

# Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie en unités de compte : tarification et couverture

Thèse d'actuariat :

Etude réalisée sous la direction de :  
Guillaume PLANTIN  
(Commission de Contrôle des Assurances)

Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie  
en unités de compte : tarification et couverture  
Note de synthèse

## 1 Présentation

Depuis quelques années, les compagnies d'assurance vie ont développé leur offre de contrats investis en unités de compte (dits "multisupports"), à tel point qu'au premier trimestre 2000, ces contrats ont représenté la majorité des nouvelles souscriptions. La devise des contrats en unités de compte est une valeur mobilière. Contrairement aux contrats en francs qui peuvent garantir un rendement minimum et font bénéficier les assurés d'un effet allié, les contrats en unités de compte ne garantissent pas une somme fixée mais un nombre de parts d'actifs, dont la valeur est soumise aux fluctuations du marché. Comptablement, l'engagement de l'assureur est représenté au passif de la compagnie d'assurance par la provision mathématique adossée de cette provision mathématique, l'assureur inscrit à l'actif de son bilan les parts dans lesquelles ont été investies les primes de l'assuré. L'assureur ne supporte donc pas de risque de placement, sauf au titre de garanties annexes (par exemple les garanties plancher que nous étudions). Cette étude cherche à valoriser la garantie plancher en cas de décès posée dans certains contrats en unités de compte. Cette garantie stipule qu'au décès du souscripteur, le bénéficiaire du contrat recevra au moins les primes versées, même en cas de baisse de la valeur des unités de comptes. Jusqu'en 1995, les compagnies d'assurance devaient obligatoirement offrir cette garantie. Depuis, la législation a été modifiée, et cette garantie est devenue facultative. Cette garantie fait peser un risque sur les sociétés d'assurance : dans l'hypothèse d'une baisse importante et durable du prix des actifs financiers, les sociétés subiraient ainsi des pertes importantes susceptibles de mettre en péril leur solvabilité. La garantie présente, conditionnellement au décès, la même structure de flux qu'une option de vente d'échéance la date du décès. Cela nous permet de valoriser cette garantie à l'aide de techniques couramment utilisées en finance.

## 2 Tarification

Tout d'abord, nous supposons qu'il y a mutualisation parfaite des décès, ce qui permet de connaître précisément leur répartition, et que l'assureur peut mettre en oeuvre les techniques d'arbitrage qui justifient la valorisation des puts par la méthode de Black & Scholes. Dans ce cadre, la valeur de la garantie est la somme des puts pondérés par les probabilités de décès.

Le choix des valeurs du taux sans risque et de la volatilité a une très grande influence sur la valeur de la garantie. Nous avons choisi pour nos applications numériques des valeurs prudentes mais réalistes (de 3% et 20% respectivement). Des frais de gestion annuels de 0,5% impliquent une augmentation du coût de la garantie d'un point de pourcentage. La valeur de cette garantie est maximale pour un âge de souscription de l'ordre de 70 ans. On peut choisir de financer la garantie par un prélèvement annuel sur le taux qui pourrait être appliqué par âge sont ainsi très différents. Le en fonction de la structure par âge du portefeuille de l'assureur. Dans le cadre d'un contrat multisupport à support unique risqué, on obtient des taux de prélèvement élevés, de l'ordre de 2% initialement en plus de 0,4% annuels. La prise en compte des chutes, même si elles entraînent une diminution des recettes, permet une diminution du coût de la garantie (sauf pour les assurés les plus jeunes), et une homogénéisation des résultats. Si une partie du contrat est investie dans un support non risqué, le prix de la garantie baisse fortement : si 20% du contrat est investi initialement dans le support non risqué, le prix de la garantie chute d'environ 40%. Nous avons ensuite confirmé les ordres de grandeur des valeurs des garanties en étudiant deux modèles mathématiques plus complexes et plus fins, qui mettent à plusieurs supports d'être risqués. L'un permet d'étudier un très général d'actifs, l'autre plus spécifiquement un panier composé d'actifs risqués et de zéro coupons.

Les autres garanties en francs (garantie de rendement, garantie majorée ou indexée) coûtent très cher : dès que l'on garantit plus que les primes investies, le prix de la garantie augmente fortement, ce qui rend son financement difficile. Une limitation de la garantie à un âge maximal permet en revanche de fortement diminuer le coût.

## 3 Couverture

Nous étudions ensuite la qualité de certaines stratégies de couverture qui semblent raisonnables et accessibles aux assureurs. La théorie de Black & Scholes permet au vendeur d'une option de se couvrir à l'aide du sous-jacent et de l'actif sans risque à condition de rajuster en permanence sa position. En pratique cela est impossible, notamment à cause des frais de transaction. Nous évaluons numériquement, par la méthode de Monte-Carlo, le coût de couverture supplémentaire qu'induisent les frais de transaction, ainsi que leur variance. Pour une stratégie de couverture qui repose sur des ajustements de portefeuille à intervalles réguliers, la méthode consiste à immuniser initialement le portefeuille contre une variation du sous-jacent, puis, à chaque étape, à simuler son évolution et à ajuster la position. En effectuant 10000 simulations, nous calculons le montant moyen des coûts de transaction et l'erreur moyenne du portefeuille de couverture ainsi que l'écart-type empirique du coût de couverture. Nous trouvons que le coût de couverture est une fonction croissante de la volatilité et décroissante du taux. Le fait d'avoir ajouté des coûts de transactions induit un coût de couverture de l'ordre de 2%, et l'écart-type de ce coût de couverture est de 20% et d'un taux d'intérêt à 3%.

L'efficacité de la stratégie de couverture dépend évidemment du nombre d'ajustements annuels : des ajustements fréquents permettent d'avoir en permanence un portefeuille de couverture très peu sensible aux variations de l'actif sous-jacent, mais coûtent cher. Il semble optimal d'effectuer environ 6 ajustements annuels. Dans ce cas, l'écart-type est presque minimal pour des coûts de couverture assez bas. Nous avons considéré pour les évaluations numériques des coûts de transaction assez élevés car la position prise sur l'actif risqué est courte. Quels que soient les coûts de transaction, l'écart-cotés de transaction très élevés). Les coûts de couverture varient en revanche beaucoup en fonction des frais de transaction.

Il pourrait sembler naturel de couvrir les garanties plancher en achetant des options. Malheureusement, les puts relativement liquides que l'on peut trouver sur le marché ont une échéance très rapprochée par rapport à celle des puts à couvrir. La stratégie qui consiste à conserver des puts jusqu'à échéance, quoique intuitive, n'est pas efficace du tout. De plus, une stratégie de couverture en delta-neutre est plus coûteuse avec des puts qu'avec de l'actif sans risque. Le fait de disposer de deux instruments de couverture devrait permettre, en théorie, de mieux se couvrir. Nous avons donc envisagé des

couvertures de type delta-vega ou delta-gamma utilisant à la fois de l'actif risqué et des options ; elles permettent de réduire l'erreur de couverture mais les coûts de transaction très élevés conduisent à les écarter.

Nous nous plaçons ensuite dans le cadre du contrat multisupport le plus simple. Comme le prix de la garantie, le coût de la couverture diminue rapidement si l'on augmente la proportion d'actif non risqué. L'écart-type diminue aussi, mais dans des proportions plus faibles. Pour un contrat investi à 80 % en actif risqué, si on suppose que le portefeuille est bien mutualisé le coût de couverture et l'écart-type de cette couverture sont les moyennes pondérées par les coefficients des tables de mortalité des coûts de couverture et des écart-types établis plus haut pour les puts. Selon l'âge, on obtiendra des coûts moyens de 1 à 1,5 % de la provision mathématique et un écart-type de 1,5 à 2 %. L'écart-type de la valeur de la garantie provient également de la date aléatoire des décès. Nous examinons l'écart type dû aux décès analytiquement pour un cas très simple. L'étude du cas général étant très complexe, nous préférons prendre en compte l'ala de mortalité dans les simulations numériques de la distribution du coût de la garantie.

Pour comparer les coûts des garanties, nous calculons le quantile à 99 % des prestations pour les garanties non couvertes ; dans le cas des garanties couvertes, la somme du quantile à 99 % de la distribution des coûts de couverture et du prix de la garantie à frais de transaction nuls. En effet, on suppose que l'assureur doit conserver en marge la somme nécessaire pour faire face à 99 % des états de la nature, or la rémunération de la marge sur toute la vie du contrat entraîne un coût agrégé proche des capitaux mobilisés. Nous nous plaçons dans le cadre central d'un taux d'intérêt à 3 %, d'une volatilité de 20 %, d'un taux de croissance moyen de l'actif non risqué de 7 ou 3 %, de contrats comportant 80 % d'actif risqué et de taux de chutes annuels de 4 %.

La distribution de la garantie non couverte montre qu'elle est peu coûteuse en espérance mais très coûteuse en terme de marge, surtout pour les assurés âgés. Il est toujours moins coûteux de se couvrir et cela permet de plus de s'affranchir des erreurs d'appréciation de l'évolution de l'actif risqué. En moyennant les niveaux de marge nécessaires par âge, on obtient un besoin de marge global au titre des garanties plancher de l'ordre de 2 % et un besoin de l'ordre de 3 % qui doit être prélevé pour mettre en place une couverture dynamique. Cette garantie coûte donc très cher puisqu'elle suppose des prélèvements annuels de plus de 0,6 % des provisions mathématiques (en supposant que l'assureur rémunère la marge apportée par les actionnaires). Dans les cas d'une garantie limitée à 75 ans, le besoin de marge et le prix descendent tous deux à 1,5 %.

## Floor guarantees in unit-linked life-insurance contracts : pricing and hedging

### Presentation

For a few years, life-insurance companies have promoted unit-linked contracts, which have met great success and represent now more than half of new subscriptions. Those contracts do not guarantee a fix amount in francs but a number of shares, the value of which evolves with financial markets. The engagement of the insurer is represented on the liability side of the balance sheet by a technical provision. Facing this technical provision, on the asset side, the insurer writes the shares in which premiums were invested. Thus, the insurer runs no investment risk, except for supplementary guarantees (for example floor guarantees, which we study).

This study aims at evaluating the floor guarantee in case of death proposed in some unit-linked contracts. This guarantee stipulates that when the insured dies, the beneficiary will receive at least the premiums, even if the shares in which they were invested went down. Till 1995, this guarantee was compulsory. Since then, regulations made it optional. This guarantee makes the insurer run a risk of bankruptcy : in the case of an important fall of financial markets, insurance companies would undergo heavy losses, which would endanger their solvency. This guarantee has the same cash-flow structure as a sell option whose term is the date of death. This allow us to evaluate this guarantee thanks to techniques commonly used in finance.

### Pricing

We suppose at first that we can mutualize deaths, which allows us to view the whole groups dates of death as deterministic, and that the insurer is able to use arbitrage techniques, which allows us to price puts with the Black & Scholes formula. In this framework, the value of the guarantee is a sum of puts weighted by death probabilities. We evaluate this guarantee for different parameters.

The choice of the short term interest rate and of the volatility is crucial for the value of the guarantee. For numerical applications, we chose prudent and realistic values (3% and 20% respectively). The value of the guarantee depends on the age of the policyholder, it is maximal for a subscription at 70. One can choose to finance the guarantee by annual fees. In this case, fees rates are very different according to the age of the policy-holder. The rate that could be applied would then be the average of those rates weighted according to the age structure of the group.

In the case of a unit-linked contract with only one risky asset, one obtains high initial and annual rate fees (around 2 and 0,4% respectively).

Lapse rates, if taken into account, diminish the insurer income but allow the global guarantee value to go down (not for young policy-holders, though). Moreover, they make fees rates more homogeneous through ages.

Other guarantees (yield guarantee, indexed guarantee, best-of guarantee) are very expensive : as soon as the insurer guarantees more than the premiums, the value of the guarantee becomes much higher, which makes it difficult to finance ! On the contrary, a limitation of the guarantee under a certain age can strongly diminish the cost. If a part of the contract is invested in a risk-free asset, the value of the guarantee drops sharply : if 20 % of the premiums are invested initially in the risk-free asset, the value of the guarantee drops of about 40 %.

We then studied two models, more complex, which confirmed the values obtained above. One of them permits to evaluate the guarantee when premiums are invested in a whole basket of assets ; the other is meant more specifically for baskets of bonds and stocks.

## Hedging

We then study some hedging strategies which seem reasonable and affordable to insurers.

The Black & Scholes theory allows an option seller to protect himself by a continuous time dynamic replication strategy. Concretely, it is not possible because of transactions costs. We use the Monte-Carlo method to evaluate numerically the supplementary hedging cost due to transactions costs, and its variance. For a time-based strategy, the method consists in initially immunizing the portfolio against a variation of the risky asset. Then, at each step, we simulate the evolution of the asset and rebalance the hedging portfolio. For 10000 simulations, we compute the average amount of the transactions costs and the average error of the hedging portfolio, as well as the empirical variance of transactions costs. The hedging is an increasing function of volatility and a decreasing function of the interest rate. Transactions costs induce an hedging cost of about 2 % and a standard deviation of about 2.5 % (in the central hypothesis of a 20% volatility and of a 3% interest rate).

The efficiency of the hedging strategy of course depends on the number of rebalancing points per year. If there are many rebalancing points, the portfolio is little sensitive to the variations of the underlying asset, but transactions costs are ponderous. It seems optimal to rebalance the portfolio six times a year. In this case, the standard deviation is almost minimum for low transactions costs.

We have chosen high transactions costs for numerical applications, since the option seller must be short on the asset. Whatever the transactions costs, the standard deviation is relatively stable, whereas hedging costs depend heavily on transactions costs.

It might seem natural to buy options in order to hedge floor guarantees. Unfortunately, the maturity of the puts on the market are much shorter than those to hedge. It is not efficient at all to buy a put and keep it till its term. Moreover a delta hedging strategy is more expensive with puts than with the asset. Using two hedging instruments should normally lead to better hedging. We thus studied delta-gamma and delta-vega hedging using both puts and assets ; they reduce the hedging error but induce much too high transactions costs.

We examine the case of the simple multi-asset contract. As the value of the guarantee, the hedging cost goes down rapidly if one increases the proportion of risky assets. The standard deviation goes down too, but not so much. For a contract invested in the risky asset at 80 %, if we suppose a good mutualization, hedging costs are around 1.4 % and standard deviation around 1.6 %.

Death randomness contributes to the standard deviation of the guarantee as well. We analytically study the standard deviation due to deaths in a very simple case. The study of the general case being quite complex, we prefer taking this phenomenon into account in numerical simulations of the cost of the guarantee.

To compare the costs of the guarantees, we calculate the 99 % percentile of the benefits for non-hedged guarantees ; in the case of hedged guarantees, the sum of the 99 % percentile of the hedging costs and of the guarantee price calculated above. We suppose indeed that the insurer must keep in reserve the amount necessary to face 99 % of the states of the world.

If the shareholders of the insurance company want their equity to yield much more than the risk-free interest rate, and the cost of the reserve is thus close to the reserve itself. We suppose a 3 % interest rate, a 20 % volatility, a real trend of the risky asset of 3 % or 7 %, contracts invested at 80 % in the risky asset and 4 % a year lapses rates.

The distribution of the non-hedged guarantee shows a small expected cost but an important need of reserve, especially for old insured. It is always cheaper for the company to hedge, which permits to get free from errors in the evaluation of the trend of the risky asset.

In average, we obtain a need of reserve for floor guarantees of about 2 % and a price of about 3 %, which must be checked in to permit hedging. This guarantee is thus very expensive for it supposes annual fees of at least 0.6 % of technical provisions (if one supposes that the shareholders' reserves are paid for). In the case of a guarantee limited to 75, the reserve need and the price fall both to around 1.5 %.

# Table des matières

1	Position du problème	3
1.1	Les contrats en francs	4
1.2	Les contrats "en unités de compte"	4
1.3	Les garanties	5
2	Le contrat en unités de compte à support unique	8
2.1	Garantie financée par une prime unique versée à l'origine	8
2.1.1	Formalisation	8
2.1.2	Valorisation par le modèle de Black & Scholes	10
2.1.3	Influence des différents paramètres	12
2.2	Garantie financée par un prélevement annuel sur encours	16
2.2.1	Tarifification différenciée selon l'âge	18
2.2.2	La prise en compte des chutes	21
2.3	Autres garanties en francs en cas de décès	26
2.3.1	La garantie de rendement	27
2.3.2	La garantie majorée	28
2.3.3	La garantie cliquet	30
3	Le contrat multisupport	33
3.1	Un support risqué, un support sans risque	33
3.2	Plusieurs supports risqués	35
3.2.1	Valorisation d'une option "panier"	36
3.2.2	L'influence de la corrélation des supports	38
3.2.3	Le contrat avec trois supports risqués	39
3.3	Un modèle de contrat multisupport	43
3.3.1	Le modèle de taux d'intérêt	44
3.3.2	L'option panier sur zéro coupon et action	46
3.3.3	Application au contrat multisupport	49

4	La couverture des garanties (hors risque de décès)	56
4.1	Qualité d'une stratégie de couverture d'une option	56
4.1.1	Théorie dans le cas continu, sans frais de transactions	56
4.1.2	Intégration de coûts de transactions : modèle analytique dans le cas d'un call	57
4.2	Exemples de stratégies de couverture d'un put en présence de frais de transaction	60
4.2.1	Couverture par de l'actif sans risque et de l'actif sous-jacent	60
4.2.2	Couverture par de l'actif sans risque et des options	65
4.2.3	Couverture par de l'actif sans risque, de l'actif risqué et des options	68
4.3	La couverture du contrat multisupport élémentaire	71
5	La prise en compte des décès et le risque résiduel	74
5.1	La variance prenant en compte l'aléa de mortalité	74
5.2	Quelle stratégie adopter ?	76
5.3	Le risque en l'absence de couverture	77
5.3.1	Le coût d'un put non couvert	77
5.3.2	Le coût de la garantie non couverte	79
5.4	Simulation de la distribution du coût de la garantie couverte	83
5.4.1	Le contrat à support unique	83
5.4.2	Le contrat multisupport élémentaire avec des chutes	85
6	Conclusion	87

# Chapitre 1

## Position du problème

Les contrats d'assurance vie de type "épargne-assurance" ont connu un développement important ces vingt dernières années. Ces contrats offrent des valeurs de rachat la plupart du temps élevées et des garanties de prestations. Ces possibilités peuvent être analysées comme des options offertes par les compagnies aux souscripteurs.

Cette étude cherche à valoriser la garantie plancher en cas de décès proposée dans certains contrats en unités de compte. Cette garantie stipule que lors du décès de l'assuré, le bénéficiaire du contrat reçoit au moins les primes versées, et ce même si la valeur des unités de compte dans lesquelles ces primes ont été investies a baissé. Jusqu'en 1995, les compagnies d'assurance devaient obligatoirement joindre une garantie de ce type à tous les contrats vendus afin de protéger les souscripteurs<sup>1</sup>. Cette garantie fait peser un risque sur les sociétés d'assurance : dans l'hypothèse d'une baisse importante et durable du prix des actifs financiers, les sociétés devraient provisionner une somme pour chaque assuré dont le contrat est en moins-value, et enregistrer ainsi des pertes importantes susceptibles de mettre en péril leur solvabilité. Cette garantie n'est pas une option, car l'assuré ne choisit pas la date de son décès. Elle présente cependant, conditionnellement au décès, la même structure de flux qu'une option de vente d'échéance la date du décès.

Cette étude valorise cette garantie à l'aide de techniques couramment utilisées en finance, en tirant partie des similitudes évoquées ci-dessus. Dans un premier temps, nous étudions la garantie dans le cas d'un contrat à support

<sup>1</sup> La loi de 1992, en abrogeant le dernier alinéa de l'article L-131-1, a supprimé l'obligation d'une garantie plancher, jugée contradictoire avec la notion d'unité de compte comportant risque financier pour le preneur d'assurance.

unique puis dans le cas du contrat multisupport. Nous nous penchons enfin sur la couverture dynamique de la garantie planchée proposée.

Les contrats d'assurance-vie de type "épargne-assurance" se divisent en deux grandes catégories, les contrats dits "en francs", et les contrats dits "en unités de compte".

### 1.1 Les contrats en francs

Ces contrats garantissent à leur bénéficiaire le versement à l'échéance d'une somme fixée. La traduction comptable de l'engagement net de l'assureur est une provision mathématique au passif de la société. Les sociétés d'assurance sont tenues d'ajouter une participation aux bénéfices tous les ans à cette provision. Le montant annuel de cette participation aux bénéfices fait l'objet de garanties minimales. Ces contrats comportent de plus un effet cliquet, c'est-à-dire que la participation aux bénéfices est définitivement acquise.

Si les taux montent, les assurés ont tendance à demander le rachat pour investir dans des placements plus rémunérateurs, et l'assureur doit assumer des moins-values. Si le niveau général des taux baisse, les assurés prolongent leur contrat. Si les taux initialement garantis étaient trop élevés, cela pose un problème à l'assureur qui ne peut plus investir dans des titres suffisamment rémunérateurs pour honorer ses engagements.

La possibilité pour le souscripteur de demander le rachat s'apparente à une option de type américain : l'exercice de celle-ci a lieu au moment que l'assuré estime lui être le plus favorable, et le moins favorable à l'assureur.

### 1.2 Les contrats "en unités de compte"

La devise de ce type de contrats est une valeur mobilière : le contrat garantit au bénéficiaire non plus une somme fixée mais un nombre de parts d'actifs (les articles L 131-1 et R 131 du code des assurances qui énumèrent les parts admissibles se trouvent en annexe). Ces actifs, les "supports", sont des parts de SCPI, de sicav monétaires, obligataires, actions ou diversifiées, fonds en francs ou titres de créance négociables. Les primes versées sur ces contrats sont investies au choix de l'assuré sur un certain nombre de supports de nature variées. Ces contrats, qui constituaient une alternative aux contrats en francs (principalement investis en obligations) ont connu un développement

important avec la baisse des taux et les hausses spectaculaires des principales bourses. Par ailleurs, la fiscalité favorise ces contrats puisque les prélèvements ne sont pas effectués chaque année mais au terme. De plus le durcissement de la fiscalité sur les revenus des contrats d'assurance-vie intervenue en 1977 (au minimum 50 % en actions dont au moins 5 % non cotées ou cotées au Nouveau Marché).

Depuis quelques années, les compagnies d'assurance ont développé leur offre de contrats en unités de compte dits "multisupport", à tel point qu'au premier trimestre 2000, les contrats en unités de compte ont représenté 55 % des nouvelles souscriptions de contrats d'assurance-vie. A la fin de l'année 1999, les provisions techniques des contrats en unités de compte représentaient 660 milliards de francs sur 3800 milliards d'encours total des contrats d'assurance-vie (source: Argus).

Comptablement, l'engagement de l'assureur est représenté au passif de la compagnie d'assurance par la provision mathématique. En adossant des parts dans lesquelles ont été investies les primes de l'assuré. Ainsi, si l'assuré souhaite mettre un terme à son contrat, le rachat par l'assureur de sa dette sur l'assuré ne présente aucune difficulté: l'assureur verse à l'assuré le produit de cessions des parts. Il en va différemment des contrats en francs, pour lesquels la valeur de réalisation des actifs et celle de la garantie évoluent indépendamment, ce qui fait peser un risque sur l'assureur.

### 1.3 Les garanties

Contrairement aux contrats en francs qui peuvent garantir un rendement minimum et font bénéficier les épargnants d'un effet cliquet, les contrats en unités de compte ne garantissent pas une valeur en francs mais un nombre d'unités de compte, leur valeur étant soumise aux fluctuations du marché. Certains contrats prévoient cependant des garanties en francs en cas de décès. Les garanties les plus fréquemment rencontrées sont les suivantes:

2 ans à part les risques qui peuvent apparaître du fait des clauses contractuelles qui définissent les dates de valeur des arbitrages, des rachats demandés par les assurés et du manque de liquidité de certaines unités de compte. Par ailleurs, les chargements et gestion sont effectués en pourcentage de l'encours variable. Cela fait naître un risque de prélèvements insuffisants. Ces aléas justifient l'existence d'une marge réglementaire de 1%.

- garantie plancher: le capital supplémentaire versé au titre de la garantie en cas de décès est égal à la différence (positive) entre les primes versées et la provision mathématique du contrat
- garantie majorée: le capital supplémentaire versé en cas de décès est égal à la différence (positive) entre un montant (supérieur aux primes versées) et la provision mathématique du contrat
- garantie de rendement: le capital supplémentaire versé en cas de décès est égal à la différence (positive) entre les primes versées revalorisées suivant un taux fixé par le contrat et la provision mathématique du contrat
- garantie indexée: le capital supplémentaire versé en cas de décès est égal à la différence (positive) entre les primes versées revalorisées suivant un taux variable fixé par le contrat (par exemple, le taux du livret A, le taux AGIRRC) et la provision mathématique du contrat
- garantie cliquet: le capital supplémentaire versé en cas de décès est égal à la différence (positive) entre la valeur la plus haute atteinte par la provision mathématique du contrat et sa valeur actuelle  
Chaque des garanties précédentes peut posséder les particularités suivantes:
- ne pas se limiter au décès mais être également proposée pour des risques d'invalidité ou de dépendance
- être obligatoire ou optionnelle
- être financée par des prélèvements soit fonctions du capital sous risque, soit fixés. Le premier type de prélèvement pose toutefois problème car d'après les articles L 132-5-1 et A-132-5 du code des assurances, les assurés doivent connaître les valeurs de rachats de leur contrat à la souscription. Dans le cas contraire, la faculté de renonciation de l'assuré est prorogée.
- cesser ou non au-delà d'un certain âge de l'assuré (cette limite varie entre 70 et 80 ans)
- cesser après une certaine durée (8 ans)

- Le capital décès en jeu peut être limité de manière absolue (par exemple 5 MF) ou relative (en proportion des versements, par exemple 20%)
- La prime correspondant à la garantie décès peut être calculée ex-ante ou ex-post, chaque mois, chaque trimestre ou chaque année. Elle peut être intégrée aux frais de gestion prélevés sur encours, être explicite, ou encore prélevée sur chaque prime
- La prime associée à la garantie plancher peut être constante quel que soit l'âge du souscripteur, varier par palier ou par âge

## Chapitre 2

### Le contrat en unités de compte à support unique

Dans cette section, nous supposons que le contrat d'assurance comporte un unique support risqué. Cela nous permet de ne pas considérer le problème des arbitrages opérés par les assurés. Nous supposons donc que l'intégralité de la prime versée est affectée à un support donné pendant toute la vie du contrat. De plus, nous évaluons les garanties dans le cadre idéal où une couverture peut être mise en oeuvre sans frais de transaction et où la loi des grands nombres permet de mutualiser les décès. Ces deux restrictions seront levées dans les chapitre 4 et 5.

#### 2.1 Garantie financée par une prime unique versée à l'origine

##### 2.1.1 Formalisation

L'assuré verse une somme  $K'$  à la compagnie d'assurance. La compagnie prélève des frais d'entrée et inscrit dans sa comptabilité une somme  $S_0 = K'(1 - f_a)$  au titre de la provision mathématique relative au contrat ( $f_a$  désigne le chargement d'acquisition en pourcentage de la prime). Selon les supports dans lesquels l'assuré aura choisi de placer cette somme, la provision mathématique, que nous noterons désormais  $S_t$ , évoluera au cours de la vie du contrat.

La garantie plancher stipule qu'en cas de décès de l'assuré, les bénéf.



$S = \text{ceci} \text{ } K = \text{prix} \text{ } K = \text{Prime investie}$   
 $\mu, \sigma, \lambda, \rho, \gamma, \delta$

claire du contrat recevront soit la provision mathématique du contrat, soit le montant des primes investies  $K$  si la provision mathématique est inférieure. Cette garantie coûte donc à l'assureur  $M_{act}(K - S_{i+1}, 0)$  lors du décès.

L'exercice de cette garantie reposant sur le décès du souscripteur, il n'y a pas de "choix" d'exercice. Il n'est donc pas adéquat de modéliser le coût de la garantie par des options américaines.

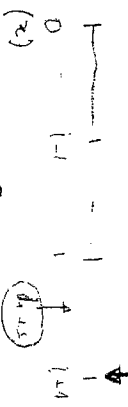
En revanche, on connaît à l'aide des tables de mortalité réglementaires (TD ou TV88/90) la probabilité de décès moyenne du souscripteur à chaque âge. S'agissant de contrats d'épargne, il serait logique de tarifier avec la TV (la garantie vie est prépondérante, la garantie plancher en cas de décès est une garantie annexe). Si en revanche la garantie plancher est optionnelle, il faut la tarifier à l'aide de la TD, en raison du phénomène d'antiselection commun en matière d'assurance. Les souscripteurs ayant le choix de souscrire cette garantie, ceux qui le font sont a priori ceux qui ont les plus fortes probabilités de décès. Nous supposons tout au long de l'étude que la garantie est optionnelle, et nous utilisons donc dans toutes les applications numériques la TD 88/90.

Nous supposons pour évaluer cette garantie que le portefeuille de l'assureur est suffisamment important pour que le risque de décès des assurés soit bien mutualisé, et qu'il soit indépendant des aléas financiers affectant la valeur des contrats. On doit ici faire intervenir la mutualisation des risques car il est impossible de se couvrir sur le marché contre le risque des décès. En effet, la garantie s'apparente à une option d'échéance aléatoire (indépendante de l'évolution des marchés). Il s'agit donc d'un risque en marché incomplet, qu'il est impossible de couvrir par des techniques d'arbitrage.

Si un souscripteur à l'âge  $x$  décède entre la  $i$ -ème et la  $i+1$ -ième année (par souci de simplification nous supposons que le capital  $d_n$  à l'assuré est calculé sur la base de la valeur de la provision mathématique à la fin de l'année du décès), le coût de la garantie pour l'assureur s'élève à<sup>1</sup>:

$$C_t = M_{act}(K - S_{i+1}, 0)$$

<sup>1</sup>En fait, il faudrait pour être plus rigoureux faire un découpage plus fin. En effet, l'assureur paie le bénéficiaire au moment du décès de l'assuré et sur la base de la valeur de la provision mathématique à cet instant, et non pas en fin d'année. En pratique, nous ne disposons que de la probabilité de décès sur un an, et comme nous travaillons sur des horizons qui peuvent aller jusqu'à 60 ans, il est raisonnable de ne découper que par périodes annuelles. En fait, si on suppose que les décès sont uniformément répartis sur l'année, on aurait une valeur plus proche en multipliant la probabilité de décès sur l'année par la moyenne de la valeur des puits dont l'échéance est comprise entre  $i$  et  $i+1$ .



Cette valeur est payée à la date  $t+1$ , la probabilité de décès à cette date est connue, donc la valeur actuelle de la garantie est la probabilité multipliée par le prix d'une option de vente dont le prix d'exercice est  $K$  et l'échéance  $t+1$ . Pour un contrat donné, et une souscription en  $t=0$ , la valeur actuelle probable du coût de la garantie pour l'assureur est donc:

$$GAR = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{1+i} P_{act}(i+1, K, X) \quad P_{act}(i+1, K, X) = S_0 = K$$

( $d_x$  désigne le nombre moyen de décès dans l'année dans un groupe assuré d'âge  $x$ ,  $1_x$  désigne le nombre de survivants de ce groupe à l'âge  $x$ ) avec  $P_{act}(t, K, S)$  le prix de l'option de vente en  $t$  au prix déterminé  $K$  sachant que le prix en 0 est  $S = K$ . On peut noter que l'évaluation du put tient compte de l'actualisation des flux.

Le point crucial de l'étude sera donc l'évaluation d'options de vente sur longue période.

Il est naturel de valoriser ces options par arbitrage. Le vendeur de l'option peut s'immuniser complètement du risque lié à celle-ci en construisant une stratégie dynamique contenant de l'actif risqué et de l'actif non risqué. Il importe donc pour que ces méthodes soient valables qu'à la fois l'actif risqué et l'actif non risqué soient négociés. La réglementation est sensée garantir la liquidité de l'ensemble des placements représentatifs. Si certains supports, notamment de type "actions" sont des titres librement négociables et liquides, c'est moins le cas pour les unités de compte immobilières ou constituées de supports en francs (dans ce cas toutefois, le risque repose sur la gestion des contrats en francs qui garantissent souvent un rendement minimum).

### 2.1.2 Valorisation par le modèle de Black & Scholes

Le modèle de valorisation d'options par arbitrage le plus connu a été construit par Black & Scholes (1973). Ce modèle suppose que la dynamique de l'actif sous-jacent à l'option est:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- avec:
- $\mu$  le rendement moyen de l'actif.

- $\sigma$  sa volatilité.
- $W_t$  un mouvement brownien standard.

On introduit la probabilité risque-neutre  $Q$ , telle que:  $dW_t = dW_t^Q - \frac{\mu - r}{\sigma} dt$   
 La dynamique de  $S$  sous cette probabilité est donc:

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW_t^Q$$

Le prix aujourd'hui de l'option permettant de vendre l'actif  $S$  au prix  $K$  à la date  $t$  (Put d'échéance  $t$  et de prix d'exercice  $K$ ) est la valeur actualisée de l'espérance du payoff de l'option sous la probabilité risque-neutre<sup>2</sup>:

$$Put(K, t, S) = e^{-rt} E^Q \{ (K - S_t)_+ \}$$

On a donc, avec  $r$  désignant le taux sans risque:

$$Put(K, t, S) = K \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

avec:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S_0/K) + r \pm \frac{\sigma^2}{2} t}{\sigma \sqrt{t}}$$

Une telle modélisation n'est pas très satisfaisante en ce qui concerne les options que nous cherchions à évaluer. Elle est utilisée sur les marchés financiers pour valoriser des options d'échéance proche, pour lesquelles on peut supposer que le taux sans risque et la volatilité sont constants sur la période considérée. Les résultats que nous obtiendrons en utilisant ce modèle présentent l'avantage d'être obtenus très rapidement, et pourront néanmoins nous donner un ordre de grandeur du prix de la garantie et des principaux effets attendus.

<sup>2</sup> La notation  $(x)_+$  désigne le max de 0 et de  $x$ .

### 2.1.3 Influence des différents paramètres Les frais de gestion

Les compagnies d'assurance prélèvent sur l'encours de ce type de contrat un chargement annuel. Ce chargement s'exprime en pourcentage de la provision mathématique. Nous savons donc déjà que dans  $t$  années, la provision mathématique sera égale à  $S_t \cdot (1 - \beta)^t$ , où  $\beta$  est le taux de prélèvement annuel.



Pour intégrer ce chargement dans les calculs, les options que nous devons calculer ne portent plus sur  $S_t$ , mais sur  $S_t \cdot (1 - \beta)^t$ .

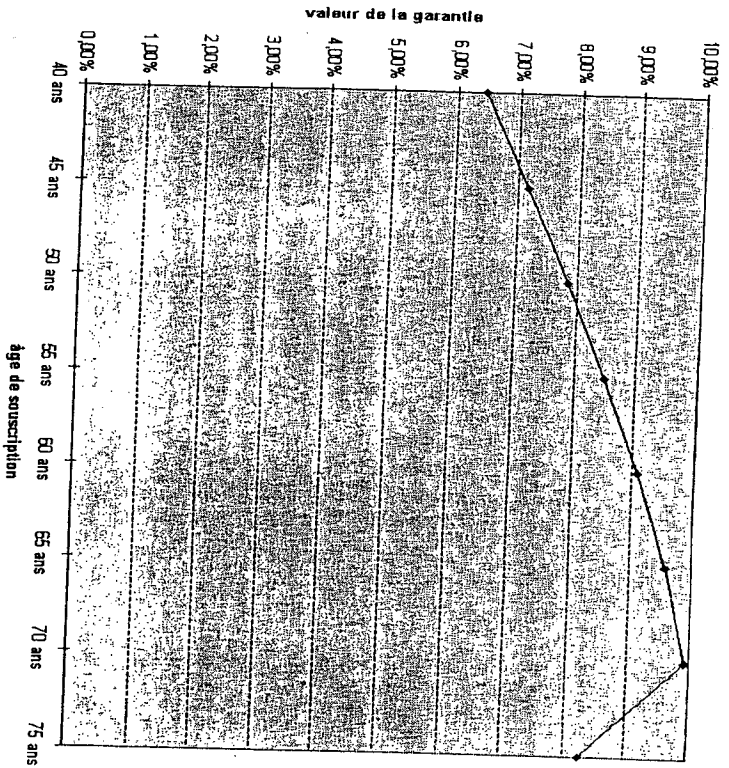
*NO surprendre le prix de la garantie plancher*

Tous les calculs sont menés en supposant que les contrats supportent un chargement de 0.5%. Ce montant est proche des taux pratiqués sur le marché. Les frais de gestion ont une importance primordiale sur la valeur de la garantie, puisqu'ils diminuent la valeur de la provision mathématique alors que la garantie reste inchangée. Il existe cependant des contrats qui ne garantissent pas le chargement, c'est-à-dire tels que le montant garanti ne cas de décès diminue à chaque prélèvement. C'est souvent sur ce prélèvement annuel que les sociétés d'assurance financent les garanties plancher qui sont exercées.

*Le chargement est sur  $S_t \cdot (1 - \beta)^t$  par rapport à  $(K - S_t \cdot (1 - \beta)^t)_+$*

#### L'âge d'entrée de l'assuré

Il est évident que la probabilité de décès annuelle des assurés est d'autant plus forte qu'ils souscrivent un contrat à un âge avancé. Le prix de la garantie s'estimant comme une somme de puts pondérés par la probabilité de décès à l'échéance, elle est maximale quand la valeur maximale du put coïncide avec la valeur maximale de la probabilité de décès. Pour des valeurs de  $r$  et  $\sigma$  de 3% et 20% respectivement, la valeur maximale du put est obtenue pour des échéances de 7 à 10 ans. Il en résulte que la garantie est maximale pour un âge d'entrée autour de 70 à 75 ans, car l'espérance de vie résiduelle est alors de l'ordre de 7 à 10 ans.



Valeur de la garantie selon l'âge pour  $r = 3\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $f.g. = 0$

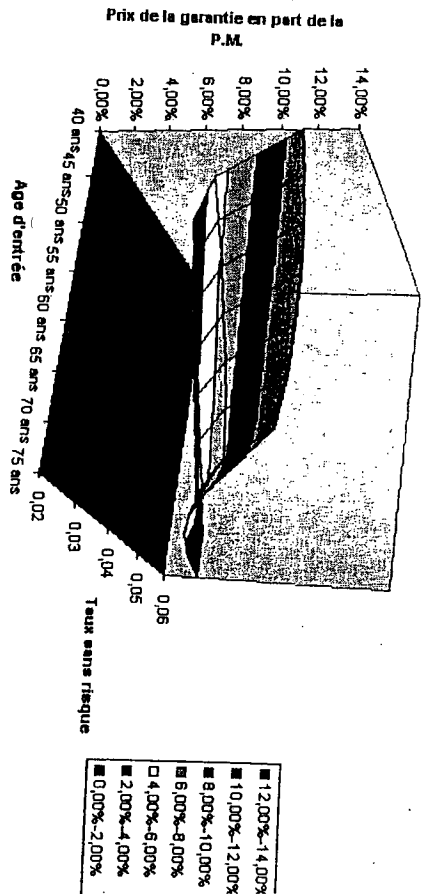
### Le taux sans risque

La valeur du taux sans risque utilisé pour les calculs a une influence très forte sur la valeur de la garantie. Quelque soit la valeur de la volatilité, on constate que la valeur de la garantie est très élevée pour des taux faibles : elle atteint même 30 % des primes pour un taux de 2 %. Le taux  $r$  qui intervient dans le modèle de Black & Scholes est le taux court, car la valorisation par arbitrage implique de pouvoir arbitrer à chaque instant entre l'actif sans risque et l'actif

*plus le  $r$  est bas, plus on a de chances que  $S_t$  ne soit pas beaucoup plus et soit même inférieur à  $K$*

*donc pour le  $r$  retenu dans le modèle, plus le taux de la garantie est*

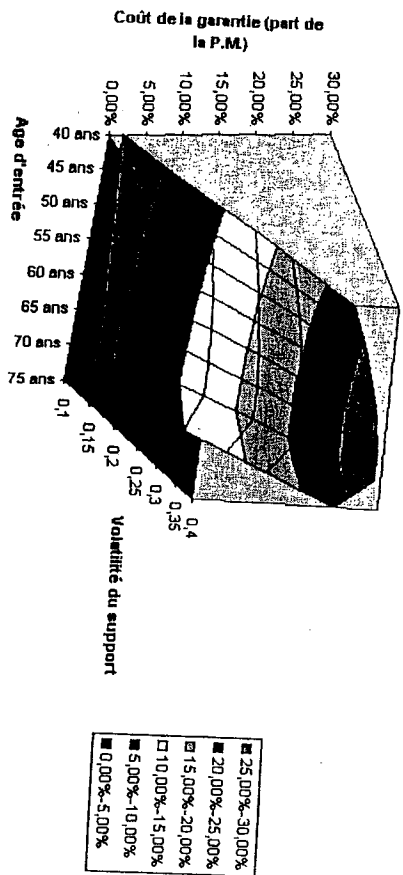
risqué. Le taux court ayant, sur les 18 derniers mois, évolué entre 2.75 et 4 %, il importe de choisir un taux court de référence assez bas pour évaluer la valeur de la garantie avec prudence.



Garanties plancher en fonction de l'âge d'entrée et du taux sans risque ( $\sigma = 0,15$ )

### La volatilité du support

Quelque soit l'âge d'entrée dans l'assurance, la volatilité a une influence quasi inébranlable sur le coût de la garantie.



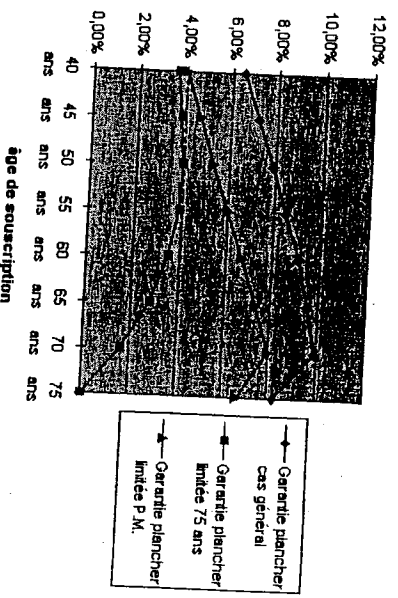
Garantie plancher en fonction de la volatilité et de l'âge d'entrée ( $r = 0,03$ )

### Les limitations de garanties

Certaines compagnies limitent la garantie plancher à un âge donné (le plus souvent 75 ans) ou à la valeur de la provision mathématique. Dans ce cas, si la provision mathématique chute, le remboursement au delà de la provision mathématique sera, par exemple, le minimum entre les primes investies et deux fois la valeur de la provision mathématique. Ces limites permettent de réduire substantiellement le coût de la garantie.

## 2.2 Garantie financée par un prélèvement annuel sur encours

Influence des limitations de garantie ( $r = 3\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $f.g. = 0\%$ )



Les chargements sur contrats d'assurance vie sont de deux types : chargement initial, dit d'acquisition, prélevé en pourcentage de la prime au moment du versement de celle-ci, et chargement annuel, prélevé à la date anniversaire du contrat en pourcentage de la provision mathématique.

La question de la tarification de la garantie plancher en cas de décès se pose : doit-on prélever un chargement unique lors de l'acquisition, ou dans le cadre d'un chargement unique destiné à couvrir la garantie? Cette prime pour se couvrir contre le risque de dépréciation de l'unité de compte. C'est ce type de tarification que nous avons étudié dans la partie précédente. Nous supposons dans cette partie que l'entreprise finance la garantie plancher par un prélèvement annuel sur l'encours.

Nous noterons  $\alpha$  le taux de prélèvement annuel au titre de la garantie plancher et  $\beta$  le taux de prélèvement au titre des frais de gestion.

Pour un décès entre  $N$  et  $N + 1$ , le coût à la charge de l'assureur sera :

$$Gar N = (K - S_{N+1}(1 - (\beta + \alpha))^{N+1})_+ - \sum_{k=0}^N \alpha S_k e^{r(N+1-k)}$$

En fait, il s'agit de la somme du payoff décrit plus tôt, minorée de la valeur actualisée à la date  $N+1$  des prélèvements effectués sur l'encours de ce contrat. Le décès étant irréversible, l'assuré qui décède entre  $N$  et  $N+1$  aura payé ses frais de gestion jusqu'à la date  $N$ .

La valeur aujourd'hui de cette garantie est (on suppose toujours la date du décès, entre  $N$  et  $N+1$ , déterministe):

$$V_N = e^{-r(N+1)} \left[ E^Q \left( (K - S_{N+1}(1 - (\beta + \alpha)^{N+1}))_+ \right) - E^Q \left( \sum_{k=0}^N \alpha S_k e^{r(N+1-k)} \right) \right]$$

avec  $Q$  la probabilité risque neutre et  $K = S_0$ .

Cette égalité s'écrit plus simplement:

$$V_N = Put(S_0(1 - (\beta + \alpha)^{N+1}), K, r, \sigma, N + 1) - \alpha E^Q \left( \sum_{k=0}^N S_k e^{-rk} \right)$$

Or le processus des prix actualisés est une martingale sous la probabilité risque-neutre:

$$E^Q (S_k e^{-rk}) = E^Q (e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)k + \sigma W_k} S_0 e^{-rk}) = S_0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_N(\alpha) &= Put(S_0(1 - (\beta + \alpha)^{N+1}), K, r, \sigma, N + 1) - \alpha \left( \sum_{k=0}^N S_0 \right) \\ &= Put(S_0(1 - (\beta + \alpha)^{N+1}), K, r, \sigma, N + 1) - \alpha \cdot (N + 1) \cdot S_0 \end{aligned}$$

Tout se passe donc comme si les prélèvements étaient effectués aujourd'hui. En fait, la valorisation de la garantie suppose une gestion dynamique. En particulier, l'assureur doit emprunter une quantité de titres ( $N + 1$ ),  $\alpha$ , qu'il vend pour obtenir la somme  $\alpha \cdot (N + 1) \cdot S_0$ ; il remboursera progressivement les titres empruntés grâce aux prélèvements.

La mutualisation des décès permet encore d'écrire la valeur actuelle probable de la garantie pour un assuré d'âge  $x$  ( $\omega$  désigne la durée maximale de la vie humaine):

$$\begin{aligned} Gar_x(\alpha) &= \sum_{i=0}^{\omega-x} V_i(\alpha) \frac{v^{i+1}}{L_x} \\ &= \sum_{i=0}^{\omega-x} Put(S_0(1 - (\alpha + \beta)^{i+1}), K, r, \sigma, i + 1) \frac{v^{i+1}}{L_x} - \alpha S_0 \sum_{i=0}^{\omega-x} (i + 1) \frac{v^{i+1}}{L_x} \end{aligned}$$

La recette obtenue grâce au prélèvement,  $\alpha S_0 \sum_{i=0}^{\omega-x} (i + 1) \frac{v^{i+1}}{L_x}$ , s'interprète comme le produit entre le montant prélevé la première année ( $\alpha S_0$ ) et l'espérance de vie résiduelle du contrat. Dans la mesure où on choisit  $\alpha$  tel que  $Gar(\alpha) = 0$ , on pourrait penser à établir une règle de correspondance entre le prélèvement initial et le prélèvement annuel nécessaires pour financer la totalité de la garantie: le prélèvement annuel est égal au prélèvement initial divisé par la durée de vie résiduelle du contrat. Pourtant, cette règle n'est pas complètement exacte: dans le cas où la garantie est financée par un prélèvement annuel effectué sur l'encours, la valeur des puits devient un peu plus élevée puisque le même montant a été garanti alors que l'encours a diminué du fait du prélèvement.

Avec de telles spécifications, le coût effectivement à la charge de l'assureur est important si l'assuré décède dans les premières années du contrat, il devient ensuite négatif après une dizaine d'années...

### 2.2.1 Tarification différenciée selon l'âge

Le taux naturel de tarification selon l'âge  $\alpha_x$  est tel que:

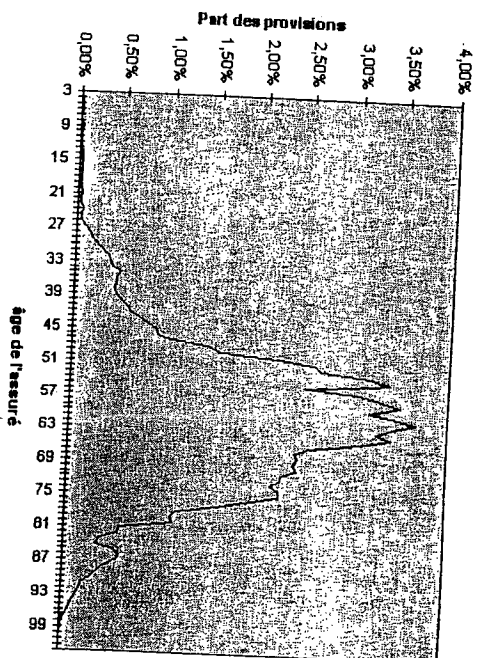
$$Gar_x(\alpha_x) = 0$$

En pratique, l'assureur peut difficilement imposer des taux de tarification différenciés selon l'âge, à la fois en raison des difficultés de gestion et de la complexité qu'engendreraient des versements à des dates très espacées sur un même contrat. Le tableau ci-dessous résume les valeurs de  $\alpha_x$  pour  $r = 3\%$ ,  $\sigma = 20\%$  et  $\beta = 0.5\%$ .

Age	coût de la garantie sans prélèvements	$a_x$
40	7.65 %	0.23 %
45	8.38 %	0.29 %
50	9.09 %	0.37 %
55	9.74 %	0.48 %
60	10.3 %	0.62 %
65	10.75 %	0.81 %
70	11.02 %	1.07 %
75	11.04 %	1.45 %

On constate donc que le taux de prélèvement varie beaucoup plus en fonction de l'âge que le coût de la garantie. Les prélèvements deviennent même prohibitifs aux âges élevés : le coût élevé de la garantie à ces âges ne peut être financé que par un nombre limité de prélèvements. C'est pourtant à ces âges que les assurés investissent le plus dans les contrats d'assurance-vie en raison du régime fiscal concernant les successions. En pratique, l'assureur cherchera un tarif d'équilibre en fonction de la structure par âge d'entrée de son portefeuille. La garantie se financera par subventions croisées entre les générations : les plus jeunes, pour lesquels la valeur de la garantie est faible, subventionneront les plus âgés, pour lesquels cette valeur est élevée. Le tarif d'équilibre va donc fortement dépendre de la structure par âge du portefeuille de l'assureur.

Pour prendre en compte la répartition des versements selon les âges, nous avons obtenu les provisions mathématiques d'un contrat actuellement sur le marché, dont l'encours est de 8 milliards de francs. La répartition des provisions mathématiques par âge est :



En toute rigueur, il nous faudrait la répartition par âge des versements et non pas de la provision mathématique ou de la souscription. Le portefeuille concerné étant relativement jeune (commercialisé depuis une dizaine d'années), les répartitions de l'âge des versements et de l'âge des souscriptions ne sont pas très différentes, surtout si on suppose que les contrats sont en grande partie alimentés par une prime unique versée à la souscription. Les coefficients de pondération par une prime unique versée à la souscription. Les sont donc les suivants :

Âge	Coefficient de pondération
25	0.7 %
30	1.2 %
35	2.1 %
40	2.7 %
45	4.6 %
50	10.6 %
55	15.2 %
60	17 %
65	14.9 %
70	11.9 %
75	9.9 %
80	9.3 %

Si l'on reprend les paramètres précédents, le prélèvement annuel d'équibre est de 0.6 %. Si on panache prélèvement initial et prélèvement annuel, on obtient, pour un taux de prélèvement annuel de 0.4 %, un prélèvement initial d'équilibre est de 2.9 %. L'assureur compense alors les pertes subies pour des entrées à un âge élevé par des gains sur les jeunes.

## 2.2.2 La prise en compte des chutes

Il serait à la fois irrealiste de supposer que les assurés resteront présents jusqu'au décès et imprudent d'anticiper un trop grand nombre de départs (du moins si l'on étudie le coût global de la garantie, sans prélèvements annuels). D'une manière générale, les départs (appelés chutes) vont abaisser le prix global de la garantie puisqu'elle n'est versée qu'au décès d'un assuré encore présent. La prise en compte des chutes a cependant un effet ambigu dans le cas de prélèvements annuels servant à financer la garantie: la diminution du coût global est à comparer à la diminution des recettes consécutives aux départs.

Dans ce qui suit, nous noterons  $\tau(i, S_i, \beta, S_0, r, \sigma, x)$  le taux de départ. La décision de départ sera motivée par la volonté de l'assuré d'utiliser son épargne (cette utilisation peut avoir été planifiée ou résulter d'un événement aléatoire) ou la perspective d'un placement plus rémunérateur (les caractéristiques mêmes du contrat multisupport qui permet de choisir entre diverses

catégories d'actifs rendent cette hypothèse peu probable). Elle sera influencée par l'âge de l'assuré, par la fiscalité, qui pénalise les départs trop rapides, par les performances du contrat, rendant la garantie plancher plus ou moins intéressante. L'état de santé de l'assuré n'est pas observable sans coût par on peut s'attendre à une corrélation négative entre une résiliation et un décès rapide. Nous supposons malgré tout par la suite que ce taux ne dépend que de l'âge  $i$  du contrat et nous le noterons  $\tau_i$ . Cela revient à prendre en compte principalement la fiscalité, qui dépend de l'âge du contrat<sup>3</sup>.

La probabilité d'être encore présent au début de l'année  $N$  s'écrit maintenant:  $\prod_{s=0}^{N-1} (1 - \tau_s)$

Pour chaque contrat présent en début d'année  $i$ , l'assureur paiera au titre de la garantie  $P_{ut}(i+1)$  avec la probabilité  $\prod_{s=i}^{i+1} (1 - \tau_s)$  et reçoit  $\alpha \cdot S_0$  avec une probabilité 1<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Les contrats subissent en effet des prélèvements sociaux de 10% et un prélèvement forfaitaire libératoire au titre de l'impôt sur le revenu de 35% jusqu'au quatrième anniversaire du contrat, puis de 15% jusqu'au huitième anniversaire.

<sup>4</sup> On pourrait retrouver cette formule en suivant la même logique que dans la partie précédente. Pour un assuré présent en début d'année  $N$ ,

- il demande le rachat avec une probabilité  $\tau_N$ . Dans ce cas, la garantie rapporte sur l'ensemble de la vie du contrat (en montant actualisé en 0)  $\alpha \cdot (N+1) \cdot S_0$ , et n'a rien coûté.

- il ne demande pas le rachat mais meurt avec la probabilité  $(1 - \tau_N) \prod_{s=i}^{i+N} (1 - \tau_s)$ . Dans ce cas, la garantie rapporte sur l'ensemble de la vie du contrat  $\alpha \cdot (N+1) \cdot S_0$ , et coûte (actualisé en 0):  $P_{ut}(i+1)$

- il ne demande pas le rachat et ne meurt pas avec la probabilité  $1 - (1 - \tau_N) \prod_{s=i}^{i+N} (1 - \tau_s)$ . A cet instant, la garantie ne rapporte rien et ne coûte rien.

Le coût net des frais pour un assuré présent en  $N$  est donc:

$$V_N(\alpha) = (1 - \tau_N) \cdot \prod_{s=i}^{i+N} (1 - \tau_s) [P_{ut}(S_0(1 - (\beta + \alpha))^{N+1}, K, r, \sigma) - \alpha(N+1)S_0] - \tau_N \cdot \alpha(N+1) \cdot S_0$$

La valeur actuelle probable de la garantie pour un assuré d'âge  $x$  s'écrit alors, après réarrangements (en allégeant les notations pour les puifs):

$$Gar_x(\alpha) = \sum_{i=0}^{x-x} V_i(\alpha) \prod_{s=0}^{i-1} (1 - \tau_s)$$

La valeur de la garantie est alors :

$$Gar_x(\alpha) = \sum_{i=0}^{u-x} \frac{l_{x+i}}{L_x} \cdot \left( \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \tau_j) \right) \cdot \left[ \frac{G_{x+i}}{L_{x+i}} \cdot (1 - \tau_i) \cdot Put(S_0(1 - (\beta + \alpha))^{i+1}, K, \tau, \sigma) - \alpha \cdot S_0 \right]$$

soit, avec  $t$  constant, et en allégeant les notations pour les puts :

$$Gar_x(\alpha) = \sum_{i=0}^{u-x} \frac{l_{x+i}}{L_x} \cdot (1 - \tau)^i \cdot \left[ \frac{G_{x+i}}{L_{x+i}} \cdot (1 - \tau) \cdot Put(i+1) - \alpha \cdot S_0 \right]$$

Pour un taux de chute de 10 % par an, on obtient les résultats suivants :

Âge	coût sans chute	coût avec chute
40	-5.63 %	-3.06 %
45	-3.08 %	-2.68 %
50	-0.65 %	-2.18 %
55	1.59 %	-1.57 %
60	3.61 %	-0.83 %
65	5.40 %	0.07 %
70	6.88 %	1.18 %
75	7.95 %	2.42 %

(Les signes moins signifient que l'assureur gagne de l'argent sur la garantie s'il tarifie avec le taux de prélèvement correspondant)

$$\sum_{i=0}^{u-x} \frac{G_{x+i}}{L_x} \cdot [Put(i+1) - \alpha \cdot (i+1) \cdot S_0] \cdot \left( \prod_{j=0}^i (1 - \tau_j) \right)$$

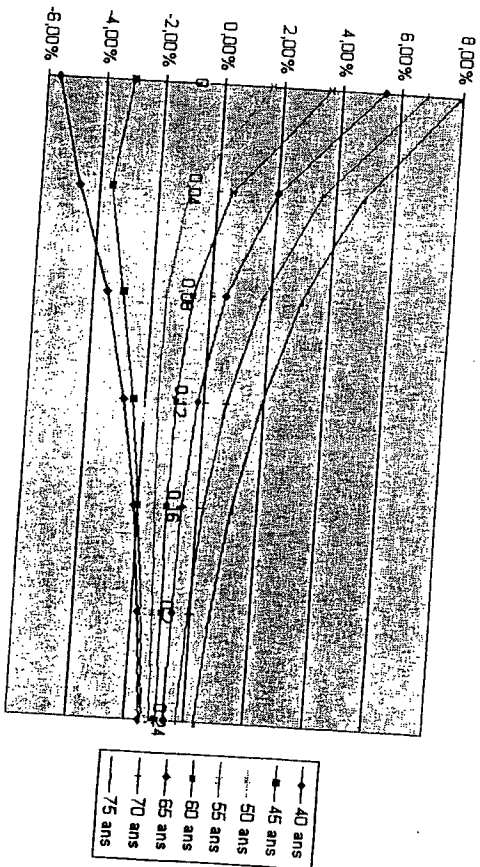
$$- \sum_{i=0}^{u-x} \frac{l_{x+i}}{L_x} \cdot \left( \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \tau_j) \right) \cdot \tau_i \cdot \alpha \cdot (i+1) \cdot S_0$$

L'impact des départs peut être étudié plus facilement en prenant un taux de chute constant  $\tau$ , la valeur de la garantie est alors :

$$Gar_x(\alpha) = \sum_{i=0}^{u-x} [Put(i+1) \cdot (1 - \tau) - \alpha \cdot S_0 \cdot (i+1)] \cdot \frac{G_{x+i}}{L_x} \cdot (1 - \tau)^i - \sum_{i=0}^{u-x} \frac{l_{x+i}}{L_x} \cdot \tau \cdot \alpha \cdot (i+1) \cdot S_0 \cdot (1 - \tau)^{i-1}$$

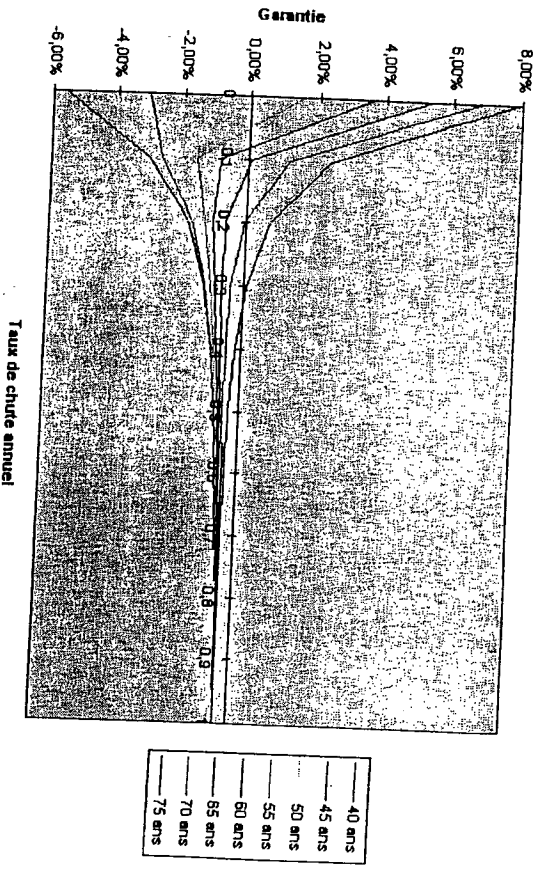
Cette formule, assez lourde, est après réarrangements celle du texte.

Le coût moyen est à présent de -0.83 %.  
Le graphique suivant représente la valeur de la garantie par âge pour différents taux de chute.



Garantie selon le taux de chute annuel uniforme



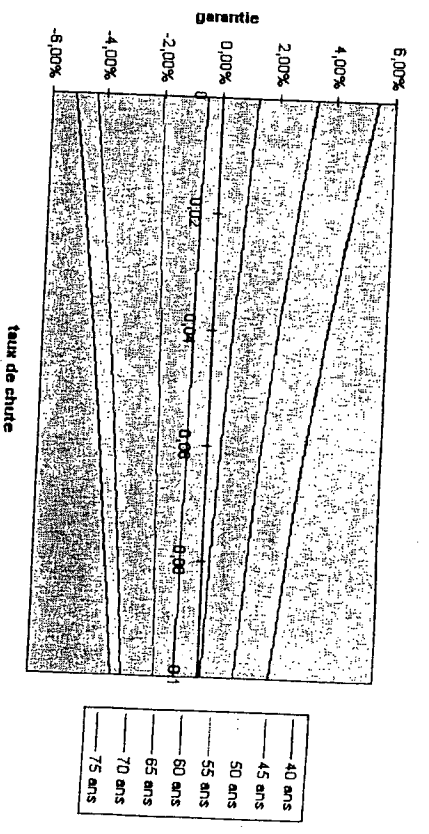


Convergence de la garantie vers - 0.4 % pour  $\tau > 1$  (valeur du prélèvement initial)

Pour les versements à un âge relativement bas (moins de 50 ans), la prise en compte d'un taux de chute réaliste augmente la valeur de la garantie. Il ne serait donc pas prudent de négliger celles-ci.

Les différences entre les âges se réduisent au fur et à mesure que le taux de chute utilisé dans les calculs augmente : les assurés jeunes cotisent plus chers car ils cotiseront moins longtemps, alors que les plus âgés partiront souvent d'entrée uniformes pour le financement de la garantie plancher. Pour  $\tau \rightarrow 1$ , la valeur de la garantie converge vers la valeur du prélèvement initial.

Les contrats d'assurance-vie bénéficient d'une fiscalité attractive, notamment au bout de 8 ans. Il est donc réaliste d'envisager un taux de départ de 10 % après 8 ans, mais plus faible auparavant. Le graphique suivant résume l'influence de ce dernier taux sur la valeur de la garantie.



Valeur de la garantie selon le taux de chute des 8 premières années

Cette fois, le prix de la garantie est croissant avec le taux de chute des 8 premières années pour tous les contrats souscrits avant 60 ans. La prudence impose donc de considérer des hypothèses réalistes de chutes pour les jeunes.

Les entrants âgés, en revanche, s'ils ne partent pas au cours des premières années, pour lesquelles leur taux de mortalité est élevé, cotisent relativement plus cher que pour un taux de chute uniforme à 10 %.

### 2.3 Autres garanties en francs en cas de décès

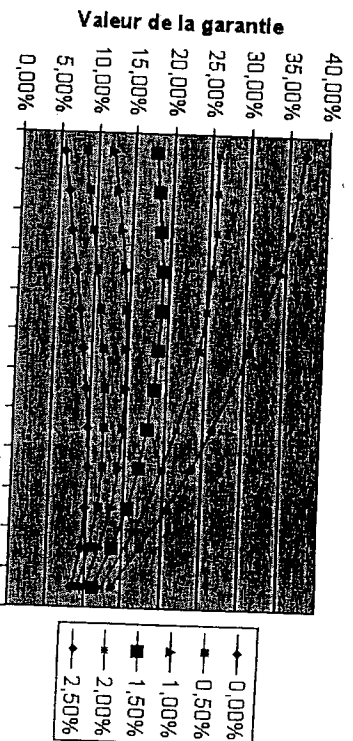
Certains contrats accordent des garanties différentes en cas de décès de l'assuré. On rencontre principalement trois autres types de garanties, que nous étudions succinctement dans cette partie. Toutes ces garanties sont intéressantes pour l'assuré, car elles permettent d'allier le dynamisme d'un contrat multisupport investi en actifs a priori rentables à des garanties en cas de décès importantes. Ces garanties sont d'autant plus intéressantes pour les assurés qui décident d'investir dans ce type de contrat pour bénéficier du régime successoral favorable de l'assurance-vie.

### 2.3.1 La garantie de rendement

Le montant minimum garanti en cas de décès est le montant des primes indexé chaque année selon un taux prévu dans le contrat. Le calcul est analogue à celui mené dans les parties précédentes, à ceci près que le strike de l'option relative à l'échéance  $t$  n'est plus  $K$  mais  $K(1+i)^{t-1}$ ,  $i$  désignant le taux annuel d'indexation de la garantie. Selon le niveau du taux  $i$ , on obtient les valeurs de garantie suivantes : ( $r = 0.03$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $f.g. = 0.5\%$ )

Âge \ Taux d'indexation	0 %	0.5 %	1 %	1.5 %	2 %	2.5 %	2.5 % avec chutes
25 ans	5.5 %	8.2 %	12.1 %	17.8 %	25.8 %	36.9 %	5.7 %
30 ans	6.2 %	8.9 %	12.8 %	18.3 %	25.9 %	36.2 %	6.6 %
35 ans	6.9 %	9.6 %	13.5 %	18.7 %	25.8 %	35.2 %	7.6 %
40 ans	7.6 %	10.3 %	14.1 %	19.0 %	25.5 %	33.9 %	8.6 %
45 ans	8.3 %	11.0 %	14.5 %	19.1 %	24.9 %	32.4 %	9.7 %
50 ans	8.9 %	11.5 %	14.8 %	18.9 %	24.1 %	30.6 %	10.6 %
55 ans	9.4 %	11.8 %	14.8 %	18.5 %	23.0 %	28.4 %	11.4 %
60 ans	9.8 %	12.0 %	14.6 %	17.8 %	21.6 %	26.1 %	12.0 %
65 ans	10.0 %	11.9 %	14.1 %	16.8 %	19.9 %	23.5 %	12.3 %
70 ans	9.9 %	11.5 %	13.3 %	15.4 %	17.9 %	20.6 %	12.3 %
75 ans	9.3 %	10.6 %	12.0 %	13.5 %	15.3 %	17.2 %	11.5 %
80 ans	8.2 %	9.1 %	10.0 %	11.1 %	12.2 %	13.5 %	10.0 %
moyenne	9.23 %	11.2 %	13.7 %	16.7 %	20.3 %	24.8 %	11.2 %

Le surcoût impliqué par l'indexation des primes versées est la plupart du temps décroissant en fonction de l'âge. Le surcoût est fortement lié à la durée de vie résiduelle du contrat.



Garantie selon le taux d'indexation

En intégrant 4 % de chutes tout le long de la vie du contrat, le prix de la garantie devient plus supportable, mais il reste extrêmement élevé.

### 2.3.2 La garantie majorée

La garantie est alors le montant des primes majoré selon un taux fixé dans le contrat. Le calcul est là encore identique aux calculs précédents, mais en remplaçant  $K$  par  $K \cdot i$ , où  $i$  désigne le taux de majoration de la garantie. Selon le niveau de  $t$ , nous obtenons les valeurs suivantes pour la garantie : ( $r = 0.03$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $f.g. = 0.5\%$ )

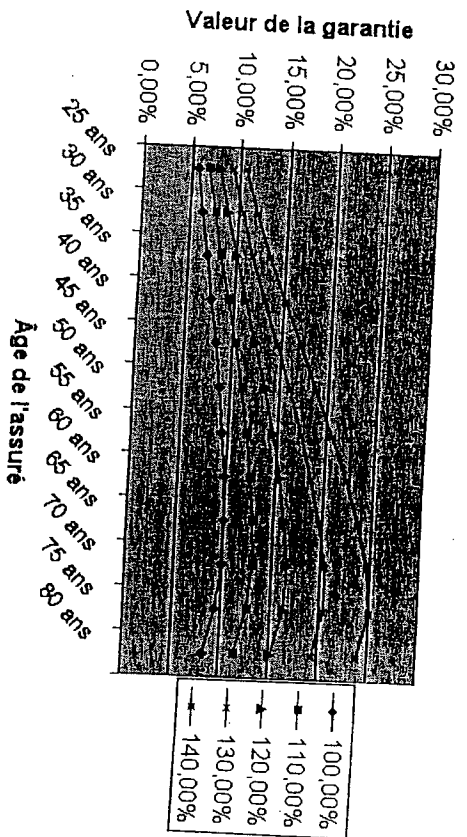


Figure 2.1: Garantie selon le taux de majoration

Âge \ Taux d'indexation	100 %	110 %	120 %	130 %	140 %
25 ans	5.5 %	6.6 %	7.9 %	9.1 %	10.5 %
30 ans	6.2 %	7.5 %	8.9 %	10.3 %	11.9 %
35 ans	6.9 %	8.3 %	10.0 %	11.7 %	13.5 %
40 ans	7.6 %	9.3 %	11.1 %	13.1 %	15.2 %
45 ans	8.3 %	10.2 %	12.3 %	14.6 %	17.0 %
50 ans	8.9 %	11.1 %	13.6 %	16.1 %	18.9 %
55 ans	9.4 %	11.9 %	14.6 %	17.5 %	20.6 %
60 ans	9.8 %	12.5 %	15.5 %	18.8 %	22.2 %
65 ans	10.0 %	12.9 %	16.2 %	19.8 %	23.6 %
70 ans	9.9 %	13.1 %	16.6 %	20.6 %	24.8 %
75 ans	9.3 %	12.6 %	16.4 %	20.6 %	25.0 %
80 ans	8.2 %	11.5 %	15.2 %	19.4 %	24.0 %
moyenne	9.2 %	11.9 %	14.9 %	18.2 %	21.8 %

Selon le taux de majoration des primes, la garantie varie beaucoup : pour

une majoration de l'ordre de 30 %, la garantie est approximativement multipliée par 2. Le fait de garantir en cas de décès plus que le montant des primes initiales peut rapidement coûter très cher à l'assuré : la garantie coûte autour de 15 % à tout âge pour un taux de majoration de 25 %.

### 2.3.3 La garantie cliquet

La garantie cliquet garantit en cas de décès la plus haute valeur atteinte par la provision mathématique au cours de la vie du contrat. Le calcul optionnel est alors plus difficile que dans les cas précédents. La garantie s'exprime toujours :

$$GAR = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{i+1}}{l_x} PutCliquet(i+1, K, K)$$

La notation *PutCliquet* ne désigne plus un put classique mais un put "de strike variable" :  $M_t^S = \max(S_t, t \in [0, T])$ . Le calcul d'un put d'échéance  $T$  et de payoff  $(M_T^S - S_T)^+$  est effectué<sup>3</sup> dans Musiela-Rutkowski (1993) :

$$Put_0(T, S_0, K) = -S_0 \cdot N(-d) + e^{-rT} N(-d + \sigma\sqrt{T}) + \frac{\sigma^2}{2r} N(d) - e^{-rT} \frac{\sigma^2}{2r} N(-d + \sigma\sqrt{T})$$

avec  $d = \frac{(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}$

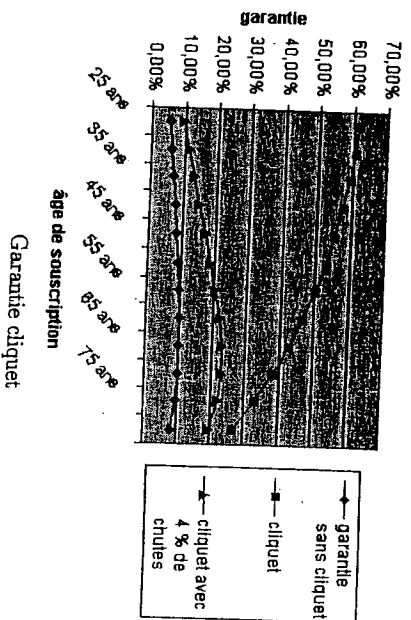
L'application de cette formule donne, selon l'âge, les résultats suivants : ( $r = 0.03, \sigma = 0.2, f.g. = 0$ )

<sup>3</sup>Ce type d'options est appelé options lookback en anglais.

Âge	cliquet sans chute	cliquet avec 4 % de chutes
25 ans	61,3 %	9,6 %
30 ans	60,2 %	11,2 %
35 ans	59,1 %	13,0 %
40 ans	57,4 %	14,9 %
45 ans	55,4 %	16,9 %
50 ans	53,0 %	18,8 %
55 ans	50,0 %	20,5 %
60 ans	46,5 %	21,8 %
65 ans	42,7 %	22,8 %
70 ans	38,2 %	23,1 %
75 ans	32,7 %	22,1 %
80 ans	26,3 %	19,6 %
moyenne	44,2 %	20,6 %

On constate donc que le prix d'une telle garantie est à tout âge rédhible : cette garantie vaut plus de 60 % de la provision mathématique pour les plus jeunes et vaut encore plus de 25 % à 80 ans ! Le prix de la garantie est décroissant en fonction de l'âge. En effet, le calcul ne prend pas en compte les chutes. Le prix, fonction croissante de la durée de vie résiduelle des contrats, est plus bas pour les assurés âgés, qui mourront plus tôt.

Il faut noter que ce calcul ne prend pas en compte les chargements annuels (pour l'étude des deux garanties précédentes, nous les avons fixés à 0,5 %). En prenant en compte ce chargement, la valeur de la garantie serait encore plus élevée.



Si on effectue les calculs avec un taux de chutes uniforme de 4 % par année, le prix de la garantie est évidemment beaucoup plus bas puisque l'espérance de durée résiduelle des contrats diminue fortement, particulièrement pour les assurés les plus jeunes. On constate cependant que la valeur de la garantie reste très élevée (20 % en moyenne sans frais de gestion).

# Chapitre 3

## Le contrat multisupport

Le chapitre précédent se limitait au cas du contrat à support unique. En réalité, les contrats comprennent de nombreux supports, de nature variée (parts de SICAV obligataires, parts de SICAV en actions, parts de SCPI...). Dans ce chapitre, nous introduisons plusieurs supports de comportements différents en terme de risque. Nous verrons dans quelle mesure cela modifie les résultats précédents. La garantie en cas de décès s'applique à l'intégralité de la prime versée, indépendamment du support sur lequel les sommes correspondantes sont investies. Chacun des supports ayant une espérance de rendement et une volatilité propres, la valeur de la garantie dépendra du poids de chacun des supports dans le contrat.

### 3.1 Un support risqué, un support sans risque

Dans cette section, nous supposons que le contrat d'assurance peut comporter deux supports, un support risqué et un support non risqué.

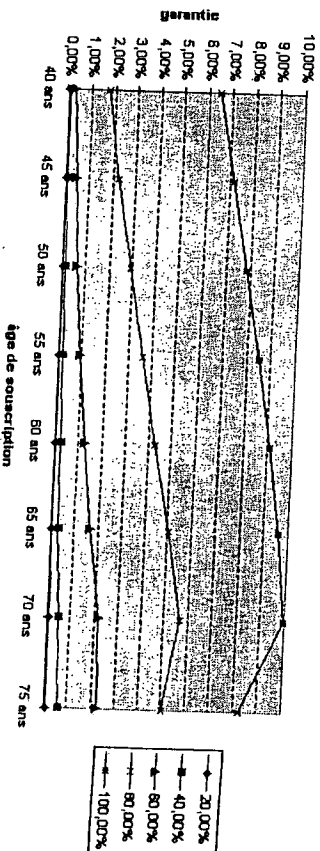
L'assuré place une proportion  $\omega$  donnée de son portefeuille en actif risqué et le complément  $1 - \omega$  en actif non risqué. La garantie s'exprime là encore comme une combinaison linéaire de puts pondérés par la probabilité de décès l'année de l'échéance. Désormais, la partie investie en actif non risqué est pilotée au taux sans risque positif. Outre le fait que la garantie s'applique sur un portefeuille moins risqué (seuls  $\omega$  % sont investis en actif risqué...), la valeur de la garantie sera plus faible car le prix d'exercice "réel" de l'option diminue avec l'échéance.

Les puts que l'on considère ont donc pour strike  $K$  :

$$K = Max(1 - (1 - \omega)(1 - \alpha - \beta)^{T+1} e^{rT}, 0)$$

( $T$  désigne l'échéance du put,  $\alpha + \beta$  les frais de gestion qui s'appliquent aussi sur la part non risquée).

En effet, au bout de  $T$  années, la part  $(1 - \omega)$ , ayant capitalisé au taux  $r$ , et ayant supporté  $\alpha + \beta$  frais de gestion annuels, vaut :  $(1 - \omega)(1 - \alpha - \beta)^{T+1} e^{rT}$ . La valeur initiale de l'actif risqué est  $\omega$  (on exprime, là encore, toutes les données par unité de provision mathématique).



Valeur de la garantie selon la part investie initialement en actif risqué ( $r = 3\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $f, g = 0\%$ )

Le prix de la garantie diminue fortement quand la part d'actif non risqué augmente. Ce résultat est rassurant, car la plupart des contrats en unités de compte comportent une part non négligeable d'actif non risqué. La charge que représente la garantie plancher est alors beaucoup plus basse que dans le cas des contrats à support unique (pour 90 % d'actif risqué, le prix de la garantie chute d'environ 30 % !). Les contrats en unités de compte comportent une part importante investie sur un support en francs ou monétaire, par prudence, mais aussi car le régime fiscal des contrats en U.C. est plus favorable que celui des contrats en francs : les prélèvements sociaux sont dans le cas des unités de compte prélevés à la fin du contrat au lieu d'être prélevés chaque année sur les contrats en francs.

On pourrait envisager l'impact de plusieurs stratégies d'arbitrage entre les supports pour les assurés. Les assurés qui souhaitent investir pour préparer leur retraite pourraient ainsi planifier des désengagements progressifs de l'actif risqué vers l'actif non risqué. Ce type de stratégie diminue bien entendu le risque supporté par l'assureur. En revanche, des stratégies consistant à détenir de l'actif risqué en plus ou moins grande quantité selon qu'il a monté ou baissé n'ont pas d'influence sur le prix de la garantie dans le cadre de ce modèle car l'évolution de l'actif  $y$  est indépendante du passé.

### 3.2 Plusieurs supports risqués

Avec plusieurs supports risqués, le flux qui sera à la charge de l'assureur au titre de la garantie plancher ne dépend plus seulement d'un actif. C'est pour un décès entre  $t$  et  $t + 1$  :

$$(K - \sum_{i=1}^k w_i \cdot S_{t+1}^i)_+ - \alpha \cdot \sum_{j=0}^t \left( \sum_{i=1}^k w_j \cdot S_j^i \right)$$

avec :

- $S_j^i$  le prix de l'actif  $i$  à la date  $t$
- $k$  le nombre d'actifs

•  $w_i$  la quantité d'actif  $i$  détenu (nous ne prenons pas en compte les possibilités pour l'assuré de faire des arbitrages, c'est-à-dire de changer les poids des différents titres dans son portefeuille)

La valeur en 0 de ce flux est donc :

$$\begin{aligned} V_0 x &= E^Q \left( (K - \sum_{i=1}^k w_i \cdot S_{T+1}^i)_+ - \alpha \cdot \sum_{j=0}^T \left( \sum_{i=1}^k w_j \cdot S_j^i \right) \right) \\ &= Put_{(w_i, S^i)}(T+1) - \alpha \cdot (T+1) \cdot \sum_{i=1}^k w_i \cdot S_0^i \end{aligned}$$

où  $Put_{(w_i, S^i)}(T)$  désigne le put d'échéance  $T$  sur le panier d'actions  $(S^i)$  pondérés par les poids  $(w_i)$ . Nous sommes donc ramenés à évaluer ce type d'options.

#### 3.2.1 Valorisation d'une option "panier"

Nous suivons pour évaluer ce type d'options l'approche proposée par Gentle (1993).

Nous supposons que les actifs suivent sous la probabilité risquée neutre une dynamique lognormale :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = r \cdot dt + \sigma_i \cdot dW_t^i$$

$$Cov(dW^i, dW^j) = \rho_{ij} dt$$

Gentle préconise de transformer le payoff de l'option puis d'approximer la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique. En effet, la dynamique de la moyenne géométrique étant gaussienne, on est ramené à un calcul classique de type Black & Scholes.

On cherche à évaluer la valeur actuelle du titre dont le payoff en  $T$  est :

$$\left( K - \sum_{j=1}^k w_j \cdot S_T^j \right)_+$$

Avec  $F_{S_j^i}(0, T) = S_0^i e^{rT}$  le prix forward de l'actif  $S_j^i$  en 0 pour une livraison en  $T$ , on pose :

$$\hat{w}_i = \frac{w_i \cdot S_0^i}{\sum_{j=1}^k w_j \cdot S_0^j} = \frac{w_i \cdot F_{S_i^i}(0, T)}{\sum_{j=1}^k w_j \cdot F_{S_j^j}(0, T)}$$

L'introduction des prix forward permet de sortir  $S_0^i$  de l'espérance et donc de ne plus avoir dans l'espérance que des variables aléatoires d'espérance 1, ce qui permet d'utiliser l'approximation. Alors :

$$\begin{aligned} Put_{(w_i, S^i)}(T) &= e^{-rT} \cdot E^Q \left\{ \sum_{j=1}^k w_j \cdot F_{S_j^j}(0, T) \cdot \left( \bar{K} - \sum_{j=1}^k \hat{w}_j \cdot \frac{S_T^j}{S_0^j} \right)_+ \right\} \\ &= e^{-rT} \cdot \sum_{j=1}^k w_j \cdot F_{S_j^j}(0, T) \cdot E^Q \left\{ \left( \bar{K} - \sum_{j=1}^k \hat{w}_j \cdot \frac{S_T^j}{S_0^j} \right)_+ \right\} \end{aligned}$$

avec :

- $\bar{K} = \frac{K}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^{(0,T)}} = \frac{e^{-rT} K}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0}$
- $\bar{S}_T^j = \frac{S_j^T}{F_j(0,T)}$

L'approximation consiste à remplacer  $\sum_{j=1}^k \omega_j \bar{S}_T^j$  par  $G_T = \prod_{j=1}^k (\bar{S}_T^j)^{\omega_j}$ . Plus précisément, on suppose que l'écart à l'espérance de la moyenne arithmétique a la même distribution que l'écart à l'espérance de la moyenne géométrique. Cela conduit à supposer, si on note  $A_i$  la moyenne arithmétique et  $G_i$  la moyenne géométrique :

$$A_i \sim E(A_i - G_i) + G_i$$

Au vu des différentes simulations numériques que nous avons menées, l'approximation est de très bonne qualité initialement mais elle se dégrade au fil du temps. Pour des puts d'échéance éloignée (supérieure à 10 ans), la formule qui suit sera donc de moins bonne qualité.

$$Put_{(\omega_i, S^j)}(T) \approx \sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 E^Q \left\{ \left( \bar{K} + E^Q(G_T - \sum_{j=1}^k \omega_j \bar{S}_T^j) - G_T \right)_+ / F_i \right\}$$

Après réarrangements, on trouve :

$$G_T = e^{\sum_{j=1}^k \omega_j \bar{\sigma}_j W_j^T - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2 T/2}$$

or  $Var(\sum_{j=1}^k \omega_j \bar{\sigma}_j W_j^T) = \sum_{i,j=1}^k \omega_i \omega_j \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \rho_{ij} T = v^2 T$  avec  $v^2 = \sum_{i,j=1}^k \omega_i \omega_j \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j \rho_{ij}$

Avec ces notations, on a :

$$\sum_{j=1}^k \omega_j \bar{\sigma}_j W_j^T \sim N(e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2}, v^2 T)$$

Par ailleurs,

$$E^Q(G_T - \sum_{j=1}^k \omega_j \bar{S}_T^j) = e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - \sum_{j=1}^k \omega_j E^Q(e^{-rT} S_j^T)$$

$$= e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - \sum_{j=1}^k \omega_j = e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - 1$$

Le résultat est obtenu, comme dans le cas de Black & Scholes, en utilisant le lemme suivant :

**Lemma 1** Soit  $\varepsilon$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2 > 0$ . Pour tout  $a$  et  $b$  réels, on a :

$$E^Q \left\{ (b - a \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^2)_+ \right\} = bN(-h + \sigma) - aN(-h)$$

avec :

- $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
- $h = \sigma^{-1} \ln(a/b) + \frac{\sigma}{2}$

On applique le lemme avec :

- $\varepsilon = \sum_{j=1}^k \omega_j \bar{\sigma}_j W_j^T$
- $a = e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2}$
- $b = \bar{K} + e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - 1$

On en déduit :

$$Put_{(\omega_i, S^j)}(T) \approx \left( \sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 \right) \cdot \left( \bar{K} + e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - 1 \right) \cdot N(-l_2(T))$$

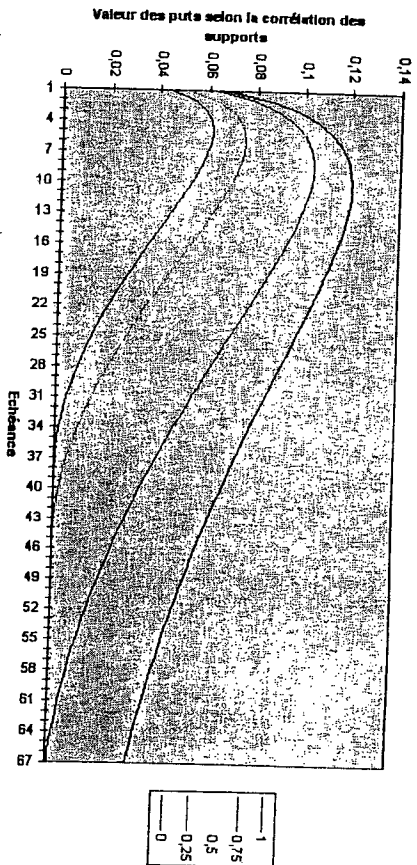
$$- e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} \cdot N(-l_1(t))$$

avec :

$$l_{1,2}(T) = \frac{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2 - \ln(\bar{K} + e^{(v^2 - \sum_{j=1}^k \omega_j \sigma_j^2) T/2} - 1) \pm \frac{1}{2} v^2 T}{v\sqrt{T}}$$

### 3.2.2 L'influence de la corrélation des supports

La garantie portant sur le portefeuille de supports, leur corrélation a une influence primordiale sur la valeur de celle-ci. Pour bien comprendre l'influence de la corrélation, nous nous plaçons dans un cas très simple : un contrat investi dans deux supports de même volatilité, de même valeur initiale, dont nous faisons varier le coefficient de corrélation.



Valeur des puts sur le panier selon l'échéance en fonction de la corrélation des deux supports ( $r = 3\%$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ )

Le fait de prendre en compte une corrélation fait diminuer considérablement la valeur des options sous-jacentes. Pour des échéances relativement longues (autour de 10 ans), supposer que les supports ne sont pas corrélés divise la valeur des puts par trois!

Dans la réalité, la corrélation entre différents supports de même type (par exemple de type actions) est assez élevée (de l'ordre de 0.5 ou 0.6). La valeur de la garantie ne diminue donc pas aussi fortement.

### 3.2.3 Le contrat avec trois supports risqués

Nous appliquons le résultat de la méthode d'évaluation avec  $k = 3$ . Nous choisissons d'introduire 3 classes d'actifs, les différentes classes d'actifs pouvant présenter des profils de risque très différents. On peut, par exemple, supposer qu'il s'agit de parts investies en actions, en immobilier ou en produits de taux d'intérêt. On peut également supposer qu'il s'agit de parts investies en actions européennes, américaines ou asiatiques. En effet, ces types d'actions sont très corrélées à court terme mais le sont beaucoup moins à moyen ou long terme.

Nous allons donc évaluer l'importance des coefficients de corrélation et des proportions des actifs.

Les coefficients de volatilité sur longue période que l'on choisit sont :

- pour le titre 1, le plus risqué, par exemple investi en actions :  $\sigma_1 = 0.3$
- pour le titre 2, investi, par exemple en immobilier, ou en actions moins risqués :  $\sigma_2 = 0.2$
- pour le titre 3, investi en produits moins risqués, par exemple en sicav obligataires :  $\sigma_3 = 0.1$

Le fait de supposer que le troisième titre, modélisé par une loi lognormale, puisse être des parts de sicav de taux d'intérêt peut paraître surprenant dans la mesure où les titres sous-jacents sont des obligations. Pourtant, la capitalisation des intérêts se fait au fur et à mesure du temps et de manière aléatoire en fonction des variations de la courbe de taux d'intérêt. La durée de la sicav ne varie pas comme la durée d'une obligation : le réinvestissement des coupons par le gestionnaire permet de garder celle-ci presque constante. La modélisation lognormale avec une variance faible nous donne donc une idée des résultats, même si la modélisation est discutable.

La garantie vaut, pour un portefeuille constitué uniquement de titre 1 ou uniquement de titre 3 :

Âge	titre 1	titre 3
25 ans	11.62 %	0.60 %
30 ans	12.80 %	0.74 %
35 ans	14.01 %	0.90 %
40 ans	15.20 %	1.10 %
45 ans	16.30 %	1.33 %
50 ans	17.25 %	1.58 %
55 ans	17.91 %	1.84 %
60 ans	18.28 %	2.09 %
65 ans	18.28 %	2.32 %
70 ans	17.80 %	2.52 %
75 ans	16.47 %	2.61 %
80 ans	14.21 %	2.50 %
moyenne	17.14 %	2.06 %



### Les corrélations entre les 3 supports

Nous supposons ici que le contrat est investi en proportion  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  dans les trois actifs. Nous étudions l'influence des coefficients de corrélation sur la valeur de la garantie.

Nous posons ici  $\rho_{1,2} = \rho_{2,3} = \rho_{1,3} = \rho$   
 Les frais de gestion sont, là encore, de 0.5 % annuels (ils ne sont pas prélevés au titre de la garantie plancher)

Âge \ $\rho$	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
25 ans	0.1%	0.1%	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.6%	0.9%
30 ans	0.1%	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.6%	0.8%	1.2%
35 ans	0.1%	0.2%	0.3%	0.4%	0.6%	0.8%	1.2%	1.7%
40 ans	0.1%	0.3%	0.4%	0.6%	0.8%	1.2%	1.6%	2.3%
45 ans	0.2%	0.4%	0.6%	0.8%	1.2%	1.6%	2.2%	3.1%
50 ans	0.3%	0.5%	0.8%	1.2%	1.6%	2.2%	3.0%	4.0%
55 ans	0.4%	0.7%	1.1%	1.6%	2.2%	2.9%	3.8%	4.9%
60 ans	0.6%	1.0%	1.5%	2.1%	2.8%	3.7%	4.6%	5.8%
65 ans	0.8%	1.3%	2.0%	2.7%	3.5%	4.4%	5.4%	6.5%
70 ans	1.0%	1.7%	2.5%	3.3%	4.1%	5.0%	6.0%	7.0%
75 ans	1.3%	2.1%	2.8%	3.6%	4.5%	5.3%	6.2%	7.0%
80 ans	1.5%	2.2%	3.0%	3.7%	4.4%	5.1%	5.8%	6.5%
moyenne	0.7%	1.2%	1.7%	2.3%	2.9%	3.7%	4.5%	5.5%

La valeur de la garantie est régulièrement croissante en fonction de la corrélation entre les supports. Pour des valeurs de la corrélation de l'ordre de 0.5 à 0.6, la valeur de la garantie diminue d'à peu près 25 %. C'est l'ordre de grandeur qu'il faut retenir, car les portefeuilles des assurés sont très différents, jamais les mêmes. En effet, la valeur de la garantie plancher est différente pour chaque portefeuille. Le prix de la garantie plancher change d'ailleurs à chaque arbitrage de l'assuré, dans la mesure où l'arbitrage de l'assuré change le profil de risque du contrat. Les entreprises d'assurance ne peuvent pas ajuster leur tarification aussi finement et cherchent plutôt à tarifer uniformément. Nous ne pouvons donc retenir que les ordres de grandeur des résultats que nous obtenons dans cette partie, le modèle pouvant toutefois servir à étudier des cas particuliers.

On constate que si la corrélation est faible ( $\rho < 0.2$ ), le prix de la garantie pour ce portefeuille est plus bas que pour le portefeuille composé du titre 3

seulement. Ce résultat est particulièrement vrai pour les jeunes : la décorrélacion produit surtout ses effets à long terme. On voit bien sur cet exemple le gain apporté par la diversification.

### Un contrat à dominante "actions"

Nous étudions dans cette partie un contrat investi à 70 % dans le titre 1, et à 15 % dans les titres 2 et 3. Pour une corrélation entre les titres 1 et 2 maintenue fixée à :  $\rho_{1,2} = 0.6$ , la valeur de la corrélation entre l'actif 3 et les deux autres actifs n'a quasiment pas d'influence. Le tableau suivant représente la valeur de la garantie pour  $\rho_{1,3} = \rho_{2,3} = 0.6$

Age	Garantie
25 ans	1.10 %
30 ans	1.54 %
35 ans	2.18 %
40 ans	3.05 %
45 ans	4.15 %
50 ans	5.44 %
55 ans	6.77 %
60 ans	8.00 %
65 ans	9.03 %
70 ans	9.71 %
75 ans	9.73 %
80 ans	8.93 %
moyenne	7.61 %

La corrélation entre le titre 3 et les deux autres titres n'influe absolument pas sur le prix de la garantie. On remarque cependant que la garantie vaut pour ce portefeuille de l'ordre de 7.5 à 8 %, ce qui est plus de deux fois moins que le prix de la garantie pour un portefeuille constitué uniquement d'actif 1. C'est là encore un des bienfaits de la diversification.

On déduit donc de cette partie que la prise en compte de la diversité des supports par l'intermédiaire d'un modèle avec plusieurs actifs corrélés entraîne une diminution du prix de la garantie de l'ordre de 25 à 50 %.

Pour ce contrat précis, nous calculons le prix de la garantie avec un taux de chute annuel de 4 % (avec toujours un chargement de 0.5 % et cette fois un chargement de 0.3 % au titre des garanties plancher):

contrat comporte un support de type "actions", et un support de type sicaev obligataire, que nous approximerons comme un zéro-coupon d'échéance  $T$ . Cette caractérisation peut paraître frustrante mais nous permet de simplifier le modèle pour le rendre calculable, moyennant certaines approximations.

Une autre approche aurait pu consister à simuler un portefeuille obligataire par la méthode de Monte-Carlo. La possession d'un portefeuille de sicaev de durée  $t$  et  $t+1$  se résumerait à l'achat d'un zéro coupon d'échéance  $t+1$  en début d'année, par sa vente en fin d'année suivi du rachat d'un zéro coupon d'échéance  $t+1$  émis un an plus tard. La mise en oeuvre pratique d'une telle approche aurait toutefois demandé beaucoup de temps à cause du travail de programmation associé.

Nous utilisons à nouveau l'approximation numérique proposée par Gentile (1993) pour calculer le prix d'une option sur un portefeuille constitué d'une part investie en zéro coupon et d'une autre en actions dans le cadre du modèle de taux d'intérêt développé dans Heath-Jarrow-Morton (1992). Dans ce modèle, la dynamique des actifs risqués ne dépendant pas des taux d'intérêt a été étudiée dans Amin-Jarrow (1992).

### 3.3.1 Le modèle de taux d'intérêt

Dans cette section, nous rappelons les résultats du modèle général de taux d'intérêt développé dans Heath-Jarrow-Morton (1992).

**Proposition 2** *Etant donnée une courbe des taux forward  $\{f(0, T); T \in [0, \tau]\}$ , les taux d'intérêt forward vérifient l'équation stochastique suivante :*

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T, \omega) du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u, T, \omega) dW_i(u)$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $T \in [0, \tau]$   
 $\alpha(t, T, \omega)$  et  $\sigma_i(t, T, \omega)$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont supposés vérifier les conditions de régularité usuelles.

Définissons un facteur d'accumulation correspondant au placement au jour le jour au taux court instantané  $r(y) = f(y, y)$  :

$$B(t) = \exp \left( \int_0^t r(y) dy \right)$$

Le prix d'un zéro coupon garantissant un franc à la date  $T$  en  $t$  est, par définition des taux forward :

$$P(t, T) = \exp \left[ - \int_t^T f(t, u) du \right]$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $T \in [0, \tau]$

La valeur actuelle du zéro coupon de maturité  $T$  est :  $Z(t, T) = P(t, T)/B(t)$   
 L'application du lemme d'Ito à  $Z(t, T)$  donne :

$$dZ(t, T) = b(t, T) \cdot Z(t, T) \cdot dt + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t, T) Z(t, T) dW_i(t)$$

avec :

- $\alpha_i(t, T) = - \int_t^T \sigma_i(t, u, \omega) du$  pour  $i = 1, \dots, n$
- $b(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, u) du + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \int_t^T \sigma_i(t, u, f(t, u)) du \right]^2$

Amin et Jarrow (1992) proposent de traiter le cas d'un actif risqué supplémentaire en étendant l'économie analysée par Merton (1973) (c'est-à-dire dans le cas où  $\sigma$  est déterministe). On se place dans le cas  $n=1$ . La dynamique des taux forward s'écrit alors :

$$df(t, T) = \alpha(t, T, \omega) dt + \sigma(t, T) dW_1(t)$$

La dynamique de l'action est donnée par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta_1 S_t dW_1(t) + \delta_2 S_t dW_2(t)$$

où  $W_1$  et  $W_2$  sont des browniens indépendants et  $\delta_1, \delta_2$  et  $S_0 > 0$  des constantes.

Les valeurs de  $B, S$  et  $P$  sous la probabilité risquée neutre  $Q$  sont :

$$B(t) = \frac{1}{P(0, t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \alpha(s, t)^2 ds - \int_0^t \alpha(s, t) dW_1^Q(s) \right\} \quad (3.1)$$

$$S_t = S_0 \cdot B(t) \exp \left\{ - \frac{1}{2} (\delta_1^2 + \delta_2^2) t + \delta_1 W_1^Q(t) + \delta_2 W_2^Q(t) \right\} \quad (3.2)$$

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \int_{s=0}^t \int_{y=0}^T \sigma(y, s) \alpha(y, s) ds dy - \int_{y=0}^t \left[ \int_{s=y}^T \sigma(y, s) ds \right] dW_1^Q(y) \right\} \quad (3.3)$$

### 3.3.2 L'option panier sur zéro coupon et action

Nous définissons dans le cadre de ce modèle l'option panier d'échéance  $t$  sur le portefeuille contenant  $\omega_1$  actions et  $\omega_2$  zéro coupons d'échéance  $T$  par ( $T \geq t$ ):

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) = E^Q \left\{ \frac{(K - \omega_1 \bar{S}_t - \omega_2 P(t, T))_+}{B(t)} / F_0 \right\}$$

Nous suivons la aussi l'approche proposée par Gentle (1993), mais pour avoir des paramètres d'actualisation simples, nous exprimons les dynamiques des prix sous la probabilité forward neutre.

On a, par arbitrage:

$$S_0 = P(0, t) \cdot F_S(0, t)$$

$$P(0, T) = P(0, t) \cdot F_P(0, t, T)$$

avec:

- $F_S(0, t)$  le prix forward en 0 de l'actif  $S$  pour une livraison en  $t$
- $F_P(0, t, T)$  le prix forward en 0 du zéro coupon d'échéance  $T$  pour une livraison en  $t$ .

On pose:

- $\Omega_1 = \frac{\omega_1 \cdot S_0}{\omega_1 \cdot S_0 + \omega_2 \cdot P(0, T)} = \frac{\omega_1 \cdot F_S(0, t)}{\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)}$
- $\Omega_2 = \frac{\omega_2 \cdot P(0, T)}{\omega_1 \cdot S_0 + \omega_2 \cdot P(0, T)} = \frac{\omega_2 \cdot F_P(0, t, T)}{\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)}$

$\Omega_1$  et  $\Omega_2$  désignent les proportions respectives (en valeur) des actifs actions et obligations dans le portefeuille

On écrit alors:

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) = [\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)].$$

$$E^Q \left\{ \frac{(K - \Omega_1 \bar{S}_t - \Omega_2 \bar{P}(t, T))_+}{B(t)} / F_0 \right\}$$

avec:

- $\bar{S}_t = \frac{S_t}{F_S(0, t)}$

- $\bar{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{F_P(0, t, T)}$

- $\bar{K} = \frac{K}{\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)} = \frac{K \cdot P(0, t)}{\omega_1 \cdot S_0 + \omega_2 \cdot P(0, T)}$

Pour sortir le coefficient d'actualisation  $B(t)$ , nous changeons de probabilité: nous passons de la probabilité risque-neutre à la probabilité forward neutre en  $t$ , c'est à dire la probabilité telle que  $\frac{P(t, T)}{P(0, t)}$  est martingale:

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) = [\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)]$$

$$E^Q \left\{ \frac{(K - \Omega_1 \bar{S}_t - \Omega_2 \bar{P}(t, T))_+}{B(t)} \cdot \frac{P(0, t)}{P(0, t)} / F_0 \right\}$$

Or  $\frac{B(0) \cdot P(t, T)}{B(t) \cdot P(0, t)}$  est la densité du changement de probabilité. On a donc:

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) = [\omega_1 \cdot F_S(0, t) + \omega_2 \cdot F_P(0, t, T)].$$

$$P(0, t) \cdot E^F \left\{ \frac{(K - \Omega_1 \bar{S}_t - \Omega_2 \bar{P}(t, T))_+}{F_0} \right\}$$

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) = [\omega_1 \cdot S_0 + \omega_2 \cdot P(0, T)] \cdot E^F \left\{ \frac{(K - \Omega_1 \bar{S}_t - \Omega_2 \bar{P}(t, T))_+}{F_0} \right\}$$

Pour approximer le terme sous l'espérance, nous approximations la moyenne arithmétique par une moyenne géométrique:

$$Put_{(\omega_1, S_1, \omega_2, P)}(t, T) \approx [\omega_1 \cdot S_0 + \omega_2 \cdot P(0, T)].$$

$$E^F \left\{ \frac{(K - E^F[(\Omega_1 \bar{S}_t + \Omega_2 \bar{P}(t, T) - G_t) / F_0] - G_t)_+}{F_0} \right\}$$

avec  $G_t = G_t^1 \cdot \bar{P}(t, T)^{\Omega_2}$

$G_t$  est une variable gaussienne sous la probabilité forward  $F$ .

Nous sommes donc ramené à un calcul classique de type Black & Scholes.

$$\bar{S}_t = \frac{S_t}{S_0} P(0, t)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t [a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] dy + \int_0^t [\delta_1 - a(y, t)] dW_1^Q(y) + \delta_2 W_2^Q(t) \right\}$$

d'après (3.1) et (3.2).

$$\begin{aligned}\bar{P}(t, T) &= \frac{P(0, t), P(t, T)}{P(0, T)} \\ &= \exp \left\{ \int_{y=0}^t \int_{s=t}^T \sigma(y, s) a(y, s) ds dy - \int_{y=0}^t \left[ \int_{s=t}^T \sigma(y, s) ds \right] dW_1^Q(y) \right\} \\ &\text{d'après (3.1) et (3.3).} \\ &\text{ainsi,}\end{aligned}$$

$$G_t = \exp \left( \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] + \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) a(y, s) ds \right) dy + \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot [\delta_1 - a(y, t)] - \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) ds \right) dW_1^Q(y) + \Omega_1 \delta_2 W_2^Q(t) \right)$$

Le changement de probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned}dW_1^F(y) &= dW_1^Q(y) - a(y, t) dy \\ dW_2^F(y) &= dW_2^Q(y)\end{aligned}$$

après arrangements,

$$\begin{aligned}G_t &= \exp \left( \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [-a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] + \Omega_1 \cdot \delta_1 \cdot a(y, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) \cdot [a(y, s) - a(y, t)] ds \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot [\delta_1 - a(y, t)] - \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) ds \right) dW_1^F(y) + \Omega_1 \delta_2 W_2^F(t) \right)\end{aligned}$$

ainsi, sous la probabilité forward neutre,

$$\begin{aligned}\ln(G_t) &\sim N \left( \int_{s=0}^t \left( \Omega_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [-a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \Omega_1 \cdot \delta_1 \cdot a(y, t) + \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) \cdot [a(y, s) - a(y, t)] ds \right) dy, \rho^2 \right)\end{aligned}$$

avec  $\rho^2 = \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot [\delta_1 - a(y, t)] - \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) ds \right)^2 dy + \Omega_1^2 \delta_2^2 t$   
Par ailleurs,

$$E^F \left[ \Omega_1 \cdot \bar{S}_t + \Omega_2 \cdot \bar{P}(t, T) - G_t \right] = \Omega_1 E^F(\bar{S}_t) + \Omega_2 E^F(\bar{P}(t, T)) - E^F(G_t)$$

Or :

- $E^F(\bar{S}_t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t [-a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] dy + \frac{1}{2} \int_0^t [\delta_1 - a(y, t)]^2 dy + \frac{1}{2} \delta_2^2 t \right\}$
- $E^F(\bar{P}(t, T)) = \exp \int_{y=0}^t \left( \int_{s=t}^T \sigma(y, s) \cdot [a(y, s) - a(y, t)] ds \right) dy$
- $\frac{1}{2} \int_{y=0}^t \left( \int_{s=t}^T \sigma(y, s) ds \right)^2 dy$
- $E^F(G_t) = \exp \left( \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot [-a(y, t)^2 - (\delta_1^2 + \delta_2^2)] + \right. \right.$
- $\left. \left. \Omega_1 \cdot \delta_1 \cdot a(y, t) + \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) \cdot [a(y, s) - a(y, t)] ds \right) dy + \frac{1}{2} \int_{y=0}^t \left( \Omega_1 \cdot [\delta_1 - a(y, t)] - \int_{s=t}^T \Omega_2 \cdot \sigma(y, s) ds \right)^2 dy + \Omega_1^2 \delta_2^2 t \right)$

On en déduit donc à l'aide du lemme 1 l'expression de la valeur de l'option.

### 3.3.3 Application au contrat multisupport

Le contrat multisupport contient une part  $w_1$  investie en actions  $S$ , et une part  $w_2$  investie en sicaïr obligataire.

Une sicaïr est un portefeuille d'obligations de maturités différentes. Souvent, les sicaïr se caractérisent par leur durée, moyenne pondérée de l'échéance des flux des obligations constituant la sicaïr. Le réinvestissement de ces différents flux, coupons ou principaux des obligations, est réalisé par le gestionnaire de la sicaïr en conservant à peu près une durée fixe. Pour le calcul d'une option d'échéance  $T$ , nous approximations l'évolution de la part de sicaïr par l'évolution du zéro coupon de maturité résiduelle égale à la durée, soit  $T + D$  ( $D$  désigne la durée). Nous appliquons donc le résultat précédent avec :

$$\sigma(s, T) = \sigma \cdot e^{-\lambda(T-s)}$$

donc :

$$a(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, u) du = \frac{\sigma}{\lambda} \cdot [e^{-\lambda(T-t)} - 1]$$

$$\int_0^t a(y, t) dy = \frac{\sigma}{\lambda} \left[ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} - t \right]$$

$$\int_0^t \alpha(y, t)^2 dy = \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left[ \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} - 2 \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} + t \right]$$

La dynamique du taux court devient alors :

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (1 - e^{-\lambda(t-s)}) ds + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_t^Q$$

soit :

$$dr_t = [\kappa(t) - \lambda r_t] dt + \sigma dW_t^Q$$

avec

$$\kappa(t) = \partial_2 f(0, t) + \lambda f(0, t) + \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda}$$

la partie déterministe de la différentielle du taux court vaut donc :

$$\left[ \partial_2 f(0, t) + \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} + \lambda (f(0, t) - r_t) \right] dt$$

Cela nous ramène à un modèle étudié par Hull-White (1990). La dynamique de l'action et du zéro coupon sous la probabilité forward neutre devient :

$$\bar{S}_t = \exp \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\sigma^2}{4\lambda^3} (1 - e^{-2\lambda t}) + \left( \frac{\sigma^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} \right) (1 - e^{-\lambda t}) \\ & + \int_0^t [\delta_1 - \sigma \cdot (e^{-\lambda(t-y)} - 1)] dW_t^F(y) + \delta_2 W_t^F(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{P}(t, T) = \exp \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\sigma^2}{4\lambda^3} (e^{-2\lambda T} - e^{-2\lambda t}) \cdot (e^{2\lambda t} - 1) + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t}) \cdot (e^{\lambda t} - 1) \\ & + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t}) \left( \frac{1}{2} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) + 1 - e^{\lambda t} \right) \\ & - \int_{t=0}^t \frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda y}) \cdot e^{\lambda y} \cdot dW_t^F(y) \end{aligned} \right\}$$

$$Var(\log(\bar{S}_t)) = (\delta_1 + \frac{\sigma}{\lambda})^2 t + \delta_2^2 t - 2 \cdot \frac{\sigma^2}{\lambda^3} + \frac{\delta_1 \sigma}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} (1 - e^{-2\lambda t})$$

$$Var(\log(\bar{P}(t, T))) = \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} (e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t})^2 (e^{2\lambda t} - 1)$$

En notant :

- $\mu_1 = \Omega_1 \cdot (\delta_1 + \frac{\sigma}{\lambda})$
- $\mu_2(t, T) = \frac{\sigma}{\lambda} \cdot (-\Omega_1 + \Omega_2) \cdot e^{-\lambda t} + \Omega_2 e^{-\lambda T}$

On a :

$$Var(\ln(G_t)) = \rho^2 = (\mu_1^2 + \Omega_2^2 \delta_2^2) t + \frac{2}{\lambda} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (e^{\lambda t} - 1) + \frac{1}{2\lambda} \mu_2^2 (e^{2\lambda t} - 1)$$

#### Exemple de calculs

Pour effectuer des estimations pratiques, nous avons besoin de choisir les paramètres du modèle. L'un d'entre eux est la courbe des taux d'intérêt initiale. Par souci de cohérence avec nos calculs précédents, nous considérons une courbe des taux plate, tous les taux valant initialement 3%. En fait, il faudrait rentrer la courbe des taux actuelle, qui est dans les modèles de type HJM la meilleure estimation de la courbe des taux future. Cependant, ce type de modèles est intéressant pour le calcul de la valeur de produits dérivés d'échéance courte. Pour l'estimation d'options de long terme, se posent d'autres problèmes, liés au contexte financier global. Ainsi, la courbe des taux a beaucoup évolué sur les 12 derniers mois. Si on évaluait la garantie avec la courbe des taux réelle, la valeur de cette garantie aurait beaucoup baissé depuis un an, sans que les anticipations de très long terme ne changent. Nous choisissons donc d'utiliser pour les calculs du modèle une courbe des taux "prudente", plate à 3%.

Le choix de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  permet de fixer la volatilité du support action ( $\sigma_{ad}^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2$ ) et la corrélation entre les actions et les taux (par l'intermédiaire de  $\delta_1$ ). Pour rester dans le même cadre que précédemment, nous choisissons de fixer la volatilité du support action à 20%. La corrélation entre les taux et le niveau des actions est ambiguë : l'effet de l'actualisation des bénéfices implique, toutes choses égales par ailleurs, une corrélation négative entre hausse des taux et hausse des actions, de plus, une hausse brutale des taux est en général associée à une baisse des actions, les agents devenant moins solvables. Les taux sont cependant élevés en période de forte activité, favorable aux actions par l'intermédiaire des bénéfices. La résultante dépend de l'environnement économique et des périodes historiques considérées. La corrélation en question intervient à deux niveaux dans le prix de la garantie : un paramètre  $\delta_1$  positif signifie que les deux supports sont anticorrélés, ce qui a tendance à diminuer le prix de la garantie, mais cela implique également

que les flux dans les états de la nature favorables (cas de hausse des taux et des actions) seront actualisés à un taux plus élevé que les flux dans les états de la nature défavorables (cas de baisse des taux et des actions), ce qui augmentera le prix de la garantie.

Nous considérons deux cas :

- $\delta_1 = \frac{1}{2}\sigma_{ad} = 0.1, \delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{act} = 0.173$  (les actions et les obligations sont dans ce cas anticorrélées)
- $\delta_1 = -\frac{1}{2}\sigma_{act} = -0.1, \delta_2 = 0.173$ .

Nous fixons le paramètre  $\sigma$  de volatilité du taux d'intérêt à 2%, valeur estimée sur longue période pour les taux courts américains. Le paramètre  $\lambda$  est plus délicat à déterminer, il doit être grand par rapport à  $\sigma$  si l'on souhaite que les taux ne rejoignent pas trop lentement leur valeur d'équilibre, mais les différentes études empiriques sur les taux courts montrent que ce paramètre varie beaucoup selon les données considérées et les modèles employés. Nous prenons par exemple  $\lambda = 0.2$ .

Nous maintenons un taux de prélèvement sur encours de 0.5% par an. L'approximation centrale du modèle n'est malheureusement plus valable pour les puits d'échéance très éloignés. Nous remédions à ce problème en introduisant un taux de chutes uniforme de 4% par an, qui semble réaliste.

A titre de comparaison, les tableaux suivants résument les valeurs des garanties aux différents âges lorsque les taux sont fixes, obtenues respectivement dans le cadre du portefeuille action/actif sans risque développé en (3.1) et du modèle développé dans cette partie (en fixant dans ce cas à 0 le

paramètre  $\sigma$  de volatilité des taux):

% actions	0	20	40	60	80	100
25 ans	0%	0%	0%	0.1%	0.4%	1.1%
30 ans	0%	0%	0%	0.1%	0.6%	1.4%
35 ans	0%	0%	0%	0.2%	0.8%	1.8%
40 ans	0%	0%	0.1%	0.3%	1.0%	2.3%
45 ans	0%	0%	0.1%	0.4%	1.4%	2.9%
50 ans	0%	0%	0.1%	0.6%	1.8%	3.5%
55 ans	0%	0%	0.2%	0.8%	2.3%	4.1%
60 ans	0%	0%	0.3%	1.1%	2.6%	4.5%
65 ans	0%	0%	0.3%	1.3%	2.9%	4.8%
70 ans	0%	0%	0.4%	1.5%	3.0%	4.8%
75 ans	0%	0%	0.5%	1.5%	2.9%	4.4%
80 ans	0%	0.1%	0.5%	1.3%	2.3%	3.4%

coût de la garantie pour un support action et un actif sans risque

% actions	0	20	40	60	80	100
25 ans	0%	0%	0.1%	0.2%	0.4%	1.1%
30 ans	0%	0%	0.1%	0.2%	0.6%	1.4%
35 ans	0%	0%	0.1%	0.3%	0.8%	1.8%
40 ans	0%	0%	0.1%	0.4%	1.1%	2.3%
45 ans	0%	0%	0.2%	0.6%	1.4%	2.9%
50 ans	0%	0%	0.3%	0.9%	1.9%	3.5%
55 ans	0%	0%	0.4%	1.1%	2.3%	4.1%
60 ans	0%	0%	0.5%	1.3%	2.7%	4.5%
65 ans	0%	0.1%	0.6%	1.5%	2.9%	4.8%
70 ans	0%	0.1%	0.6%	1.7%	3.1%	4.8%
75 ans	0%	0.1%	0.7%	1.7%	2.9%	4.4%
80 ans	0%	0.1%	0.6%	1.4%	2.3%	3.4%

coût de la garantie pour un support action et un actif obligataire quand les taux sont fixes

Il ne devrait théoriquement pas y avoir de différence entre les deux tableaux ci-dessus. L'écart provient de l'approximation empruntée à Gentle qui, dans les cas considérés, majore la garantie. L'erreur est évidemment nulle lorsque l'on a affaire à un support pur. Si l'erreur absolue est très faible, il faut noter que l'erreur relative peut être importante pour une grosse proportion de zéro-coupons.

Nous présentons ensuite les résultats obtenus pour un portefeuille comportant un zéro coupon de duration initiale  $T = t + 4$ ,  $t$  designant l'échéance du put considéré, ou encore la date de décès anticipée de l'assuré qui n'aura pas résilié son contrat.

coût de la garantie pour un support action et un zéro-coupon t+4, pour  $\delta > 0$

% actions	0	20	40	60	80	100
25 ans	0%	0%	0.1%	0.2%	0.5%	1.7%
30 ans	0%	0%	0.1%	0.3%	0.7%	2.2%
35 ans	0%	0%	0.1%	0.4%	1.0%	2.7%
40 ans	0%	0%	0.1%	0.5%	1.3%	3.4%
45 ans	0%	0%	0.2%	0.7%	1.8%	4.2%
50 ans	0%	0%	0.3%	1.0%	2.4%	5.0%
55 ans	0%	0%	0.4%	1.3%	2.9%	5.6%
60 ans	0%	0%	0.5%	1.6%	3.3%	6.1%
65 ans	0.1%	0.1%	0.6%	1.8%	3.7%	6.3%
70 ans	0.1%	0.1%	0.7%	2.0%	3.7%	6.1%
75 ans	0.1%	0.1%	0.7%	1.9%	3.4%	5.4%
80 ans	0.1%	0.1%	0.6%	1.5%	2.6%	4.0%

coût de la garantie pour un support action et un zéro-coupon t+4, pour  $\delta < 0$

% actions	0	20	40	60	80	100
25 ans	0%	0%	0.1%	0.1%	0.3%	0.8%
30 ans	0%	0%	0.1%	0.2%	0.5%	1.1%
35 ans	0%	0%	0.1%	0.3%	0.6%	1.4%
40 ans	0%	0%	0.1%	0.4%	0.9%	1.8%
45 ans	0%	0%	0.2%	0.5%	1.2%	2.3%
50 ans	0%	0.1%	0.3%	0.7%	1.6%	2.9%
55 ans	0%	0.1%	0.4%	1.0%	1.9%	3.3%
60 ans	0%	0.1%	0.5%	1.2%	2.3%	3.8%
65 ans	0.1%	0.2%	0.6%	1.4%	2.5%	4.0%
70 ans	0.1%	0.2%	0.7%	1.5%	2.7%	4.1%
75 ans	0.1%	0.3%	0.8%	1.6%	2.6%	3.8%
80 ans	0.1%	0.3%	0.7%	1.3%	2.1%	3.0%

Les résultats que nous obtenons montrent qu'un portefeuille composé majoritairement de zéro coupons présente une faible risque pour l'assureur. L'anticorrelation entre les actifs diminue dans ce cas le prix de la garantie: on s'aperçoit en effet qu'un portefeuille qui contient jusqu'à 40% d'actions

est moins risqué pour  $\delta_1$  positif que pour  $\delta_1$  négatif. Il en va différemment pour les portefeuilles investis à plus de 40 % dans l'action, les portefeuilles actions/zéro-coupons devenant même moins risqués que les portefeuilles actifs/actifs sans risque. C'est l'influence du modèle de taux d'intérêt qui se fait alors sentir: pour  $\delta_1 < 0$ , dans les états de la nature où les taux sont élevés, le cours de l'action est plutôt bas, la valeur du portefeuille est en moyenne faible, mais le flux à verser au titre de la garantie, même s'il est élevé, est actualisé à un taux plus élevé.

On peut aussi supposer que l'actif peu risqué est représenté dans les contrats par des zéro-coupons d'échéance 30 ans, plus volatiles. La parité obligataire du portefeuille deviendrait alors plus risquée et plus sensible à l'évolution des taux d'intérêt. Nous ne présentons pas en détail les résultats. Les garanties coûtent effectivement plus cher pour une part importante de zéro-coupons mais les phénomènes généraux observés ne changent pas.

Que retenir de ce modèle? L'approximation centrale du modèle conduit à plutôt majorer la garantie, mais la valeur de celle-ci oscille autour de celle obtenue grâce au modèle actions/actif sans risque, suivant les valeurs des paramètres. Puisqu'il nous importe surtout de nous faire une idée des valeurs des garanties, et que les valeurs des paramètres sont largement indéterminées, il semble que l'utilisation du modèle le plus simple soit préférable. Nous revenons d'ailleurs aux modèles de base de type Black & Scholes dès le chapitre suivant.

## Chapitre 4

# La couverture des garanties (hors risque de décès)

Nous supposons encore dans cette partie que l'on peut négliger le risque lié aux décès car on couvre la garantie pour un portefeuille important, ce qui permet d'escompter une bonne mutualisation de ce risque. Nous nous attachons donc ici à étudier la qualité de certaines stratégies de couverture de puts. L'espace des stratégies étudié dans la littérature est très vaste. Nous nous limitons cependant volontairement à certaines stratégies qui semblent raisonnables et accessibles aux assureurs. Nous aurions pu par exemple étudier des stratégies où il y a ajustement du portefeuille à partir d'un certain seuil d'écart au portefeuille optimal, ou la possibilité de se couvrir avec plusieurs catégories d'options simultanément. Nous n'étudions ici que des stratégies où les ajustements ont lieu à date fixée et n'utilisent qu'un type d'options à la fois.

### 4.1 Qualité d'une stratégie de couverture d'une option

#### 4.1.1 Théorie dans le cas continu, sans frais de transactions

La théorie de Black & Scholes permet au vendeur d'une option de se couvrir très facilement contre les variations de celle-ci à l'aide du sous-jacent et de l'actif sans risque. Plus précisément, le vendeur de l'option doit, pour s'im-



muniser contre les variations de l'actif, avoir un portefeuille tel que la dérivée de sa valeur par rapport au titre (le delta) soit nulle.

La quantité d'actif à détenir est telle que (notons  $B_t$  l'actif sans risque) :

$$\frac{\partial}{\partial S} (\mu_1 S_t + \mu_2 B_t - \text{Opt}(S_t, K, r, \sigma, T)) = 0$$

soit :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\partial \text{Opt}(S_t, K, r, \sigma, T)}{\partial S} \\ \mu_2 &= B_t^{-1} (\text{Opt}(S_t, K, r, \sigma, T) - \mu_1 S_t) \end{aligned}$$

( $\mu_1$  est le nombre d'actions détenues dans le portefeuille de couverture,  $\mu_2$  la quantité d'actif sans risque, Opt désigne un Call ou un Put).

A condition de rajuster en permanence son portefeuille, le vendeur de l'option utilise la prime de celle-ci pour se couvrir. Il détient un portefeuille donc pas les variations du cours de l'actif.

En pratique, il est impossible de rajuster un portefeuille en permanence : on ne peut effectuer qu'un nombre fini de transactions, ne serait-ce que pour des raisons pratiques. Par ailleurs, un ajustement de portefeuille est coûteux. L'achat ou la vente de titres entraîne des coûts de transaction plus ou moins proportionnels aux quantités échangées. Ces frais de transaction sont liés entre autre à la rémunération des intermédiaires, et tendent vers l'infini quand la durée entre deux ajustements de position tend vers 0.

Pour couvrir la garantie d'un portefeuille de contrats, il faut calculer les coefficients de couverture sur chaque contrat, puis faire la somme de ces coefficients pour tous les contrats.

#### 4.1.2 Intégration de coûts de transactions : modèle analytique dans le cas d'un call

L'intégration des coûts de transactions dans le cadre du modèle de Black & Scholes a été fait par Leland (1985) et par Toft (1996). Leland étudie l'influence de ces derniers dans le cas où la durée entre deux ajustements tend vers 0. Leland montre que le prix de réplcation de l'option tend vers l'infini quand l'intervalle d'ajustement tend vers 0. On sait pourtant que

l'option est dominée strictement par l'action, et que celle-ci a un coût fini. La méthode de couverture proposée par Leland n'est donc pas efficace pour des intervalles d'ajustement petits. La méthode reste cependant intéressante pour des intervalles d'ajustement plus grands. Or, pour des raisons pratiques, les assureurs ne se couvriront que quelques fois dans l'année. Nous allons suivre l'approche de Toft, qui a généralisé l'approche de Leland aux cas où l'intervalle d'ajustement ne tend pas vers 0. Nous repréons ici les résultats établis dans le cas d'une option d'achat.

Toft suppose que l'achat ou la vente d'actifs entraîne des coûts proportionnels à la quantité échangée ; il propose au vendeur de l'option de ne plus tarifier l'option en utilisant la volatilité réelle, mais en utilisant une volatilité modifiée plus importante pour tenir compte des coûts de transaction pour se couvrir.

Dans le cadre du modèle de Black & Scholes, on note  $\tilde{\sigma}$  la volatilité modifiée,  $k$  les coûts de transaction proportionnels,  $M$  la durée de la période de couverture, et  $\Delta t = t_{m+1} - t_m$  la durée séparant deux ajustements de position. L'actif  $S$  et l'obligation  $R$  suivent sous la probabilité réelle les dynamiques :

$$S_{t_m} = S_{t_0} \left[ \exp \left( \mu - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \right) (t_m - t_0) + \sigma W_{t_m - t_0} \right]$$

$$R_{t_m} = R_{t_0} \cdot \exp(r(t_m - t_0))$$

où  $t_m, m = 0, \dots, M-1$  désignent les points d'ajustement de position. La valeur de l'option est calculée avec la volatilité modifiée  $\tilde{\sigma}_m$  :

$$C_{t_m} = S_{t_m} \cdot N \left( \frac{\lambda_m + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2}{\tilde{\sigma}_m} \right) - K \cdot \exp(-r T_m) \cdot N \left( \frac{\lambda_m - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2}{\tilde{\sigma}_m} \right)$$

avec  $\sigma_m = \sigma / \sqrt{T_m}$ ,  $\lambda_m = \ln(S_{t_m}/K) + r T_m$ ,  $T_m = t_M - t_m$ . La quantité d'actif à détenir dans son portefeuille est, entre  $t_m$  et  $t_{m+1}$  :

$$\Delta_m = N \left( \frac{\lambda_m + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2}{\tilde{\sigma}_m} \right)$$

et :

$$B_{t_m} = -K \cdot \exp(-r T_m) \cdot N \left( \frac{\lambda_m - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_m^2}{\tilde{\sigma}_m} \right)$$

L'erreur de couverture (il s'agit en fait du gain algébrique entrainé par la couverture), à chaque ajustement, est :

$$H_{t_{m+1}} = \exp(r(t_{m+1} - t_m))B_{t_m} + \Delta_{t_m} S_{t_{m+1}} - C_{t_{m+1}} - TC_{t_{m+1}}$$

où  $TC_{t_{m+1}}$  désignent les frais de transaction,

$$TC_{t_{m+1}} = \frac{1}{2} k \cdot S_{t_{m+1}} \cdot |\Delta_{t_{m+1}} - \Delta_{t_m}|$$

Après calculs, on obtient (les espérances sont calculées sous la probabilité réelle) :

$$H_{t_{m+1}} \approx \frac{1}{2} \Gamma_{t_m} S_{t_m}^2 \left[ \sigma^2 \Delta t - \left( \frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right)^2 - k \cdot \left( \frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right) \right]$$

avec :

$$\Gamma_{t_m} = \frac{1}{S_{t_m} \sigma_{m,m}^2 \sqrt{\Delta t}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_{m,m}^2}{\sigma_{m,m}^2} + \frac{1}{2} \sigma_{m,m}^2 \right) \right)$$

Des calculs fastidieux permettent d'obtenir la valeur de  $\bar{\sigma}$  annulant l'erreur globale  $\sum_{i=1}^n E(H_{t_{m+1}}/F_{t_0})$  :

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot \sqrt{1 + \frac{k \sqrt{2}/\pi}{\sigma \sqrt{\Delta t}}}$$

On introduit  $\psi_{0,m}$  tel que :

$$\begin{aligned} \psi_{0,m} &= E \left( (\bar{\Gamma}_{t_m} S_{t_m}^2)^2 / F_{t_0} \right) \\ &= \frac{(S_{t_0} \exp(\mu(T_0 - T_m)))^2}{2\pi \bar{\sigma} \sqrt{t_m} \sigma_{0,m}^{**}} \cdot \exp \left( \frac{-(\lambda_{0,m}^{**} + 1/2 \sigma_{0,m}^{**})^2 - 2\sigma^2 (T_0 - T_m) \lambda_{0,m}^{**}}{\sigma_{0,m}^{**2}} \right) \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_{m,k}^{**} = \sqrt{2\sigma^2 (T_m - T_k) + \sigma^2 T_k}$$

La variance de l'erreur totale sur toute la période vaut alors :

$$\begin{aligned} Var(H/F_{t_0}) &= \sum_{m=0}^{M-1} Var(H_{t_{m+1}}/F_{t_0}) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{4} \psi_{0,m} \cdot \left( k^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2 \Delta t + 2k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^3 (\Delta t)^{\frac{3}{2}} + 2\sigma^4 (\Delta t)^2 \right) \end{aligned}$$

Toft obtient ainsi une expression de la variance de l'erreur de couverture d'un call. Il préconise en présence de coûts de transaction de tarifier avec une volatilité majorée. Pour appliquer cette idée au cas du put, nous essayons dans la partie suivante d'évaluer numériquement le coût de couverture supplémentaire qu'induisent les frais de transaction.

## 4.2 Exemples de stratégies de couverture d'un put en présence de frais de transaction

### 4.2.1 Couverture par de l'actif sans risque et de l'actif sous-jacent

#### Méthode

Les calculs menés par Toft s'appliquent au cas d'une option d'achat. On ne peut hélas pas les transposer facilement au cas de l'option de vente : l'optionisation qui donne la valeur modifiée de la volatilité est très complexe. Par ailleurs, lorsque l'échéance tend vers l'infini, la valeur du call tend vers la valeur du sous-jacent alors que la valeur du put tend vers 0. La volatilité du put est donc pour des échéances éloignées plus basse que celle du call associé, et l'expression établie par Toft est un majorant de la variance du portefeuille de couverture. Dans la mesure où nous recherchons des ordres de grandeur de l'importance des coûts de transaction et de la variance résiduelle, nous avons choisi d'évaluer numériquement ces grandeurs, par la méthode de Monte Carlo. Soit  $N$  le nombre annuel d'ajustements du portefeuille de couverture,  $k_r$  les coûts de transaction proportionnels relatifs à l'actif risqué et  $k_f$  les coûts relatifs à l'actif non risqué.

L'algorithme que nous mettons en oeuvre pour simuler une trajectoire donnée est simple :

- en  $t = 0$ , on immunise le portefeuille contre une variation de  $S$ . On prend donc sur l'actif sous-jacent une position  $\alpha_0$  telle que :

$$\frac{\partial}{\partial S} (-Put(S_0, T, K, r, \sigma) + \alpha_0 \cdot S_0 + \beta_0) = 0$$

soit :

$$\alpha_0 = -N \left( -\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

et une position  $\beta_0$  en actif non risqué tel que :

$$\beta_0 = Put(S_0, T, K, r, \sigma) - \alpha_0 \cdot S_0$$

La valeur de  $\alpha_0$  est négative : il faut prendre une position courte en actif sous-jacent. En effet, une variation de  $S$  dans un sens implique une variation dans le sens opposé du Put. Il est donc naturel de prendre une position négative pour s'immuniser.

Le coût de transaction induit par la construction du portefeuille de couverture initial est :

$$ct_0 = k_r \cdot |\alpha_0| \cdot S_0 + k_{tr} \cdot |\beta_0|$$

- au moment du  $i$ -ème ajustement ( $i \geq 1$ ),

On simule sous la probabilité réelle une nouvelle valeur de l'actif sous-jacent par :

$$S_i = S_{i-1} \cdot \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \cdot \frac{1}{N} + \sigma \sqrt{\frac{1}{N}} \cdot u \right\}$$

avec  $u \sim N(0, 1)$

On calcule la valeur du portefeuille de couverture établi à l'ajustement précédent :

$$Port_{i-1,i} = -Put(S_i, K, T - \frac{i}{N}, r, \sigma) + \alpha_{i-1} S_i + \beta_{i-1} \exp\left\{r \cdot \frac{1}{N}\right\}$$

On reconstruit un portefeuille de couverture pour la période suivante :

$$\alpha_i = -N \left( -\frac{\ln(\frac{S_i}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - \frac{i}{N})}{\sigma\sqrt{T - \frac{i}{N}}} \right)$$

$$\beta_i = Put(S_i, T - \frac{i}{N}, K, r, \sigma) - \alpha_i \cdot S_i$$

Les coûts de transaction induits par cet ajustement sont :

$$ct_i = k_r \cdot |\alpha_i - \alpha_{i-1}| \cdot S_0 + k_{tr} \cdot |\beta_i - \beta_{i-1}|$$

On calcule enfin pour chaque trajectoire le montant total des coûts de transaction :  $ct = \sum_{i=0}^{n-1} ct_i$  et la somme des erreurs de couverture :  $er = -\sum_{i=1}^{n-1} Port_{i-1,i}$  (cette somme tend vers 0 si l'on fait tendre vers 0 la durée entre deux ajustements successifs, un terme  $er$  positif indiquant que la compagnie a perdu de l'argent). Ces sommes représentent les montants qu'il faut que la compagnie injecte au fur et à mesure, en plus de la valeur théorique initiale de la garantie.

En effectuant 10000 simulations, nous calculons le montant moyen du coût de couverture, somme des coûts de transaction et de l'erreur moyenne du portefeuille de couverture ( $ct + er$ ). Nous calculons ensuite l'écart-type empirique du coût de couverture.

### Les taux courts et la volatilité

En exécutant le programme précédent pour différentes valeurs des taux courts et de la volatilité, nous obtenons les résultats suivants :

I (taux court) $\sigma$ (volatilité)	2 %	3 %	4 %	5 %
10 %	1.5 %	1.1 %	0.8 %	0.5 %
20 %	2.7 %	2.4 %	2.2 %	1.9 %
30 %	2.9 %	2.7 %	2.5 %	2.4 %
40 %	2.8 %	2.6 %	2.5 %	2.4 %

Coût moyen de la couverture ( $k_r=1\%$ ,  $k_{tr}=0.1\%$ )

I (taux court) $\sigma$ (volatilité)	2 %	3 %	4 %	5 %
10 %	1.1 %	0.9 %	0.8 %	0.8 %
20 %	2.6 %	2.6 %	2.4 %	2.3 %
30 %	4.1 %	4.0 %	3.7 %	3.7 %
40 %	5.4 %	5.1 %	5.0 %	4.9 %

Ecart-type moyen de la couverture ( $k_r=1\%$ ,  $k_{tr}=0.1\%$ )

De même que dans la première partie, le choix des taux courts et de la volatilité est très important. Le coût de couverture est une fonction croissante de la volatilité et décroissante du taux. Le fait d'avoir ajouté des coûts de transactions induit un coût de couverture de l'ordre de 2 %, qu'il faut faire payer à l'acheteur du put en plus du prix calculé par la méthode de Black & Scholes dans le premier chapitre. L'écart-type de ce coût de couverture varie de façon plus que linéaire en fonction de la volatilité. Pour une volatilité de 20 %, correspondant aux valeurs rencontrées fréquemment en pratique pour des indices boursiers, l'écart-type est de l'ordre de 2.5 % quelque soit le taux. Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le scénario central d'un volatilité de 20% et d'un taux d'intérêt à 3%.

### L'échéance du put et le nombre d'ajustements

L'efficacité de la stratégie de couverture dépend évidemment du nombre d'ajustements annuels : des ajustements fréquents permettent d'avoir en permanence un portefeuille de couverture très peu sensible aux variations de l'actif sous-jacent, mais coûtent cher. Des ajustements peu fréquents sont peu coûteux, mais impliquent des erreurs de couverture plus importantes.

N (nombre de ajustements)	T (durée du put)				
	4 ans	8 ans	12 ans	16 ans	20 ans
1	1.4 %	1.6 %	1.6 %	1.6 %	1.6 %
2	1.5 %	1.7 %	1.7 %	1.8 %	1.7 %
3	1.7 %	1.8 %	2.0 %	2.0 %	1.9 %
6	2.0 %	2.4 %	2.5 %	2.5 %	2.5 %
9	2.3 %	2.8 %	2.9 %	3.0 %	2.9 %
12	2.6 %	3.1 %	3.3 %	3.4 %	3.3 %

Coût moyen de la couverture

N (nombre de ajustements)	T (durée du put)				
	4 ans	8 ans	12 ans	16 ans	20 ans
1	6.2 %	5.9 %	5.6 %	5.2 %	4.9 %
2	4.5 %	4.2 %	3.9 %	3.7 %	3.4 %
3	3.7 %	3.4 %	3.3 %	3.1 %	2.9 %
6	2.7 %	2.6 %	2.5 %	2.4 %	2.3 %
9	2.3 %	2.3 %	2.3 %	2.3 %	2.2 %
12	2.1 %	2.2 %	2.2 %	2.2 %	2.3 %

Ecart-type du coût de couverture

Le coût de couverture dépend beaucoup du nombre d'ajustements annuels mais assez peu de l'échéance du put couvert. Cela s'explique car la sensibilité du put à la valeur du sous-jacent est beaucoup plus faible pour les puts d'échéance éloignée que pour ceux d'échéance rapprochée. Le fait de devoir rajuster le portefeuille un nombre de fois beaucoup plus élevé est compensé les premières années par des ajustements moins importants donc des coûts de transaction à chaque ajustement plus faibles.

L'écart-type est très élevé pour un ajustement annuel. Il diminue ensuite assez rapidement, pour devenir stationnaire autour de 2.5 % à partir de 6 ajustements annuels et ce quelque soit l'échéance.

Compte tenu de ces résultats, il semble optimal d'effectuer 6 ajustements annuels. Dans ce cas, l'écart-type est presque minimal pour des coûts de couverture assez bas.

L'écart-type de l'erreur ne tend pas vers 0 lorsqu'on augmente le nombre d'ajustements annuels à cause des coûts de transactions. L'erreur de couverture tend vers 0, mais les coûts de transaction restent importants, d'où une variance résiduelle non nulle.

### Les coûts de transaction

L'influence des coûts de transaction sur le coût de couverture moyen et l'écart-type est résumé dans le tableau suivant :

Coûts de transaction de l'action / Coûts de transaction de l'actif sans risque	0 %	0.4 %	0.8 %	1.2 %	1.6 %	2 %	2.4 %
0 %	0.1 %	0.9 %	1.8 %	2.6 %	3.5 %	4.3 %	5.2 %
0.1 %	0.3 %	1.1 %	2.0 %	2.9 %	3.7 %	4.6 %	5.4 %
0.2 %	0.5 %	1.4 %	2.2 %	3.1 %	4.0 %	4.7 %	5.6 %
0.3 %	0.7 %	1.6 %	2.5 %	3.3 %	4.2 %	5.0 %	5.9 %
0.4 %	0.9 %	1.8 %	2.7 %	3.5 %	4.4 %	5.2 %	6.1 %
0.5 %	1.2 %	2.0 %	2.9 %	3.8 %	4.6 %	5.5 %	6.3 %
0.6 %	1.5 %	2.2 %	3.1 %	4.0 %	4.8 %	5.7 %	6.5 %
0.7 %	1.6 %	2.5 %	3.3 %	4.2 %	5.0 %	5.9 %	6.7 %
0.8 %	1.9 %	2.7 %	3.6 %	4.4 %	5.2 %	6.1 %	7.0 %
0.9 %	2.1 %	3.0 %	3.8 %	4.7 %	5.5 %	6.4 %	7.2 %
1 %	2.3 %	3.2 %	4.0 %	4.9 %	5.7 %	6.6 %	7.4 %

Coût moyen de la couverture

Coûts de transaction de l'action		Ecart-type du coût de la couverture									
/ Coûts de transaction de l'actif sans risque	0 %	0.4 %	0.8 %	1.2 %	1.6 %	2 %	2.4 %	2.8 %	3.2 %	3.6 %	4.0 %
0 %	2.2 %	2.3 %	2.4 %	2.6 %	2.8 %	3.0 %	3.3 %	3.6 %	3.9 %	4.2 %	4.5 %
0.1 %	2.2 %	2.3 %	2.5 %	2.6 %	2.8 %	3.1 %	3.4 %	3.7 %	4.0 %	4.3 %	4.6 %
0.2 %	2.3 %	2.4 %	2.5 %	2.7 %	2.9 %	3.1 %	3.5 %	3.8 %	4.1 %	4.4 %	4.7 %
0.3 %	2.3 %	2.4 %	2.5 %	2.7 %	2.9 %	3.0 %	3.2 %	3.5 %	3.8 %	4.1 %	4.4 %
0.4 %	2.3 %	2.5 %	2.5 %	2.8 %	3.0 %	3.2 %	3.5 %	3.8 %	4.1 %	4.4 %	4.7 %
0.5 %	2.4 %	2.5 %	2.6 %	2.7 %	3.0 %	3.3 %	3.6 %	3.9 %	4.2 %	4.5 %	4.8 %
0.6 %	2.4 %	2.5 %	2.6 %	2.8 %	3.1 %	3.4 %	3.7 %	4.0 %	4.3 %	4.6 %	4.9 %
0.7 %	2.4 %	2.6 %	2.7 %	2.9 %	3.2 %	3.5 %	3.8 %	4.1 %	4.4 %	4.7 %	5.0 %
0.8 %	2.5 %	2.6 %	2.8 %	3.0 %	3.3 %	3.6 %	3.9 %	4.2 %	4.5 %	4.8 %	5.1 %
0.9 %	2.4 %	2.6 %	2.8 %	3.1 %	3.4 %	3.7 %	4.0 %	4.3 %	4.6 %	4.9 %	5.2 %
1 %	2.5 %	2.7 %	2.9 %	3.1 %	3.5 %	3.8 %	4.1 %	4.4 %	4.7 %	5.0 %	5.3 %

Quels que soient les coûts de transaction, l'écart-type résiduel est assez homogène, autour de 2 à 2.5 % (3 à 4 % pour des coûts de transaction très élevés). Les coûts de couverture varient en revanche beaucoup en fonction des frais de transaction. En effet, l'erreur de couverture est très faible, et le coût est presque exclusivement dû aux frais de transaction. Le coût de couverture est en conséquence presque proportionnel aux taux de frais de transactions appliqués.

Nous avons considéré pour les évaluations numériques des coûts de transaction assez élevés car la position prise sur l'actif risqué est courte. Il est en effet beaucoup plus onéreux de vendre un titre à découvert plutôt que de l'acheter : il faut en effet emprunter le titre avant de le vendre. Cet emprunt de titres occasionne des coûts supplémentaires. Nous avons également choisi de tenir compte des coûts de transaction sur l'actif sans risque en les fixant à 0.1 %.

#### 4.2.2 Couverture par de l'actif sans risque et des options

##### Méthode

La méthode de couverture proposée par Toft utilise l'actif sans risque et le sous-jacent. Compte-tenu de la complexité et du niveau élevé du coût d'une

opération de vente à découvert, il pourrait pourtant sembler plus naturel pour les assureurs de couvrir les garanties plancher en achetant des options sur le marché. Malheureusement, les puts relativement liquides que l'on peut trouver sur le marché ont une échéance très rapprochée (de l'ordre de 1 an) par rapport à celle des puts que l'on cherche à couvrir (10, voire 20 ans). Il s'agit alors d'élaborer une stratégie de couverture d'options de long terme avec des options de court terme. On pourrait intuitivement penser à prendre une position sur le put d'échéance un an et de même strike que celui que l'on veut couvrir, puis conserver cette position jusqu'à l'échéance du put. A ce moment, on exerce le put si le cours du sous-jacent a baissé et on achète de l'actif avec le produit de la vente ; on ne fait rien dans le cas contraire (le put n'a plus de valeur). On reprend ensuite une position similaire sur un nouveau put d'échéance un an, et ainsi de suite. Une telle stratégie n'est malheureusement pas optimale. Elle garantit à chaque fin d'année le montant du strike. Elle coûte donc très cher : il faut acheter tous les puts successifs d'échéance un an au fur et à mesure des années. Or, vu d'aujourd'hui, le prix dans 5 ans d'un put d'échéance un an est le prix aujourd'hui d'un put de caractéristiques équivalentes et d'échéance 6 ans. Cette stratégie coûte donc la somme du prix des puts ! On comprend donc bien que cette stratégie, quoique intuitive, n'est pas efficace du tout.

- En revanche, une couverture par des puts pourrait être celle-ci :
- Acheter en 0 le nombre de puts d'échéance un an nécessaires pour une couverture en delta neutre.
- A chaque ajustement, revendre le put acquis à l'ajustement précédent (dont l'échéance résiduelle n'est plus que  $1 - \frac{1}{N}$  années) puis racheter le nombre nécessaire de puts d'échéance un an pour se replacer en delta neutre.

En menant des calculs analogues à ceux de Toft, on pourrait obtenir une expression de l'espérance et la variance de l'erreur de couverture. Les calculs sont malheureusement très lourds, et nous avons préféré exprimer numériquement l'erreur de couverture.

Nous calculons donc dans le scénario central étudié jusqu'aujourd'hui (un unique support de volatilité 20 %, et un taux sans risque de 3 %) l'erreur moyenne et sa variance. Nous nous plaçons pour effectuer ce calcul sous la probabilité réelle.

On peut envisager cette couverture en achetant à chaque ajustement des puts de strike égal à la valeur initiale de la provision mathématique ou des puts de strike égal à la valeur actuelle de la provision mathématique. La seconde solution semble être la plus raisonnable, d'abord parce que la valeur de la provision mathématique peut après quelques années s'être considérablement éloignée de sa valeur initiale (on ne pourrait alors peut-être trouver sur le marché des puts de strike égal à la valeur initiale), mais aussi parce qu'à un instant donné, les puts les plus échangés donc les plus liquides sont ceux de strike très proche de la valeur courante de l'actif sous-jacent.

**L'échéance du put et le nombre d'ajustements en fonction du strike**  
 Comme dans la partie précédente, nous calculons l'erreur de couverture moyenne, le montant moyen des coûts de transaction et l'écart-type du coût de la couverture par une méthode de Monte-Carlo : nous simulons 10000 trajectoires pour l'actif sous-jacent, avec des valeurs du taux court et de la volatilité égales respectivement à 3 % et 20 %.

Le coût est à nouveau la somme des coûts non actualisés qui sont engagés à chaque ajustement, que ce soit à cause de l'évolution de l'actif sous-jacent ou au titre des coûts de transaction engagés lors de l'ajustement du portefeuille de couverture. Les résultats de ce type de couverture sont donc très mauvais. Le coût est bas lorsque l'échéance du put à couvrir est rapprochée et le nombre d'ajustements faible mais il croît de manière plus que proportionnelle en fonction du nombre d'ajustements. En effet, à chaque ajustement, la stratégie consiste à revendre tous les puts servant à la couverture puis à en racheter d'autres. Chaque ajustement supplémentaire induit donc un coût proportionnel au montant investi dans les puts. Dans la partie précédente, si on augmentait le nombre d'ajustements annuels, diminuant ainsi l'intervalle entre deux ajustements, la variation de l'actif sous-jacent était moins importante (la variance des variations est en racine de  $t$ ). L'ajustement de la position devenait alors moins coûteux puisqu'il ne portait que sur la variation des quantités d'actifs détenus avant et après l'ajustement.

Pour pallier cet inconvénient, nous pourrions aussi envisager une stratégie où la vente et le rachat de l'ensemble des puts ne se ferait pas à chaque ajustement. A chaque ajustement, on ajusterait la position sur les puts déjà rachetés dans le portefeuille, alors que l'on ne revendrait tous les puts et ne rachèterait des puts "plus jeunes" que, par exemple, tous les trois ajustements. Nous n'avons pas étudié l'efficacité d'une telle stratégie.

Nous avons en revanche étudié l'efficacité d'une couverture avec des puts de strike égal à la valeur courante de l'actif sous-jacent. Le coût est beaucoup plus faible que dans le cas où l'on utilise des puts dont le strike est la valeur initiale du sous-jacent.

Le coût moyen obtenu en se couvrant avec un put de strike égal à la valeur courante de l'actif sous-jacent est :

N (nombre de ajustements)	T (durée du put)				
	4 ans	8 ans	12 ans	16 ans	20 ans
1	0.2 %	0.2 %	0 %	0 %	0 %
2	0.6 %	0.9 %	1.1 %	1.1 %	1.2 %
3	1.0 %	1.5 %	1.8 %	2.0 %	2.1 %
6	2.2 %	3.2 %	3.9 %	4.2 %	4.4 %
9	3.2 %	4.9 %	5.9 %	6.4 %	6.8 %
12	4.3 %	6.56 %	7.9 %	8.6 %	9.0 %

Coût moyen de la couverture

L'écart-type correspondant est :

N (nombre de ajustements)	T (durée du put)				
	4 ans	8 ans	12 ans	16 ans	20 ans
1	6.0 %	7.5 %	7.9 %	7.6 %	7.7 %
2	4.0 %	4.9 %	5.0 %	5.1 %	5.0 %
3	3.3 %	4.0 %	4.3 %	4.4 %	4.3 %
6	2.7 %	3.5 %	4.0 %	4.2 %	4.4 %
9	2.7 %	3.8 %	4.6 %	5.1 %	5.6 %
12	3.1 %	4.6 %	5.6 %	6.4 %	6.9 %

Ecart-type du coût de couverture

Malgré le coût très élevé de la stratégie, l'écart-type est élevé dès que  $N$  ou  $T$  croissent. Cette méthode de couverture est donc à proscrire, dans la mesure où l'on peut s'en passer. La couverture d'un put contenant des actifs peu négociés ou difficiles à vendre à découvert peut en effet nécessiter l'utilisation d'options corrélées (par exemple sur le Matif pour couvrir des obligations).

### 4.2.3 Couverture par de l'actif sans risque, de l'actif risqué et des options

Le fait de disposer de deux instruments de couverture différents doit permettre, en théorie, de mieux se couvrir puisque l'existence de deux degrés de

liberté dans le choix de la couverture permet d'annuler le delta mais aussi une autre dérivée. Nous avons donc envisagé des couvertures de type delta-vega ou de type delta-gamma.

### La couverture delta-vega

La couverture delta-vega consiste à annuler à chaque instant non seulement le delta (la dérivée par rapport au cours de l'actif sous-jacent) mais aussi le vega (la dérivée par rapport à la volatilité de l'actif sous-jacent). Cette approche peut sembler incohérente avec le modèle de Black & Sholes puisque celui-ci suppose la volatilité  $\sigma$  constante. Pourtant, certains auteurs ont montré que ce type de couverture était en l'absence de coûts de transaction plus efficace que la couverture en gamma (cf Baleshi, Cao et Chen(1997)). En fait, ces auteurs ont évalué l'intérêt de ce type de couverture sur des données réelles, alors que nous calculons l'efficacité d'une couverture en nous basant sur des simulations qui suivent une loi lognormale. Ce type de couverture ne sera probablement pas très efficace.

Les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  d'actif sous-jacent et de puts dans le portefeuille de couverture sont telles que, en notant  $T_{opt}$  l'échéance de l'option à couvrir et  $T_{cov}$  l'échéance de l'option utilisée dans la couverture :

$$\bullet \frac{\partial P_{opt}}{\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial S} (-Put(S_0, K, T_{opt}) + \alpha Put(S_0, K, T_{cov}) + \beta S_0) = 0$$

$$N \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{opt}}{\sigma \sqrt{T_{opt}}} \right) - \alpha N \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{cov}}{\sigma \sqrt{T_{cov}}} \right) + \beta = 0$$

$$\bullet \frac{\partial P_{opt}}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} (-Put(S_0, K, T_{opt}) + \alpha Put(S_0, K, T_{cov}) + \beta S_0) = 0$$

$$-S_0 \sqrt{T_{opt}} n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{opt}}{\sigma \sqrt{T_{opt}}} \right) + \alpha S_0 \sqrt{T_{cov}} n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{cov}}{\sigma \sqrt{T_{cov}}} \right) = 0$$

où  $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$   
donc :

$$\alpha = \sqrt{\frac{T_{opt}}{T_{cov}}} \frac{n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{opt}}{\sigma \sqrt{T_{opt}}} \right)}{n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{cov}}{\sigma \sqrt{T_{cov}}} \right)}$$

$$\beta = -N \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{opt}}{\sigma \sqrt{T_{opt}}} \right) + \sqrt{\frac{T_{opt}}{T_{cov}}} \frac{n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{opt}}{\sigma \sqrt{T_{opt}}} \right)}{n \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{cov}}{\sigma \sqrt{T_{cov}}} \right)} N \left( \frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T_{cov}}{\sigma \sqrt{T_{cov}}} \right)$$

Cette stratégie de couverture n'est hélas pas efficace en présence de coûts de transaction. En effet, le fait de prendre une position de couverture définie par un rapport d'exponentielles peut conduire à prendre des positions qui tendraient vers l'infini. Ainsi, si l'actif diminue de 30 % (ce scénario n'est pas très probable, mais il se présente régulièrement dans les simulations), l'application de cette stratégie pour une maturité résiduelle de 8 ans conduit à  $\alpha = 3.9$  et  $\beta = 2.8$ . Les coûts de transaction sont alors de 2.5 % pour un seul ajustement. Avec 6 ajustements annuels et plusieurs années de couverture active, les coûts de transaction sont en moyenne supérieurs à la valeur initiale de la provision mathématique.

Preions l'exemple d'une chute violente de l'actif, de telle sorte que  $S = 0.53$  à  $t = 8$  ans de l'échéance du put. La position à prendre pour se couvrir en delta-vega est de plus de 150 unités en put et en action. Il en résulte des coûts de transaction de 1.23 % de la provision mathématique, pour cet ajustement seul (la couverture delta neutre avec des actions implique dans cet exemple précis des coûts inférieurs à 0.3 %) ! Le gain en terme d'erreur de couverture ne saurait évidemment justifier l'utilisation d'une telle stratégie.

### La couverture delta-gamma

La deuxième dérivée que l'on annule est dans ce cas la dérivée seconde par rapport à l'actif sous-jacent. En théorie, annuler la dérivée seconde devrait permettre de rajuster moins souvent le portefeuille de couverture pour obtenir une variance de même ordre de grandeur. Si on note toujours  $\alpha$  et  $\beta$  les quantités respectives de put et d'actif risqué dans le portefeuille de couverture, on obtient :

$$\bullet \frac{\partial^2 P_{opt}}{\partial S^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial S^2} (-Put(S_0, K, T_{opt}) + \alpha Put(S_0, K, T_{cov}) + \beta S_0) = 0$$

$$\frac{1}{50\sigma\sqrt{T_{opt}}n} \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{opt}}{\sigma\sqrt{T_{opt}}} \right) + \alpha \frac{1}{50\sigma\sqrt{T_{couv}}n} \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{couv}}{\sigma\sqrt{T_{couv}}} \right) =$$

donc :

$$\alpha = \sqrt{\frac{T_{couv}}{T_{opt}}} \frac{n \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{opt}}{\sigma\sqrt{T_{opt}}} \right)}{n \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{couv}}{\sigma\sqrt{T_{couv}}} \right)}$$

$$\beta = -N \left( -\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{opt}}{\sigma\sqrt{T_{opt}}} \right) + \sqrt{\frac{T_{couv}}{T_{opt}}} \frac{n \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{opt}}{\sigma\sqrt{T_{opt}}} \right)}{n \left( \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{couv}}{\sigma\sqrt{T_{couv}}} \right)} N \left( -\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_{couv}}{\sigma\sqrt{T_{couv}}} \right)$$

De manière analogue à la couverture précédente, la couverture en delta-gamma induit des coûts de transaction très élevés. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus ( $S = 0.53$ ,  $T = 8$  ans), une couverture en delta-gamma requiert de prendre une position d'environ 19 unités sur le put et sur l'action. Les coûts de transaction qui en résultent sont moins importants que dans le cas précédent, mais ils s'élevaient tout de même à 15 % de la provision mathématique initiale sur un seul ajustement, alors qu'une couverture dynamique implique une trentaine ou une quarantaine d'ajustements ! Ce type de couverture n'est donc pas non plus à retenir à cause des frais de transaction.

### 4.3 La couverture du contrat multisupport élémentaire

Les chiffres que nous obtenons dans la partie précédente sont très élevés, mais ils concernent un contrat à support unique. Dans cette partie, nous nous plaçons à nouveau dans le cadre du contrat multisupport le plus simple, étudié en (3.1). Le contrat comporte un support sans risque (capitalisant au taux continu  $r = 3\%$ ) et un support de type "actions" ou sicav, modélisé

par une loi lognormale de volatilité 20 %. Seule une part  $\alpha$  de la prime est investie dans le support risqué, le reste étant placé au taux sans risque. Nous calculons numériquement le coût de couverture et l'écart-type de ce coût pour un put d'échéance  $T$ , de strike  $K = 1 - (1 - \alpha)e^{rT}$ , sur l'actif de valeur initiale  $\alpha$ . Nous avons vu en (3.1) que le coût des puts diminue fortement en fonction de l'échéance car le strike diminue.

Le coût de couverture devient ( $N = 6$ ):

échéance \ part risquée	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
2	0.3 %	0.5 %	0.7 %	0.9 %	1.1 %	1.3 %	1.4 %
4	0.2 %	0.5 %	0.7 %	1.0 %	1.3 %	1.5 %	1.7 %
6	0.1 %	0.4 %	0.7 %	1.0 %	1.3 %	1.6 %	1.9 %
8	0 %	0.2 %	0.6 %	0.9 %	1.3 %	1.6 %	2.0 %
10	0 %	0.1 %	0.4 %	0.8 %	1.2 %	1.6 %	2.0 %
12	0 %	0.1 %	0.3 %	0.7 %	1.2 %	1.6 %	2.1 %
14	0 %	0 %	0.2 %	0.6 %	1.1 %	1.5 %	2.1 %
16	0 %	0 %	0.1 %	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %
18	0 %	0 %	0.1 %	0.4 %	0.8 %	1.4 %	1.9 %
20	0 %	0 %	0 %	0.3 %	0.7 %	1.3 %	1.9 %

Coût moyen de la couverture

Le coût de couverture diminue fortement quand la part non risquée augmente. Pour un contrat investi à 30 ou 40 % en actif risqué, il n'y a quasiment plus de coûts de transaction car le risque s'était très vite.

Pour un contrat investi à 70 ou 80 % en actif risqué, il faut retenir des coûts de couverture de l'ordre de 1.4 %.

L'écart-type de ce coût de couverture est :

échéance \ part risquée	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
2	0.6 %	0.9 %	1.2 %	1.5 %	1.8 %	2.1 %	2.4 %
4	0.4 %	0.7 %	1.1 %	1.4 %	1.7 %	2.0 %	2.3 %
6	0.2 %	0.6 %	0.9 %	1.3 %	1.6 %	2.0 %	2.3 %
8	0.1 %	0.4 %	0.8 %	1.1 %	1.5 %	1.9 %	2.3 %
10	0 %	0.2 %	0.6 %	1.0 %	1.4 %	1.8 %	2.2 %
12	0 %	0.1 %	0.5 %	0.9 %	1.3 %	1.7 %	2.1 %
14	0 %	0 %	0.3 %	0.7 %	1.2 %	1.6 %	2.1 %
16	0 %	0 %	0.2 %	0.6 %	1.1 %	1.5 %	1.9 %
18	0 %	0 %	0.1 %	0.5 %	0.9 %	1.4 %	1.9 %
20	0 %	0 %	0 %	0.4 %	0.8 %	1.3 %	1.8 %

Ecart-type du coût de la couverture



L'écart-type diminue aussi, mais dans des proportions plus faibles que le coût. Pour des contrats investis à 30 ou 40 % en actif risqué, il reste un écart-type faible de l'ordre de 0,3 %.

Pour un contrat investi à 70 ou 80 % en actif risqué, l'écart-type reste de l'ordre de 1,6 %. Il diminue donc d'environ 30 % par rapport au contrat investi en intégralité en actif risqué.

Pour un contrat investi à 80 % en actif risqué, si on suppose que le portefeuille est bien mutualisé c'est-à-dire que le nombre de décès annuel suit exactement les tables de mortalité, le coût de couverture et l'écart-type de cette couverture sont les moyennes pondérées par les coefficients des tables de mortalité des coûts de couverture et des écart-types établis plus haut pour les puts. Selon l'âge, on obtiendra des coûts moyens de 1 à 1,5 % de la provision mathématique et un écart-type de 1,5 à 2 %.

## Chapitre 5

### La prise en compte des décès et le risque résiduel

#### 5.1 La variance prenant en compte l'aléa de mortalité

Nous avons calculé dans la partie précédente l'écart-type du put, qui est le coût de la garantie si le décès est déterministe. L'écart-type de la valeur de la garantie provient également de la date aléatoire du décès. On dispose pour chaque date de décès de l'espérance et de l'écart-type du "coût de la garantie". Pour calculer l'espérance et la variance totale, nous avons d'abord pensé utiliser la formule :

$$E(Gar) = E_{\text{décès}}(E(Gar/Décès))$$

$$Var(Gar) = Var_{\text{décès}}(E(Gar/Décès)) + E_{\text{décès}}(Var(Gar/Décès))$$

On ne peut malheureusement pas raisonner ainsi : le coût de la garantie à date de décès donnée est un coût de couverture. C'est le montant qu'il est nécessaire d'investir en 0 pour obtenir  $(K - S)_+$  au moment du décès. Ce n'est donc pas une somme nécessaire a posteriori, c'est un montant a priori nécessaire s'il est placé convenablement. Cela ne change rien dans le cas où le décès est déterministe : on sait quelle stratégie de couverture adopter et le coût pour l'assureur est bien celui qui a été calculé. Si en revanche la date

de décès devient aléatoire, il faut également prendre en compte le coût qu'a représenté le fait de se couvrir avec des instruments qui n'étaient pas adaptés.

Plaçons nous dans un cas simple. Avec des coûts de transaction nuls et la possibilité de se couvrir en continu. Avec ces spécifications, la valeur du Put d'échéance  $i$  en 0 est exactement le prix de la garantie pour un décès en  $t = i$ .

Supposons qu'il n'y ait que deux dates de décès possibles ( $t = 1$  ou  $t = 2$ ) équiprobables.

Le coût a priori s'écrit alors :

$$Gar_0 = \frac{1}{2} Put_0(S_0, K, 1) + \frac{1}{2} Put_0(S_0, K, 2)$$

Supposons que 100 assurés aient tous investi en 0 un montant 100. On observe  $N$  décès l'année 1 ( $E(N) = 50$ ).

En  $t = 1$ , l'assureur qui s'est couvert dans les proportions initiales ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ) dispose de  $50 \cdot (100 - S_1)_+ + 50 \cdot Put_1(S_1, K = 100, T = 1)$

(on note  $Put_t$  le put évalué à la date  $t$ )

L'assureur doit régler au titre de la garantie  $N \cdot (100 - S_1)_+$ . Il doit provisionner en vue des décès de l'année suivante :  $(100 - N) \cdot Put_1(S_1, K = 100, T = 1)$ . Il doit donc faire face à une charge de

$$(N - 50) \cdot ((100 - S_1)_+ - Put_1(S_1, K = 100, T = 1))$$

La variance de la charge totale vue de 0 est alors :

$$\begin{aligned} Var(Gar_0 + (N - 50) \cdot ((100 - S_1)_+ - Put_1(S_1, K = 100, T = 1))) \\ = Var(E\{(N - 50) \cdot ((100 - S_1)_+ - Put_1(S_1, K = 100, T = 1)) / N\}) \\ + E\{Var\{(N - 50) \cdot ((100 - S_1)_+ - Put_1(S_1, K = 100, T = 1)) / N\}\}) \end{aligned}$$

Pour  $N$  indépendant de  $S_1$ , cette variance vaut :

$$\begin{aligned} Var((N - 50) \cdot [Put_0(S_0, K, 1) - Put_0(S_0, K, 2)]) + \\ E\{(N - 50)^2\} \cdot Var\{((100 - S_1)_+ - Put_1(S_1, K = 100, T = 1))\} \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à la variance que l'on aurait si le coût de la garantie était  $Put_0(S_0, K, 1)$  avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et  $Put_0(S_0, K, 2)$  avec

une probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le deuxième terme provient du problème de couverture évoqué plus haut. Si on ajoute alors des frais de transaction et l'impossibilité de se couvrir en continu, on rend aléatoires les sommes à investir pour obtenir  $(K - S_t)_+$  en  $t$  (au lieu de  $Put_0(S_0, K, i)$ ), la somme à investir suit une loi d'espérance :  $Put_0(S_0, K, i) + \text{coût de couverture}$  et de variance la variance évaluée numériquement dans la partie précédente). Le problème de l'erreur de couverture lié au mauvais choix du portefeuille de couverture en 0 reste, et la variance que l'on calcule au début du paragraphe minore la variance réelle.

L'évaluation analytique de la variance supplémentaire induite par l'aléa de mortalité étant très complexe, nous préférons la prendre en compte en effectuant des simulations numériques de la distribution du coût de la garantie.

## 5.2 Quelle stratégie adopter ?

Le niveau naturel de tarification de la garantie couverte est la somme de la valeur de la garantie calculée en 3.1 et de l'espérance du coût de couverture calculée dans la partie précédente. Dans le cas d'une garantie non couverte, il n'est évidemment pas suffisant d'évaluer l'espérance des prestations versées : leur variance est élevée et doit être prise en compte.

A ce stade du mémoire, nous devons répondre à la question suivante : vaut-il mieux se couvrir, essayer des coûts certains liés aux ajustements, mais avoir une probabilité de faillite faible, ou vaut-il mieux ne pas se couvrir, et donc accepter un risque plus élevé mais ne pas assumer de coûts supplémentaires ?

Supposons que l'entreprise décide de n'accepter qu'un risque de faillite inférieur à 1 %. L'entreprise doit donc avoir en fonds propres une somme égale au quantile à 99 % de la distribution (auquel on retranche l'espérance des coûts, qui doivent être facturés). Le fait de conserver en permanence de tels fonds propres représente un coût pour l'entreprise : les actionnaires qui apportent leur argent espèrent une rémunération largement supérieure au taux sans risque. L'entreprise d'assurance doit donc, pour être en mesure de conserver en permanence ce niveau de fonds propres, prélever sur l'encours des assurés une somme permettant de financer cet excès de rémunération.

Supposons que les actionnaires exigent un niveau de rémunération des fonds propres de 15 %. Les fonds propres sont placés au taux sans risque, à 3 %. Il faut donc que l'entreprise finance sur son activité l'excédent de

rémunération, soit 12 % des fonds propres tous les ans.

En raisonnant comme au second chapitre, on obtient le coût de la rémunération sur la vie du contrat en multipliant cette rémunération excédentaire par la durée de vie moyenne des contrats.

Avec un taux de chute annuel de 4 %, la durée de vie moyenne des contrats selon l'âge est :

âge de souscription	durée de vie moyenne du contrat
40 ans	7.65 ans
50 ans	8.01 ans
60 ans	7.74 ans
70 ans	6.69 ans
moyenne pondérée	7.74 ans

On peut donc considérer que la durée de vie moyenne des contrats est de l'ordre de 7.5 ans. Pour que l'entreprise puisse conserver sur toute la vie du contrat 1 % de fonds propres, il faut qu'elle prélève  $0.12 * 7.5 = 0.90 \approx 1\%$  des provisions mathématiques<sup>1</sup>.

On peut donc, pour intégrer le besoin de marge dans le cas d'une garantie non couverte, conserver comme mesure agrégée le quantile à 99 % de la distribution  $(0.90 * (\text{quantile-coût}) + \text{coût} \approx \text{quantile})$ . Dans le cas d'une garantie couverte, il convient de même d'ajouter le quantile à 99 % des coûts de couverture au prix de la garantie calculée en 3.1.

## 5.3 Le risque en l'absence de couverture

### 5.3.1 Le coût d'un put non couvert

Nous nous replaçons ici dans le cadre du contrat à support unique. Les options de vente sont évaluées par la formule de Black & Scholes. Nous étudions le risque qui pèse sur un put vendu sans stratégie de couverture. Le vendeur du put s'engage à verser à l'échéance  $(K - S_T)_+$ . S suit sous la probabilité réelle la dynamique suivante :

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

<sup>1</sup> Si on actualise les flux au taux de 3 % l'an, la valeur actuelle de l'ensemble des flux à verser aux actionnaires devient 0.82 au lieu de 0.90.

Le coût réel moyen à la charge de l'assureur est l'espérance de sa perte actualisée. Si l'on désigne par  $P(\mu, K, T) = e^{-rT} E\{(K - S_T)_+\}$  la valeur du put d'échéance  $T$  et de strike  $K$  pour un taux sans risque  $\mu$ , on a :  $e^{-rT} E\{(K - S_T)_+\} = P(\mu, K, T) e^{-(r-\mu)T}$ . Nous représentons dans le tableau suivant les différentes valeurs de  $e^{-rT} E\{(K - S_T)_+\}$  selon les valeurs de  $T$  pour  $\mu = 0.03$  et  $\mu = 0.07$  :

anticipation de croissance de l'action échéance du put	$\mu = 0.03$		$\mu = 0.07$	
	1	6.6 %	5.0 %	
5	10.6 %	5.6 %		
9	11.2 %	4.6 %		
13	10.9 %	3.6 %		
17	10.2 %	2.8 %		
21	9.4 %	2.1 %		

Espérance des flux à verser sans couverture

Pour des valeurs de  $\mu$  supérieures à 3 %, l'espérance de perte liée à la vente du put diminue fortement. En effet, si on suppose que l'action progresse plus vite, la garantie jouera moins souvent.

L'écart-type de cette perte est, avec les mêmes données (obtenues avec 10000 simulations de type Monte-Carlo) :

anticipation de croissance de l'action échéance du put	$\mu = 0.03$		$\mu = 0.07$	
	1	9.8 %	9.0 %	
5	17.8 %	14.6 %		
9	21.2 %	16.2 %		
13	23.4 %	16.7 %		
17	24.9 %	16.5 %		
21	26.1 %	13.0 %		

Ecart-type des flux à verser sans couverture

Les écart-types sont importants quelle que soit la valeur de  $\mu$ . On comprend bien sur ce tableau la nécessité pour un assureur de se couvrir : pour  $\mu = 0.07$  (ce qui est relativement optimiste), l'écart-type d'un put d'échéance 9 ans est de 16 %. La variance de la garantie est encore augmentée par l'aléa relatif aux décès. L'écart-type du coût de la garantie non couverte est donc très élevé, alors que le minimum de marge réglementaire est de seulement

4 % sur ce type de contrats<sup>2</sup>, et que la marge correspondait à la garantie plancher n'est que de 3 %<sup>3</sup>. Cette garantie fait donc peser un risque de ruine sur longue période. Il faut cependant modérer cette affirmation : nous avons en effet considéré des contrats investis en totalité en actif risqué, en l'absence de toute dette. Dans la partie suivante, nous levons ces restrictions.

### 5.3.2 Le coût de la garantie non couverte

Plus précisément, nous avons simulé la distribution du coût de la garantie non couverte pour un portefeuille de 100 assurés qui souscrivent à l'âge de 50 ans.

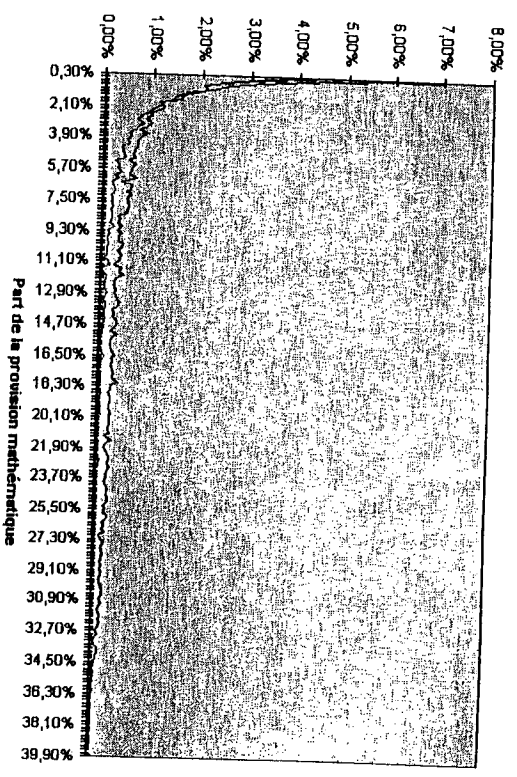
Les différentes étapes de la simulation sont :

- Chaque année, tirer aléatoirement :
  - le nombre de décès parmi les survivants selon la TD 88/90
  - la valeur future de l'actif sous jacent
- Calculer le coût de la garantie actualisé en 0 pour ces décès (coût<sub>t</sub> =  $e^{-rt} \cdot (K - S_t) \cdot N \cdot B_{\text{décès}_t}$ ).
- Sommer ces coûts pour toutes les années jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de survivants

Selon que  $\mu = 0,03$  ou  $\mu = 0,07$ , nous représentons la distribution des prestations versées, pour un âge de souscription de 50 ans :

<sup>2</sup> Les directives européennes imposent en effet une marge de 4 % sur les contrats pour lesquels l'assureur assume un risque de placement. La marge réglementaire est de 1 % dans le cas contraire.

<sup>3</sup> En effet, des 4 %, il faut déduire la marge qui correspond aux risques courus en l'absence de tout risque de placement (1 %).



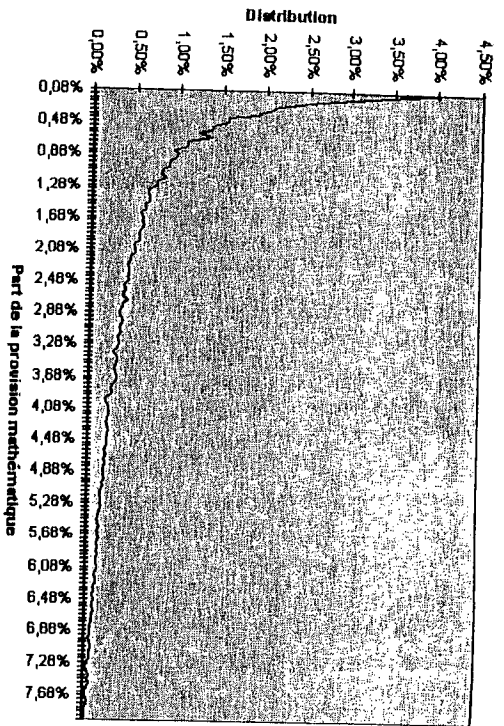
Distribution du coût de la garantie (10000 simulations)

Avec une marge de 3 % et en supposant que la société a prélevé l'espérance des prestations, soit 1.92 %, on voit qu'une société dont tous les contrats seraient investis sur un support unique couvrant à long terme (sur toute la vie du contrat...) un risque de faillite<sup>4</sup> important d'environ 12 % pour  $\mu = 7$  %.

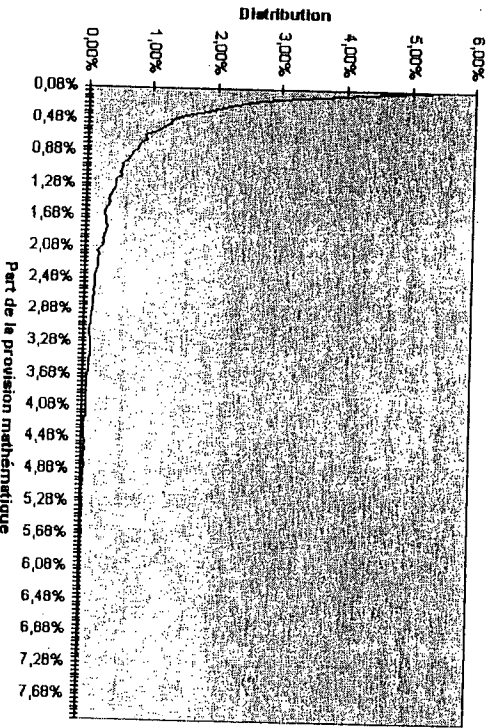
Pour obtenir des grandeurs plus réalistes, nous considérons désormais le cas du contrat investi initialement à 80 % en actif risqué et à 20 % en actif non risqué, avec un taux de chutes annuel de 4 %.

Selon que  $\mu = 0,03$  ou  $\mu = 0,07$ , nous représentons la distribution des prestations versées pour un âge de souscription de 50 ans :

<sup>4</sup> Nous employons le terme de faillite pour désigner la situation dans laquelle l'entreprise ne peut régler les prestations dues aux assurés en utilisant les montants prélevés au titre de la garantie et la marge sensée la couvrir.



Distribution du coût pour l'assureur ( $\mu = 3\%$ , 50000 simulations) (valeur en 0 : 28%)



Distribution du coût pour l'assureur ( $\mu = 7\%$ , 50000 simulations) (valeur en 0 : 51%)

Le risque de faillite calculé selon les mêmes modalités que plus haut est alors ramené à 3 % (pour une tarification de 0.5 %).

Dans la mesure où on ne se couvre pas, le coût de la garantie dépend fortement de la valeur de  $\mu$  et de l'âge de souscription. Nous représentons ici la valeur de la garantie et le quartile à 99 % pour différents âges de souscription, et pour  $\mu = 0.03$  et  $\mu = 0.07$ .

âge de souscription	prix de la garantie	qt à 99 %
40 ans	0.72 %	4.40 %
50 ans	1.35 %	7.60 %
60 ans	2.27 %	12.15 %
70 ans	3.52 %	18.30 %

$\mu=0.03$

âge de souscription	prix de la garantie	qt à 99 %
40 ans	0.24 %	2.80 %
50 ans	0.48 %	4.90 %
60 ans	0.90 %	8.70 %
70 ans	1.55 %	13.40 %

$\mu=0.07$

On constate donc que si l'entreprise veut limiter le risque de faillite à 1%, elle doit prélever 7.6 % des provisions mathématiques (pour  $\mu = 7\%$ ), ce qui correspond à un prélèvement annuel minimal de 1%. Il n'est donc pas réaliste de proposer cette garantie sans la couvrir.

âge de souscription	proportion des primes	prix total de la garantie	besoin de marge naturel
40 ans	11.2 %	0.24 %	2.56 %
50 ans	25.8 %	0.48 %	4.38 %
60 ans	31.9 %	0.90 %	7.80 %
70 ans	31.1 %	1.55 %	11.85 %
moyenne		0.92 %	7.60 %

$\mu=0.07$

Puisqu'elle coûte cher principalement pour les assurés âgés, on peut examiner ce qui se passe pour une garantie limitée à 75 ans. On obtient alors les résultats suivants :

âge de souscription	prix de la garantie	qt à 99 %
40 ans	0.71 %	4.35 %
50 ans	1.23 %	7.00 %
60 ans	1.65 %	8.90 %
70 ans	1.19 %	6.50 %

$\mu=0.03$

âge de souscription	prix de la garantie	qt à 99 %
40 ans	0.24 %	2.70 %
50 ans	0.46 %	4.70 %
60 ans	0.77 %	6.90 %
70 ans	0.70 %	5.30 %

$\mu=0.07$

Le quantile moyen est à présent de 5.4 %. Le coût de la garantie reste très élevé par rapport à l'espérance des prestations à verser aux assurés.

## 5.4 Simulation de la distribution du coût de la garantie couverte

Dans la mesure où nous souhaitons, en prenant en compte le risque lié aux décès, évaluer le risque que fait peser la garantie aux assureurs s'ils se contentent, nous décidons de simuler la vie d'un groupe de contrats.

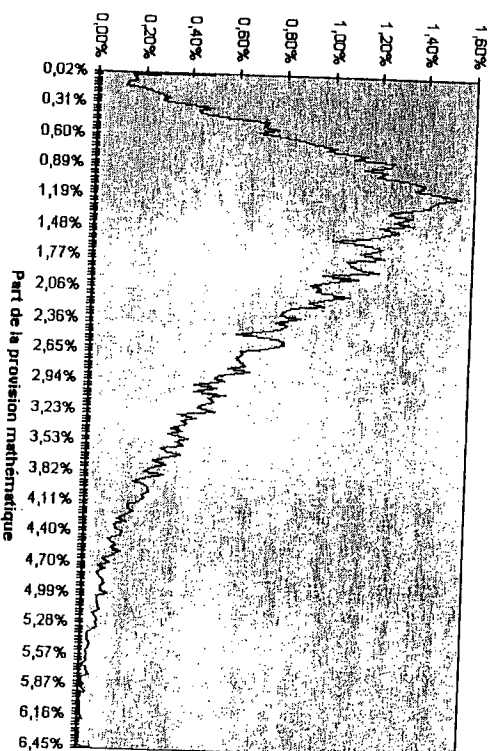
### 5.4.1 Le contrat à support unique

Nous effectuons là encore des simulations de Monte Carlo, en supposant que le contrat est investi dans un support unique de volatilité 20 %, avec un taux sans risque de 3 %, et que 100 personnes âgées de 50 ans souscrivent. Nous simulons 10000 trajectoires.

Les différentes étapes de la vie du contrat sont :

- Calcul du nombre de puts nécessaires pour la couverture initiale du portefeuille.

- ajustements périodiques au cours de l'année en fonction de l'évolution du sous-jacent.
  - A la fin de chaque année, tirage aléatoire du nombre de décès parmi les survivants (en fonction de la TD 88/90). Calcul de la charge liée à la différence entre le nombre de décès effectif et le nombre attendu.
  - ajustement de la couverture en fonction de la valeur de l'actif et du nombre de survivants.
  - ajustements périodiques jusqu'à la fin de l'année suivante.
- En faisant la somme des coûts de transaction induits par la couverture, de la charge exceptionnelle liée au décès et de l'erreur due au caractère discret des ajustements, nous obtenons un coût réel de la couverture de la garantie. Nous pouvons ainsi représenter la distribution de la valeur de ce coût lié à la couverture et à l'insuffisante mutualisation des décès.



## 5.4.2 Le contrat multisupport élémentaire avec des chutes

Là encore, on se place dans le cas d'un contrat dont 80 % initialement investi en actif risqué et dont le taux de chute est de 4 %.

Le profil des distributions est similaire à celui représenté plus haut, mais décalé vers la gauche. On obtient les résultats suivants selon les différents âges de souscription :

âge de souscription	prix de la garantie	coût moyen de la couverture	qt à 99 % du coût de couverture	qt à 99 % de la garantie
40 ans	0.77 %	0.41 %	1.8 %	2.57 %
50 ans	1.43 %	0.67 %	2.4 %	3.83 %
60 ans	2.41 %	0.97 %	3.12 %	5.53 %
70 ans	3.66 %	1.23 %	4.04 %	7.70 %

$\mu=0.03$

âge de souscription	prix de la garantie	coût moyen de la couverture	qt à 99 % du coût de couverture	qt à 99 % de la garantie
40 ans	0.77 %	0.31 %	1.35 %	2.12 %
50 ans	1.43 %	0.53 %	2.00 %	3.43 %
60 ans	2.41 %	0.79 %	2.65 %	5.06 %
70 ans	3.66 %	1.03 %	3.62 %	7.28 %

$\mu=0.07$

Le fait de se couvrir permet presque de s'immuniser contre une erreur d'appréciation de  $\mu$ , le taux de croissance moyen de l'actif risqué.

Le besoin naturel de marge au titre de la garantie plancher serait alors la différence entre le quantile à 99 % de la distribution des coûts de couverture et le coût moyen de la couverture. Pour l'ensemble des contrats considérés, cette somme est placée en réserve. En moyenne, elle est récupérée au terme de la vie des contrats, et est suffisante pour assumer les erreurs de couverture et régler l'intégralité des prestations dans 99 % des cas.

âge de souscription	proportion des primes	prix total de la garantie	besoin de marge naturel
40 ans	11.2 %	1.08 %	1.04 %
50 ans	25.8 %	1.96 %	1.47 %
60 ans	31.9 %	3.20 %	1.86 %
70 ans	31.1 %	4.69 %	2.59 %
moyenne		3.11 %	1.89 %

$\mu=0.07$

En moyennant les niveaux de marge nécessaires par âge, on obtient un besoin de marge global au titre des garanties plancher de l'ordre de 2 % (dans le cas, bien entendu, où 3.11 % de l'encours sont prélevés et utilisés pour mettre en place une couverture dynamique).

On constate que les quantiles de la distribution de la garantie sont beaucoup plus élevés en l'absence de couverture. Il est donc préférable de se couvrir.

Le besoin de fonds propre évalué dans le cas de la garantie non couverte est très important pour les assurés âgés ; on peut se demander si dans les cas d'une garantie limitée à 75 ans il est toujours préférable de mettre en oeuvre une couverture. On obtient les résultats suivants en utilisant la couverture dynamique :

âge de souscription	proportion des primes	prix total de la garantie	besoin de marge naturel	qt à 99%
40 ans	11.2 %	0.98 %	0.96 %	1.94 %
50 ans	25.8 %	1.62 %	1.24 %	2.86 %
60 ans	31.9 %	2.10 %	1.71 %	3.81 %
70 ans	31.1 %	1.50 %	1.56 %	3.06 %
moyenne		1.66 %	1.46 %	3.12 %

$\mu=0.07$

Les quantiles obtenus en se couvrant sont bien plus faibles que les quantiles calculés en l'absence de couverture. Il apparaît donc qu'il est encore préférable de se couvrir.

## Chapitre 6

### Conclusion

Dans cette étude, nous avons utilisé des méthodes classiques de finance de marché pour calculer le prix de la garantie plancher. Par analogie entre les flux propres à la garantie et les flux liés à une option de vente de type européen, nous avons exprimé la valeur de la garantie plancher comme une somme de puts pondérés par des probabilités de décès. Nous supposons dans un premier temps que le contrat est investi dans un unique support risqué, que les assurés ne demandent jamais le rachat, et que la garantie est financée par un prélèvement unique à l'origine. Nous obtenons alors des valeurs très importantes pour la garantie : de 6 à 10 % de la provision mathématique selon les âges. En supposant des chargements de gestion annuels de 0.5 %, la fourchette précédente passe à 8 à 11 %. Les autres garanties en francs en cas de décès, que ce soit la garantie majorée, la garantie de rendement ou la garantie cliquet coûtent très cher et requièrent pour leur financement des prélèvements rédhibitoires.

Si l'assureur ne finance pas la garantie par un prélèvement unique à la souscription mais par un prélèvement annuel sur l'encours, la fourchette des taux du prélèvement à effectuer selon les âges au titre des garanties plancher est de 0.23 % l'an à 40 ans à 1.45 % l'an à 75 ans (en sus du chargement de gestion de 0.5 % par an). Le taux de prélèvement uniforme selon les âges à appliquer pour équilibrer le financement de la garantie est de 0.6 % si l'on considère la structure par âge d'un contrat distribué par une grande société classique. En panachant chargements initiaux et chargements annuels, on arrive à un prélèvement initial de 3 % et un prélèvement annuel de 0.4 % de l'encours. Ces chiffres élevés sont excessifs car ils ne prennent pas en compte les chutes et supposent que toute la provision mathématique est investie en

actif risqué. Si en revanche on intègre un taux de 10 % de chutes par an quelque soit l'âge de l'assuré, un chargement annuel de 0.4 % est suffisant. Pour un contrat investi initialement partiellement en actif non risqué, le prix de la garantie chute fortement : n'investir que 80 % en actif risqué, divise à peu près par deux le prix, ramenant celui-ci à des niveaux plus supportables pour les assurés. La fourchette de prélèvement unique passe de 2 à 6 % selon les âges. A l'aide de modèles mathématiques qui permettent à plusieurs supports d'être plus ou moins risqués, nous avons confirmé cet ordre de grandeur.

On ne peut gérer une telle garantie en se contentant d'en provisionner le prix, puisque si la valeur des supports baisse fortement, tous les contrats seront en moins-value et les prestations à servir au titre de la garantie seront largement supérieures à la provision constituée. Les prix calculés plus haut sont des prix de couverture, c'est-à-dire qu'ils permettent de constituer un portefeuille dont la gestion dynamique procure en théorie la somme due au titre de la garantie. Une telle stratégie de couverture présente un coût, lié principalement aux coûts de transaction supportés lors des ajustements du portefeuille de couverture. La fourchette passe de 2 - 6 % à 3 - 7.5 % si l'on met en oeuvre une stratégie de couverture, pour des coûts de transaction de 1 % sur l'actif risqué et de 0.1 % sur l'actif sans risque, en négligeant dans un premier temps l'aléa lié aux dates de survenance des décès.

Nous avons ensuite pris en compte l'aléa lié aux décès en faisant des simulations de la vie de la garantie et du portefeuille de couverture associé pour un groupe de 100 assurés. Dans le cadre d'un contrat investi à 80 % en actif risqué, avec 4 % de chutes annuelles, nous obtenons un coût global de la garantie (en moyennant les coûts en fonction de la structure par âge du portefeuille) de 3 %, avec 1 % de chances pour l'entreprise d'assurances de servir des prestations d'un montant supérieur à 5 % des provisions mathématiques. Si l'assureur choisit de ne pas se couvrir, le coût de la garantie est plus faible (environ 1 %), mais l'assureur servira dans 1 % des cas des prestations au titre de la garantie supérieures à 8 % ! Si l'assureur veut disposer dans son bilan des fonds nécessaires couvrir ses engagements dans 99 % des états de la nature, et que les actionnaires exigent 15 % de rémunération annuels sur ces fonds, on constate que le coût global de la garantie (coût pur de la couverture, plus coût de la mise en oeuvre de la couverture, plus coût de mobilisation de la marge) devient proche du quart à 99 % du montant des prestations à servir. Il semble, dans ces conditions, plus avantageux de se couvrir.



Les garanties en francs sur les contrats en unités de compte font peser un risque sérieux sur la compagnie d'assurance. Afin de constituer suffisamment de fonds propres pour honorer ses engagements dans 99 % des cas, l'assureur doit prélever environ 0,6 % de l'encours tous les ans au titre de ces garanties. Les exigences de la directive européenne qui impose 4 % de marge aux contrats comportant ce type de garantie contre 1 % aux autres semblent tout à fait justifiées d'un point de vue technique. Si on limite ces garanties à 75 ans, elles coûtent un peu moins cher, mais perdent aussi une grande part de leur intérêt.

En prolongement de cette thèse, on pourrait affiner les calculs, par exemple en utilisant des taux de chutes différenciés selon les âges. En effet, la ce que les taux de chutes soient plus bas pour les assurés d'âge élevé, qui, le bénéfice de leur probabilité de décès plus élevée, ont intérêt à conserver tinner à bénéficier de la garantie plancher. Il faudrait à ce sujet disposer de données statistiques suffisamment robustes. De la même manière, on pourrait s'intéresser plus précisément aux arbitrages des assurés : quels sont les comportements des assurés selon la valeur des supports ? Les assurés sont-ils plutôt charitatives, rationnels ? Là encore, le principal problème réside dans l'absence de données statistiques sur les comportements des assurés. Compte tenu de l'évolution récente des marchés, nous ne pourrions observer que les comportements des assurés en période de hausse... Il est donc presque impossible de disposer de suffisamment de données statistiques pour affiner sérieusement l'étude.

## Bibliographie

- [1] Amin, K., Jarrow, R., "Pricing Options on risky assets in a stochastic interest rate economy", *Mathematical Finance*, 2 (1992), 217-237
- [2] Bakshi, G., Cao, C., Chen, Z., "Empirical performance of alternative option models", *Journal of Finance*, 6 (1997), 2003-2047
- [3] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (1973), 637-654
- [4] Gentle, D., *Basket weaving*, Risk, 6(6) (1993), 51-52
- [5] Heath, D.C., Jarrow, R.A., Morton, A. "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuation", *Econometrica* 60 (1992), 77-105
- [6] Hull, J. and White, A. "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3 (4) (1990), 573-592
- [7] Leland, H. E., "Option Pricing and Replication with Transaction Costs", *Journal of Finance*, 40 (1985), 1285-1301
- [8] Merton, R. C. "Theory of Rational Option Pricing", *Bell J. Econom. Manag. Sci.* 4, (1973) 141-183
- [9] Merton, R. C. *Continuous-Time Finance*, Cambridge MA : Basic Blackwell Inc. (1990)
- [10] Musiela M., Rutkovsky M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1997)

[11] Toft, K. B., "On the Mean-Variance Tradeoff in Option Replication with Transaction Costs", *Journal of financial and quantitative analysis*, (1996), 233-263