le marché des produits structurés français. En 2009, le volume des transactions a été divisé par 3 par rapport à l'avant crise.

Emissions annuelles			
Période d'émission	Nombre de produits	Volume (EURm)	Moyenne (EURm)
Jan 2006 to Dec 2006	225	16924	75,2
Jan 2007 to Dec 2007	368	21947	59,6
Jan 2008 to Dec 2008	495	15560	31,4

Tableau 2. Nombre de produits émis et son volume de transactions de Janvier 2006 à Décembre 2008

Si le nombre de produits ne cessent pas de croitre entre 2006 et 2008, les transactions ont chuté après.

CHAPITRE 2. MODELISATION

Comme décrit précédemment, on va évaluer le prix des zéro coupons et la partie optionnelle du produit. Le premier va être calculé en fonction du taux historique sur le marché. En fonction de l'entité garante du produit, une courbe de zéro coupon est extraite à partir des obligations émises par cet acteur. La partie optionnelle est modélisée notamment par le modèle de Black Scholes qui est le plus connu par sa simplicité d'implémentation avec une solution analytique et de plus, cela donne des bonnes estimations sous les conditions normales du marché. Nous verrons ensuite que comme les praticiens, nous utilisons des paramètres de marché implicites au modèle de Black et Scholes, plutôt que des modèles théoriquement plus fins mais trop complexes à calibrer dans le contexte du stage.

Dans une première partie, les modèles d'évaluation de la composante optionnelle sont abordés, puis, la structure par terme de taux d'intérêt (STTI) nécessaire à l'évaluation de la composante « Capital garanti » sera examinée.

1. Composante optionnelle

1.1. Modélisation des actions

1.1.1. Modèle de Black Scholes

Dans le cadre du modèle Black Scholes, le cours de l'actif sous-jacent vérifie l'équation stochastique suivante:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Avec W_t est un processus de Wiener, alors, $W_t \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sqrt{t}\right)$

Ce modèle est retenu par certaines hypothèses :

- Absence d'opportunités d'arbitrage
- Aucune restriction sur les ventes à découvert
- Absence de coûts de transactions
- Le taux sans risque r est constant et fixe quelque soit la maturité du produit
- Absence de dividendes
- Le marché est continu

Le cours des actions est donc simulé par un mouvement brownien géométrique dont l'hypothèse sous-jacente est la lognormalité des rendements.

D'après le lemme d'Itô, le processus ln(S) est donc :

$$d\big(ln(S)\big) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW$$

Où :

$$S(t) = S_0 exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dW\right]$$

En divisant la vie de l'option en n intervalles de même durée $\delta t = \frac{T}{n}$, les diffusions successives sont obtenues:

$$S(t+\delta t) = S(t) exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\delta t}\right]$$

ε suit la loi normale centrée réduite.

L'avantage de cette méthode est de pouvoir modéliser les options dont le *pay off* dépend de la valeur de l'actif sur toute sa durée de vie, par exemple pour des options asiatiques ou options barrière. Le fait de pouvoir modéliser le cours d'un actif à différentes dates intermédiaires avant la date de maturité permet d'inclure ces valeurs dans les conditions d'exercice de l'option.

Par ailleurs, dans le cas où le *pay off* de l'option est examiné seulement à l'échéance, c'est à dire lorsqu'il ne dépend que du cours final de l'actif, alors, il n'est pas nécessaire de simuler tous les pas intermédiaires des trajectoires, une seule diffusion de S_T est suffisante.

1.1.2. Modèle de Merton

Le fait de ne pas tenir compte de la possibilité de sauts d'un cours boursier, le modèle de Black Scholes ne présente pas une queue de distribution lourde par rapport à la réalité.

Le modèle de Merton introduit un saut via un processus de Poisson dans la solution du modèle de Black Scholes :

$$S(t) = S_0 exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dW(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k)\right]$$

Où :

N est un processus de Poisson d'intensité λ

U est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \Omega)$

Les processus W, N et U sont mutuellement indépendants,

Par convention, on suppose que $\sum_{k=1}^{N(t)} U(k) = 0$ si $N(t)=0$. Etant spécifié que les sauts soient symétriques et de moyenne nulle : le cours de l'action peut avoir aussi bien une soudaine hausse qu'une soudaine baisse avec une même probabilité et une même intensité.

L'utilisation de ce modèle demande l'estimation de 4 paramètres $\mu, \sigma, \lambda, \Omega$; qui peut avoir recours à des méthodes de maximum de vraisemblance ou la méthode de moments.

1.1.3. Modèle de Heston

Comme décrit précédemment, le modèle de Black Scholes suppose une volatilité constante qui est, en réalité prise une forme de *smile* en fonction des différents prix d'exercice et plusieurs maturités. (Cf. 1.2.2)

Pour corriger ce défaut, Heston, dans un article écrit en 1993, suggère un modèle où la volatilité dispose de sa propre dynamique :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r-q)dt + \sqrt{V(t)}\, dW_S(t)$$

$$dV(t) = \kappa\big(\theta - V(t)\big)dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_V(t)$$

$$dW_S dW_V(t) = \rho dt$$

Où W_S, W_V présentent deux mouvements browniens corrélés de coefficient ρ; r désigne le taux sans risque et q le dividende continu. V présente le processus de la volatilité, avec κ est le paramètre de retour à la moyenne, θ est la variance de long terme et σ la volatilité de la volatilité.

En termes de modélisation, l'appel au schéma d'Euler sur les deux dynamiques est entrepris:

$$ln\big(S(t+\Delta)\big) = lnS(t) - \frac{1}{2}V(t)\Delta + \sqrt{V(t)}\sqrt{\Delta}W_S$$

$$V(t+\Delta) = V(t) + \kappa\big(\theta - V(t)\big) + \sigma\sqrt{V(t)}\sqrt{\Delta}W_S$$

Un problème potentiel est la négativité du processus discrétisé V en fonction du choix de discrétisation Δ .

Choix du modèle : il est cohérent qu'afin d'avoir une plus forte approximation de la réalité, il nécessite d'utiliser une paramétrisation plus importante; mais dans le contexte du stage, ce travail de calibrage est très complexe, nous nous contenterons du modèle de Black Scholes.

1.2. Méthode de simulation de Monte Carlo

La méthode de simulation de Monte Carlo est utilisée pour évaluer les *pay off* de l'option stratégique.

1.2.1. Principe

Le principe de la simulation de Monte Carlo est de considérer une intégrale sous forme de l'espérance puis d'approcher celle-ci au moyen de la loi des grands nombres. Dans le cadre du calcul des prix des options, la méthode de Monte Carlo calcule donc l'espérance des *pay off* sous la probabilité risque neutre[1] par différentes étapes :

- Tirer une trajectoire de l'actif sous-jacent S

[1] Une mesure de probabilité équivalente à la vraie probabilité, dite neutre au risque, unique tel que l'espérance (définie dans la mesure de probabilité neutre au risque) de rendement actualisé de chaque actif soit égale à son prix. Ce résultat est utilisé pour valoriser des options sans référence aux préférences des agents.

- Appliquer les conditions des *pay off* obtenus pour l'option concernée sur l'actif sous-jacent
- Répéter les 2 étapes précédentes plusieurs fois pour avoir un grand nombre de trajectoires possibles.
- Calculer la moyenne des *pay off* obtenus
- Actualiser cette moyenne avec le taux sans risque pour déduire le prix de l'option concernée

Si l'espérance du *pay off* du produit est notée et sa variance $\frac{\sigma^2}{n}$, on sait qu'il en découle, d'après le théorème central limite :

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Avec n est le nombre de simulation effectué et $\overline{X}$ est la moyenne des *pay off* obtenus actualisés.

Alors, pour 95% de précision, l'intervalle de confiance du *pay off* obtenu est :

$$\mu - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \ \mu + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}$$

L'incertitude sur la valeur de l'actif dérivé est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de trajectoires simulées. Pour doubler la précision du résultat, il faut quadrupler le nombre de trajectoire. Cet inconvénient peut être pallié par les méthodes d'accélérateur de convergence, comme celle de réduction de la variance.

Il est nécessaire dans certains cas, de simplifier les *pay off* du produit pour pouvoir comparer avec des résultats d'une formule fermée, à partir desquels, on pourra choisir le nombre de simulation convenable. Mais, en pratique, un nombre au voisinage de 100000 scénarii permet d'obtenir la convergence du résultat souhaité.

1.2.2. Quelques spécificités des paramètres utilisés

a) Volatilité

La volatilité est un paramètre fondamental dans le calcul de la valeur d'une option. Si dans le cadre du modèle Black Scholes, elle est supposée constante, dans la réalité elle prend une forme plutôt stochastique.

Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

- La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission des options. Avec des observations rapprochées du cours de sous-jacent, il est possible d'estimer la volatilité instantanée. Sous l'hypothèse de la constance de la volatilité de Black Scholes, on peut donc considérer la racine carrée de la variance empirique sans biais comme son estimation, telle que :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \hat{\mu}\right)^2$$

avec

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

Où n est le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité. Dans la formule de Black Scholes, l'unité de temps pour mesurer les paramètres est par convention l'année. Alors, pour annualiser la volatilité calculée, en supposant que le nombre de jours ouvrés est 252 jours, on prend la formule :

$$\sigma_{AN} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{252}{\Delta t}}$$

Avec Δt est l'intervalle de temps entre 2 observations consécutives.

Mais comment choisir le nombre d'observations pour l'estimation ? Effectivement, il faut plus de données pour avoir plus de précisions mais si les données sont si éloignées du moment estimé, l'estimation sera fortement biaisée. D'après Hull, utiliser les données des cours les plus récents dans l'intervalle de 90 à 180 jours peut donner les estimations les plus raisonnables.

Cette approche a été critiquée, principalement pour le fait qu'elle suppose que la perception du risque par les investisseurs est basée uniquement sur la variabilité des cours dans le passé. Ce qui sollicite une autre méthode alternative d'extraction de la volatilité en fonction des prix observés sur le marché.

- La volatilité implicite est basée sur le prix actuel de l'option qui inclut les prévisions des anticipations futures. Le principe de ce calcul est que sous le cadre du modèle Black Scholes, le prix de l'option est calculé en fonction de la volatilité. Alors, à partir des prix d'options sur le marché, s'il est parvenu à inverser la formule d'évaluation, la volatilité de l'actif sous-jacent pourra être retrouvée. Or, il est impossible d'avoir une formule fermée de la volatilité en fonction du prix d'option. Il faut avoir recours à des méthodes numériques pour inverser la formule (par exemple : méthode Newton-Raphson).

En effectuant ce calcul sur les calls de prix d'exercices différents, il est observé que les options « à la monnaie » ont une volatilité implicite plus faible que les autres, et que plus on s'éloigne du prix d'exercice correspondant plus la volatilité s'accroît. Ce *smile* de volatilité traduit le fait que les options qui ne sont pas à la monnaie ont un prix sur le marché plus élevé que celui prédit par le processus brownien géométrique supposé par Black Scholes. Cela indique que le marché accorde une probabilité plus forte à des valeurs éloignées de la tendance centrale que celle d'une distribution log normale. Deux formes de *smile* doivent retenir sont :

-« *leptokurticité* » : un *smile* symétrique et aigu, implique une tendance où le marché accorde une probabilité plus forte à des valeurs extrêmes.

-« *smirks* » : un *smile* asymétrique

b) Matrice de corrélation

Lorsque l'option concernée est une option multi sous-jacent, on parle alors de la simulation de Monte Carlo multidimensionnelle. Chaque action suit toujours un processus stochastique décrit comme précédemment, mais maintenant, il n'ya plus un seul mouvement Brownien mais un vecteur de mouvements browniens qui sont corrélés entre eux. La modélisation doit donc être prise en compte de cette nouvelle information qui est la matrice de Variance/Covariance telle que :

$$(\Sigma)_{ik} = \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k \quad i,k = 1,2 \ldots$$

On en déduit que les prix des actifs suivent l'équation suivante :

$$S_i(t_j) = S_i(0)exp\left[\left(r - q_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t_j + Z_i(t_j)\sqrt{t_j}\right]$$

Avec :

$$Z_i(t_j) = \bar{C}\,\epsilon$$

Où ϵ est un vecteur de variables normales centrées réduites.

C est une matrice triangulaire inférieure telle que :

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=1} C_{ik}\overline{C_{kj}} = \sum_{1\leq k\leq i\wedge j} C_{ik}\overline{C_{kj}}$$

Pour calculer C, il est fait appel à l'algorithme de Cholesky appliquée sur une matrice de variance covariance symétrique positive.

Dans le cadre d'un modèle de Heston, la matrice de corrélation va être plus complexe :

$$A = \begin{pmatrix} \rho_{(1,1)} & \cdots & \rho_{(1,n)} & \eta_1 & & ? \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \rho_{(n,1)} & \cdots & \rho_{(n,n)} & ? & & \eta_n \\ \eta_1 & & ? & 1 & & ? \\ & \ddots & & & \ddots & \\ ? & & \eta_n & ? & & 1 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$dW_{S,i}dW_{V,i} = \eta_i dt$$
$$dW_{S,i}dW_{S,j} = \rho_{(i,j)}dt$$

Si les coefficients $\rho_{i,j}$ sont retrouvés par des données historiques des prix, les η_i proviennent de la calibration du modèle. Or, sur la corrélation entre un stock et la variance d'un autre stock ou entre les variances de deux stocks différents, il est difficile d'obtenir des informations sur le marché. Dans ce cas, il est possible de fixer à 0 toutes les corrélations non observables et non implicitables mais il faut faire attention à la caractéristique symétrique définie positive de cette matrice de corrélation.

1.3. Formule fermée

Dans l'objectif d'avoir un outil de vérification des résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo, il est intéressant d'étalonner le modèle par simulation sur une sous partie pour laquelle une solution explicite fermée est connue. Ces résultats permettent de déterminer le nombre minimal de tirages nécessaire pour obtenir un niveau de précision donné.

1.3.1 Modèle de Black Scholes

Dans le cadre du modèle de Black Scholes, on considère un *call* européen dont le sous-jacent est un indice d'action $S_{t,}$ où :

$$\frac{dS}{S} = (r-q)dt + \sigma dW$$

Avec

S: le prix de l'actif

K: le prix d'exercice

r: le taux sans risque

q: le taux de rendement continu constant de l'actif

σ : la volatilité de l'actif de prix S à la date t

dW: un mouvement Brownien

Sous ces hypothèses, la volatilité de l'actif est évaluée à la date t, pour une maturité donnée, et est considérée constante dans le temps. La dynamique du sous-jacent s'écrit donc :

$$\ln S_T \approx \mathcal{N}\left(\ln S_t + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t); \sigma^2(T-t)\right)$$

Cette distribution permet de calculer le prix C_t de l'option d'achat européenne à partir de la formule d'évaluation générale :

$$C_t = e^{(r-q)(T-t)} E_t(S_T - K)$$

ce qui donne la formule de Black Scholes :

$$C_t = S_t\, e^{-q(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}$$

et :

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Où $\mathcal{N}(\ )$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le prix de l'option d'achat apparaît donc comme une fonction linéaire du prix sous-jacent S_t . Ce prix est un prix théorique pour l'option qui n'est pas égal au prix réellement observé sur le marché. En effet, comme décrit précédemment, le contexte du modèle suggère que la volatilité soit constante, ce qui n'est pas validé en réalité.

1.3.2. Quelques options utilisées dans le cadre de l'étude

Dans le cadre de l'étude, il est rencontré 2 types d'options dont le prix peut se calculer en faisant appel au modèle Black Scholes, qui vont être présentées maintenant.

a) Options digitales

Les options digitales ou encore binaires désignent des options qui génèrent un flux fixe connu à l'avance si le sous-jacent est supérieur au prix d'exercice. Le flux d'un *call* et d'un *put digital* s'écrivent donc :

$$C_T = 1_{\ S_T > K} \qquad P_T = 1_{\ S_T < K}$$

Dans le cadre du modèle de Black Scholes, il peut être envisagé de calculer le prix théorique d'une telle option. A partir de la formule d'évaluation écrite comme l'espérance du flux futur :

$$C_t = e^{-r(T-t)} E\left[1_{\ S_T > K}\right] \qquad P_t = e^{-r(T-t)} E\left[1_{\ S_T < K}\right]$$

On a $ln\ S_T$ qui suit une loi gaussienne conditionnellement à S_t sous la probabilité risque neutre. Le prix théorique du *call digital* en est déduit :

$$C_T = e^{-(r-q)(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

avec d_2 écrit comme précédemment.

Il faut noter qu'à côté de cette manière directe, est aussi approchée une option digitale par des options standards. L'approximation peut s'écrire:

$$1_{\ S_T > K} = -\frac{\left(S_T - (K + dK)\right)^+ - (S_T - K)^+}{dK}$$

Avec dK petit, signifie que la dérivée de la fonction x^+ est approximativement égale à la fonction indicatrice 1_x. Par conséquent, acheter $\frac{1}{dK}$ option call de *strike* K à maturité T et vendre une même quantité d'option de *strike* $K+dK$ revient à acheter un call digital de *strike* K et maturité T. Le calcul du prix de cette couverture se fait donc avec des formules standards de Black Scholes.

b) Options avec des maturités prorogées (*Extendible option*)

Cette option possède la caractéristique d'être prolongeable soit par le vendeur soit par l'acheteur. Elle est de plus en plus utilisée dans les années récentes, surtout pour les sous-jacents de forte volatilité. Il existe 2 types d'options de maturités prorogées :

- Option de maturité prorogée par l'acheteur (*Holder extendible option*)

L'acheteur a donc le droit de prolonger la maturité de l'option jusqu'à une maturité finale à une date prédéterminée, mais pour ce faire, l'acheteur devrait donc payer une prime supplémentaire. Le *pay off* pour cette option s'écrit donc :

$$Call_{holder\ extendible} = max(S - K_1; C(S, K_2, T_2 - T_1) - A; 0)$$
$$Put_{holder\ extendible} = max(K_1 - S; P(S, K_2, T_2 - T_1) - A; 0)$$

Avec $C(S, K, T)$et $P(S, K, T)$ sont des *call* et *put vanille*. K_2est le *strike* prorogé, T_2 est la date de maturité finale, T_1, K_1 est respectivement la date et le *strike* pour pouvoir proroger la maturité et A est la prime supplémentaire**.**

Longstaff représente une méthode d'évaluation de cette option sous le modèle de Black Scholes[2] :

$$\begin{aligned} Call_{holder\ extendible}(S, K_1, T_1, K_2, T_2, A) = {} & C(S, K_1, T_1) + S\,\mathcal{N}(\gamma_1, \gamma_2, -\infty, \gamma_3, \rho) \\ & - K_2 e^{-rT_2} \mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, -\infty, \gamma_3 - \sqrt{\sigma^2 T_2}, \rho\right) - S\,\mathcal{N}(\gamma_1, \gamma_4) \\ & + K_1 e^{-rT_1} \mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_4 - \sqrt{\sigma^2 T_1}\right) - A e^{-rT_1} \mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}\right) \end{aligned}$$

Où

$$\gamma_1 = \frac{\left(ln\left(\frac{S}{I_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T_1\right)}{\sqrt{\sigma^2 T_1}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\left(ln\left(\frac{S}{I_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T_1\right)}{\sqrt{\sigma^2 T_1}}$$

$$\gamma_3 = \frac{\left(ln\left(\frac{S}{K_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T_2\right)}{\sqrt{\sigma^2 T_2}}$$

$$\gamma_4 = \frac{\left(ln\left(\frac{S}{K_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T_1\right)}{\sqrt{\sigma^2 T_1}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

[2] Ces résultats ne tiennent pas en compte des dividendes

[I_1,I_2] est l'intervalle des cours d'actif en T_1en dehors duquel l'option pourrait être prorogée. Pour les résoudre, les techniques itératives de Newton Raphson sont utilisées sous des conditions suivantes :

Pour les *call* : $C(I_1, K_2, T_2 - T_1) = A \qquad C(I_2, K_2, T_2 - T_1) = I_2 - K_1 + A$

Pour les *put* : $P(I_1, K_2, T_2 - T_1) = K_1 - I_1 - A \qquad P(I_2, K_2, T_2 - T_1) = A$

$\mathcal{N}$(a,b,c,d,ρ) est la fonction de répartition pour la loi normale bivariée avec le coefficient de corrélationρ.

De la même façon, le prix d'une option put de maturité prorogée est :

$$\begin{aligned} Put_{holder\ extendible}(,K_1, T_1, K_2, T_2, A) = {} & P(S, K_1, T_1) - S\,\mathcal{N}(\gamma_1, \gamma_2, -\infty, \gamma_3, \rho) \\ & + K_2 e^{-r(T_2-T_1)}\mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, -\infty, \gamma_3 - \sqrt{\sigma^2 T_2}, \rho\right) + S\,\mathcal{N}(\gamma_1, \gamma_4) \\ & - K_1 e^{-rT_1}\mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_4 - \sqrt{\sigma^2 T_1}\right) - A e^{-rT_1}\mathcal{N}\left(\gamma_1 - \sqrt{\sigma^2 T_1}, \gamma_2 - \sqrt{\sigma^2 T_1}\right) \end{aligned}$$

- Option de maturité prorogée par le vendeur (*Writer extendible option*)

D'après Longstaff, plusieurs contrats financiers contiennent implicite ou explicite option qui peut être prorogé par le vendeur. Par exemple, si le vendeur affronte des taxes pénalités et si l'option expire en dehors de la monnaie, alors, il préfère étendre la maturité de son option en espérant une expiration proche dans la monnaie. Ces options peuvent être exercées à la première date de maturité T_1, mais vont s'étendre jusqu'à la date T_2 si elles sont en dehors de la monnaie en T_1.

L'évaluation de cette option est plus facile car les vendeurs ne paient pas de prime supplémentaire pour pouvoir exercer le droit de proroger.

$$Payoff_{call\ Writer\ Extendible} = \begin{cases} S - K_1 & si\ \ S > K_1 \\ C(S, K_2, T_2 - T_1) & sinon \end{cases}$$

Le principe du *pricing* est donc d'acheter un call de maturité restante si l'exercice immédiat ne rapporte rien.

De la même façon, le *pay off* d'une option *put writer extendible* est:

$$Payoff_{put\ Writer\ Extendible} = \begin{cases} K_1 - S & si\ \ S < K_1 \\ P(S, K_2, T_2 - T_1) & sinon \end{cases}$$

L'évaluation de prix de ces options est donc :

$$Prix_{writer\ extendible} = V + \alpha\left[S\,\mathcal{N}(\alpha\gamma_3, -\alpha\gamma_4, -\rho) - K_2 e^{-rT_2}\mathcal{N}\left(\alpha\left(\gamma_3 - \sqrt{\sigma^2 T_2}\right), \alpha\left(-\gamma_4 + \sqrt{\sigma^2 T_1}\right), \rho\right)\right]$$

Avec V la valeur du prix des *call* et *put* respectivement dont les caractéristiques sont (S, K_1, T_1), et α est égal à 1 si c'est un call et à –1 si c'est un put. Les valeurs γ_3, γ_4 et ρ ont de mêmes valeurs que pour les options de maturité prorogée par l'acheteur.

2. La structure par terme des taux d'intérêt et l'évaluation du capital garanti

La partie du capital garanti est gérée par la banque garante du fond. Pour avoir le prix de cette composante de la formule, il est nécessaire d'avoir une information sur la courbe de taux zéro coupon de la banque concernée. Pour ce faire, il est important de rappeler la méthode de construction d'une courbe de taux.

Le principe est de construire une courbe r(t), où r(t) est le taux d'intérêt pour la maturité t, les taux ayant une même classe de risque, une même fréquence de détachement de coupons, une même convention, un même nominal et une même monnaie. Dans le cadre de notre analyse, on ne s'intéresse qu'au taux zéro coupon, c'est à dire, un instrument qui ne paie qu'une seule fois à l'échéance[3]. Or, sur le marché financier, il n'existe pas toujours des zéro coupons avec une date de maturité correspondante exactement à ceux dont on a besoin pour la formule concernée. Par contre, on peut disposer d'autres obligations couponnées sur le marché. Cela suggère donc tout d'abord à calculer les taux zéro coupons fictifs en fonction des obligations disponibles (à une date de maturité donnée). Et pour avoir une courbe à n'importe quelle échéance, il faut avoir recours à des méthodes d'interpolation (linéaire, cubique.)

2.1. Calcul des taux de zéro coupon :

2.1.1. Extraction à partir de titres couponnés pour chaque maturité:

Supposons qu'il existe n obligations à coupon annuels, de maturités 1,2.., n, dont les cours en 0 ne sont pas connus, et tous ces titres détachent leurs coupons à même date. Considérons n titres, remboursables au pair in fine, de coupons c_i, avec i de 1 à n, versés à la fin des périodes i. En raisonnant en pourcentage du nominal, l'écriture de la relation fondamentale d'équilibre pour ces n titres s'écrit de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100+c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_2 & 100+c_2 & & \cdots & 0 \\ c_3 & c_3 & 100+c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_n & c_n & \cdots & 100+c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

Avec δ_i représente le facteur d'actualisation correspondant au zéro coupon de maturité i. Ces facteurs peuvent être obtenus par simple inversion d'une matrice triangulaire :

[3] Son taux de rendement actuariel par conséquent égal au taux de zéro coupon

$$P = M\delta \implies \delta = M^{-1}P$$

Ces procédés supposent que les tombées de coupons ont lieu aux mêmes dates, ce qui n'est pas toujours le cas. De plus, le fait de ne pas avoir toujours des obligations couponnées pour toutes les échéances peut poser plusieurs problèmes.

2.1.2. Extraction à partir des taux swaps :

Une autre façon de déterminer des points de la STTI consiste à utiliser des marchés dérivés, en particulier le marché des swaps de taux d'intérêt, qui est plus actif que des marchés de contrats à terme.

Un swap est un contrat entre deux parties, d'échange de flux d'intérêts sur une période, subdivisée en sous périodes d'iodurées τ. Les sous périodes sont identifiés par deux dates successives t_i, t_{i+1}. Chacun de ces instants correspond à des dates de paiement et de révision de taux. Les flux échangés sont des intérêts calculés les uns à partir d'un taux fixe, appelé taux de swap, et les autres à partir d'un taux variable associé à la maturité.

L'une des parties s'engage à payer le taux fixe à chaque date t, l'autre s'engage à recevoir le taux variable à ces mêmes dates. On peut démontrer que le taux d'équilibre R_S en 0, pour un swap commençants en 0, et ayant n-1 dates de révision de taux, donc se terminant en n, s'écrit :

$$R_S = \frac{1 - P(0,T_n)}{\tau \sum_1^n P(0,T_i)}$$

Avec $P(0,t_i)$ est le prix d'un zéro coupon de maturité t_i. (Cf. Annexe 3)

Cette méthode d'extraction peut occasionner de même difficulté rencontrée précédemment : les dates de paiement n'existent pas pour toutes les maturités demandées. Pour obtenir la courbe pour toutes les maturités, on peut interpoler et extrapoler linéairement. Mais, il est clair que si cette solution est rapide et adapté, elle n'est pas vraiment satisfaisante, car la courbe obtenue est affine par morceaux, alors qu'une courbe de taux attendue doive être plus lisse. C'est pourquoi, il est nécessaire de recourir à des méthodes d'interpolation plus raffinés. Une solution consiste à utiliser des «splines » cubiques. Une spline cubique est constituée par un ensemble de raccordements de polynômes de degré trois qui forme une courbe continûment indifférentiable. Des ondulations peuvent apparaître, qui sont incompatibles avec la forme en principe régulière de la courbe des taux.

2.2. Les méthodes statistiques :

Une autre approche de procéder consiste à chercher une estimation statistique de la fonction d'actualisation. La mise en œuvre de cette méthode est relativement délicate, car la multiplicité des dates de détachement de coupons et la nécessité d'avoir les échantillons homogènes rendent la collecte de l'information pénible. En outre, la théorie suggère que la fonction à estimer doit être en forme exponentielle. On postule une fonction d'actualisation de la forme suivante :

$$\delta(t) = exp\{-A(t)\}$$

$A(t)$ est une fonction de maturité t, dont la forme est préétablie. Nous présentons rapidement deux types de solutions : les exponentielles de polynômes et la méthode de Nelson et Siegel.

2.2.1. Les exponentielles de polynômes:

Partant du postulat suivant :

$$A(t) = \sum_{j=1}^{J} b_j t^j$$

J étant le degré du polynôme retenu. On a donc, en termes de fonction d'actualisation et de taux :

$$\delta(t) = exp\left\{-\sum_{j=1}^{J} b_j t^j\right\} \quad et \quad Y(0,t) = \sum_{j=1}^{J} b_j t^{j-1}$$

Nous considérons alors un échantillon de K obligations et utilisons le modèle de régression suivant :

$$P_k = \sum_{i=1}^{T_K} C_i^k \, exp\left\{-\sum_{j=1}^{J} b_j t^j\right\} + \varepsilon_k$$

ε_k est un terme d'erreur et C_i^kdésigne le flux versé en t par l'obligation k.

Cette régression est non linéaire en b_j, ce qui correspond à un problème statistique d'ajustement non linéaire toujours délicat à résoudre.

2.2.2. La méthode de Nelson et Siegel

Ces auteurs postulent une fonction d'actualisation $\delta(t)$ du type :

$$exp\left\{-t\left[\beta_\infty + \beta_1\left(\frac{1-exp\{{}^{t}/_{\tau_1}\}}{-{}^{t}/_{\tau_1}}\right) - \beta_2\left(\frac{1-exp\{{}^{t}/_{\tau_1}\}}{-{}^{t}/_{\tau_1}} - exp\{-{}^{t}/_{\tau_1}\}\right)\right]\right\}$$

$\beta_\infty, \beta_1, \beta_2$ et $\tau_1$sont des paramètres à estimer. La courbe des taux est donc donnée par :

$$Y(0,t) = \beta_\infty + \beta_1\left(\frac{1-exp\{{}^{t}/_{\tau_1}\}}{-{}^{t}/_{\tau_1}}\right) - \beta_2\left(\frac{1-exp\{{}^{t}/_{\tau_1}\}}{-{}^{t}/_{\tau_1}} - exp\{-{}^{t}/_{\tau_1}\}\right)$$

On remarque que $Y(0,0) = \beta_\infty + \beta_1$= et $Y(0,\infty)$= β_∞. La forme $\beta_\infty + \beta_1$ peut être considérée comme le taux court, et β_∞comme le taux long.

Svensson ajoute plus de flexibilité en introduisant de nouveaux paramètres et postule la formule suivante:

$$Y(0,t) = \beta_\infty + \beta_1\left(\frac{1 - exp\{^t/_{\tau_1}\}}{^{-t}/_{\tau_1}}\right) - \beta_2\left(\frac{1 - exp\{^t/_{\tau_1}\}}{^{-t}/_{\tau_1}} - exp\{^{-t}/_{\tau_1}\}\right)$$
$$+ \beta_2\left(\frac{1 - exp\{^t/_{\tau_2}\}}{^{-t}/_{\tau_2}} - exp\{^{-t}/_{\tau_2}\}\right)$$

La procédure consiste donc à régresser les prix observés sur les prix théoriques :

$$P_k = \sum_{t=1}^{T_K} C_t^k \delta_S\,(t) + \varepsilon_k$$

Avec 5 paramètres à estimer, cette méthode est assez complexe à implémenter.

PARTIE II

APPLICATION SUR UN ECHANTILLON DE PRODUITS STRUCTURES

CHAPITRE 1. PANIER DES PRODUITS ETUDIES

Banque	Nom du contrat	Support	*Pay off*	Garantie	Durée (année)	Option de remboursement anticipé
Bred	FructiZen	DJ EuroStoxx 50	La plus-value octroyée à l'échéance sera égale à 50% d'une performance moyenne finale de l'indice.	Oui	5	Non
Crédit Mutuel	CICAviso 35 juin 2014	DJ EuroStoxx 50	A l'échéance, si la performance de l'indice est supérieure ou égale à sa valeur d'origine, la plus-value octroyée à l'échéance sera égale à 35%.	Oui	6	Non
Banque Populaire	IzeisJanvier 2017	CAC 40	La performance finale sera égale à la valeur liquidative de référence majorée de 110% de la performance moyenne de l'indice. toutefois, si à la date de constatation intermédiaire, l'indice enregistre une hausse supérieure ou égale à 20%, il y a sortie anticipée et la plus-value octroyée sera égale à 30%.	Oui	8	Oui, à 4 ans
Crédit Agricole	Indosuez/ Vendôme Ultimo	DJ EuroStoxx 50	Si la performance 1 an, 2 ans, 3 ans, ou 4 ans de l'indice est positive ou nulle, il y a sortie anticipée et la plus-value octroyée à l'échéance sera un gain fixe respectivement égal à 8%, 16%, 24%, ou 32%. Par contre, si la performance 5 ans de l'indice est positive ou n'a pas baissé de plus de 40%, la plus-value octroyée a l'échéance sera égale à un gain fixe de 40%.	Non	5	Oui, à chaque année intermédiaire
Société Général	Prélude	DJ EuroStoxx 50	A l'échéance, l'investisseur reçois la plus haute valeur entre : 100% de la valeur liquidative de référence et 100% de la valeur liquidative plus la performance positive d'un panier d'actions. Pour chaque action, qui réalise une performance p_i, la performance retenue est égale au double de p_i, si celle-ci est positive et la moitie sinon. La performance du panier est la moyenne des performances retenues de chaque action. A l'issue de l'une des deux première années, la SG a la possibilité de rembourser par anticipation l'investisseur :106% de son capital initial en cas de remboursement anticipé à l'issue de l'année 1, 112% de son capital initial en cas de RA à l'issue de l'année 2.	Oui	3	Oui, à chaque année intermédiaire
	Minéralys	DJ EuroStoxx 50	A l'échéance, l'investisseur reçois la plus haute valeur entre : 90% de la valeur liquidative de référence et 100% de la valeur liquidative plus la performance d'un panier d'actions (positive ou négative). Pour chaque action, qui réalise une performance p_i, la performance retenue est égale au double de p_i si celle-ci est positive et la moitie sinon. La performance du panier est la moyenne des performances retenues de chaque action.	Partiellement	6	Non

Le tableau ci-dessus représente un panier restreint des produits structurés qui sont commercialisés par les banques concurrentes sur le marché en 2008, début 2009. Il est constitué des produits de *pay off* diversifiés dont le support est soit un indice soit un panier d'indices.

Avec les notations suivantes :

I_i : Valeur de l'indice sous-jacent à la date i, $i = 0,...T$

T : Échéance du produit étudié

$Perf_i = \frac{I_i - I_0}{I_0}$, est la performance à la date i

$Perf$, défini en fonction des $Perf_i$, pour déterminer le gain ou la perte à l'échéance du produit

$V(t)$: Valeur du portefeuille investi à l'instant t

C : le capital initial investi

La structure du *pay off* de chaque produit peut se résumer comme suit :

- **Fructizen** :

$$Perf = \frac{\sum_{i=1}^{5} Perf_i 1_{Perf_i > Max(Perf_k, k=1..i-1)}}{\sum_{i=1}^{5} 1_{Perf_i > Max(Perf_k, k=1..i-1)}}$$

$$V(T) = \left(1 + 50\% \, Perf \, 1_{Perf \geq 0}\right) C$$

Ce produit permet de récupérer au minimum le capital initial investi à l'échéance de la formule. Son intérêt porte en plus sur le fait que seules les performances positives et supérieures à celles calculées les années précédentes sont retenues dans le calcul de la $Perf$. Par ailleurs, le calcul de moyennes pour déterminer la performance finale ne permet pas à l'investisseur de profiter pleinement des hausses de l'indice sous-jacent. De plus, cette performance n'est retenue qu'à hauteur de 50% de sa valeur.

Remarque : ce n'est pas sur le niveau initial du cours que la performance est calculée, c'est le niveau initial majoré de 5%. Cela est précisé dans la description du produit, mais il ne change pas beaucoup l'analyse du pay off.

- **Aviso** :

$$Perf = Perf_6$$

$$V(T) = 135\% \, C \, 1_{Perf \geq 0} + 100\% \, C \, 1_{Perf < 0}$$

Dès que la performance à la date échéance est positive, l'investisseur bénéficie toujours d'une performance de 35%. C'est un avantage si la performance réalisée est moins que 35%, mais le fait de limiter toujours à ce seuil, l'investisseur ne bénéficiera pas de la hausse de l'indice sous-jacent.

Le *pay off* de ce produit correspond bien à un call binaire. La stratégie de l'investisseur est l'achat de 135 *call binaire* de *strike* 100 sur 6 ans.

- **Izéis** :

$$Perf = \frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8} Perf_i \, 1_{Perf_i > 0}$$

$$V(T) = 130\% \, C + \left[(110\% \, Perf + 100\%)1_{Perf>0} + 100\% \, 1_{Perf<0}\right] C \, 1_{Perf_4 < 20\%}$$

Comme les 2 précédents, l'intérêt de ce produit est la garantie du capital investi. Par contre, l'investisseur ne peut pas bénéficier de la hausse intégrale de l'indice à cause des seuils de performance. De plus, il prévoit une date d'échéance anticipée, qui permet à l'investisseur d'obtenir une majoration de 130% du capital investi s'il y a une performance au moins de 20% de l'indice sous-jacent à cette date. La structure détermine d'une part le seuil de performance, d'autre part, la durée de l'investissement.

- **Indosuez/ Vendôme Ultimo** :

$$\begin{aligned} V(T) = {} & 108\% \, C \, 1_{Perf_1 \geq 0} + 116\% \, C 1_{Perf_2 \geq 0} 1_{Perf_1 < 0} + 124\% \, C 1_{Perf_3 \geq 0} 1_{Perf_j < 0, j<3} \\ & + 132\% \, C 1_{Perf_4 \geq 0} 1_{Perf_j < 0, j<4} \\ & + \left[140\% \, C \, 1_{Perf_5 \geq -40\%} + (1 + Perf_5) C \, 1_{Perf_5 \leq -40\%}\right] 1_{Perf_j < 0, j<5} \end{aligned}$$

Ce produit ne garantit pas le capital investi. En effet, dans le cas où l'indice sous-jacent baisse de plus de 40% par rapport à sa valeur initiale, l'investisseur va subir une perte en capital. Par ailleurs, l'investisseur ne peut pas bénéficier de la hausse intégrale de l'indice suite à des gains fixes limités par la structure.

Une autre catégorie des produits concerne des produits sur un panier d'actions composant d'un indice. Commercialisés par la Société Générale, les 2 produits entrant dans le cadre de notre étude sont Prélude et Minéralys. Si le format juridique de Minéralys est toujours un FCP comme autres produits étudiés, Prélude est le seul produit qui prend la forme d'un EMTN.

- **Prélude :**

Pour chaque action *i* qui réalise une performance p_i, la performance $P_i$retenue est :

$$P_i = Min\left[24\%; \left(200\% \, 1_{p_i \geq 0} + 50\% \, 1_{p_i < 0}\right) p_i\right]$$

Cette description est très attirante pour l'investisseur, car le produit permet de doubler les gains et diminuer la perte.

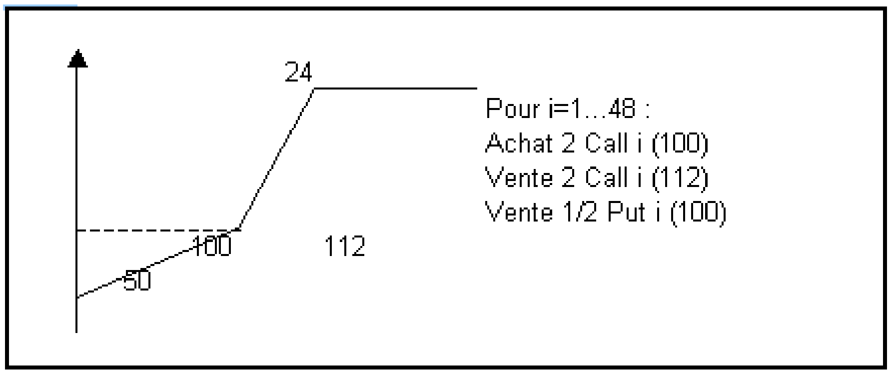
La performance globale est alors égale à la moyenne des performances :

$$Perf = \frac{1}{48}\sum_{i=1}^{48} P_i$$

La valeur finale du portefeuille est:$V(T) = 100\% \, C\left(1 + max(0, Perf)\right)$

Le capital est garanti pour ce produit.

La stratégie optionnelle sur chaque action peut être présentée de la manière suivante :



De plus, l'émetteur du produit a le droit de rembourser par anticipation l'investisseur :

-Capital garanti et 6 % de performance après 1 an.

-Capital garanti et 12 % de performance après 2 ans.

C'est un produit multi support. Le *pay off* est défini d'une part par les performances des actions et d'autre part par la performance du panier total.

- **Minéralys** :

C'est un produit qui ressemble beaucoup à Prélude[4] : sur un panier équipondéré de 50 actions appartenant à l'Euro Stoxx50.

Pour chaque action *i* qui réalise une performance p_i, la performance $P_i$retenue est :

$$P_i = Min\left[24\%; \left(200\%\ 1_{p_i \geq 0} + 50\%\ 1_{p_i < 0}\right) p_i\right]$$

La performance globale est alors égale à la moyenne des performances :

$$Perf = \frac{1}{48} \sum_{i=1}^{48} P_i$$

Or ce produit ne peut être garanti que jusqu'à 90% de la valeur du capital initial.

$$V(T) = max[90\%\ C; 100\%\ C + Perf]$$

La spécificité des options à remboursement anticipé de certains produits met au premier plan l'évaluation des valeurs liquidatives du portefeuille au cours de leur vie. En fonction de l'évolution des autres actifs du fonds (FCP), il est possible que l'émetteur doive rembourser l'investisseur à un niveau plus haut que sa vraie valeur liquidative, ce qui peut impacter la marge du produit. De même, pour le produit sous le format EMTN, à cause des fluctuations de la partie de zéro coupon, l'émetteur peut être perdant en exerçant son droit.

[4] Différemment à Minéralys, le *pay off* de Prélude s'est basé sur 48 actions composantes du DJ EuroStoxx . En effet, pendant la période de commercialisation de ce produit, la cotation des 2 actions Fortis et Volkswagen n'est pas assez fiable.

CHAPITRE 2. RECUEIL DES PARAMETRES DE MARCHE

Les paramètres du marché sont venus de l'outil d'analyse financière Reuters 3000N Xtra (ou Reuters Kobra). C'est une interface qui permet l'affichage et l'intégration de flux de données en temps réel[5].

1. Le taux sans risque

Il est naturel de supposer que les taux d'Etat français sont des taux sans risque, car ces taux ne présentent pas de risque de défaut dans la plupart du temps. Or, il faut savoir que les traders utilisent souvent les taux Libor/Euribor comme référence au taux sans risque. La raison principale pour ce choix est due aux avantages réglementaires et fiscaux que les obligations d'Etat pourraient posséder dans certains pays, qui donnent des taux d'Etat artificiellement plus bas, étant précisé que le taux Libor/Euribor est un taux moyen des taux de prêt interbancaire qui est un taux de référence pour le marché.

Pour nos études, les produits ont des échéances de 3 ans au minimum, l'utilisation des taux Euribor n'est donc pas suffisante. De plus, l'Etat français est noté AAA, ce qui peut être un substitut parfait au taux sans risque. Pour la durée de 2 ans à 5 ans, il est possible de faire appel au taux BTAN[6], et pour les maturités plus de 5 ans les taux OAT[7].

Sur la base de taux Access des BTAN et OAT, une base des taux de différentes maturités à la date de lancement du produit est extraite. Après le mixage des taux en fonction de maturités croissantes, la structure par terme des taux sans risque est donc obtenue. (Cf. Annexe 4). On applique enfin sur cette base les interpolations cubiques pour recevoir un taux à une maturité donnée.

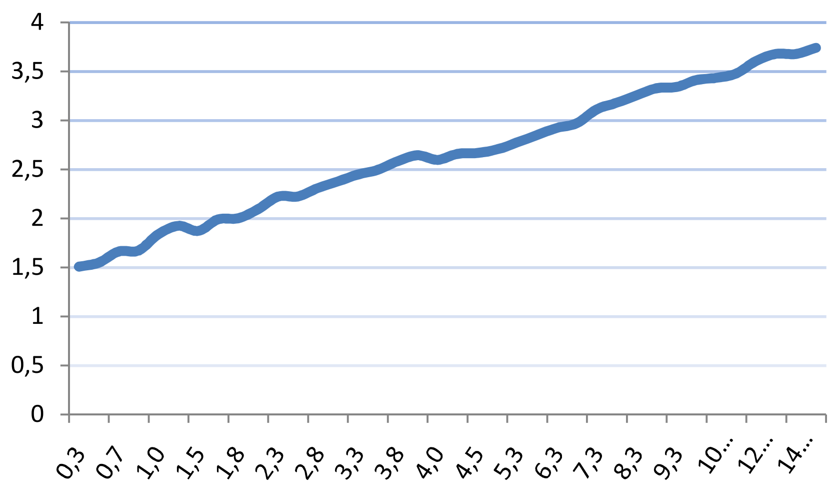


Figure 3. Illustration d'une courbe de taux sans risque au 02/01/2009

[5] Pour faciliter les récupérations de données sur le marché, le service a fait une application qui permet de renvoyer automatiquement des données besoins dans une base Access chaque matin (Fixing). Le recueil des paramètres s'est basé sur cette base.

[6] Bons du Taux annuels Normalisés

[7] Obligation assimilable du Trésor

2. Le taux zéro coupon

Faire une extraction des taux zéro coupon revient à retrouver les informations sur les obligations émises par l'émetteur. Or comme déjà évoqué en chapitre 2.2 de la partie précédente, il n'est pas certain de disposer d'une obligation correspondant parfaitement à notre besoin. De plus, le taux extrait doit tenir compte de l'information sur la liquidité et la qualité de crédit de la banque garante, c'est à dire, sa capacité à faire face aux demandes de « cash » de ses clients.

Pour les produits étudiés, il faut construire une courbe de taux pour chaque banque en fonction des informations sur leurs obligations émises. Sur une base des banques émettrices, à la date de lancement du produit, on ne recherche que des obligations (encours) dont les montants à l'émission sont supérieurs à 250 millions d'euros. Cette contrainte vise à garantir la cohérence des taux obtenus. En effet, les taux à longs termes sont censés être plus élevés que les taux courts. Il est donc possible, grâce à Reuters, de récupérer des données concernant la date d'émission, la maturité de l'émission, le montant et la fréquence de distribution des coupons, les intérêts courus jusqu'à la date de du lancement du produit, ainsi que le prix actuel et la notation de l'obligation.

Fully retrieved at 13:01:49			RIC	Crédit Mutuel TF 2-2014		
FR028475675=RRPS			Start Date		10/03/2008	10/MAR/2008
START:10/MAR/2008 END:01/APR/2008			End Date		01/04/2008	01/APR/2008
YIELD_1			Fréquence	D		
TIMESTAMP	CLOSE	Prix	Nb Lignes		17	
10/03/2008	4,341	99,528	Emetteur	CFCMCB		FR
11/03/2008	4,375	99,354	Monnaie	EUR		
12/03/2008	4,415	99,152	Montant	1.0B		
13/03/2008	4,629	98,075	Type Oblig	STR		
14/03/2008	4,647	97,989	Rating	AA-		FCH
17/03/2008	4,589	98,278	Emission		05/02/2007	
18/03/2008	4,657	97,940	Maturité		05/02/2014	
19/03/2008	4,648	97,987	Prix émission	99.532		
20/03/2008	4,671	97,873	Coupon		4,25	
25/03/2008	4,793	97,273	Fréquence	ANNUAL		20/01/2009
26/03/2008	4,793	97,274	Intérêts courus		2,457	-3,695
27/03/2008	4,799	97,245				
28/03/2008	4,791	97,286	*Bmk Spd*		*124,2*	
31/03/2008	4,765	97,412	*Swp Spd*		*98,3*	
01/04/2008	4,802	97,232	*Convexity*		*19,92*	

Tableau 3. Extrait de la feuille d'Excel de l'extraction des taux de zéro coupon

La partie orange représente des informations d'une obligation concernée. La partie bleue trace les caractéristiques de l'obligation provenant de Reuters. La partie blanche donne une base de l'évolution du prix et des taux de rendement.

Date extraction 02/01/2009	Coupon	Montant	Rate	Taux ZC
29/06/2011	STR	356,5M	A+	4,589
30/10/2011	STR	576,3M	A+	5,000
21/11/2011	STR	875,0M	A+	5,353
17/01/2012	STR	1,0B	A+	5,552
27/06/2018	STR	767,0M	A+	6,036
07/07/2018	STR	337,7M	A+	6,100
16/02/2019	STR	303,3M	A+	6,297
02/11/2019	STR	750,0M	A+	6,525
14/12/2019	STR	301,8M	A+	6,542

Tableau 4. Illustration d'une extraction de taux de zéro coupon

Par la complexité de l'extraction des obligations à coupons variables et surtout sa faible fiabilité (certaines données sont aberrantes), sont conservées pour l'instant que des obligations à taux fixe.

Normalement, ne sont gardées que des obligations notées *Senior unsecured*, c'est à dire de même notation et de risque de crédit équivalent à celui des produits structurés.

3. Volatilité

Pour obtenir une volatilité de l'indice sous-jacent, des volatilités implicites sont recherchées.

Sur Reuters, à une date donnée, sont extraites directement des volatilités implicites calculées à partir des prix d'options (*call/put*) à la monnaie dont le sous-jacent est soit un indice soit une action d'entreprise. Mais ce sont des volatilités de maturité 30,60 à 90 jours maximum, alors que les produits étudiés ont des maturités de 4 à 7 ans, ce qui ne correspond pas à la volatilité disponible.

RIC	Noms de l'action	Vol 90 jours
AEGN.AS	AEGON	54,1
AIRP.PA	AIR LIQUIDE	30,0
ALVG.DE	ALLIANZ SE	36,4
ALSO.PA	ALSTOM	46,0
ISPA.AS	ARCELORMITTAL	55,3
AXAF.PA	AXA	53,2

Tableau 5. Extrait d'une base de volatilité implicite au 01/07/2009

Par contre, il est possible de récupérer, à une date fixée, une base de prix et de volatilité implicite des options en fonction de différent prix d'exercice et de différentes maturités. Mais, à cause de l'illiquidité du marché d'option à long terme, il n'y a pas souvent de valeurs pour un *strike* ou une maturité donnée. De plus, il n'est pas possible d'obtenir des historiques de cette base, car elle ne fonctionne qu'en temps réel[8].

Or, l'approximation par la volatilité implicite ATM 90J serait plus cohérente si des fortes corrélations sont observées entre les volatilités à 90 jours et celles à plus long terme. Pour avoir un moyen de jugement, la comparaison sur les données de volatilité de l'indice VSTOXX[9][10] à la date de lancement d'un produit étudié (par exemple, la période entre janvier et mars 2009 pour Prélude) est effectuée.

Il est relevé tout d'abord, que les volatilités implicites ATM90J de Reuters sont sensiblement inférieures aux celles des VSTOXX 3 Mois, mais elles sont très approchées.

En observant l'indice VSTOXX, des corrélations fortes sont constatées entre les volatilités à différentes maturités, ou le niveau entre 9 mois et celles à plus longue maturité ont des corrélations plus faibles (par exemple une corrélation de 80% avec la corrélation de 2 ans).

Correlation Volatilité '2Mois - 24Mois ' Jan-Mars 09							
	2	3	6	9	12	18	24
2	100%	91%	96%	93%	93%	90%	90%
3	91%	100%	90%	84%	84%	79%	80%
6	96%	90%	100%	98%	98%	92%	96%
9	93%	84%	98%	100%	99%	95%	98%
12	93%	84%	98%	99%	100%	97%	99%
18	90%	79%	92%	95%	97%	100%	95%
24	90%	80%	96%	98%	99%	95%	100%

Figure 4. Corrélation des volatilités implicites quotidiennes des indices VSTOXX

Mais ces indications nous permettent d'utiliser les volatilités à 90j pour la diffusion des trajectoires de DJ EuroStoxx.

Un autre indice de notre étude est le CAC 40. De même, les informations des volatilités implicites ATM90J sur Reuters sont utilisées. Or, l'extraction n'est pas suffisante pour la période de commercialisation du produit. De plus, les données durant l'année 2009 contiennent beaucoup de points aberrants, ce qui pose des problèmes de fiabilités de ces informations.

[8] En effet, ce travail fait appel à des applications qui renvoient des données de Reuters dans une base d'Excel, mais il est contraint par le temps nécessaire à l'alimentation des donnés à chaque changement des dates de constatation.

[9] L'indice VSTOXX est basé sur le prix des options de Dow Jones EURO STOXX 50 et reflète les attentes du marché sur les volatilités à court terme en mesurant la racine carrée de la variance implicite pour toutes les options à une maturité donnée. **Ce n'est pas directement un indice de volatilité implicite.**

[10] Même si la façon de calculer des volatilités de Reuters (utilisées pour la simulation) et du VSTOXX n'est pas de même nature, elles coïncident en termes de résultats à 90 jours.

Pour contourner ce problème, les données de VCAC, un indice de volatilité implicite calculé à partir de la méthodologie de VIX®[11] sont observés.

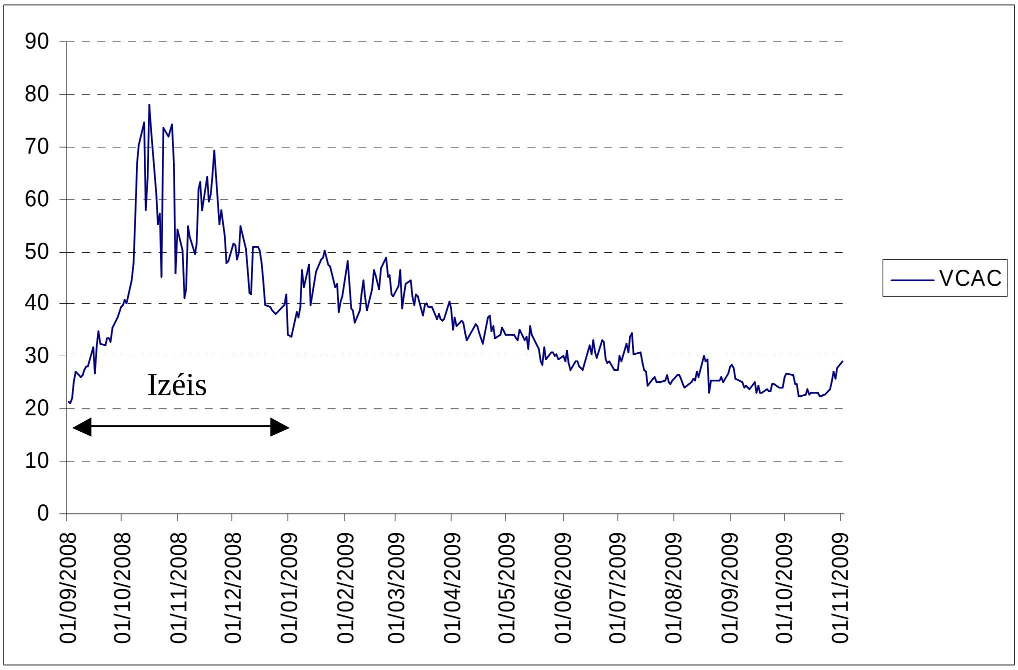


Figure 5. Indice VCAC depuis Septembre 2008

On observe ci-dessous, l'évolution de l'indice VCAC depuis septembre 2008. Pendant la période de commercialisation, cet indice prend des niveaux très élevés et a beaucoup fluctué. Une chose importante à remarquer est que cet indice est calculé pour un horizon de 30 jours, ce qui implique des niveaux de volatilité plus sensibles(les volatilités à 30 jours sont supérieures à celles à 90 jours). En comparant cet indice avec les volatilités implicite ATM de 30 jours de l'indice DJ EuroStoxx sur Reuters :

[11] C'est un indicateur de volatilité du marché financier américain. Il est établi quotidiennement par le Chicago Board Options Exchange (*CBOE*). Cet indice est calculé en faisant la moyenne des volatilités sur les options d'achat (*call*) et les options de vente (*put*) sur l'indice Standard &Poor's 500 (S&P 500). Cet indice est une estimation de la volatilité implicite à 30 jours.

Figure 6. Indice VCAC et DJ Euro Stoxx IV ATM depuis Septembre 2008

Des niveaux sensiblement supérieurs de l'indice DJ Euro Stoxx sont constatés, mais ces 2 données sont très corrélées. Nous pouvons donc prendre des volatilités implicites de DJ Euro Stoxx pour remplacer des données manquantes du CAC 40.

4. Corrélation historique à une maturité donnée

Sur la base des prix historiques de clôture des actions composantes de l'indice, à partir de la date de lancement du produit, une matrice de corrélation est calculée. Or, cette matrice n'est pas forcément définie positive. Pour pouvoir appliquer la transformation de Cholesky, il faut chercher une matrice étant la plus proche de celle originale qui valide la condition de semi définie positive. Une ou des valeurs propres de cette matrice semi définie positive sont nulles. Supposant A étant la matrice de la factorisation de Cholesky, on peut écrire :

$$\mathrm{A_k} = \frac{\left(\mathrm{A} + {}^{1}\!/_{\mathrm{kI_n}}\right)}{\left(1 + {}^{1}\!/_{\mathrm{k}}\right)} \quad \forall \mathrm{k}, \mathrm{A_k} \text{est définie positive}$$

Comme A est symétrique, elle peut être écrite : $A = PDP^t$, avec P est une matrice orthogonale et D est une matrice diagonale

Alors :

$$A_k = \frac{\left(PDP^t + {}^1\!/_{k} I_n\right)}{\left(1 + {}^1\!/_{k}\right)} = \frac{P\left(D + {}^1\!/_{k} I_n\right)P^t}{\left(1 + {}^1\!/_{k}\right)} = \frac{PD'P^{-1}}{\left(1 + {}^1\!/_{k}\right)}$$

Car P est orthogonale, donc $P^{-1} = P^t$. On obtient enfin D', une matrice diagonale aux coefficients ceux de D augmentés de ${}^1\!/_{k}$, ce qui garantit maintenant la positivité de D', et on a bien A_k définie positive. Et quand k tend vers l'infini, A_k tend vers A. L'objectif est de transformer A qui n'est pas définie positive au début à une matrice A_k définie positive, avec un niveau k donné.

Dans le cadre du modèle Heston, pour éviter ce problème (à cause des 0 par faute d'information sur la corrélation entre un actif et la variante des autres actifs) ; il est possible de développer une méthode de remplissage automatique qui, une fois les corrélations entre actions et celles entre chaque action et sa variance fixées, nous garantit la semi définie positivité de la matrice. L'idée est de définir les corrélations croisées entre la volatilité V_i et le sous-jacent S_j par le produit des corrélations entre $V_i \infty S_i$ et $S_i \infty S_j$

$$a(i+n, j) = W_{V,i} W_{S,j} = \left(W_{V,i} W_{S,i}\right)\left(W_{S,i} W_{S,j}\right) = \eta_i \rho_{(i,j)}$$

Et la corrélation entre deux volatilités est :

$$A(i+n, j+n) = W_{V,i} W_{V,j} = \left(W_{V,i} W_{S,i}\right)\left(W_{S,i} W_{S,j}\right)\left(W_{S,j} W_{V,j}\right) = \eta_i \rho_{(i,j)} \eta_j$$

5. Dividende

Pour calculer le taux de dividende associé à l'action ou l'indice, sont utilisées les données de dividendes implicites à différentes maturités disponibles sur Reuters à une date donnée, avec le prix actuel de l'indice. On fait une interpolation linéaire ou cubique sur la base des dividendes pour avoir le dividende à une date de maturité donnée (correspondant à la durée du produit), qui est ensuite divisé par le prix de l'indice pour donner le taux de dividende de telle maturité à une date donnée.

Dans le cas d'extraction des taux de dividende pour un panier d'action, Reuters ne donne des dividendes estimés au maximum que sur les 4 prochaines années. Le travail consiste donc à effectuer un calcul d'approximation pour recevoir un dividende annualisé, qui est susceptible de se déduire d'après le taux de dividende à maturité fixée. Comme les dividendes estimés s'arrêtent après 4 ans, on retient l'hypothèse que ce taux de dividende sera fixé pour les durées de plus de 4 ans.

Il est important de faire la différence entre le dividende associé au produit lui-même et celui utilisé pour la simulation. La simulation des cours d'actif par la méthode de Monte Carlo utilise la volatilité implicite, c'est à dire la volatilité qui tient déjà compte des dividendes estimés. Il est donc nécessaire d'insérer ces dividendes dans la diffusion des cours. Par contre, pour tous les produits étudiés, l'investisseur ne profite pas de dividendes des actions qui composent l'indice sous-jacent.

CHAPITRE 3. APPLICATION

L'objectif final est de connaître l'impact de la structure d'un produit sur la marge revenant à la banque de détail sachant que cette marge doit être figée dès la période de commercialisation du produit. Pour ce faire, tout d'abord, des outils simplistes sont construits pour l'évaluation de chaque produit avec des paramètres fixés arbitrairement, afin d'examiner les méthodes d'évaluation du produit. L'étape suivante consiste à implémenter des paramètres de marché dans l'outil, ce qui donne une évaluation plus cohérente avec les conditions de commercialisation de produit, ce qui permet d'avoir des premières idées sur la marge de celui-ci. L'étape finale consiste à effectuer des tests de sensibilités pour voir l'impact de l'évolution de marché sur la structure du produit.

1. Outil d'évaluation

L'outil de l'évaluation (version standard) se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 6 feuilles.

La page principale « DONNEES » contient tous les caractéristiques principales du produit et les paramètres de l'évaluation.

- Les caractéristiques sont :
  - Durée du produit
  - Niveau du capital garanti
  - Description des *pay off* : cela dépend de la structure du produit, s'il possède un plafond ou un plancher de performance. Ou bien, il peut y avoir plusieurs actifs sous-jacents.
  - Option de remboursement anticipé de l'émetteur : et le niveau de remboursement défini.
- Les paramètres sont :
  - Date d'évaluation
  - Taux sans risque
  - Taux de zéro coupon
  - Taux de dividende : dans le cas où le produit est défini par un seul sous-jacent
  - Volatilité : dans le cas où le produit est défini par un seul sous-jacent

Pour effectuer des tests de sensibilités, les paramètres du produit sont stressés dans les intervalles de

- 100 BP pour les taux
- 10 % pour les volatilités
- 10 % pour les coefficients de corrélation (dans les cas de multi supports)

Caractéristiques du produit

Durées(années)	5	
Nb action sous jacent	50	
Cours initial	100	
Cap	0	
Floor	105	
Capital garantie(ZC)	100%	
Option de RA	NON	NON	0

Année	1	2	3	4	5	6
Seuil de déclenchement						

Hypothèses de référence

Date de simulation	02/01/2009
Taux	
Taux sans risque	2,735%
Taux zéro coupon	5,552%
Taux de dividende	3,70%
Volatilité(1 seul sous jacent)	36,45%
Corrélation	

Paramètres de sensibilité

TEST	Taux	Variation
NON	Taux sans risque	1%
NON	Taux zéro coupon	1%
NON	Taux de dividende	1%
NON	Volatilité	10%
NON	Corrélation	10%

• L'onglet « TSR » donne une structure par terme de taux d'Etat français : les BTAN et les OAT sont extraites à la date d'évaluation. Le taux sans risque appliqué au calcul d'évaluation sera le taux interpolé à partir de cette courbe de taux. (L'interpolation utilisée est cubique dont la programmation est déjà développée en interne)

• L'onglet «TZC » donne une extraction des taux zéro coupon à différentes maturités. Ces données sont extraites à partir d'un autre fichier Excel, qui lui-même utilise les informations de Reuters pour calculer les taux.

• L'onglet « Volatilité » donne une extraction des volatilités de l'indice sous-jacent à différentes maturités. De même que pour les taux zéro coupon, ces données sont obtenues à partir d'un autre fichier indépendant (chargé des informations de Reuters).

• L'onglet «Résultat » présente des résultats de la simulation de Monte Carlo sous la forme suivante :

	Calcul
Pay off actualisé en 0 (au taux sans risque)	85,47
ZC actualisé en 0 (au taux sans risque)	75,20
Stratégie optionnelle	10,27
Valeur du ZC en 0 (au taux zéro coupon)	69,72
Marge globale de commercialisation en 0	20,02
Marge annualisée	3,70%

Tableau 6. Format de résultat d'une simulation

Comme décrit auparavant, le prix du produit se compose de 3 parties : le zéro coupon, le prix de l'option stratégique et la marge de commercialisation. La simulation donne la valeur actualisée du flux final, c'est-à-dire la valeur actuelle de la somme du capital garanti et de la performance provenant de la formule. Ce flux est actualisé en 0 avec le taux sans risque. Pour déduire le prix de la stratégie optionnelle, il faut donc réduire la valeur actuarielle du zéro coupon. Le principe est que le calcul du prix d'option est effectué dans l'espace risque neutre, tous les flux actualisés font référence au taux sans risque. Après avoir obtenu le prix de la partie optionnelle sous la probabilité risque neutre, le calcul du coût total du capital investi est effectué, sachant que la partie investie en zéro coupon est en fonction de la courbe des taux de la banque émetteur. La marge globale lors de la commercialisation du produit est donc déduite par la différence entre le capital initial et ces 2 parties investies.

En fonction des différentes fonctionnalités des produits étudiés, il faut ajouter les onglets supplémentaires. Par exemple, pour le Multi Time, un produit multi support, le *pay off* final dépend de la performance de chaque indice du support, ce qui doit donc être ajouté dans l'outil d'évaluation des informations sur les corrélations entre les indices ainsi que des vecteurs de volatilités et de dividendes. Ces informations ne sont pas mises à jour automatiquement sur l'outil, mais sont calculées à partir des informations de Reuters dans un fichier indépendant.

2. Option de remboursement anticipé

En regardant l'ensemble des structures du panier étudié, il en ressort que la plupart des produits sont de type *pathdependent*, dont le prix des options dépend du chemin suivi par le cours du sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option. De plus, il y a des conditions de remboursement anticipée (écrit RA par la suite) définies par l'émetteur, c'est à dire, que la banque s'engage à rembourser aux investisseurs un montant fixé en fonction soit de la performance du support, soit de la valorisation du portefeuille total à une date prédéterminée fixée dans le contrat. Du point de vue des investisseurs, cette option est intéressante parce qu'elle permet de retrouver sa mise plus tôt. Etant précisé que pour l'émetteur, la couverture peut être moins chère restant à savoir bien définir le seuil de déclenchement du remboursement.

L'évaluation de ces 2 options est présentée ci-après :

2.1. <u>Remboursement anticipé en fonction de l'évolution du sous-jacent</u>

Le *pay off* aux dates RA sont défini en fonction de la performance du sous-jacent du produit. Ce type de RA se voit chez les produits comme Izéis, Vendôme et MultiTime.

Pour illustrer cette analyse, les résultats obtenus sur le produit Izéis Janvier 2017sont exploités:

La formule complète donne le droit à l'investisseur d'obtenir à l'échéance (8 ans) le capital garanti accompagné d'une majoration sur la performance moyenne des 4 dernières années sous condition que la performance après les 4 premières années ne soit pas plus élevée que 20%, sinon l'investisseur va sortir par l'anticipation après 4 ans avec un gain fixé à 30% de la valeur référence initiale. Du point de vue de l'investisseur, le *pay off* est donc égal à une option d'achat binaire de maturité 4 ans, qui donne de plus le droit de proroger la maturité à 4 ans plus tard, ce qui est similaire à une option *writer extendible* (cf. II.1.3.2). Or, la principale différence se situe dans le *pay off* à l'échéance. S'il est seulement en fonction du cours final dans le cas d'un *writer extendible*, il dépend maintenant de la performance moyenne des 4 derniers cours.

Pour avoir un résultat avec une formule fermée, il est supposé que le *pay off* dépend seulement du cours final à 8 ans si la condition de RA n'a pas été réalisée.

- Formule fermée

Du point de vue de l'investisseur, si l'option est en dehors de la monnaie à la première date de maturité, il a encore une chance de l'exercer plus tard en espérant une expiration dans la monnaie. Alors que pour l'émetteur, si le cours réalise une performance positive à la date intermédiaire, il voit une perte probable de son gain futur, ce qui l'incite à rembourser plus tôt.

En remplaçant le *pay off* final par un *pay off* dépendant seulement du cours final de l'actif à 8 ans, il est obtenu :

$$payoff_{call\ extendible} = \begin{cases} X \quad si \ \ S > K_1 \\ 1{,}1\ C(S, K_2, T_2 - T_1) \ \ sinon \end{cases}$$

Avec : $K1=120$

$K2=100$

$T1=4$

$T2=8$

$X=30$

Appliquant la formule fermée de Black Scholes, avec le remplacement d'un call vanille par un call digital, la solution suivante est obtenue :

$$Prix_{writerextendible} = Xcall_{digit}(S, K_1, T_1)$$
$$+ 1{,}1\left\{S\ \mathcal{N}(\gamma_3, -\gamma_4, -\rho) - K_2\, e^{-rT_2}\ \mathcal{N}\left(\gamma_3 - \sqrt{\sigma^2 T_2}, -\gamma_4 + \sqrt{\sigma^2 T_1}, -\rho\right)\right\}$$

Avec γ_3, γ_3, ρ de même définition qu'auparavant.

	Calcul
Marge globale de commercialisation	16,43%
Marge annualisée	2,37%
Call writer extendible	**18,6**
Investissement en Zéro-Coupon	64,92

Tableau 7 Résultat du calcul simplifié en formule fermée

- Méthode Monte Carlo

Le calcul précédent ne reflète pas la complexité du produit, alors que la formule est déjà difficile à démontrer. Le retour à la méthode Monte Carlo peut prendre en compte la performance sur la moyenne des 4 dernières années.

Avec la diffusion de trajectoire « pas à pas », c'est-à-dire la diffusion de $t+1$ est en fonction de celle en t, le même résultat que précédemment (le cas simpliste) est de nouveau obtenu :

	Calcul
Stratégie optionnelle	**18,63**
Valeur du ZC en 0	64,92
Marge globale de commercialisation	16,45
Marge annualisée	2,37%
Prix des options	18,63

Tableau 8. Résultat du produit simplifié avec Monte Carlo

En tenant compte de la performance moyenne des cours finaux, il y a une diminution du prix des options. En effet, la moyenne des cours est moins volatile que le cours final.

	Calcul
Stratégie optionnelle	**14,52**
Valeur du ZC en 0	64,92
Marge globale de commercialisation	20,56
Marge annualisée	2,97%
Prix des options	14,52

Tableau 9 Résultat du produit complet avec Monte Carlo

2.2. Remboursement anticipé en fonction de l'évolution du portefeuille total

La condition de remboursement anticipé est dans ce cas, en fonction de l'évolution du portefeuille total investi. En effet, la valeur liquidative du portefeuille à une date donnée est égale à la valeur de la partie investi en zéro coupon plus la performance du sous-jacent. En fixant un niveau plafonné pour cette valeur liquidative à chaque date de RA, l'émetteur crée pour lui un seuil de protection (par exemple le *pay off* de Prélude)[12]. En effet, si à la date RA, il voit une surperformance du portefeuille vis à vis du plafond fixé, il exerce toute de suite son droit de rembourser à l'investisseur.

Il faut souligner que différemment à un rachat anticipé, qui dépend du choix de l'investisseur, un remboursement anticipé s'inscrit dans le *pay off* du produit par l'émetteur. Ces deux options sont très intéressantes pour l'investisseur, car elles leur permettent de reprendre le capital avant le terme du contrat. Sauf que si le rachat coûte des frais supplémentaires, dans l'autre situation, il n'y en a pas. Le fait de proposer des options de RA conduit l'émetteur d'une part à satisfaire l'intérêt des acheteurs, et d'autre part, à le prémunir de pertes élevées. Par conséquent, pour proposer une telle option, l'émetteur doit définir un bon seuil de déclenchement du RA.

[12] Dans le cas de Prélude :

- le seuil de déclenchement de RA =106% du niveau initial après 1 an,

- le seuil de déclenchement de RA =112% du niveau initial après 2 ans.

En terme stratégique, l'investisseur, à la date initiale, achète une option call de maturité égale à l'échéance et vend en même temps des options call à l'émetteur, de maturité correspondante aux dates de remboursement anticipé. **Ces options ont des sous-jacents différents : Si son option call achetée a pour sous-jacent celui du produit lui-même, son option vendue à l'émetteur a le portefeuille total du produit (c'est à dire le zéro coupon et l'option stratégique) comme sous-jacent.**

La stratégie du produit peut se comprendre sous ce schéma :

Option d'achat de maturité égale à l'échéance de la performance ($option_1$)

Investisseur $\rightleftarrows$ Emetteur

Option**s** d'achat de maturités égales aux dates de sortie anticipée ($option_2$)

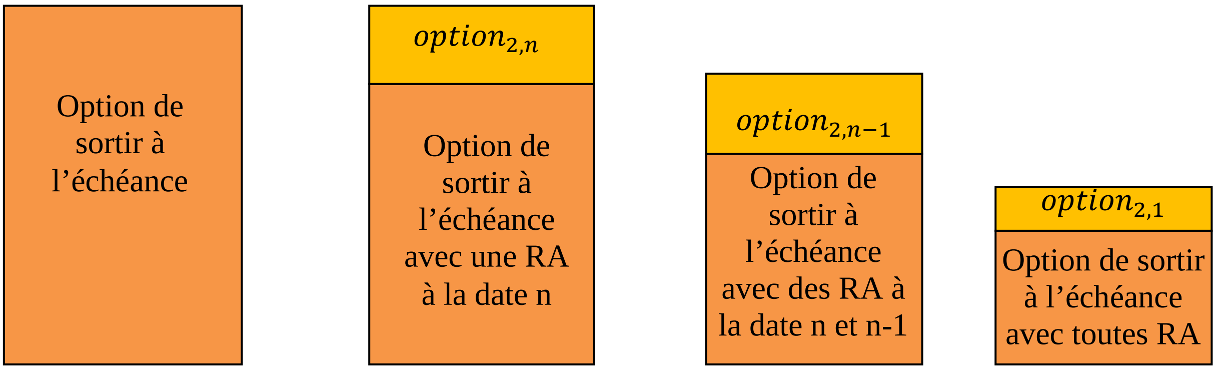
Pour tarifer une telle option, le principe est de décomposer la probabilité de sortir du fonds par des probabilités de sortie à l'échéance et ceux de sortir aux dates de RA. Il y a autant d'options de RA pour autant de dates de RA.

On suppose qu'il y a n dates de remboursement anticipé notés $RA_1, RA_2, ..RA_n$.

Soit $option_1$ l'option de sortir seulement à l'échéance T.

Soit $option_{2,i}$ l'option de sortir seulement à la date de RA_i, avec i=1,2…, n

Le schéma de détermination du coût de stratégie est suivant :



En achetant un tel produit, l'investisseur achète l'option de sortir à l'échéance et vend les options de RA, alors, le prix d'option stratégique finale est déduite de la différence de prix de l'option sortir en T et des options de RA. La modélisation de ces options doit faire appel à la méthode de Monte Carlo.

La valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$V(T) = P(T) + (S_T - K)^+$$

Travaillant dans l'environnement du risque neutre, le *pay off* d'un actif actualisé avec le taux sans risque r à un instant t donné est sa valeur en ce moment-là, il est obtenu :

$$V(t) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+ + P(T)]$$

A chaque date de RA, la condition de sortir est définie en fonction de cette valeur $V(t)$. On l'utilise pour connaître si la condition de RA est validée, permettant enfin de calculer les probabilités de RA. En cas générale, ces options sont sous la forme d'un *call digital* de *strike* K_{RA}.

Différemment à la simulation du premier type de RA, les diffusions pas à pas de l'actif sous-jacent ne sont pas utilisées, c'est l'approche de marches en arrière sur la valeur du portefeuille final nous permettent de déterminer les probabilités de RA.

On peut résumer la simulation comme ci-après :

- Pour valoriser l'option call de sortir à l'échéance :

  La trajectoire de l'actif sous-jacent à l'échéance est :

$$S(T) = S_0 exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right]$$

La valeur du portefeuille devient $V(T) = [(S_T - K)^+ + P(T)]$. L'actualisation avec un taux sans risque donne son prix à l'initial :

$$V(0) = e^{-rT}E[(S_T - K)^+ + P(T)]$$

Ce qui permet ensuite de déterminer le prix de l'option1 :

$$option_1 = V(0) - e^{-r(0.T)T}P(T)$$

- Pour valoriser l'option call de sortir à la date *n*, RA_n :

  En *n*, la valeur du portefeuille devient :

$$V(n) = e^{-r(T-n)}E[(S_T - K)^+ + P(T)]$$

Ce qui permet ensuite de déterminer le prix de l'option 2 de sortir par l'anticipation à la date *n*

$$option_2 = e^{-r(T-n)}E\left[K_{RA}1_{K_{RA}<V(n)}\right]$$

3. Coûts de transaction

La simulation de Monte Carlo utilisée ne tient pas compte des coûts supplémentaires. En effet, par référence au prix simulé, l'achat est plus onéreux et la vente moindre.

Pour calculer ces coûts supplémentaires, on va ajuster sur le niveau de la volatilité des actions sous-jacent et le niveau des prix d'exercices.

La volatilité utilisée dans la simulation est une volatilité implicite à la monnaie à 90 jours. Or, la stratégie des produits étudiés est beaucoup plus diversifiée. Il s'agit des :

-options d'achat et options de vente

-option à la monnaie, en dehors de la monnaie et dans la monnaie

-options à maturité de 4 ans au minimum

Et, il est connu que :

-le prix d'une option d'achat est plus élevé que l'option de vente, ce qui est expliqué alors sur le marché par des écarts *bid ask* de volatilité.

-pour une option call ou put, plus le prix d'exercice est élevé, plus le prix de l'option augmente

-normalement, les volatilités à long terme sont censées être moins élevé que celles à court terme.

Il faut donc ajuster le niveau de la volatilité utilisée. La seule contrainte est que Reuters ne donne pas systématiquement des écarts de volatilité sur différentes options. Pour simplifier notre analyse, on suppose alors une surface comme ci-après :

Option dans la monnaie		**Option à la monnaie**		**Option en dehors de la monnaie**	
Achat	*Vente*	*Achat*	*Vente*	*Achat*	*Vente*
+1%	-1%	+1%	*-1%*	+1%	*-1%*

Supposant que ces écarts restent les mêmes durant la vie du produit, afin d'obtenir ces coûts de transaction, il convient de décomposer la stratégie de chaque produit en différentes options classiques dont le prix implicite est connu.

Sur certains produits contenant des options de remboursement anticipé, quelques simplifications comme évoqué ci-après vont être appliquées :

- **Izéis** :

Pour l'investisseur, la stratégie en 0 est :

➢ Vendre l'option d'achat digital de RA à 4 ans, de *strike* 120, ce qui équivaut à la vente d'un call hors la monnaie.

➢ Acheter l'option de la performance à 8 ans. Il faut souligner que dans le cadre du produit, cette performance dépend des 4 performances à 5, 6,7 et 8 ans.

Après 4 ans :

➢ Si le cours d'actif réalise une performance supérieure à 20%, l'émetteur va exercer l'option d'achat, qui lui permet de rembourser l'actif à l'investisseur. Et l'investisseur va racheter l'option sur la performance finale.

➢ Sinon, l'option va être expirée après 8 ans.

- **Indosuez/ Vendôme Ultimo** :

En terme stratégique, pour l'investisseur, la stratégie en 0 est :

➢ Acheter l'option de la performance à 5 ans, *strike* 60, ce qui équivaut à l'achat d'un call dans la monnaie.

➢ Vendre l'option d'achat digital de RA à 1 an, de *strike* 100, ce qui équivaut à l'achat d'un call à la monnaie.

➢ Vendre l'option d'achat digital de RA à 2 ans, de *strike* 100

➢ Vendre l'option d'achat digital de RA à 3 ans, de *strike*100

➢ Vendre l'option d'achat digital de RA à 4 ans, de *strike* 100

A chaque année de RA :

- Si le cours d'actif réalise une performance positive, l'émetteur va exercer l'option d'achat, ce qui lui permet de rembourser l'actif à l'investisseur. Et l'investisseur va racheter tous les autres options de RA à des dates à venir, ainsi que l'option sur la performance finale.
- Sinon, l'option va être expirée soit à une des dates RA suivantes, soit à l'échéance.

- **Prélude :**

C'est un produit multi support. Le *pay off* est défini d'une part par les performances des actions et d'autre part par la performance du panier total.

La stratégie de couverture peut se réduire seulement sur les actions. C'est à dire, qu'il convient de calculer seulement l'écart de prix susceptible d'ajouter à la couverture pour l'achat de chaque action. Puis, comme la performance finale s'est basée sur la moyenne des performances, la moyenne des écarts de prix ajusté sera calculée, sachant que, pour chaque action, il faut :

-acheter 2 *call* à la monnaie (K=100)

-vendre 2 *call* hors la monnaie (K=112)

-vendre ½ *put* à la monnaie (K=100)

Or, comme le produit contient des options de RA, il est possible de partir de l'hypothèse que le prix de couverture des options RA est proportionnel à sa maturité.

- **Minéralys** :

De la même façon, la stratégie de couverture peut se réduire seulement sur les actions :

-acheter 2 *call* à la monnaie (K=100)

-vendre 2 *call* hors la monnaie (K=125)

-vendre ½ *put* à la monnaie (K=100)

La stratégie se décompose en différentes options à différentes dates durant la vie du produit, il faut donc avoir une idée sur le cours du sous-jacent à une date donnée (par exemple la date de RA). Pour ce faire, l'hypothèse de simplification suivante est posée:

$$S_t = E(S_t) = E\left[S_0 exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right]\right] = S_0 exp[(r-q)t]$$

4. Résultats obtenus

4.1 Evolution des paramètres au cours de la période de la commercialisation

- Volatilité

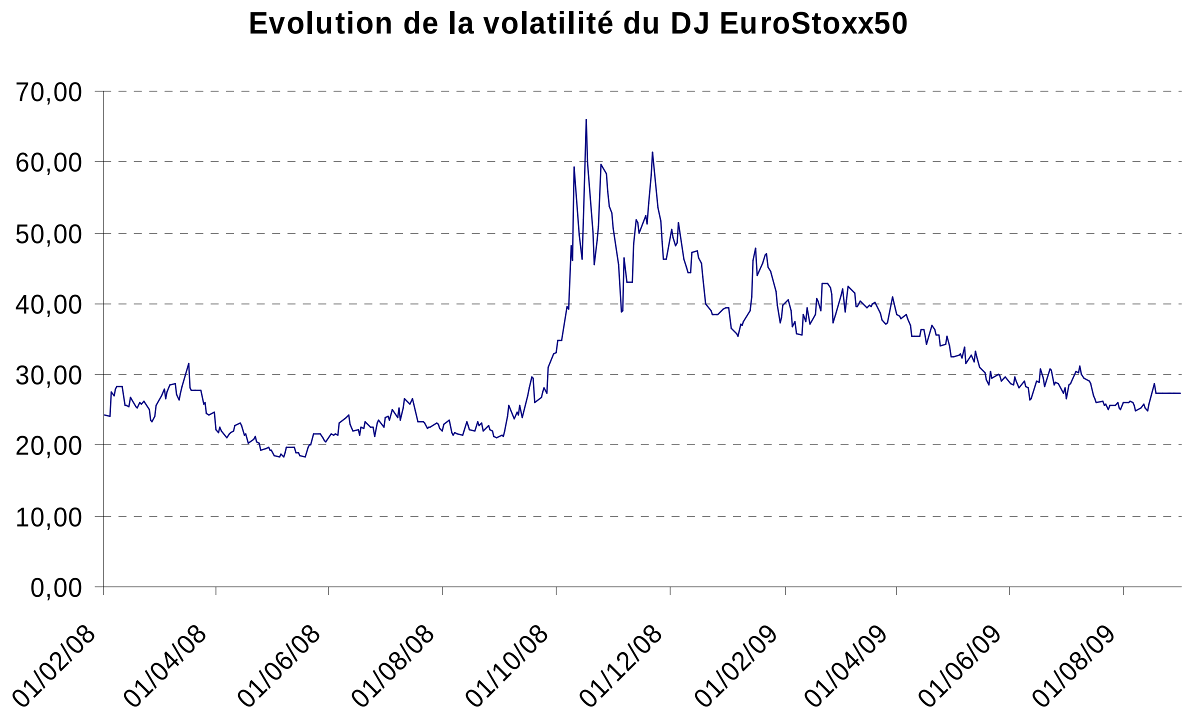


Figure 7. Volatilité implicite ATM à 90 jours de l'indice DJ EuroStoxx 50 depuis février 2008

L'indice DJ Euro Stoxx50 est le sous-jacent des 3 produits : FructiZen, CIC Aviso et Vendôme. Il est observé ci-après, l'évolution de la volatilité implicite ATM 90j pendant la période de commercialisation. Des écarts de quinzaines de pourcentage au cours de ces périodes sont relevés. Il est recommandé au préalable d'effectuer des tests de sensibilité avec des écarts de 10% par rapport au niveau central. Dans notre étude, il est utilisé le niveau de la première date de commercialisation pour le scénario central de simulation.

Dans le cas des produits comme Prélude et Minéralys, dont le *pay off* dépend de chaque action composant d'indice DJ Euro Stoxx50, le tableau suivant retrace les évolutions :

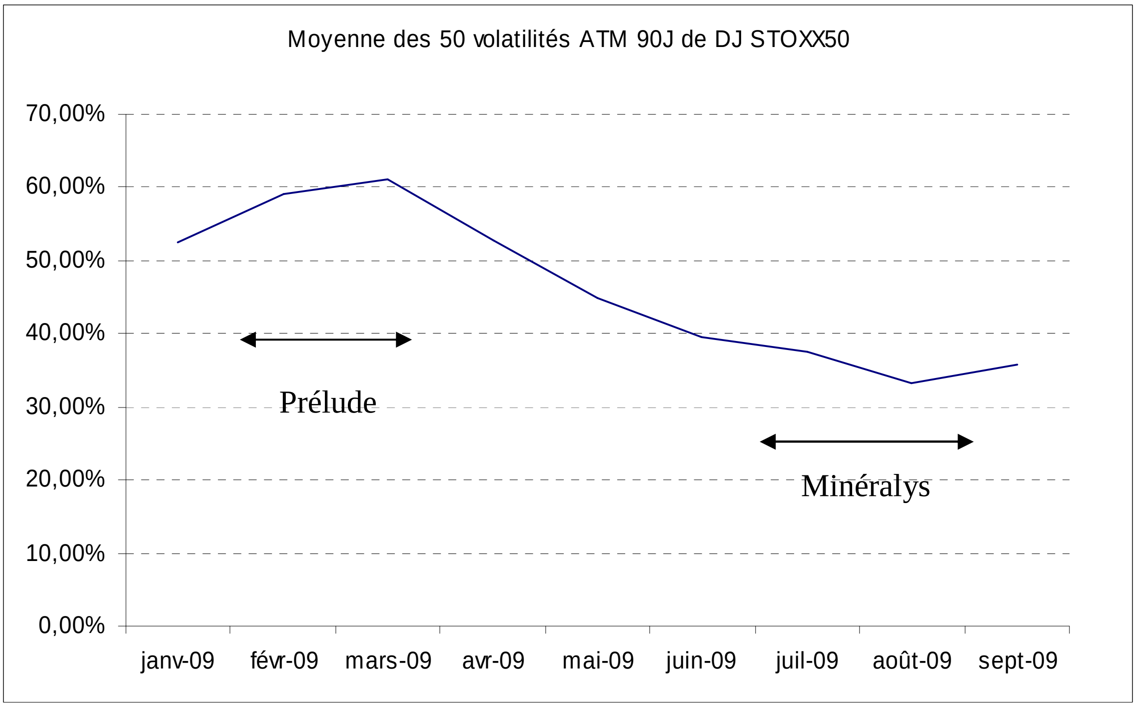


Figure 8. Evolution de la moyenne des volatilités implicites ATM90J des 50 actions DJ Euro Stoxx50

Des niveaux de volatilités assez élevé pendant la période de commercialisation de Prélude sont constatés.

Remarque : c'est juste une indication sur la tendance du niveau de la volatilité moyenne, mais ce ne sont pas les paramètres utilisés pour notre simulation. Le vecteur de volatilité pour la diffusion des actions est utilisé pour la simulation.

Le tableau ci-dessous résume les paramètres utilisés pour les simulations des produits :

Période de commercialisation		FructiZen	Aviso	Izéis	Vendôme	Prélude	Minéralys
		02/01/2009-09/04/2009	10/03/2008-09/05/2008	08/09/2008-31/12/2008	02/02/2009-02/04/2009	01/03/2009-01/05/2009	01/07/2009-31/07/2009
Durée		5	6	8	7	3	6
Paramètres	Taux sans risque	2,73%	3,54%	3,22%	2,83%	1,89%	2,99%
	Taux zéro coupon émetteur	5,55%	4,34%	5,55%	5,39%	3,10%	4,05%
	Volatilité	36,45%	28,74%	37,81%	40,56%	-	-

Tableau 10. Paramètres utilisés pour la simulation

Le niveau des volatilités des actions composantes de l'indice EuroStoxx 50 pour la période de commercialisation de Prélude et Minéralys est relevé ci-après.

Noms	VOL IMP ATM 90J	
	Minéralys	Prélude
AEGON	54,1	143,7
AIR LIQUIDE	30,0	37,6
ALLIANZ SE	36,4	66,7
ALSTOM	46,0	58,3
ARCELORMITTAL	55,3	83,6
AXA	53,2	93,5
BANCO SANTANDER	43,0	73,6
BASF SE	34,0	46,0
BAYER AG	29,8	39,7
BBVA	35,7	149,5
BNP PARIBAS	43,6	72,8
CARREFOUR	32,3	47,5
CREDIT AGRICOLE	49,6	80,3
DAIMLER AG N	44,5	68,0
DANONE	27,7	39,4
DEUTSCHE BANK N	52,8	79,5
DT BOERSE N	45,9	59,8
DT TELEKOM N	27,1	37,2
E.ON AG NA	31,7	43,6
ENEL	30,6	51,3
ENI	27,8	48,1
FRANCE TELECOM	25,2	36,0
GDF SUEZ	36,2	56,5
GENERALI ASS	33,0	52,0
IBERDROLA	28,8	53,6
ING GROEP	59,0	152,6
INTESA SANPAOLO	36,9	79,3
PHILIPS KON	34,5	55,1
L OREAL	27,5	41,2
L.V.M.H.	38,1	48,3
MUENCH. RUECK N	31,2	54,0
NOKIA	40,8	58,6
RENAULT	55,6	83,4
REPSOL YPF	30,8	45,1
RWE AG	24,8	37,2
SAINT-GOBAIN	52,8	73,6
SANOFI-AVENTIS	30,7	40,1
SAP AG	27,8	38,9
SCHNEIDER ELECTR	38,9	56,2
SIEMENS N	36,2	52,0
SOCIETE GENERALE	51,6	85,7
TELECOM ITALIA	34,0	54,1
TELEFONICA	20,8	33,5
TOTAL	29,2	44,8
UNICREDIT	46,8	90,2
UNILEVER CERT	26,8	39,4
VINCI	37,3	56,8
VIVENDI	33,0	42,2
VOWG.DE	40,0	0,0
FOR.BR	40,0	0,0
E-STOX 50 ATM IV	26,6	39,5
MOYENNE	**37,6**	**62,1**

4.2. Résultats

		FructiZen	Aviso	Izéis	Vendôme	Prélude	Minéralys
Marges hors coût de transaction	**base ZC émetteur**	2,44%	2,37%	3,18%	5,83%	2,37%	3,52%
	base taux sans risque (OAT)		1,67%	1,45%	3,70%	1,22%	2,60%
Coûts de transaction				0,12%	0,63%	0,63%	0,66%
Marges avec Coût de transaction (approximatif)	**base ZC émetteur**		2,39%	3,06%	5,20%	1,74%	2,86%
	base taux sans risque(OAT)		1,69%	1,35%	3,10%	0,60%	0,84%
Sensibilités de la marge	**Taux sans risque (100BP)**	0,03%	0,03%	-0,02%	-0,68%	-0,08%	-0,05%
	Taux zéro coupon (100BP)	0,82%	0,87%	0,73%	0,82%	0,94%	0,87%
	Volatilité (10%)	0,89%	0,26%	-0,05%	1,46%	0,09%	0,28%
	Corrélation (10%)	-	-	-	-	-0,09%	-0,13%

Tableau 11. Tableau de résultat des tests de sensibilité

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessus. Tout est exprimé en pourcentage du capital initial investi. Ils sont présentés tout d'abord sans prendre en compte des coûts de transaction. Comme indiqué dans la partie I.1.3.4, en base de zéro coupon émetteur, les marges sont calculées en supposant que les produits étudiés sont simulés sous le format d'EMTN. L'approximation de la marge réelle d'un FCP peut être ensuite retrouvée en utilisant la sensibilité avec le taux zéro coupon.

Par exemple, dans le cas d'Izéis :

La marge avec les coûts de transaction est évaluée à 3,06%. Les paramètres de taux utilisés pour la simulation sont :

Le taux sans risque à 3,22%

Le taux du zéro coupon à 5,55%

La sensibilité de la marge du produit vis-à-vis le taux de zéro coupon est évaluée à 0,73%

Supposant qu'il n'y ait pas de risque d'émetteur, la marge réel du produit va être au voisinage de

$$1,35\%=3,06\%-0,73\%*(tzc-tsr)$$

Les tests de sensibilités nous montrent que :

-Les produits sont insensibles par rapport à l'évolution du taux sans risque, sauf pour le cas de Vendôme. Or le *pay off* de ce produit est assez particulier. En effet, les dates de remboursements anticipés sont plus fréquentes que les autres produits. Sauf dans les cas avec l'option de remboursement anticipé, l'amplitude de la sensibilité au taux sans risque est plus élevée. Ce résultat peut être déduit par la logique de notre modélisation : en prenant en compte l'évolution des taux de zéros coupon et la supposant linéaire, implicitement, la performance (surplus) du produit à chaque date de RA est augmentée.

-Ces produits, dépendant principalement de l'investissement en zéro coupon pour la partie du capital garanti du produit, possèdent des sensibilités assez importantes au taux de zéro coupon.

-Les amplitudes de sensibilité en volatilité sont plus importantes pour des produits sans remboursement anticipé.

CONCLUSION

L'étude présentée participe à l'évaluation de la marge commercialisation d'un panier des produits structurés.

Elle est divisée en deux grandes parties : l'une concerne des méthodes d'évaluation d'options stratégiques et l'autre réside dans le paramétrage des données.

Comme les produits sont plutôt de types *pathdependent*, la méthode Monte Carlo est plus adaptée à implémenter. Dans le cas des options de remboursement anticipé, les trajectoires sont diffusées pas à pas, et les conditions d'exercices sont appliquées à chaque instant prédéterminé. Or, cette approche n'est pas toujours applicable à cause du type de sous-jacent de l'option : certains sont basés sur l'indice, d'autres sur la valeur du portefeuille. Dans le dernier cas, il faut que la diffusion se fasse par l'approche des marches en arrière. Dans un cas simplifié, quand le *pay off* du produit se ressemble à celui d'une option *writer extendible*, l'évaluation peut être vérifiée par un résultat analytique de Black Scholes.

Le paramétrage du modèle s'est basé sur les données de Reuters, mais il n'est pas toujours parfaitement adapté à notre besoin. Les données de taux doivent s'appuyer sur les méthodes d'extraction de structure à terme. Le fait d'utiliser des volatilités implicites à la monnaie à 90 jours peut fausser les « vrais » coûts utilisés pour acquérir le portefeuille d'option. En effet, d'une part, les volatilités à court terme ne sont pas toujours corrélées avec celles à long terme ; et d'autre part, les prix des options hors de la monnaie ne sont pas le même de celles à la monnaie suite au phénomène de *smile* de volatilité.

Cette étude n'a pas pour ambition d'obtenir une marge réelle du produit, mais de l'estimer d'une manière approximative, sachant que la réalité est plus complexe, dépendant notamment des variations de marché pendant la phrase de commercialisation et de la stratégie de couverture réelle du produit. Le développement d'une modélisation plus fine du *smile* et une utilisation plus large des variations de conditions de marché sur la phase de commercialisation peuvent constituer un réel sujet lors d'une prochaine étude.

BIBLIOGRAPHIE

1. ANTOINE FRACHOT (2001) : Théorie et pratique des instruments financiers. Ed. de l'Ecole polytechnique.

2. BLACK F., SCHOLES M. (1973) The pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy 81, 637-654*

3. FRANCIS A. LONGSTAFF (1990): Pricing options with extendible maturities: Analysis and applications. *The journal of finance, vol XLV no 3, 474–491.*

4. FRANCOIS QUITTARD PINON, THIERRY ROLLANDO (2000) : *La gestion du risque de taux d'intérêt*. Economica.

5. HESTON S. (1993) A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies 6, 327-343.*

6. JIAN ZU (2007): *External writer extendible options: pricing and applications.* Journal of economic literature.

7. JOHN HULL, PATRICK ROGER(2007) : *Options, futures et autres actifs dérivés*. Pearson.

8. LINONEL MARTELLINI, PHILLIPE PRIAULET (1999) *Produits de taux d'intérêt*. Economica

9. ROBERT VEDEILHIE (2008) Tout savoir sur les produits structurés. Gualino.

10. Autorité des marchés financiers [En ligne]. [consulté en 2010]. Disponibilité sur : http://www.amf-france.org/

11. CBOE Volatility Index VIX [En ligne]. [consulté en 2010]. Disponibilité sur : http://www.cboe.com/micro/VIX/vixintro.aspx

12. Global Derivatives [En ligne]. 2010 [consulté en 2010]. Disponibilité sur : http://www.global-derivatives.com/

13. STOXX [En ligne]. 1998 [consulté en 2010]. Disponibilité sur : http://www.stoxx.com/

14. Structured Retail Products [En ligne]. Robert Benson, 2003 [consulté en 2010]. Disponibilité sur : www.structuredretailproducts.com

ANNEXES

ANNEXE 1 : Calcul de la marge annualisée

Notation :

MG est la marge globale

MA est la marge annualisée

$$MG = MAe^{-r} + MAe^{-2r} + \cdots + MAe^{-Tr} = MA\left(\sum_{k=0}^{T} e^{-kr} - 1\right)$$

$$= MA\left(\frac{1-e^{-(T+1)r}}{1-e^{-r}} - 1\right) = MA\left(\frac{e^{-r}-e^{-(T+1)r}}{1-e^{-r}}\right) = MA\left(\frac{1-e^{-Tr}}{e^{r}-1}\right)$$

$$\Rightarrow MA = MG\left(\frac{e^{r}-1}{1-e^{-Tr}}\right)$$

ANNEXE 2 : Algorithme de Cholesky

Soit la matrice de covariance :

$$\Sigma = \left\lfloor \Sigma_{i,j} \right\rfloor$$

On trouve T tel que :

$$\Sigma = T.T'$$

avec T triangulaire inférieure $\left(t_{ij}\right)$

$$\Sigma_{ii} = \sum_{k=1}^{i} t_{ik}^{2}$$

d’où

$$\boxed{t_{ii}^{2} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^{2}}}$$

Pour $i > j$,

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{j} t_{ik}.t_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik}.t_{jk} + t_{ij}.t_{jj}$$

d’où

$$\boxed{t_{ij} = \frac{\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik}.t_{jk}}{t_{jj}}}$$

ANNEXE 3 : Calcul des taux zéro-coupon / taux couponnés

Découponnement des taux Swap

Les taux Euribor (1 à 12 mois) et les taux Swap (TF/ Eur6m) de 2 à 30 ans sont connus

On veut déterminer ZC_n, le zéro-coupon de maturité n.

Si $n = \frac{i}{12}$, i=1,…,12 alors

$$ZC_n = \left(1 + \frac{d}{360} Eur_{im}\right)^{365/d} - 1$$

$$ZC_1 = \frac{365}{360} \times Eur_{12m}$$

Si n est un entier et n>1 alors on trouve par récurrence les ZC_n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Swap_n}{(1+ZC_k)^k} + \frac{1}{(1+ZC_n)^n} = 1$$

Le discount factor de maturité n DF_n est introduit:

$$DF_n = \frac{1}{(1+ZC_n)^n}$$

Soit :

$$Swap_n \times \sum_{k=1}^{n} DF_k + DF_n = 1$$

$$(1+Swap_n) \times DF_n = 1 - Swap_n \times \sum_{k=1}^{n-1} DF_k$$

$$\boxed{DF_n = \frac{1 - Swap_n \times \sum_{k=1}^{n-1} DF_k}{1 + Swap_n}}$$

Il en est déduit le taux zéro-coupon :

$$\boxed{ZC_n = DF_n^{-1/n} - 1}$$

Remarque : les taux Swap n'étant pas disponibles pour toutes les maturités, les maturités manquantes sont déterminées par interpolation cubique de la courbe des Swap.

Recouponnement des taux zéro-coupon

On connaît ZC_n et on aimerait connaître le taux de marché correspondant

Si $n = \frac{i}{12}$, i=1,…,12 alors

$$ZC_n = \left(1 + \frac{d}{360} Eur_{im}\right)^{365/d} - 1$$

$$Eur_{im} = \frac{360}{d} \times \left[(1 + ZC_n)^{d/365} - 1\right]$$

Si n est un entier et n>1 alors le Swap de durée n se calcule par :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Swap_n}{(1+ZC_k)^k} + \frac{1}{(1+ZC_n)^n} = 1$$

donc

$$Swap_n = \frac{1 - \frac{1}{(1+ZC_n)^n}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+ZC_k)^k}} = \frac{1 - DF_n}{\sum_{k=1}^{n} DF_k}$$

ANNEXE 4: Base de taux relevé chez Reuters

EURIBOR= EUR INTERBANK Linked Displays MONEY

23/06/09 DEALING

SW	0.877		EBF	BRU	9:06
2W	0.903		EBF	BRU	9:06
3W	0.922		EBF	BRU	9:06
1M	0.941		EBF	BRU	9:06
2M	1.058		EBF	BRU	9:06
3M	1.224		EBF	BRU	9:06
4M	1.309		EBF	BRU	9:06
5M	1.381		EBF	BRU	9:06
6M	1.438		EBF	BRU	9:06
7M	1.476		EBF	BRU	9:06
8M	1.512		EBF	BRU	9:06
9M	1.543		EBF	BRU	9:06
10M	1.567		EBF	BRU	9:06
11M	1.588		EBF	BRU	9:06
1Y	1.609		EBF	BRU	9:06

14:31 19JUN09 NATIXIS FR00022 IXISBTAN
| NATIXIS <IXISMENU> . Desk SVT <IXISSVT> .
| T: 33 1 58 55 07 86 (07 87) . . OUVERT

ISSUE		YIELD	PRICE	ASW
040709	BTAN 3.50 120709	.473-006	100.12-18	-12.7
070909	BTAN 4.00 120909	.565-695	100.72-78	-44.4
040110	BTAN 3.00 120110	.744-796	101.21-27	-58.6
050710	BTAN 2.50 120710	.974-002	101.55-61	-33.3
080910	BTAN 3.75 120910	1.069-093	103.20-26	-34.8
060111	BTAN 3.00 120111	1.251-270	102.63-69	-37.2
060711	BTAN 3.50 120711	1.586-600	103.79-85	-33.1
090911	BTAN 1.50 120911	1.656-748	99.36-76	-29.5
070112	BTAN 3.75 120112	1.845-857	104.66-72	-29.9
070712	BTAN 4.50 120712	2.118-128	106.93-99	-24.1
080113	BTAN 3.75 120113	2.362-371	104.63-69	-17.5
080713	BTAN 4.50 120713	2.554-604	107.20-40	-12.7
090114	BTAN 2.50 120114	2.761-809	98.59-99	-7.1

0

LINKS : <IXISGOVBONDS> Gov.
Next--> <IXISOAT1>

14:31 19JUN09 NATIXIS FR00022 IXISOAT1
| NATIXIS <IXISMENU> . Desk SVT <IXISSVT> .
| T: 33 1 58 55 07 86 (07 87) . . OUVERT

ISSUE		PRICE	CPON	M PRC	M YLD	ASW
57143	OAT 4.00 09	99.98-04	25/04	100.01	0.337	-22.7
18619	OAT 4.00 09	101.08-14	25/10	101.11	0.696	-51.3
18660	OAT 5.50 10	103.81-87	25/04	103.84	0.868	-55.6
18702	OAT 5.50 10	105.76-82	25/10	105.79	1.108	-40.5
57073	OAT 6.50 11	109.07-13	25/04	109.10	1.439	-37.9
18787	OAT 5.00 11	107.36-42	25/10	107.39	1.741	-31.6
18832	OAT 5.00 12	108.17-23	25/04	108.20	1.994	-28.6
18869	OAT 4.75 12	107.85-91	25/10	107.88	2.268	-19.8
57078	OAT 8.50 12	120.38-58	26/12	120.48	2.341	-16.9
18898	OAT 4.00 13	105.36-42	25/04	105.39	2.507	-13.6
01113	OAT 4.00 13	105.25-31	25/10	105.28	2.692	-9.5
06124	OAT 4.00 14	105.06-12	25/04	105.09	2.855	-6.5
11205	OAT 4.00 14	104.76-82	25/10	104.79	3.012	-2.6
16354	OAT 3.50 15	101.97-03	25/04	102.00	3.118	-4.1
21648	OAT 3.00 15	98.69-75	25/10	98.72	3.225	-3.9
28835	OAT 3.25 16	99.47-53	25/04	99.50	3.332	-2.2
18736	OAT 5.00 16	109.92-98	25/10	109.95	3.440	3.9

LINKS : <IXISGOVBONDS> Gov. <IXISBTAN> <-- Prev
Next--> <IXISOAT2>

14:30 19JUN09 NATIXIS FR00022 IXISOAT2
| NATIXIS <IXISMENU> . Desk SVT <IXISSVT> .
| T: 33 1 58 55 07 86 (07 87) . . OUVERT

ISSUE		PRICE	CPON	M PRC	M YLD	ASW
41533	OAT 3.75 17	101.10-16	25/04	101.13	3.580	7.8
51741	OAT 4.25 17	103.99-05	25/10	104.02	3.680	12.5
60498	OAT 4.00 18	101.67-87	25/04	101.77	3.760	13.6
67073	OAT 4.25 18	103.19-39	25/10	103.29	3.823	15.1
18915	OAT 4.25 19	102.97-15	25/04	103.06	3.869	14.3
57092	OAT 8.50 19	138.62-80	25/10	138.71	3.879	22.9
19299	OAT 3.75 21	96.73-91	25/04	96.82	4.094	16.2
57108	OAT 8.50 23	143.77-13	25/04	143.95	4.235	33.7
46693	OAT 4.25 23	99.42-78	25/10	99.60	4.286	19.1
57115	OAT 6.00 25	119.14-50	25/10	119.32	4.324	20.3
57121	OAT 5.50 29	112.74-10	25/04	112.92	4.500	28.4
18763	OAT 5.75 32	117.09-45	25/10	117.27	4.534	35.5
07006	OAT 4.75 35	102.94-30	25/04	103.12	4.542	35.4
37140	OAT 4.00 38	91.48-67	25/10	91.58	4.523	35.2
17197	OAT 4.00 55	90.25-73	25/04	90.49	4.492	51.7

LINKS : <IXISGOVBONDS> Gov. <IXISOAT1> <-- Prev
Next--> <IXISOAT3> TEC

19/06/2009 - 16:31

ANNEXE 5: Exemple d'une extraction de taux d'Etat français

	Maturité	Taux	
10-mars-09	25-avr-09	0,977	OAT
10-mars-09	12-juil-09	0,87	BTAN
10-mars-09	12-sept-09	0,801	BTAN
10-mars-09	25-oct-09	0,835	OAT
10-mars-09	12-janv-10	0,842	BTAN
10-mars-09	25-avr-10	1,053	OAT
10-mars-09	12-juil-10	1,218	BTAN
10-mars-09	12-sept-10	1,312	BTAN
10-mars-09	25-oct-10	1,334	OAT
10-mars-09	12-janv-11	1,404	BTAN
10-mars-09	25-avr-11	1,497	OAT
10-mars-09	12-juil-11	1,574	BTAN
10-mars-09	25-oct-11	1,701	OAT
10-mars-09	12-janv-12	1,819	BTAN
10-mars-09	25-avr-12	1,945	OAT
10-mars-09	12-juil-12	2,054	BTAN
10-mars-09	25-oct-12	2,181	OAT
10-mars-09	26-déc-12	2,239	OAT
10-mars-09	12-janv-13	2,251	BTAN
10-mars-09	25-avr-13	2,358	OAT
10-mars-09	12-juil-13	2,437	BTAN
10-mars-09	25-oct-13	2,546	OAT
10-mars-09	12-janv-14	2,625	BTAN
10-mars-09	25-avr-14	2,694	OAT
10-mars-09	25-oct-14	2,792	OAT
10-mars-09	25-avr-15	2,917	OAT
10-mars-09	25-oct-15	3,039	OAT
10-mars-09	25-avr-16	3,146	OAT
10-mars-09	25-oct-16	3,265	OAT
10-mars-09	25-avr-17	3,405	OAT
10-mars-09	25-oct-17	3,518	OAT
10-mars-09	25-avr-18	3,625	OAT
10-mars-09	25-oct-18	3,699	OAT
10-mars-09	25-avr-19	3,753	OAT
10-mars-09	25-oct-19	3,817	OAT
10-mars-09	25-avr-21	4,019	OAT
10-mars-09	25-avr-23	4,144	OAT
10-mars-09	25-oct-23	4,197	OAT
10-mars-09	25-oct-25	4,319	OAT
10-mars-09	25-avr-29	4,346	OAT
10-mars-09	25-oct-32	4,336	OAT
10-mars-09	25-avr-35	4,274	OAT
10-mars-09	25-oct-38	4,186	OAT
10-mars-09	25-avr-55	4,175	OAT

ANNEXE 6 : Illustration d'un prospectus simplifié du produit étudié

FructiZen PROSPECTUS SIMPLIFIÉ

AVERTISSEMENT : L'OPCVM FructiZen est construit dans la perspective d'un investissement pour toute la durée de vie de la formule. Il est donc fortement recommandé de n'acheter des parts de ce FCP que si vous avez l'intention de les conserver jusqu'à l'échéance prévue.
Une sortie de ce FCP à une autre date s'effectuera à un prix qui dépendra des paramètres de marché ce jour-là (après déduction des frais de rachat). Il pourra être très différent (inférieur ou supérieur) du montant résultant de l'application de la formule annoncée.

PARTIE A - STATUTAIRE

1 - PRESENTATION SUCCINCTE

Code Isin
FR0010675611

DENOMINATION
FructiZen ci-après dénommé, dans le présent document, le « FCP ».

FORME JURIDIQUE
Fonds Commun de Placement de droit français.

SOCIETE DE GESTION
NATIXIS ASSET MANAGEMENT

DELEGATAIRE COMPTABLE
CACEIS FASTNET

DUREE D'EXISTENCE PREVUE
Ce FCP a été initialement créé le 2 janvier 2009 pour une durée de 99 ans.

DUREE DE LA FORMULE
5 ans et 23 jours, soit du 9 avril 2009 au 2 mai 2014.

DEPOSITAIRE
CACEIS BANK

COMMISSAIRE AUX COMPTES
DELOITTE ET ASSOCIES représenté par M.VINCENT-GENOD signataire

COMMERCIALISATEURS
Agences des Banques Populaires Régionales constituant le Groupe Banque Populaire situé en France. La liste et l'adresse de chaque Banque Populaire Régionale sont disponibles sur le site internet www.banquepopulaire.fr et Natixis Asset Management. La société de gestion du FCP attire l'attention des souscripteurs sur le fait que tous les commercialisateurs ne sont pas mandatés ou connus d'elle.

CONSEILLER
Néant.

2 - INFORMATIONS CONCERNANT LES PLACEMENTS ET LA GESTION

CLASSIFICATION
Fonds à Formule.

OPCVM D'OPCVM
Inférieur à 50 % de l'actif net.

GARANTIE
A l'échéance de la Formule, 100% de la Valeur Liquidative de Référence, hors commission de souscription, majoré de 50% de la Performance Moyenne Finale de l'indice Dow Jones Euro Stoxx 50 (l'« Indice »), soit la Valeur Liquidative Garantie.

OBJECTIF DE GESTION
L'objectif de gestion de FructiZen est de permettre au porteur de recevoir à l'échéance de la formule, le 2 mai 2014, la Valeur Liquidative Garantie, soit 100% de la Valeur Liquidative de Référence, hors commission de souscription, majorée de 50% de la Performance Moyenne Finale de l'Indice.

Les Performances de l'Indice sont calculées chaque année, aux Dates de Constatation Annuelles, depuis l'origine de la formule, par rapport à 105 % du Niveau d'Origine de l'Indice et retenues dans le calcul de la Performance Moyenne Finale de l'Indice, uniquement si elles sont positives et supérieures à toutes les Performances de l'Indice calculées et retenues précédemment.

La Performance Moyenne Finale de l'Indice s'obtient en faisant la moyenne arithmétique des Performances de l'Indice qui auront ainsi été retenues.

Pendant la période de commercialisation, soit du 2 janvier 2009 au 9 avril 2009 et à compter de l'échéance de la formule, le 2 mai 2014, le Fonds sera géré en monétaire.

ECONOMIE DU FCP
L'économie du produit permet au porteur de bénéficier, au travers de l'Indice Dow Jones Euro Stoxx 50, d'une diversification sectorielle des marchés actions de la zone euro. En contrepartie de la garantie intégrale du capital investi pendant la période de commercialisation, hors commission de souscription, le porteur accepte de ne pas profiter pleinement des performances de l'Indice du fait de la moyenne utilisée, de ne pas profiter de l'intégralité de cette performance qui n'est retenue qu'à hauteur de 50%, et de ne pas percevoir les dividendes des actions entrant dans la composition de l'Indice.

ANNEXE 7. Code VBA de la valorisation de la valeur du portefeuille Prélude

```
Option Explicit
Option Base 1

Sub Calcul()

Application.ScreenUpdating = False
Application.Calculation = xlCalculationManual

Dim i As Double, j As Double, k As Double, Nb_Simul As Double
Dim r As Double
Dim t As Double, SG_Eurobond As Double, Nb_pas As Double, pas As Double
Dim iid() As Double, Cor() As Double, Marge As Double
Dim Strat(3) As Double
Dim MatS() As Double, Chol() As Double
Dim CG As Double
Dim cap As Double
Dim n As Double 'nb d'actifs

n = Worksheets("Chol").Range("B1").Value
ReDim Preserve iid(n) As Double, Cor(n) As Double
ReDim Preserve MatS(3, n + 1) As Double, Chol(n, n) As Double


r = Worksheets("Monte-Carlo").Range("B3").Value 'Rentabilité annualisée
t = Worksheets("Monte-Carlo").Range("B6").Value 'Maturité
Nb_pas = Worksheets("Monte-Carlo").Range("B7").Value 'Nombre de pas
pas = t / Nb_pas 'Fréquence
Nb_Simul = Worksheets("Monte-Carlo").Range("B9").Value 'Nombre de simulations
SG_Eurobond = Worksheets("Monte-Carlo").Range("B13") 'Rendement de l'obligation SG

CG = Worksheets("B-S").Range("b10")
cap = Worksheets("B-S").Range("b4")


Dim ecart_vol As Double, ecart_dy As Double, ecart_cor As Double
ecart_vol = Worksheets("B-S").Range("K2")
```

```
'ecart_dy = Worksheets("B - S").Range("K5")
ecart_cor = Worksheets("B - S").Range("K4")



Dim Vol() As Double
ReDim Preserve Vol(n) As Double
For i = 1 To n
  Vol(i) = (Worksheets("VecteurVol").Range("B" & i + 1).Value) / 100
              + ecart_vol 'volatilité

Next i
Dim dy() As Double
ReDim Preserve dy(n) As Double
If t = 3 Then
For i = 1 To n
  dy(i) = Worksheets("VecteurVol").Range("H" & i + 1).Value 'Dividende
Next i
ElseIf t = 6 Then
For i = 1 To n
  dy(i) = Worksheets("VecteurVol").Range("I" & i + 1).Value 'Dividende
Next i
End If



'Cholesky
Call Cholesky
For k = 1 To n
  For j = 1 To n
    Chol(k, j) = Sheets("Chol").Cells(5 + k, j)
  Next j
Next k

For j = 1 To Nb_Simul
  MatS(2, n + 1) = 0
  For k = 1 To n
'Simulation de trajectoires
    iid(k) = gauss()
```

```
    Cor(k) = 0 'Remise à 0 du "compteur"
For i = 1 To k
      Cor(k) = Cor(k) + iid(i) * Chol(k, i)
Next i
'     MatS(1, k) = 100 * Exp((r - dy - 0.5 * Vol ^ 2) * pas + Sqr(pas) * Cor(k))
    MatS(1, k) = 100 * Exp((r - dy(k) - 0.5 * Vol(k) ^ 2) * pas + Sqr(pas) * Cor(k))
'A l'échéance
    If MatS(1, k) < 100 Then
MatS(2, k) = 1 / 2 * (MatS(1, k) - 100) 'perf négative divisée par 2
ElseIf MatS(1, k) > 100 + (cap - 100) / 2 Then
      MatS(2, k) = cap - 100
Else
      MatS(2, k) = 2 * (MatS(1, k) - 100) 'perf positive multipliée par 2
    End If
    MatS(2, n + 1) = MatS(2, n + 1) + MatS(2, k) / n
  Next k
MatS(2, n + 1) = Max(MatS(2, n + 1), 100 * (CG - 1)) + 100
  'MatS(2, 49) = Max(MatS(2, 49), 0) + 100
  MatS(3, n + 1) = MatS(2, n + 1) * Exp(-t * r) 'Prix de la stratégie en 0
  Strat(3) = Strat(3) + MatS(3, n + 1) / Nb_Simul
  'condition de RA
If Worksheets("B - S").Range("B8").Value = 1 Then
'   Au bout de 2 ans
  MatS(2, n + 1) = Min(112, MatS(2, n + 1) * Exp(-r)) 'Proba de sortir en 2 ans
  MatS(3, n + 1) = MatS(2, n + 1) * Exp(-2 * r) 'Prix de la stratégie en 0
  Strat(2) = Strat(2) + MatS(3, n + 1) / Nb_Simul
'   Au bout d'1 an
  MatS(2, n + 1) = Min(106, MatS(2, n + 1) * Exp(-r)) 'Proba de sortir en 1 an
  MatS(3, n + 1) = MatS(2, n + 1) * Exp(-r) 'Prix de la stratégie en 0
Strat(1) = Strat(1) + MatS(3, n + 1) / Nb_Simul
  End If
Next j

'Valeur du portefeuille ramenée en 0 en RN
Sheets("Re").Range("b2") = Strat(3)
Sheets("Re").Range("c2") = Strat(2)
```

```
Sheets("Re").Range("d2") = Strat(1)

Application.ScreenUpdating = True
Application.Calculation = xlCalculationAutomatic

End Sub
```