Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 16/11/2016

Par : **Cédric Spec--Decherchi**

Titre : **Approximation d'impact SCR en modèle interne, application au choix de couvertures financières**

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : AXA France
Nom : Alban Davand
Signature :

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Alban Davand
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique (ENSAE)
3, Avenue Pierre Larousse - 92245, MALAKOFF CEDEX, FRANCE

Table des matières

Résumé **1**

Abstract **3**

Introduction **5**

1 Contexte **9**
1.1 Solvabilité II . . . 9
1.2 Vision « comptable » et quantités d'intérêt sous Solvabilité II . . . 10
1.3 Calculs sous Solvabilité II . . . 12
1.3.1 Formule standard . . . 13
1.3.2 Modèle interne . . . 14
1.4 Différentes contraintes de solvabilité . . . 15
1.5 Réplication de portefeuille assurantiel. . . . 15
1.5.1 Méthode de simulations dans les simulations (SdS) . . . 16
1.5.2 *Least squares Monte-Carlo (LSMC)* . . . 17
1.5.3 *Replicating portfolio (RP)* . . . 18
1.6 Modèle interne d'AXA . . . 20
1.6.1 Modèle interne marché d'AXA . . . 20
1.6.2 Modèle des produits de taux en univers risque neutre . . . 23

2 Étude sur le *STEC* vie **25**
2.1 Méthodologie existante . . . 25
2.2 Méthodologie par utilisation de copules . . . 27
2.2.1 Estimation des lois marginales . . . 27
2.2.2 Estimation du *STEC* vie . . . 29
2.3 Backtesting du modèle utilisant les copules . . . 30
2.4 Contributions des risques au STEC . . . 32
2.5 Calculs sur le *STEC* dans un cadre théorique simple : le cadre gaussien . . . 33

3 Étude sur le *STEC* marché **37**
3.1 Obtention d'une sous-matrice de corrélation marché . . . 38
3.2 Démonstration de l'effet tirage et calcul alternatif des *Transmission Factor* . . . 40
3.3 Prise en compte et correction de « l'effet tirage » . . . 41
3.4 Régression sur le *STEC* marché . . . 44
3.4.1 Méthodologie générale de l'explication du STEC par les P&L des risques 44
3.4.2 Pondération équivalente au tirage *bootstrap* . . . 46
3.5 Méthodes de régressions . . . 46
3.5.1 *Gradient Boosting Regression* . . . 47

3.5.2 Régression *Ridge* . . . 48
3.6 Résultats de la modélisation du STEC marché au moyen d'une régression ridge . 49
3.6.1 Application sur le modèle interne . . . 49
3.6.2 Présentation d'un modèle alternatif . . . 52
3.7 Robustesse de la méthodologie STEC par régression *ridge*. . . . 53

4 Étude des P&L marché **55**
4.1 Modélisation des P&L par les facteurs de risque . . . 55
4.1.1 Présentation théorique des *splines* de lissage . . . 56
4.1.2 Application au modèle interne . . . 57
4.1.3 Les *splines* de régression multivariés . . . 58
4.1.4 Application aux P&L taux du modèle actuel . . . 60
4.1.5 Application aux P&L taux du modèle alternatif . . . 60
4.2 Modélisation de l'ensemble des P&L en fonction des pertes . . . 62
4.2.1 Modèle actuel . . . 62
4.2.2 Modèle alternatif . . . 63
4.3 Nouvelle vision des risques marché . . . 63
4.3.1 Calcul du SES . . . 63
4.3.2 Calcul du SES dans le modèle alternatif . . . 64
4.3.3 Utilisation du SES pour un portefeuille « différent » . . . 66
4.4 Conclusion intermédiaire . . . 67

5 Application de la méthodologie SES à la construction de stratégies de couverture **69**
5.1 Couverture du risque actions . . . 70
5.1.1 Équivalence avec le modèle interne pour un produit « simple » : les actions 70
5.1.2 Utilisation de *calls* et *puts* sur actions . . . 72
5.2 Couverture des risques taux . . . 77
5.2.1 Utilisation de zéro-coupons (ZC) . . . 77
5.2.2 Utilisation de *swaptions* . . . 78
5.3 Couvertures optimale du portefeuille d'AXA . . . 84
5.3.1 Rappels sur la gestion de portefeuille . . . 84
5.3.2 Application au portefeuille d'AXA . . . 85
5.4 Compléments sur la couverture des risques de volatilité . . . 88
5.4.1 SCR IR et Vol IR pour le modèle alternatif . . . 88
5.4.2 Produit fictif . . . 89
5.4.3 Cas des *swaptions* . . . 90

Conclusion **93**

A Décomposition des effets taux et volatilité pour les *swaptions* **97**
A.1 *Swaptions* payeuses . . . 97
A.2 *Swaptions* acheteuses . . . 100

Note de synthèse **1**

Executive Summary **1**

Liste des tableaux

2.1 Quantiles des sous risques AXA vie. . . . 26
2.2 Modélisations des risques composant le STEC vie. . . . 28
2.3 Écarts-relatifs des sous risques AXA vie modélisés par des marginales $\mathcal{W}$ et $\mathcal{N}$. . . . 29
2.4 Comparaison de quantiles calculés par le modèle interne et par C_Σ avec des marginales $\mathcal{W}$ et $\mathcal{N}$. . . . 30
2.5 Quantiles des sous risques vie via des normales centrées réduites. . . . 31
2.6 Écarts-relatifs des sous risques AXA vie avec des marginales $\mathcal{N}$. . . . 31
2.7 Comparaison de quantiles calculés par le modèle interne et par copule gaussienne avec des marginales normales. . . . 32
2.8 Répartition des risques au sein du STEC vie. . . . 32

3.1 STEC *standalone* et scénario STEC du risque de marché (en M €). . . . 38
3.2 *Transmission Factor* bruts et issus de la matrice de corrélation. . . . 40
3.3 Mise en avant de l'effet tirage sur les scénarios marché. . . . 41
3.4 Impact de l'effet tirage sur les *Transmission Factor*. . . . 41
3.5 Correction de l'effet tirage sur les *Transmission Factor* au moyen de réplications *bootstrap*. . . . 43
3.6 Principaux résultats de la régression ridge dans la zone STEC (en M €). . . . 50
3.7 Répartition des risques par blocs (en M €). . . . 50
3.8 STEC et STEC *standalone* pour le modèle alternatif (en M €). . . . 53
3.9 Principaux résultats de la régression ridge dans la zone STEC du modèle alternatif (en M €). . . . 53

4.1 Modélisation de chacun des risques par *splines* de lissage sur les *proxies* des facteurs de risque (en M €). . . . 58
4.2 Indicateurs de la modélisation des P&L taux (en M €). . . . 60
4.3 Modélisation de chacun des risques par *splines* de lissage sur les *proxies* des facteurs de risque du modèle alternatif (en M €). . . . 60
4.4 Indicateurs de la modélisation des P&L totaux (en M €). . . . 62
4.5 Indicateurs de la modélisation des P&L totaux (en M €) pour le model alternatif. 63
4.6 Chocs SES hors taux. . . . 64
4.7 Chocs SES des taux. . . . 64
4.8 Chocs SES hors taux et volatilité des taux pour le modèle alternatif. . . . 65
4.9 Chocs SES des taux dans le modèle alternatif. . . . 65
4.10 Chocs SES de la volatilité des taux dans le modèle alternatif. . . . 65
4.11 Erreurs δ selon différents ρ en M €. . . . 66

5.1 Ajout d'un portefeuille Equity (en M €). . . . 71
5.2 Valeurs de différentes options sur le portefeuille *Equity* d'AXA France selon les *strikes* pour 100 M € de nominal. . . . 73

5.3 Valeurs de *call* et *put* sur le portefeuille *Equity* d'AXA France pour 100 M € de nominal. . . . 73
5.4 Valeurs de différents zéro-coupons en M € selon leurs maturités pour un nominal de 100 M €. . . . 77
5.5 Valeurs de *swaptions* pour 100 M € de nominal. . . . 80
5.6 Valeurs de *swaptions* acheteuses pour 100 M € de nominal. . . . 86

A.1 Chocs SES hors taux. . . . 4
A.2 Chocs SES des taux. . . . 4
A.3 Valeurs en M € de *swaptions* acheteuses $5Y \times 10Y$ pour 100 M € de nominal. . . . 6
A.4 SES ' shocks. . . . 4
A.5 Interest rates SES ' shocks.. . . . 4
A.6 Values of swaptions receivers $5Y \times 10Y$ for a nominal of 100 M €. . . . 5

Table des figures

1.1 Bilan Solvabilité 1 : bilan comptable statutaire. Source : Cours de Matthieu Chauvigny, assurance vie, Ensae. . . . 10
1.2 Bilan Solvabilité 2 : bilan économique. Source : Cours de Matthieu Chauvigny, assurance vie, Ensae. . . . 11
1.3 Bilan Solvabilité 2 : bilan économique. . . . 13
1.4 Schéma d'un modèle interne Solvabilité II. . . . 14
1.5 Schéma de la méthode de simulations dans les simulations. Source : [Devineau et Loisel 2009] 16
1.6 Obtention de la distribution de fonds propres économiques par la méthode RP. Source : [Devineau et Chauvigny 2010] . . . 19
1.7 Schéma de l'approche intégrée du risque marché d'AXA. . . . 20
1.8 Schéma de l'approche intégrée du risque marché d'AXA. . . . 22

3.1 Présentation du tirage *bootstrap*. . . . 42
3.2 Diversification des risques. . . . 51

4.1 Différence entre une régression par *splines* avec contrainte (en noir) et une sans (en rouge). . . . 57
4.2 P&L taux en fonctions de chocs parallèles sur le modèle actuel (en rouge) et le modèle alternatif (en noir). *L'échelle des ordonnées n'est pas renseignée pour des problèmes de confidentialité.* . . . 61

5.1 Mise en avant de l'effet tirage. . . . 72
5.2 Variation des prix des *calls* en fonction du *strike* selon le scénario. . . . 75
5.3 Variation des prix des *puts* en fonction du *strike* selon le scénario. . . . 75
5.4 Variation des prix des *calls* en fonction du *strike*. . . . 76
5.5 Variation des prix des *puts* en fonction du *strike*. . . . 76
5.6 Évolution des prix ZC en fonction des maturités. . . . 78
5.7 Schéma du fonctionnement d'une *swaption*. Source : [Antonin Chaix]. . . . 79
5.8 Variation de prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike*. . . . 81
5.9 Variation de prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike*. . . . 81
5.10 Variation de Δ des *swaptions* payeuses en fonction du *strike*. . . . 82
5.11 Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike*. . . . 83
5.12 Exemple d'une frontière d'efficience. . . . 85
5.13 Pseudo frontière d'efficience sur un portefeuille assurantiel. . . . 86
5.14 Contrainte en fonction du *strike*. . . . 87
5.15 Pseudo frontière d'efficience sur un portefeuille assurantiel. . . . 87

A.1 Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec les taux constants. . . . 97

A.2 Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec les taux constants. . . . 98
A.3 Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante. . . . 98
A.4 Variation de Δ des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante. . . . 99
A.5 Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* selon l'effet croisé taux/volatilité des taux. . . . 99
A.6 Variation du prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec les taux constants. . . . 100
A.7 Variation du prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec les taux constants. . . . 100
A.8 Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante. . . . 101
A.9 Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante. . . . 101

Remerciements

Pour ces 5 mois passés chez AXA, je souhaite remercier très chaleureusement les équipes RM IARD, RM OP et Juridique pour leur gentillesse et bonne humeur.

Merci à Matthieu, Rim et Marie de m'avoir consacré du temps pour donner leurs avis et m'aider à améliorer mes travaux.

Merci à Malick et Patrick de m'avoir aidé et conseillé tout au long de mon stage.

Un grand merci à Sarah, Micaëla, Aurélie et Adriana pour leurs précieuses aides.

Merci à Alban et Michel pour leurs relectures, pour le temps qu'ils m'ont consacré tout au long de ces 5 mois.

Enfin, un grand merci à Laurent pour le temps qu'il m'a consacré même en dehors du bureau, pour tous ses conseils et son aide.

Résumé

Mots clés : Assurance vie, *Bootstrap*, *Hard Capital*, Modèle interne, ORSA, Produits financiers, Régressions, Solvabilité 2, SCR.

Précédemment les directives assurantielles imposaient des ratios de solvabilité basés sur des critères comptables ; le passage à Solvabilité 2 a fait évoluer cette vision comptable vers une vision économique. L'entrée en vigueur de Solvabilité 2 au 1er janvier 2016 a déjà fortement été préparée par les compagnies d'assurance, en particulier par AXA qui a fait le choix d'un modèle interne pour quantifier ses risques. Nous proposons une méthode permettant de calculer rapidement et simplement des impacts SCR en modèle interne, notamment pour le risque de marché dont l'obtention est particulièrement complexe. Nous l'utiliserons à la problématique du choix d'une couverture financière.

Le SCR marché du modèle interne, appelé STEC marché, est issu d'un tirage de 11 000 scénarios d'une distribution multivariée, dont chacun contient 11 variations d'AFR (P&L) propres à chaque risque et une variation totale (P&L total). Cette génération nous confronte à ce que l'on a appelé « l'effet tirage » : deux scénarios menant à un P&L total similaire peuvent être totalement différents. Ainsi, pour contrôler cet aléa nous avons pondéré les scénarios proches du scénario STEC en utilisant des lois hypergéométriques qui quantifient la probabilité d'occurrence d'un scénario dans un tirage *bootstrap*. Grâce à ces pondérations, nous pouvons d'une part calculer les contributions réelles de chacun des risques au STEC, puis mettre en lumière la prédominance du seul effet croisé significatif entre les taux et la volatilité implicite des taux grâce à une régression *ridge*. En résumé, le STEC marché est la somme des pertes moyennes pondérées autour de la zone STEC et de l'effet croisé taux/volatilité implicite des taux qui diminue substantiellement le STEC.

La suite de l'étude consiste à déterminer, sur la base de la répartition des risques dans le STEC obtenue à l'étape précédente, un scénario économique conduisant à un impact sur l'AFR égal au STEC marché appelé *Single Equivalent Scenario (SES)*. Afin d'obtenir ce scénario, nous devons expliciter les relations entre les pertes (P&L) et les chocs sur les facteurs économiques. Cela a été fait au moyen de *splines* de lissage permettant de s'affranchir des problèmes de convexité dus aux instruments de réplication ainsi qu'aux mécanismes assurantiels que sont les rachats dynamiques et la participation aux bénéfices. Ensuite, les P&L totaux ont été modélisés par des techniques de régression multivariées non-paramétriques (MARS). Ainsi, pour une perte totale agrégée donnée, nous avons les pertes par risque ainsi que les chocs amenant à ces pertes, soit une bijection quasi parfaite entre les P&L, les chocs économiques et les P&L totaux.

Enfin, après avoir construit tous ces outils qui permettent de faire le lien entre les conditions économiques et les impacts réglementaires, nous présentons une application à la problématique du choix de couverture financière prenant en compte les contraintes réglementaires. Plus précisément, nous cherchons la couverture qui optimise la quantité de *Hard Capital* (fonds propres réels à détenir après déduction de la VIF-RM) à détenir en se basant sur son impact NAV et SCR.

Abstract

Key words : *Life insurance, Bootstrap, Hard Capital, Internal model, ORSA, Financial product, Regressions, Solvency 2, SCR.*

Until recently, insurance regulations would impose solvability ratios based mostly on accounting rules. Solvency 2 has been a move towards a more economic vision. Despite Solvency 2 being enacted in January 2016, insurance companies have been expecting this new regulation for some time ; AXA in particular has chosen an internal model to quantify its risks. We propose a method to easily and simply calculate SCR's impacts. In particular, we will work within a market internal model which may entail complexities. We also will use a proxy for determining a financial hedge.

The SCR of AXA's internal model (STEC) cames from 11 000 scenarii of a multivariate distribution, one scenario is equal to 11 AFR's variations (P&L) *and one total variation (P&L total). With these simulations we may be confronted with a draw effect, i.e. two different shock scenarii leading to the same final result. To control this hazard we weighted the scenarii close to the STEC scenario using hypergeometric distribution that reflects the occurrence probability of one scenario to be drawn in a bootstrap sampling. Theses weights, allowed us to define the real standalone impacts of the market risks, and to highlight the most significant cross-effect using a ridge regression : interest rates/ interest rates implied volatility. The STEC market is finally the sum of weighted average losses in the area of the STEC and of the only significant cross-effect : interest rates/ interest rates implied volatility which substantially reduces the STEC model.*

The next step consists in determining the Single Equivalent Scenario (SES) based on the previous results. The SES is the scenario providing a final loss equal to the STEC. To obtain this scenario, we have to explicit the connexion between P&L and *the shock on the risk factor. We use smooth splines to determine these ones in order to integrate the convexity due to insurance phenomenon : liabilities replicated by portfolio replicating, dynamic lapses and profit sharing. Adding to a multivariate non parametric regression, we define the link between risk factor,* P&L *and* P&L *total.*

Finally, the previous tools allows us to make a connexion between economic conditions and regulatory impacts. We propose an application consisting in choosing a financial hedge taking into account regulatory contrainsts. More precisely, we are looking forward to optimizing hard capital requirement based on its impact on the NAV and the SCR.

Introduction

Suite à l'entrée en vigueur de la directive Solvabilité 2 le 1er janvier 2016, les entreprises et compagnies d'assurance ont vu leur gouvernance et leur gestion des risques changer. Les critères de solvabilité basés sur des informations comptables sont devenus caduques. Dorénavant, dans l'optique d'être plus proche des risques auxquels les assurances sont réellement soumises, Solvabilité 2 impose une « vision économique ». Les actifs ne sont plus calculés en coûts historiques mais en valeur de marché, les provisions techniques ne sont quant à elles plus calculées de manière « prudente » mais les prestations futures sont actualisées.

Ce rapport se penchera tout particulièrement sur les calculs de capital économique à détenir pour que l'assurance soit en mesure de ne pas faire faillite si un choc bi-centenaire devait avoir lieu. Pour effectuer ce calcul, deux choix s'offrent aux assureurs : le calcul basé sur la formule standard ou sur le modèle interne. L'approche formule standard peut-être qualifiée de « simple » comparée au modèle interne. En effet, la formule standard est basée sur des paramètres communs à tous. Un modèle interne permet quant à lui, de mieux appréhender les risques propres à chaque entreprise ainsi que leur évolution selon les risques pris, les investissements réalisés et le type de contrats proposés.

Dans cette optique, AXA a choisi de développer son modèle interne. Cependant, les calculs effectués en modèle interne peuvent s'avérer trop complexes et chronophages, des approximations sont donc parfois nécessaires. C'est en particulier le cas pour le risque marché d'AXA France Vie qui sera notre objet d'étude. L'objectif principal est donc de trouver un *proxy* du modèle interne qui soit rapide et facile d'utilisation. Une fois le *proxy* trouvé, nous l'utiliserons pour estimer l'impact de couvertures financières sur le SCR, la NAV et le *Hard Capital*. Cela rejoint une problématique d'actualité à savoir le calcul d'IRR dans le cadre de Solvabilité 2.

Nous commencerons ce rapport par une présentation de la directive Solvabilité 2 et des indicateurs actuariels qui seront utilisés dans ce mémoire. Enfin, le modèle interne d'AXA sera détaillé et une attention particulière sera portée aux risques de marché qui constituent la brique de base de cette étude.

La seconde partie porte sur le SCR Technique Vie du modèle interne d'AXA, appelé STEC Vie, qui présente l'avantage d'avoir une structure relativement simple et proche de celle de la formule standard, seules les valeurs des corrélations entre les risques intégrés changent. Par ailleurs il s'inscrit dans un cadre théorique aisé pour développer certains calculs qui seront utiles pour la suite. Chacun des risques suit « théoriquement » une loi normale et les quantiles à 99,5% de ces derniers sont agrégés au moyen d'une matrice de corrélation pour obtenir le STEC Vie. Une modélisation quasi similaire a été faite en utilisant la théorie des copules afin de pouvoir agréger des risques qui ne sont pas normaux. La comparaison entre ces deux méthodes qui donnent des résultats équivalents permet de mettre en avant une passerelle entre un calcul par agrégation de risques extrêmes, les quantiles à 99,5%, et un calcul basé sur la distribution des pertes, les copules.

Ensuite, avec les résultats théoriques obtenus dans la partie relative au STEC Vie ou de manière plus générale au STEC issu d'une modélisation normale (risques normaux et matrice d'agrégation), nous avons mis en place un équivalent empirique pour le STEC marché bien que le cadre théorique soit différent. En effet, le STEC marché est issu de 11 000 scénarios, un scénario est obtenu après génération de chocs et est constitué de pertes par risques (P&L) ainsi que d'une perte totale issue de l'agrégation des P&L notée P&L total ou $P\&L_{total}$. Ces scénarios prennent en compte d'une part les corrélations entre les différents risques et d'autre part les effets croisés dus à la réplication du passif, la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques. Suite à la mise en pratique des résultats théoriques, certaines embûches vont apparaître : « l'effet tirage » et les effets croisés. L'effet tirage symbolise le caractère surjectif des scénarios marché : deux chocs totalement différents peuvent amener à une perte totale identique. Cela nous amènera à considérer une modélisation qui permet de s'affranchir des problèmes liés aux particularités du STEC marché : une régression *ridge* pondérée par des poids issus d'une réplication *bootstrap*.

Bien que les résultats des travaux menés sur le STEC marché soient concluants, ils présentent un aspect « local » qui ne permet pas de s'adapter à l'ensemble de la distribution des pertes. Pour combler ce manque, chacun des onze risques marché ainsi que le *Volatility Adjustment* ont été modélisés par des méthodes de régression non-paramétriques : les *splines* de lissage. Cette méthode permet d'expliquer avec une faible erreur les pertes de chacun des risques en fonction des *proxies* de leurs facteurs de risque respectifs. Une modélisation différente a été choisie pour les taux, tant le profil de ces pertes est particulier (profil de pertes en cloche, c'est-à-dire perte lors de fortes baisses ou hausses de taux), le choix s'est porté sur une régression MARS (*Multivariate Adaptive Regression Splines*) qui permet d'expliquer de manière non paramétrique une quantité en fonction de plusieurs variables explicatives. Cela donne une relation d'équivalence entre les pertes par risque et les facteurs de risque.

Un modèle similaire a été mis en place pour expliquer le P&L total en fonction des pertes par risques, ou de manière équivalente leurs facteurs de risque. Finalement cette partie fait le lien entre les conditions économiques, les pertes par risque et les pertes totales agrégées. Ces relations permettent aussi de définir le *Single Equivalent Scenario* (SES) : le scénario économique conduisant à des pertes totales égales au STEC.

Un modèle interne qualifié d'alternatif sera aussi étudié au gré du rapport. Les études sur ce dernier auront principalement pour but de tester la robustesse des techniques mises en oeuvre. Ce modèle est identique au modèle interne mis à part qu'il permet de gérer facilement des taux négatifs.

Enfin, nous allons utiliser les modélisations précédentes afin de mettre en place des stratégies de couverture efficaces. Plus précisément, grâce à ces modélisations nous allons être en mesure de donner un prix à différents produits (*call*, *put*, *swaptions etc*) selon les conditions économiques. Après avoir mis en place le *pricing* de produits, nous avons défini un « critère de performance réglementaire » qui fait la part entre la performance et le risque (ici l'évolution du STEC) vis-à-vis du *base case* qui est la situation économique au moment du calcul du STEC. En effet pour un produit donné, le panel de possibilités étant assez vaste (*strike*, maturité *etc*) il nous faut choisir l'optimal selon un certain sens. Le sens de cette optimalité est ici une baisse du STEC associée à une performance relativement bonne dans les situations de marché propices. Les situations économiques sont le *Single Equivalent Scenario* (SES) calculé ci-avant et le *Market Constistent Economic Targets* qui est l'ensemble des prévisions économiques d'AXA. Ce critère de performance sera légèrement modifié via l'utilisation d'une contrainte afin de contrôler la « volatilité » des couvertures.

Notons que pour des soucis de confidentialité, les quantités renseignées ne correspondent pas à la réalité. Les travaux présentés dans ce rapport ont été réalisés avec le logiciel R. De plus, certaines parties ou remarques peuvent paraître superfétatoires dans le but d'aider à la lecture du rapport.

Chapitre 1

Contexte

1.1 Solvabilité II

Solvabilité II est la directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil de l'union européenne du 25 novembre 2009 « sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II) ». Votée en avril 2009, la directive Solvabilité 2 s'applique depuis le 1er janvier 2016 à tous les opérateurs d'assurance européens, dont les mutuelles. Cette directive est basée sur trois piliers qui selon M.L Dreyfuss dans [Dreyffus 2015] a vu le jour afin de faire face aux critiques et insuffisances soulevées à l'encontre de Solvabilité 1. Le régime prudentiel Solvabilité II s'est vu assigner pour objectifs :

- Renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance.
- Améliorer la protection des preneurs d'assurance et des ayants droit.
- Renforcer la compétitivité des assureurs et réassureurs européens au niveau international.
- Promouvoir une meilleure réglementation.

À partir de ces grands objectifs qualifiés de politiques, un certain nombre de principes directeurs ont été déclinés par la Commission européenne. Ainsi, le nouveau régime prudentiel devra assurer un équilibre entre la protection des assurés et le coût du capital pour les assureurs, donc favoriser une approche fondée sur le profil de risque particulier de l'entreprise d'assurance. Il devra également promouvoir une bonne gestion des risques et responsabiliser les assureurs en leur donnant plus de liberté. En contrepartie, le dialogue prudentiel doit être renforcé. Enfin, il s'agit d'harmoniser les normes et les pratiques prudentielles non seulement dans l'Union Européenne, mais aussi au sein du secteur financier. Pour y parvenir, Solvabilité 2 se base sur trois piliers qui sont :

— **Pilier I** : Exigences de quantification des risques.
Enjeu : Calculer un capital réglementaire qui reflète la réalité économique de l'assureur.

— **Pilier II** Exigences qualitatives de gestion des risques et de gouvernance.
Enjeu : Renforcer les systèmes de gouvernance et de gestion des risques.

— **Pilier III** Exigences de communication financière.
Enjeu : Promouvoir la transparence financière, à des fins de communication et de contrôle.

Le pilier I pourrait être qualifié de pilier « quantitatif » et donne un cadre aux calculs de risques. En particulier, le calcul de capital économique (SCR) qui permet de se protéger contre

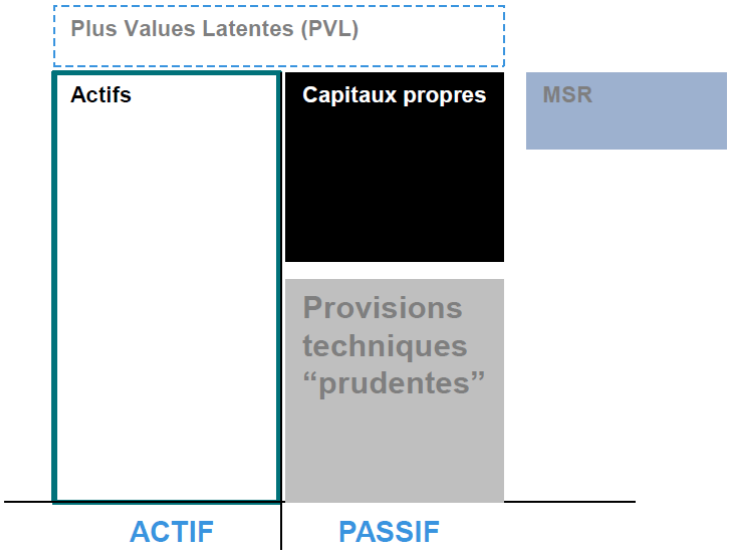
un choc bi-centenaire à horizon 1 an, en d'autres termes le quantile d'ordre 99,5% des pertes de l'assureur à horizon 1 an. C'est ce pilier et ses dérivées qui importeront principalement pour le présent mémoire.

Le pilier II infère dans l'organisation des entreprises d'assurance et de réassurance, en particulier autour des services de gestion des risques. En résumé la gouvernance doit être articulée autour et en cohérence avec la gestion des risques de l'assurance.

Le pilier III, a lui pour objectif, d'instaurer une certaine transparence au sein des assurances. Il s'agit de la diffusion d'information au public pour accroître la transparence et renforcer la discipline de marché, de la transmission d'information au superviseur pour fournir les informations nécessaires au contrôle, à la fois au niveau micro et macro.

1.2 Vision « comptable » et quantités d'intérêt sous Solvabilité II

La directive Solvabilité II apporte d'importants changements aux méthodes de valorisation du bilan des assureurs. Nous détaillons dans cette partie certaines spécificités de cette directive. Pour commencer, présentons brièvement le bilan simplifié sous Solvabilité 1 afin de voir la différence que Solvabilité 2 a engendrée.



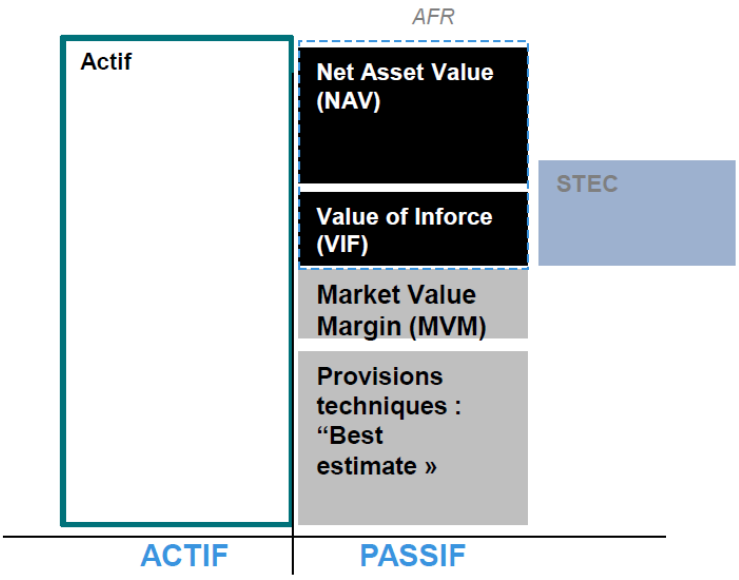
Graphique 1.1 – Bilan Solvabilité 1 : bilan comptable statutaire.
Source : Cours de Matthieu Chauvigny, assurance vie, Ensae.

Sous la directive Solvabilité 1, les quantités de la figure 1.1 sont :

- Actifs : valeur des actifs en coût historique.
- Provisions techniques : estimées de manière « prudente ».
- MSR : marge de solvabilité réglementaire.
- Plus Values Latentes : admises en couverture de la MSR Exemple de couverture du besoin de capital par des fonds propres durs : $\max(75\%MSR; 150\%MSR - PVL)$.

Si Solvabilité 1 présente l'avantage d'être simple à appréhender et à mettre en œuvre, on lui reconnaît de nombreuses limites, en particulier le fait de ne pas être assez fidèle au profil de risque des organismes assureurs. Cela provient d'une vision comptable qui arrête le bilan de l'assurance à un instant donné alors que les investissements et les engagements courent sur plusieurs années et évoluent au gré des changements économiques.

Afin de pouvoir définir les calculs dans le cadre de Solvabilité II, commençons par voir comment s'articule un bilan sous cette réglementation. Le graphique 1.2 donne une version simplifiée de ce type de bilan.



Graphique 1.2 – Bilan Solvabilité 2 : bilan économique.
Source : Cours de Matthieu Chauvigny, assurance vie, Ensae.

Les éléments de ce dernier sont :

- Provisions techniques : *Best Estimate Liabilities (BEL)*, correspond à l'actualisation des prestations futures.
- MVM : Coût de portage des provisions techniques.
- BEL + MVM : valeur de marché du passif technique.
- L'ANAV ou Actif Net Réévalué (en valeur de marché).
- AFR : *Available Financial Resources.*
- La VIF : Valeur du portefeuille net du coût de portage des passifs. Néanmoins, même si la VIF est en théorie admise sans limitation en couverture du STEC, le marché et le régulateur pourraient imposer dans la pratique un niveau de couverture minimum par capitaux propres.

Aux vues des graphiques 1.1 et 1.2 on peut apprécier la différence notoire entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2. Cette différence est mise en avant par la confrontation entre une vision comptable statutaire et une vision économique. Solvabilité 1 comptabilise des éléments dont les valeurs ne sont pas ajustées aux conditions économiques. Solvabilité 2 intègre quant à elle une vision de valeurs économiques qui intègre les changements avérés et très probables à venir. En plus

de cette vision économique, Solvabilité 2 permet une quantification encore plus proche de la réalité et plus proche des particularités liées aux *business* des assurances.

Notons par ailleurs la relation $AFR = ANAV + VIF - MVM$, cette relation retranscrit le fait que les ressources financières économiques d'une assurance sont égales à peu de choses près à la valeur de marché des fonds propres (ANAV), additionnée à la valeur économique des profits futurs (VIF) moins les coûts du capital. Cependant, ces quantités sont économiques et ne sont pas à proprement parler des capitaux à mettre en réserve.

Une quantité aura un intérêt tout particulier : le *Solvency Capital Requirement* noté SCR. Cette quantité représente le minimum de fonds propres économiques à détenir et se calcule comme le quantile d'ordre 99,5% des pertes de l'assureur.

On peut noter une relation entre l'AFR et le SCR avec le ratio de solvabilité : $\frac{AFR}{SCR}$ qui doit être supérieur à 100%. C'est-à-dire que l'assurance doit avoir au moins autant de ressources financières que de capital économique réglementaire. Cependant, d'après le pilier 2 les entreprises ont la possibilité de définir des ratios plus élevés. Cette marge de sécurité est ce que l'on appelle le *risk appetite*. Cela se transcrit au travers des fonds propres à « réellement » devoir détenir : le *hard capital*. AXA a choisi de se protéger contre un choc vicennale pour quantifier ce *risk appetite* dont la traduction se fait ressentir sur les définitions de *hard capital* :

- Hard capital $= \max(130\% SCR^{*} - VIF + MVM, 0)$ ou,
- Hard capital = Hard capital $= \max(150\%$ SCR y.c FP $- VIF + MVM, 5\%$ SCR y.c FP) ou,
- Hard capital = Hard capital $= \max(150\%$ SCR y.c FP $- VIF + MVM, 80\%$ SCR y.c FP), le *floor* de 80% sur le SCR correspond au rapport capitaux propres sociaux / SCR.

Grâce à ces formules, on voit que plus le SCR augmente, plus les fonds en dur que l'assurance doit mettre en réserve sont élevés. Ainsi, l'objectif de l'assureur est de déterminer un SCR qui soit le plus représentatif possible de ses risques. Par ce biais, l'assureur aura en réserve un capital optimal aux regards de ses engagements et de ses investissements. Le calcul de SCR pour les assurances est donc d'une importance capitale.

1.3 Calculs sous Solvabilité II

Le capital économique Solvabilité II représente le montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau 99,5%, et fait appel à trois notions fondamentales. Premièrement la ruine économique qui est la situation où la valeur de marché l'actif est inférieure à la *fair value* des passifs, ensuite l'horizon d'une année impose de pouvoir disposer de la distribution des fonds propres économiques dans un an, enfin le seuil 99,5% représente le niveau de solvabilité requis. La probabilité de l'événement « ruine économique » est dans ce cas inférieure à 0,5%. Deux choix s'offrent aux assureurs pour calculer ce capital économique : la formule standard ou le modèle interne. En résumé, si X est la variable aléatoire qui représente la situation nette de l'assurance à horizon 1 an, comment calculer X et comment calculer la quantité :

$$FP_t = q_{99,5\%}(X)\ ^{\dagger}$$

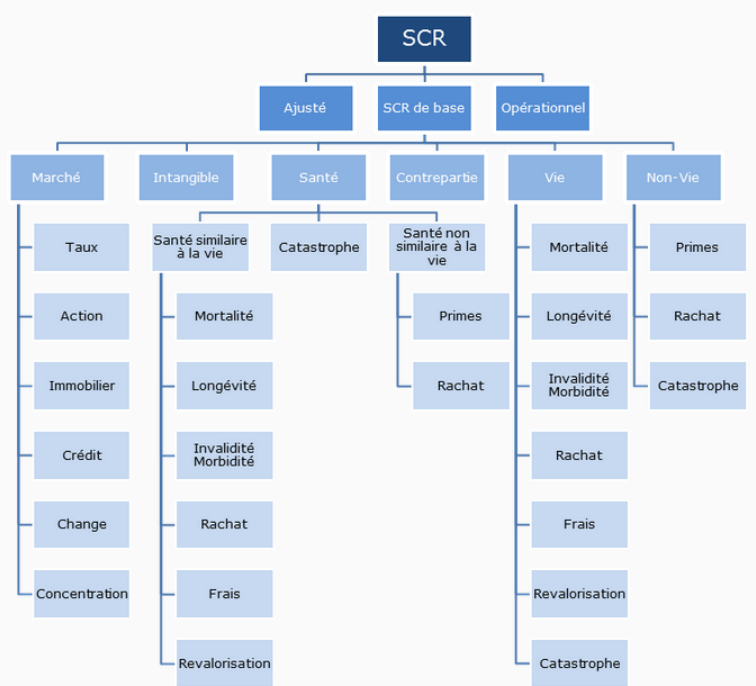
∗. Ici, nous considérons le SCR y compris les fonds propres disponibles, que l'on notera par la suite SCR y.c FP

†. L'opérateur $q_{\alpha\%}(X)$ représente le quantile d'ordre α de la variable aléatoire X.

Commençons par présenter le calcul en formule standard avant de s'attarder plus longuement sur les modèles internes.

1.3.1 Formule standard

La formule standard est basée sur une agrégation des risques au moyen de matrices d'agrégations qui est commune à tous les assureurs.



Graphique 1.3 – Bilan Solvabilité 2 : bilan économique.

La figure 1.3 représente la forme modulaire utilisée pour calculer les besoins en capitaux économiques à horizon 1 an dans le cadre de la formule standard : le SCR (pour *Solvency Capital Requirement*). Le calcul du SCR dans ce cadre peut se décomposer en trois grandes étapes :

- **Étape 1 :** Détermination d'un capital économique pour chaque « risque élémentaire » (ex. actions, taux, mortalité, . . .).
- **Étape 2 :** Agrégation des capitaux au sein de chaque module de risques (marché, vie, non-vie,. . .) : l'agrégation intra-modulaire.
- **Étape 3 :** Agrégation des capitaux des différents modules : l'agrégation inter-modulaire.

De manière plus formelle, la formule standard du SCR repose sur la relation :

$$SCR = BSCR - \text{Ajusté} + \text{Opérationnel}.$$

Avec :

- $BSCR$ le capital de solvabilité requis de base.
- Opérationnel la charge de capital pour le risque opérationnel.

- Ajusté l'ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéfices et des impôts différés.

Formellement, le $BSCR$ est calculé en agrégeant les risques de chaque module (vie, marché, non-vie, ...) notés SCR_i comme suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j},$$

où $\rho_{i,j}$ [‡] est le coefficient de corrélation entre les modules « i » et « j ».

L'étape d'agrégation intra-modulaire est identique à l'étape d'agrégation inter-modulaire mis à part que les coefficients de corrélations $(\rho'_{i,j})$ et les quantités agrégées changent. Ainsi, les quantités SCR_i sont calculées comme suit :

$$\forall i,\ SCR_i = \sqrt{\sum_{i} \rho'_{i,j} C_i C_j},$$

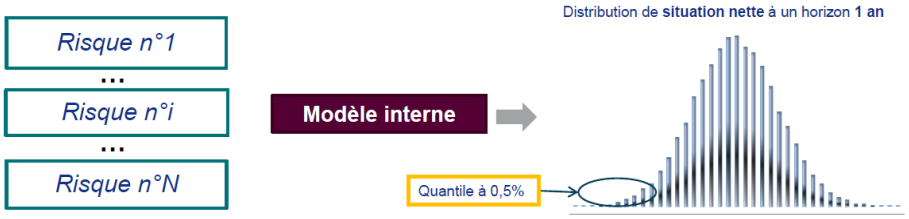
où C_i est le capital élémentaire associé au « risque i ». Ces capitaux élémentaires sont calculés en appliquant les chocs donnés par le régulateur sur le portefeuille de l'assureur.

Au regard de cette méthode de calcul plusieurs points apparaissent. Premièrement, l'utilisation de la formule standard revêt une relative simplicité que ce soit dans son utilisation ou dans sa mise en place. Deuxièmement, puisque la méthode et les paramètres sont communs à les assureurs, cette méthode de calcul est très risque adverse et de fait, peut donner un capital trop important aux regards des risques réels.

Cependant, AXA n'a pas opté un calcul de SCR via la formule standard mais avec un modèle interne. Cela résulte principalement d'une volonté de la direction d'avoir une vision précise et détaillée des risques auxquels AXA fait face, ainsi que leurs évolutions.

1.3.2 Modèle interne

Avec l'utilisation de modèles internes, calculer le capital économique revient à obtenir une distribution de situation nette en $t = 1$,c'est-à-dire en fin de première année. L'actif est calculé en valeur de marché et la valeur économique des passifs à la date t correspond au « prix » de ces passifs vu en t. Un modèle interne permet d'intégrer l'ensemble des risques de la compagnie afin de calculer la distribution de situation nette globale à horizon 1 an. L'agrégation des risques est effectuée « automatiquement » au sein du modèle. Cela est résumé avec le schéma 1.4 ci dessous.



Graphique 1.4 – Schéma d'un modèle interne Solvabilité II.

‡. La matrice de corrélation est donnée par le régulateur, cette dernière est commune à tous les assureurs qui utilise la formule standard

Une partie sera consacrée au modèle interne d'AXA, mais avant d'aborder ce point, présentons d'autres contraintes réglementaires qui se doivent d'être respectées.

1.4 Différentes contraintes de solvabilité

Bien que le pilier I soit qualifié de quantitatif et le pilier II de gouvernance, il y a une connexion entre eux, en particulier lorsque le choix s'est porté sur un modèle interne. Tout particulièrement, l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) qui est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité par l'organisme (ou le groupe). Il doit illustrer la capacité de l'organisme ou du groupe à identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ou sa situation financière. Aussi, sa déclinaison opérationnelle en fait-elle un outil stratégique de premier plan. Voici différentes contraintes qui doivent être respectées dans ce dispositif.

Notations :

- FP_t : Fonds propres économiques en date t.
- SCR_t : *Solvency Capital Requirement* en date t.
- $RS_t = \frac{FP_t}{SCR_t}$ ratio de solvabilité en date t.

Contrainte de solvabilité dans un cadre ORSA :

1. **Adaptation pluriannuelle (contrainte sur ruine économique)**

   Approche possible : estimation du montant de fonds propres nécessaire aujourd'hui pour être couvert contre le risque de ruine économique, sur l'intégralité de l'horizon retenu, avec probabilité p.

   Contrainte :
   $$\text{Solvabilité à } T \text{ années } \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T} FP_t \geq 0\right) \geq p.$$

2. **Modification de la variable risquée sous-jacente (contraintes sur impasses de solvabilité annuelles)**

   Approche possible : estimation du montant de fonds propres nécessaire aujourd'hui pour être couvert contre une impasse de solvabilité réglementaire (annuelle), sur l'intégralité de l'horizon retenu, avec une probabilité p.

   Contrainte :
   $$\text{Solvabilité à } T \text{ années } \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T} RS_t \geq 100\%\right) \geq p.$$

1.5 Réplication de portefeuille assurantiel.

Dans l'optique de la mise en place d'un modèle interne, la réglementation Solvabilité II impose une méthode d'obtention robuste de la distribution des fonds propres projetés à horizon 1 an. Cependant, les mécanismes assurantiels rendent compliqués la détermination de la distribution

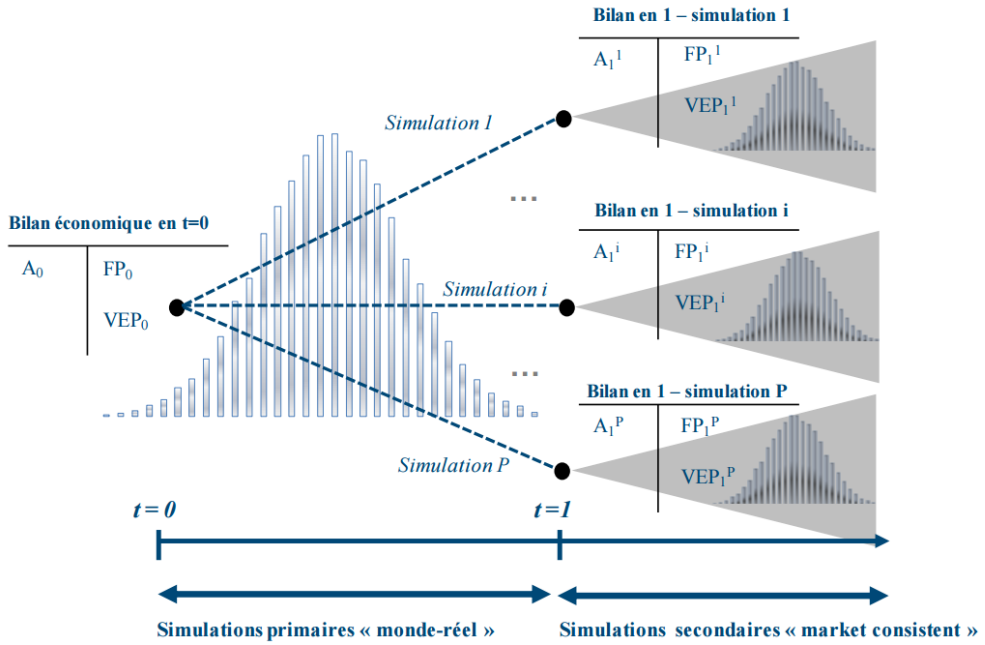
des passifs avec en particulier la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques. Pour y parvenir la littérature actuarielle de Solvabilité 2 propose trois grandes méthodes : la méthode de simulations dans les simulations, la méthode de *replicating portfolio* et celle de *least squares Monte-Carlo*. Nous présentons ces trois méthodes afin de donner une vision claire de la démarche mise en place. De plus, la méthode utilisée par AXA, *replicating portfolio*, est dans la continuité des SdS et a pour but de corriger son principal désavantage.

1.5.1 Méthode de simulations dans les simulations (SdS)

Comme le nom de la méthode l'indique, cette méthode est basée sur des « simulations de simulations ». Cette méthode est à ce jour, pour les portefeuilles d'assurance-vie, une des méthodes de calcul du capital économique les plus conformes aux critères de Solvabilité II.

Cette méthode consiste à faire P simulations dites primaires en univers historique (ou monde-réel) puis à l'issue de chacune de ces simulations on effectue de nouveau Q simulations afin de déterminer les fonds propres économiques de la compagnie. Les simulations secondaires ayant pour vocation de *pricer* les éléments du bilan, celles-ci doivent nécessairement être *market-consistent*[§] ; le plus souvent il s'agit de simulations risque-neutre. Notons qu'il est nécessaire de recourir à des méthodes de type Monte-Carlo pour estimer la valeur économique des passifs et des fonds propres économiques de fin de première année. En effet, les mécanismes assurantiels liés à l'assurance que sont les comportements de rachats dynamiques et la participation aux bénéfices ne peuvent-être obtenus par formule explicite, ces derniers impliquent des liens de dépendance étroits entre l'actif et le passif.

Cela est représenté schématiquement avec la figure 1.5.



Graphique 1.5 – Schéma de la méthode de simulations dans les simulations.
Source : [Devineau et Loisel 2009]

Les principaux avantages de cette méthode de réplication sont :

§. C'est-à-dire cohérente avec les valeurs de marché.

— Donne une estimation initiale de la distribution empirique du bilan économique.

— Donne des résultats précis sur les situations monde-réel analysées.

Cependant, cette méthode présente aussi des désavantages, parmi lesquels :

— Demande un lourd dispositif informatique, avec des temps de calculs et un espace de stockage très important.

— Les queues de la distribution ne sont pas très robustes avec seulement 5 scénarios pour calculer le quantile d'ordre 99,5% pour 1000×1000 scénarios.

— Pas d'information sur les points situés entre les simulations primaires (« *outer scenario* »).

Le caractère chronophage est le plus pénalisant, puisque le modèle interne est utilisé à de nombreuses reprises au cours d'une année. C'est la principale raison qui a poussé AXA à opter pour une autre méthode. Il est à noter que pour réduire les temps de calculs, deux possibilités s'offrent à nous :

- Recourir à des *proxies* des éléments du bilan économique.
- Réduire le nombre de simulations à effectuer en ne conservant que les scénarios « intéressants » ([Devineau et Loisel 2009]).

[Devineau et Loisel 2009] ont présenté un algorithme qui permet d'accélérer la méthode de simulations dans les simulations. Cette méthode se séquence en plusieurs étapes :

— Étape 1 : Construction de facteurs de risque élémentaires (actions, taux, mortalité, ...) véhiculant l'intensité du risque de chaque simulation primaire et détermination de la norme associée.

— Étape 2 : Définition d'une région d'exécution associée à un seuil fixé : lorsque les facteurs de risque appartiennent à la région d'exécution, les simulations primaires sont effectuées.

— Étape 3 : Itérations sur le seuil de la région de manière à intégrer à chaque étape un nombre supplémentaire de scénarios à exécuter.

— L'algorithme s'arrête lorsque les N « pires valeurs » des fonds propres économiques sont stabilisées.

1.5.2 *Least squares Monte-Carlo (LSMC)*

L'idée centrale de la méthode de *least squares monte carlo (LSMC)* est de reproduire le comportement du passif par une fonction prenant en entrée tous les facteurs de risque ciblés. La fonction de comportement (ou de *pricing*) exacte du passif n'est pas connue, elle est approchée en s'inspirant de la méthode du développement limité. Cette technique consiste à déterminer une approximation de la fonction de comportement par une combinaison linéaire des fonctions de base appliquées aux facteurs de risque ciblés :

$$C\left(F_t\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i L_i\left(\boldsymbol{F}_t\right)$$

où,

— N est le nombre de régresseurs.

— $\boldsymbol{F}_t = \left(F_t^1, \ldots, F_t^k\right)$ le vecteur des k facteurs de risque à l'instant t.

— $\boldsymbol{L} = (L_1, \ldots, L_M)$ représente une série de fonctions que l'on appelle base régression.

1.5.3 *Replicating portfolio (RP)*

Cependant, AXA n'a pas adopté cette méthode de projection à horizon 1 an des fonds propres. Le choix s'est porté sur la réplication de portefeuilles du passif au moyen d'instruments financiers. Cette méthode est issue des Simulations dans les Simulations dont le passif est modélisé par des instruments financiers dans le but de réduire les temps de calcul de cette dernière. Cette méthode peut être légitimée par le caractère optionnel de nombreuses garanties accordées aux assurés en assurance vie. Parmi celles-ci [Devineau et Chauvigny 2010] cite,

- Taux minimum garanti.
- Participation aux bénéfices (PB) contractuelle.
- Règle de Participation aux bénéfices minimale.
- Droit de rachat et de versements libres dont disposent les assurés.
- Droit d'arbitrage entre supports Euro et supports UC.
- Option de conversion en rente.
- Garanties plancher UC en cas de décès ou plus généralement des GMXB.

Présentons brièvement cette méthode dans son cadre originel, la réplication d'actifs financiers, avant de la développer dans le cadre de la réplication de passif en assurance.

Les techniques de réplication sont très répandues en finance dont l'idée générale est de répliquer un actif Y grâce à p actifs X_i (X=$(X_0, \ldots, X_{p-1})$, en faisant l'hypothèse que ces derniers constituent l'économie où X_0 représente l'actif sans risque ($dX_0(t) = r_t X_0 dt$, avec r_t le taux sans risque).

Plus précisément, sous certaines hypothèses (cf [Rose-Anne et Jeanblanc-Picqué 1998] pour plus de détails) on peut construire un processus $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_{p-1})$ permettant de répliquer Y, c'est-à-dire :

$$\mathbf{w}(t)\mathbf{X}(t) = \mathbf{w}(0)\mathbf{X}(0) + \int_0^T \mathbf{w}(s)d\mathbf{X}(s),\ \forall t \leq T\ p.s, \text{ et}$$

$$\mathbf{w}(T)\mathbf{X}(T) = Y(T),\ p.s.$$

Cependant, la méthode grossièrement présentée ci-dessus est applicable aux marchés financiers. Pour appliquer cela à un portefeuille d'assurance, [Devineau et Chauvigny 2010] invoquent la non possibilité d'utiliser la méthode supra avec des formules fermées car la prise en compte de règles de gestion et de mécanismes comptables spécifiques invalident le plus souvent le recours à des formules fermées. Ainsi, de nouvelles problématiques auxquelles doit répondre la réplication de portefeuille apparaissent :

— L'analyse de la solvabilité de la compagnie dans le cadre d'un dispositif prudentiel (Solvabilité II en l'occurrence) : le *Replicating Portfolio* en tant que *proxy* de la valeur de marché des passifs permet d'estimer le capital économique réglementaire, d'effectuer des calculs alternatifs de besoin de fonds propres (dans l'ORSA 1 par exemple), de tarifer des produits en tenant compte de l'environnement prudentiel considéré *etc.*

— L'estimation de sensibilités d'une *MCEV (Market Consistent Embedded Value).*

— La mise en place de stratégies de couverture.

En utilisant les notations suivantes afin de formaliser les calculs effectués :

— A_1^p la valeur de marché de l'actif en fin de première période pour la simulation primaire p.

— VEP_1^p la valeur économique des passifs en fin de première période pour la simulation primaire p.

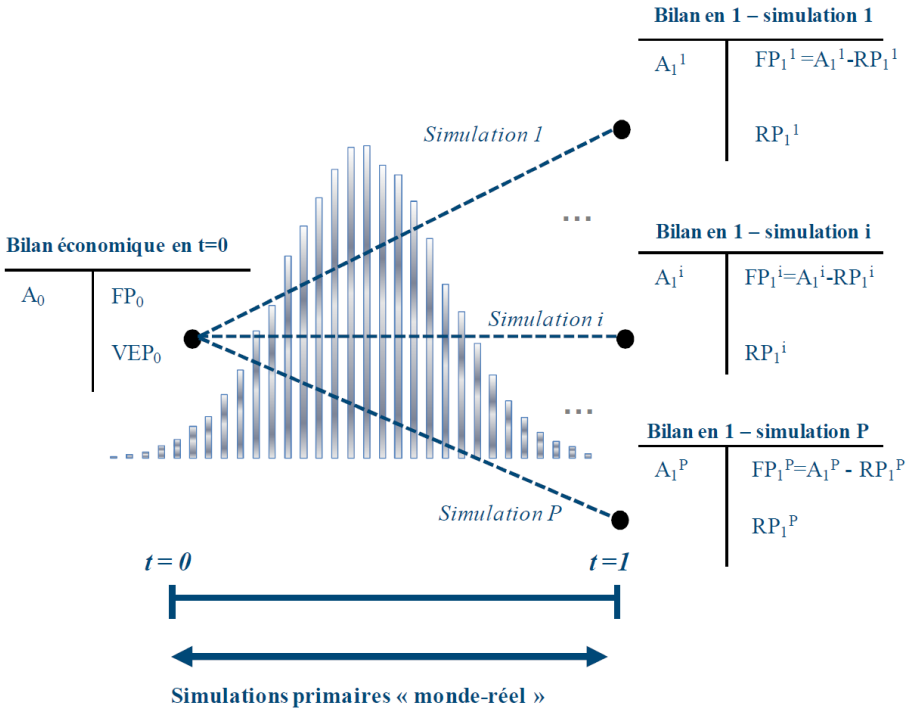
— FP_1^p les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire p.

— RP_1^p la valeur du RP en fin de première période pour la simulation primaire p.

Les postes du bilan économique en $t = 1$, pour la simulation primaire p, sont alors calculés de la manière suivante :

$$VEP_1^p \simeq RP_1^p$$
$$FP_1^p = A_1^p - VEP_1^p \simeq A_1^p - RP_1^p$$

Le graphique 1.6 illustre cette méthode.



Graphique 1.6 – Obtention de la distribution de fonds propres économiques par la méthode RP.
Source : [Devineau et Chauvigny 2010]

En résumé, l'approche classique des RP définit comme :

1. Construction de scénarios économiques monde-réel ou risque-neutre utilisés pour les travaux de calibrage.

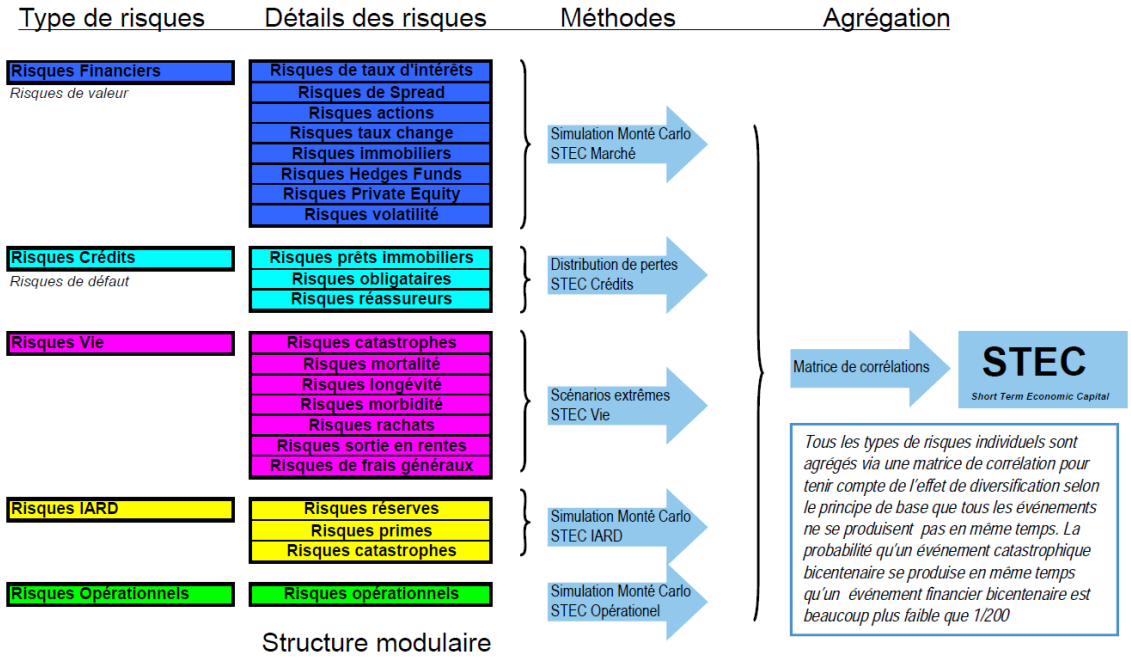
2. Calculs *ALM* visant à obtenir les *cash-flows* de passifs à chaque date sur l'ensemble des simulations générées en étape 1.

3. Sélection des actifs candidats et paramétrage de ces derniers.
4. Détermination de la composition du RP (i.e. estimation des poids de chaque actif candidat) par résolution d'un programme d'optimisation.
5. Test de la qualité d'ajustement.
6. Utilisation du RP comme *proxy* de la valeur économique des passifs.

Finalement, pour un portefeuille d'assurance vie, le passif est assimilé à une combinaison d'instruments financiers qui reproduit ce dernier. Cette combinaison est caractérisée par le type d'instruments financiers et leurs caractéristiques (*strike*, maturité, sous-jacent *etc*).

1.6 Modèle interne d'AXA

Le modèle interne d'AXA est synthétiquement représenté avec le graphique 1.7, avec une arborescence des différents niveaux de risque. Sur ce dernier nous nous intéresserons en particulier à la partie « risques financiers » et dans une moindre mesure aux « risques vie » puisque ce mémoire portera exclusivement sur ces risques.



Graphique 1.7 – Schéma de l'approche intégrée du risque marché d'AXA.

1.6.1 Modèle interne marché d'AXA

Cette partie présente de quelle manière AXA calcule ses capitaux économiques pour les risques de marché. Pour être en adéquation avec les directives de Solvabilité 2, le modèle interne doit fournir le SCR modèle interne, appelé *Short Term Economic Capital* (STEC), qui est le quantile à 99,5% des pertes à horizon 1 an. En d'autres termes, quelle serait la conséquence d'un évènement biséculaire.

Les trois éléments qui composent le modèle interne pour calculer le SCR en modèle interne sont présentés ci-après avec les notations qui leurs seront attribuées tout au long du mémoire.

- Les chocs attribués au différents facteurs de risque.
- Pour chaque risque, la variation d'AFR par rapport à l'AFR que l'on notera P&L. Pour un scénario donné de chocs c :

$$P\&L = AFR\,(\text{base case choqué par } c\,) - AFR\,(\text{base case})$$

- La variation d'AFR totale après agrégation des P&L que l'on notera P&L total ou $P\&L_{total}$.

  Avant de présenter le modèle interne, attardons-nous sur un point de vocabulaire. Lorsque l'on calcule les capitaux économiques nécessaires pour une année n, donc le $31/12/n-1$, il faut prendre en considération les capitaux déjà disponibles à l'année $n-1$. Ainsi, les valeurs qui sont calculées dans le modèle interne et dans la suite du rapport ne seront pas des valeurs « brutes », mais des variations de valeurs par rapport au *base case*. Le *base case* étant la valeur de l'AFR avec conditions économiques au moment du calcul du capital. Par la suite, nous confondrons ces quantités lorsque cela n'aura pas d'incidence : variations de valeurs (P&L) et les valeurs. Pour mettre en place le calcul de SCR, le modèle interne procède schématiquement comme suit :

  1. Génération de 11 000 jeux de chocs basés sur les données historiques qui prennent en compte les corrélations entre les risques. Un jeu de chocs représente l'ensemble des chocs à appliquer sur chacun des facteurs de risque (par exemple -20% sur le CAC 40, hausse des taux de maturité 10 ans *etc*). Les facteurs de risque ont généralement une granularité assez importante, par exemple une cinquantaine de facteurs pour le risque *Equity* segmentés selon les pays et les secteurs.

  2. Calcul de 11 000 scénarios passifs/actifs selon les jeux de chocs obtenus qui donnent les P&L :

     - Les actifs de chaque scénario sont calculés en utilisant les méthodes de pricing « classiques » (options sous le modèle de Black & Scholes *etc*).
     - Les passifs sont calculés en utilisant les *replicating portfolios* (cf partie 1.5.3), à un jeu de chocs donné, le portefeuille répliquant a une valeur qui détermine le niveau du passif.

  3. Obtention d'une valeur latente pour chaque scénario, un profit ou une perte noté P&L pour chacun des risques et le profit ou perte total après agrégation noté $P\&L_{total}$ ou P&L total.

  4. Obtention du STEC (SCR modèle interne) en prenant la $55^{\text{ème}}$ plus petite valeur des $P\&L_{total}$ qui correspond au quantile d'ordre 99,5% des pertes.

Le graphique 1.8 présente les risques intégrés à ce calcul. On voit sur cette dernière que les risques intégrés sont plus nombreux que dans la formule standard avec la prise en compte des volatilités taux et action, les risques liés aux *spread* gouvernementaux et *corporate* ainsi qu'un maillage plus fin pour le risque *equity* qui se divise en actions, volatilité implicite des actions, *hedge-funds* et *private equity*. Notons que les risques *spreads corporate* et *government* sont des risques de valeurs et non pas de défaut.

Graphique 1.8 – Schéma de l'approche intégrée du risque marché d'AXA.

Remarque : Le terme de simulations Monté-Carlo pour le STEC marché fait référence à l'obtention d'une distribution de pertes au moyen de simulations.

Afin de faciliter la compréhension du modèle interne, prenons un exemple simple. Supposons que l'on a un *call* dont le sous-jacent est le CAC 40 et de maturité 2 ans dans le portefeuille assuré. Alors, pour chacun des scénarios, via les chocs nous aurons 11 000 rendements CAC 40, volatilités implicites des options sur le CAC 40 et les niveaux des taux prévus. Le passif sera répliqué via les *replicating portfolio*. L'actif et le passif enregistreront 4 variations de valeurs.

- Variation due au changement des niveaux de taux qui sera associée à « risque des taux d'intérêts ».
- Variation due au changement du niveau du CAC 40 qui sera associée à « risque actions ».
- Variation due au changement des volatilités implicites sur les options du CAC 40 qui sera associée à « risque de volatilité implicite actions ».
- Variation « globale » du prix de ce *call* lorsque l'ensemble des chocs (taux, volatilité et CAC 40) est effectués et associée au $P\&L_{Total}$.

Dans ce modèle, les chocs appliqués aux différents risques ne sont pas tous de même nature avec des chocs absolus et relatifs. Si l'on note la valeur de référence d'un risque dans le *base case* V_{BC} (un taux, un rendement, une volatilité *etc*) et c le choc associé, nous avons après choc un risque R_{choc} :

- $R_{choc} = V_{BC} \times (1 + c)$ si le choc est multiplicatif.
- $R_{choc} = V_{BC} + c$ si le choc est additif.

Pour les risques Taux, *Corporate* et *Government Spread* ainsi que pour l'inflation les chocs sont additifs. Pour les autres risques les chocs sont multiplicatifs.

Par exemple, avec les risques Taux et *Equity* pour des chocs respectivement multiplicatifs et additifs, nous avons :

- Si le rendement base case est 100%, et que le choc *Equity* est +200 *bps*, alors le P&L de ce scénario correspond à la valeur du portefeuille *Equity* pour un rendement 102%.
- Pour les taux, si le taux d'une maturité donnée est de 1% et que le choc est de -50 *bps*, alors le taux à considérer sera de 0,5%.

Attardons-nous désormais sur un couple de risque qui nécessite une attention particulière, les taux et la volatilité implicite des taux.

1.6.2 Modèle des produits de taux en univers risque neutre

Nous présentons désormais le modèle utilisé pour la modélisation des taux et de la volatilité implicite des taux puisque un modèle alternatif sera présenté par la suite. Dans le modèle actuel les risques liés aux taux et à la volatilité implicite des taux sont calculés de manière « conjointe ». Pour générer les scénarios risque neutre, nous calibrons le modèle de taux en utilisant un modèle de Black-Karasinski *shifté* :

Le modèle de Black-Karasinski suit le processus de diffusion suivant :

$$d\ln \tilde{F}_t = \left[\theta_t - \alpha_t \ln \tilde{F}_t\right] dt + \sigma_t d\mathrm{W_t}. \tag{1.1}$$

En appliquant le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$d\ln \tilde{F}_t = \frac{d\tilde{F}_t}{\tilde{F}_t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\tilde{F}_t^2}\left\langle d\tilde{F}_t, d\tilde{F}_t \right\rangle,$$

Soit,

$$d\tilde{F}_t = \tilde{F}_t\, d\ln \tilde{F}_t + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \tilde{F}_t dt,$$

en injectant 1.1, nous obtenons finalement :

$$= \tilde{F}_t \left[\theta(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 - \alpha(t)\ln \tilde{F}_t\right] dt + \sigma(t)\tilde{F}_t\, dW(t).$$

Avec,

- F_t le taux *forward* à l'instant t de maturité donnée T.
- $\tilde{F}_t$ le taux *forward shifté* de s à l'instant t de maturité donnée T.
  La relation entre F_t et $\tilde{F}_t$ est : $\tilde{F}_t = F_t + s$
- σ la volatilité.
- W le mouvement brownien standard.
- μ le *drift*.

Cependant, il n'existe pas de formule fermée pour ce modèle. Ainsi sous ce modèle les prix doivent être calculés par méthodes numériques. Nous savons tout de même que sous ce modèle, les actifs suivent des lois log-normale.

C'est grâce à ce modèle que sont déduites les volatilités implicites. En effet sur le marché des taux, il existe des *swaps, swaptions etc* dont les prix sont disponibles. En égalisant le prix de marché avec le prix modèle nous obtenons la volatilité implicite.

Par exemple, si l'on veut déterminer le prix d'une option de maturité T, de sous-jacent S_t et de volatilité (implicite) σ, nous obtenons sous le modèle de Black-karasinski une valeur numérique $PV\left(S_t, T, \sigma\right)$. En allant chercher le prix de cette option sur les marchés PV_{market} et en égalisant :

$$PV_{market} = PV\left(S_t, T, \sigma\right),$$

nous obtenons la volatilité implicite σ en inversant numériquement l'égalité précédente.

Cependant, ce modèle ne permet pas de *pricer* des options dont les taux sont négatifs. En résumé,les points principaux du modèle sont les suivants :

— Les volatilités implicites de Black sont très négativement corrélées avec les taux (-80% sur le portefeuille d'AXA France vie) (cf équation 3.1).

— La volatilité augmente lorsque le taux diminue, et inversement.

— Les taux sont *floorés* à niveau donné, lorsque les taux sont négatifs il est impossible de déterminer les volatilités implicites de Black correspondant aux prix des *swaptions* observés sur le marché lorsque les taux sont négatifs.

Chapitre 2

Étude sur le *STEC* vie

Ce premier chapitre porte sur le capital économique du modèle interne d'AXA France dit STEC pour le risque vie. Bien que ce risque ne soit pas celui qui nous intéresse pour ce rapport, son étude nous sera d'une grande utilité pour deux principales raisons. Premièrement, sa structure d'agrégation des risques extrêmes via une matrice d'agrégation présente des avantages qui pourraient convenir au STEC marché. Ainsi on regardera si il est possible dans une première partie de passer de scénarios extrêmes à des simulations Monté-Carlo et *vice-versa*. Pour ce faire, on utilisera une modélisation alternative au moyen de simulations Monte-Carlo sur des copules. Deuxièmement, la structure théorique relativement « simple » à partir de laquelle est construit le STEC vie présente des avantages calculatoires utiles pour calculer certains paramètres actuariels.

Pour des soucis de simplification, nous pourrons utiliser par la suite les notations suivantes :

- R_1 = *Life cat*
- R_2 = *Mortality*
- R_3 = *Longevity*
- R_4 = *Other customer behaviors (OCB)*
- R_5 = *Lapses Up*
- R_6 = *Lapses Down*
- R_7 = *Disability*
- R_8 = *Expense*
- R_9 = *Medical expense*
- R_{10} = *Lapse mass*

2.1 Méthodologie existante

AXA a choisi de fournir un *SCR* calculé avec son modèle interne. Pour bien comprendre l'étude menée sur ce dernier, nous présentons brièvement la méthodologie employée par AXA pour calculer le STEC vie. Cette méthodologie qualifiée de « scénarios extrêmes » consiste à calculer indépendamment les dix pertes à horizon 1 an qui constituent le risque vie avec une probabilité élevée. Pour calculer ces pertes, nous regardons l'impact sur chacun des risques d'un choc

élevé (probabilité biséculaire d'occurrence) grâce à l'historique. Ensuite les pertes extrêmes sont agrégées par une matrice pour *in fine* donner le STEC vie. Cela est résumé avec les trois grandes étapes suivantes :

1. Calcul des chocs extrêmes pour chacun des risques à l'aide de l'historique (quantiles à 99,5%).
2. Calcul de l'impact de chacun des risques sur le portefeuille vie. Cette étape fournit les STEC *standalone*. Les STEC *standalone* sont les quantiles d'ordre 99,5% des risques pris à part entière.
3. Agrégation des différents *STEC standalone* au moyen d'une matrice de corrélation des risques vie Σ_{vie} cohérente avec l'historique des données et qualifiée de « prudente ». Finalement, le STEC vie est calculé comme :

$$STEC = \sqrt{\boldsymbol{X}'\Sigma_{vie}\boldsymbol{X}},$$

avec $\boldsymbol{X}$ le vecteur des risques extrêmes des risques ou STEC *standalone*.

$$\Sigma_{\text{Life}} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & R_7 & R_8 & R_9 & R_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 25\% & 25\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 100\% & -50\% & 0\% & 25\% & 0\% & 25\% & 25\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & -50\% & 100\% & 25\% & 0\% & 25\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 25\% & 100\% & 25\% & 25\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 25\% & 0\% & 25\% & 100\% & 50\% & 25\% & 25\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 25\% & 25\% & 50\% & 100\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 25\% & 25\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% & 100\% & 25\% & 50\% & 0\% \\ 25\% & 25\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% & 25\% & 100\% & 25\% & 50\% \\ 25\% & 25\% & 25\% & 0\% & 25\% & 0\% & 50\% & 25\% & 100\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 50\% & 0\% & 100\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque : Avec les hypothèses faites ici, on considère implicitement que les risques liés à la vie suivent des lois normales.

Finalement, sous les hypothèses du modèle interne d'AXA, le *STEC* vie suit théoriquement une loi normale (somme de variable aléatoires normales). À titre indicatif, le tableau 2.1 présente les différents quantiles obtenus sur chacun des sous-risques, ainsi que les quantiles des risques agrégés. Ces données serviront de base pour les calculs du *STEC* vie. Un point important pour la suite, les risques *Life cat* et *Lapse mass* n'ont pas autant de données non nulles que les autres risques, cela engendrera des problèmes d'adéquations aux lois.

Quantile	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	Total (diversifié)
75%	0	32	133	19	62	17	56	53	36	0	212
90%	0	64	181	31	112	32	112	100	74	2	364
95%	45	83	204	39	143	42	149	129	97	15	471
99%	19	119	270	51	197	61	219	181	143	93	707
99,5%	158	132	297	56	215	69	250	201	161	153	802
99,8%	223	150	312	62	229	74	229	221	153	236	873

Tableau 2.1 – Quantiles des sous risques AXA vie.

Si l'on se base sur les résultats précédents, certaines hypothèses peuvent paraître trop contraignantes, parmi celles-ci la plus significative semble être la normalité de chacun des sous-risques et donc du risque global. Cependant, en plus d'être simple ce calcul d'agrégation matriciel permet d'offrir une vision claire et compréhensible par un grand nombre.

Si d'autres lois avaient été envisagées pour modéliser les sous-risques cette méthodologie d'agrégation n'aurait pas été valable. Le calcul d'agrégation des risques s'avérerait plus complexe qu'un produit « simple » matriciel. C'est pourquoi nous avons mis en place une méthodologie alternative basée sur les copules qui permet d'agréger des risques quelles que soient les lois marginales.

2.2 Méthodologie par utilisation de copules

Pour se soustraire à cette contrainte de normalité des risques, afin de choisir une loi qui correspond le plus aux données disponibles, nous avons adopté une méthode d'agrégation basée sur les copules. Dans ce qui suivra, lorsque nous parlerons de copule, ce sera la copule gaussienne notée C_Σ dont la matrice de variance-covariance est celle du modèle interne Σ_{vie}. Le choix de prendre cette matrice résulte du fait que le calcul d'une matrice de corrélation recevable peut être très chronophage et cela ne représente pas un intérêt particulier pour ce rapport. De plus, cette méthode permettra de s'assurer que les résultats de cette nouvelle méthode sont cohérents avec ceux du modèle interne d'AXA.

La méthodologie de calcul du *STEC* vie avec ladite copule s'articule comme suit :

1. Choix et estimation des lois (pas forcément identiques) qui s'ajustent le mieux aux quantiles de référence des différents risques.

2. Simulation de 100 000 * copules gaussiennes C_Σ de matrice de variance-covariance. C'est-à-dire, 100 000 $\times$ 10 réalisations de variables aléatoires dont les marginales sont les lois déduites de l'étape précédente.

3. Extraction du quantile d'ordre 99,5% sur la somme des 10 réalisations corrigées de leurs médianes. La correction des quantiles par les médianes fait suite à la définition d'un *STEC* qui est :
$$STEC(X) = q_{99,5\%}(X) - mediane(X).$$
Par ailleurs cela fait écho au fait qu'une assurance est généralement une entreprise rentable et donc la médiane en question doit être positive.

Détaillons maintenant les parties d'estimation des lois et l'obtention finale du STEC.

2.2.1 Estimation des lois marginales

Avant d'aborder l'estimation en soi des marginales, revenons sur un point qui permet de justifier ce choix de normales centrées. Dans le cadre gaussien la médiane et la moyenne se confondent, ainsi le calcul de *STEC* se résume à un calcul de quantile. Cependant, dans le cas général le *STEC* associé à une variable est égal à son quantile d'ordre 99.5% auquel on retranche sa médiane. Cet artefact mathématique d'une pseudo-symétrie prend tout son sens si l'on considère

∗. Le nombre de simulations est satisfaisant puisque les résultats sont robustes, en effet ils ne varient pas d'une simulation à l'autre.

qu'une assurance n'a pas de pertes en moyenne. Ainsi, après avoir déterminé quelles sont les lois candidates pour représenter les différents quantiles de chaque sous-risque, nous résolvons le programme suivant en imposant l'égalité entre les quantiles empiriques et théoriques d'ordre 99,5% corrigés de leur médiane :

$$\begin{aligned} &\underset{\theta}{\text{minimiser}} && \sum_{i=1}^{n} \left[q_i(\theta) - m(\theta) - q_i(vie) \right]^2 \\ &\text{sous contrainte} && q_{99,5\%}(\theta) = q_{99,5\%}(vie) \end{aligned}$$

avec,

- $q_i(vie)$: le quantile d'ordre i de référence.
- $q_i(\theta)$: le quantile d'ordre i de la loi en question.
- $m(\theta)$: la médiane de la loi en question.

Après avoir testé différentes lois parmi lesquelles les lois normales ($\mathcal{N}$), Weibull ($\mathcal{W}$), Student ($\mathcal{T}$) et Log-normale ($\mathcal{LN}$), nous concluons avec des lois de Weibull pour chacun des sous-risques exceptés *Life Cat* et *Lapse Mass* qui sont gaussiens (on peut noter que sur ces deux risques, la présence de quantiles nuls sur les ordres les moins élevés biaise quelque peu notre estimation car elle réduit de six à quatre ou cinq points notre échantillon). Notons que la quantité de points disponibles ici est très faible et que la qualité d'adéquation aux lois est de fait mauvaise. Cependant, l'objectif ici n'est pas d'avoir une réplication parfaite des marginales. Les résultats de cette modélisation sont résumés dans le tableau 2.2.

Quantiles	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
Loi	$\mathcal{N}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{N}$
10%	-230	-72	29	2	4	1	2	3	1	-248
20%	-186	-49	46	4	9	2	6	6	4	-202
50%	-101	-4	88	10	30	8	24	24	15	-115
75%	-33	32	133	19	63	17	56	53	37	-44
90%	28	64	179	30	107	31	107	95	70	19
95%	64	83	208	38	142	42	150	129	97	57
99%	133	119	268	57	223	70	258	211	168	127
99,5%	158	132	291	65	258	82	308	248	201	153
99,8%	189	148	320	75	305	100	377	298	245	185

Tableau 2.2 – Modélisations des risques composant le STEC vie.

Les résultats sont cohérents par rapport aux attentes avec une relative bonne symétrie dans les distributions. Au-delà de cet aspect, nous avons aussi d'excellentes adéquations au niveau des quantiles d'ordres 75% à 99,8% comme le montre le tableau 2.3.

Quantiles	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
75,0%	100%	1%	-31%	-6%	-2%	-5%	-1%	-1%	2%	100%
90,0%	100%	-1%	-3%	2%	1%	0%	0%	0%	0%	97%
95,0%	56%	0%	5%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	85%
99,0%	2%	0%	2%	0%	-1%	1%	1%	0%	0%	33%
99,5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
99,8%	-26%	-1%	1%	-2%	0%	0%	0%	0%	1%	-38%

Tableau 2.3 – Écarts-relatifs des sous risques AXA vie modélisés par des marginales $\mathcal{W}$ et $\mathcal{N}$.

Sur ce dernier, on remarque qu'en valeur absolue les écarts entre les quantiles (entre 90% et 99,8%) et leurs estimations sont inférieurs à 5% pour les risques modélisés par des lois de *Weibull*. On pourra le voir dans un tableau ultérieur, bien que les lois de *Weibull* semblent plus adaptées que les lois normales pour certains risques, la différence n'est pas majeure et l'hypothèse de non normalité rendrait l'interprétation du modèle interne plus compliquée. Or, cette relative facilité d'interprétation est un point fort du modèle interne, qui par ailleurs fournit des résultats plus que cohérents. Pour les risques *Life Cat* et *Lapse Mass* modélisés par des normales centrées, les résultats sont moins adaptés avec des erreurs d'estimations plus importantes (les résultats sont pires lorsque l'on utilise une autre loi). Nous pouvons tout de même, au global, être satisfaits de ces modélisations qui sont correctes pour des quantiles élevés *a fortiori* avec le nombre de données à disposition.

2.2.2 Estimation du *STEC* vie

Après avoir construit la copule gaussienne de matrice de variance-covariance Σ_{vie}, en renseignant comme marginales les lois que nous venons d'estimer, nous avons généré 100 000 réalisations de cette copule. Cette simulation peut se visualiser comme la génération de 100 000 variables multivariées qui intègrent les liens entre elles. Chacune des dix variables est corrigée de sa médiane (on ne corrige pas chaque variable de la médiane associée à la distribution des sous risques puisqu'on a simulé la copule dont les réalisations ne sont pas celles associées aux marginales, cf le théorème de Sklar pour plus de détails). Enfin, nous sommons les colonnes et prenons le quantile d'intérêt sur cette nouvelle base à 100 000 lignes qui constitue 100 000 pertes vie. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous (en M €).

Remarque : La précision n'est pas impactée par le nombre de simulations comme on a pu le tester empiriquement.

Le tableau précèdent comprend les quantiles associés à la copule gaussienne, les quantiles du modèle interne et les variations relatives entre ces deux quantiles. Là encore les résultats sont satisfaisants, avec des différences faibles (maximum 4%) et surtout un *STEC* retrouvé avec une erreur de seulement 1%. Cette différence entre le « vrai » *STEC* et celui que l'on vient de calculer provient essentiellement de deux éléments :

- Les erreurs dues aux simulations.
- Les lois marginales ont des queues épaisses, d'où une légère sur-estimation du STEC et des quantiles.

Pour s'assurer que ces erreurs sont bien dues à des erreurs de simulations et à la présence de distributions à queues plus épaisses que les gaussiennes, nous avons fait un exercice qui peut faire office de validation du modèle vis-à-vis du modèle interne.

Quantiles	C_Σ	Modèle interne	Variations relatives
10%	-420		
20%	-273		
50%	-5		
75%	207	212	-2%
90%	399	394	1%
95%	515	503	2%
99%	733	707	4%
99,5%	812	802	1%
99,8%	906	873	4%

Tableau 2.4 – Comparaison de quantiles calculés par le modèle interne et par C_Σ avec des marginales $\mathcal{W}$ et $\mathcal{N}$.

2.3 Backtesting du modèle utilisant les copules

La méthode présentée ci-avant permet entre autres de passer d'un modèle dit de « scénarios extrêmes » (cf graphique 1.7) à un « modèle par simulation de Monte-Carlo ». Ce changement de modèle permet donc d'obtenir une distribution de perte à partir des quantiles extrêmes. Cependant, pour s'assurer que cette nouvelle méthodologie est bien adaptée et donne des résultats cohérents avec ceux du modèle interne nous avons mené une étude. Pour ce faire, nous avons construit une copule gaussienne, dont les lois marginales sont des normales centrées et les variances choisies afin de retrouver les STEC *standalone*. La matrice de variance-covariance de la copule est celle d'agrégation du modèle interne.

Finalement, nous avons adopté la méthodologie présentée ci-avant avec comme choix de lois marginales des normales centrées : $\mathcal{N}(0, \sigma)$ où σ est solution de

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{\text{minimiser}} \quad & \sum_{i=1}^{n} \left[q_i(\mathcal{N}(0,\sigma)) - q_i(vie) \right] \\ \text{sous contrainte} \quad & q_{99,5\%}\left(\mathcal{N}(0,\sigma)\right) = q_{99,5\%}(vie) \end{aligned}$$

Les résultats sont satisfaisants puisque les écarts sont faibles comme les tableaux suivants l'étayent. Le premier renseigne les estimations des marginales.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
Quantiles	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$
10%	-79	-66	-148	-28	-107	-34	-124	-100	-80	-76
20%	-52	-43	-97	-18	-70	-23	-82	-66	-53	-50
50%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75%	41	35	78	15	56	18	65	53	42	40
90%	79	66	148	28	107	34	124	100	80	76
95%	101	85	190	36	137	44	160	128	103	98
99%	143	120	269	50	194	62	226	181	145	139
99,5%	158	132	297	56	215	69	250	201	161	153
99,8%	177	148	332	62	240	77	279	224	180	171

Tableau 2.5 – Quantiles des sous risques vie via des normales centrées réduites.

Plus intéressant, les écarts relatifs entre les quantiles théoriques et empiriques. On voit sur ce tableau que le risque Expense est quasi parfaitement modélisé, dans une moindre mesure les autres risques, et encore une fois des modélisations d'une qualité relative pour *Life Cat* et *Lapse Mass* (cela corrobore le fait que le « manque » de données pénalise ces estimations).

quantiles	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
75%	100%	8%	-70%	-28%	-11%	6%	15%	0,2%	14%	100%
90%	100%	3%	-23%	-11%	-5%	7%	10%	-0,084%	8%	97%
95%	56%	2%	-7%	-9%	-4%	6%	7%	-0,3%	5%	85%
99%	2%	0%	-1%	-2%	-2%	2%	3%	0,4%	1%	33%
99,5%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
99,8%	-26%	-2%	5%	1%	1%	-1%	-1%	-0,3%	0%	-38%

Tableau 2.6 – Écarts-relatifs des sous risques AXA vie avec des marginales $\mathcal{N}$.

Enfin, la comparaison la plus importante, celle qui compare les quantiles du risque global vie. Là encore les résultats sont quasiment parfaits avec une erreur d'au plus 3% selon le quantile. Une erreur de seulement 3 millions sur un *STEC* vie de 802 M €. Qui plus est, cette erreur n'est très certainement due qu'aux erreurs de simulations.

Quantiles	Modèle interne	C_Σ	Variations relatives
10,0%	-399		
20,0%	-262		
50,0%	0		
75,0%	209	212	-1%
90,0%	398	394	1%
95,0%	514	503	2%
99,0%	728	707	3%
99,5%	805	802	∼0%
99,8%	889	873	2%

Tableau 2.7 – Comparaison de quantiles calculés par le modèle interne et par copule gaussienne avec des marginales normales.

Ainsi, on voit au travers de cette modélisation alternative toute l'efficience du modèle interne avec une matrice d'agrégation (qui a été construite de manière quasi similaire en utilisant des copules) qui paraît tout à fait adaptée avec cependant, des marginales pas toujours « parfaites ». On peut aussi apprécier la qualité de la nouvelle méthodologie qui présente l'avantage d'obtenir une distribution des pertes et qui donne des résultats équivalents au modèle interne.

Finalement que ce soit avec des marginales gaussiennes ou gaussiennes/Weibull, sur le STEC vie il est possible de passer d'un modèle à « scénarios extrêmes » à un modèle par « simulations Monte-Carlo » sans pertes majeures. Soit un passage d'une modélisation discrète à une modélisation quasi continue.

2.4 Contributions des risques au STEC

Dans la gestion des risques, pour être cohérent avec le second pilier de Solvabilité 2, il paraît cohérent de s'intéresser à la contribution des risques au STEC.

Numériquement, nous remarquons que les risques *disability, expense, lapses up, medical expense* et *life cat* contribuent à 85% du *STEC*, les autres étant peu impactant. On peut tout de même noter des effets intéressants aux regards du tableau 2.8 :

- L'effet volume est prédominant, c'est-à-dire que la contribution relative de chaque risque au *STEC* vie est presque proportionnelle au *STEC standalone*.
- On peut noter la diversification des risque en regardant le ratio $\frac{\text{PART DE } STEC}{STEC \text{ standalone}}$. Les risques pour lesquels la diversification n'a eu que peu d'importance sont : *Mortality, OCB, Lapse Mass et Lapse Up*. En revanche les risques *Disability, Expense* et *Medical Expense* ont été réduits d'un facteur trois.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
STEC standalone (M €)	158	132	297	56	215	69	250	201	161	153
Contribution au *STEC* (%)	8%	4%	14%	2%	15%	3%	20%	16%	13%	6%
Contribution au *STEC* (M €)	61	32	112	4	120	23	158	127	108	48
$\frac{\text{contribution}}{STEC \text{ standalone}}$	61%	76%	62%	75%	14%	67%	37%	37%	33%	68%

Tableau 2.8 – Répartition des risques au sein du STEC vie.

Étant donné le cadre théorique dans lequel s'inscrit le STEC vie, il ne paraît pas déraisonnable que les différentes contributions aux risques s'expliquent « quantitativement ». C'est pourquoi la partie suivante porte sur les différents calculs que l'on peut effectuer dans le cadre gaussien :

- Risques gaussiens.
- Matrice d'agrégation des risques.
- STEC gaussien.

2.5 Calculs sur le *STEC* dans un cadre théorique simple : le cadre gaussien

Si l'on considère que chacun des risques $(R_i)_{i=1...n}$ sont gaussiens, nous avons un cadre de calcul simplifié, et les quantités d'intérêt sont calculables par formules fermées. Outre cet aspect pratique, les résultats présentés dans cette partie donneront des intuitions utiles pour des cas plus complexes comme le *STEC* marché.

En notant :

- Σ la matrice de corrélations entre les risques.
- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ le vecteur des *STEC standalone*.
- A_Σ la décomposition d'Euler associée à la matrice Σ.

Nous avons alors :

$$STEC^2 = X^t \Sigma X = X^t A_\Sigma^t A_\Sigma X,$$

avec,

$$A_\Sigma = \frac{{}^t X \Sigma}{\sqrt{{}^t X \Sigma X}},$$

en effet,

$$A_\Sigma X = \frac{{}^t X \Sigma X}{\sqrt{{}^t X \Sigma X}} = \sqrt{{}^t X \Sigma X} = STEC.$$

La quantité A_Σ est un vecteur, et correspond à la décomposition d'Euler de la matrice Σ. Ces calculs vont nous permettre de déduire des relations entre les coefficients de corrélations et certains « indicateurs assurantiels ».

Définition 1. *Transmission Factor (TF) : le transmission factor d'un risque i noté TF_i correspond au supplément de STEC total pour l'ajout d'une unité de risque i. Quantitativement, cela se traduit par une dérivée, à savoir :*

$$\forall i,\ TF_i = \frac{\partial STEC}{\partial STEC_i}.$$

En déroulant des calculs différentiels sur la forme paramétrique du *STEC* ($\sqrt{{}^t X \Sigma X}, nous obtenons$:

$$\boxed{\frac{\partial STEC}{\partial STEC_i} = TF_i = A_{\Sigma,i}.}$$

Par conséquent, on observe que la dérivée du STEC par rapport à un STEC *standalone* d'un risque est égale au coefficient d'Euler de ce risque.

Ainsi dans le cas gaussien, les *Transmission Factor* sont disponibles par formule fermée.
Nous avons aussi en travaillant sur le $STEC$ au carré :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|], \frac{\partial STEC^2}{\partial STEC_i} = \frac{\partial^t X \Sigma X}{\partial X_i} = 2\sum_j \rho_{i,j} X_j + 2X_i,$$

et,

$$\frac{\partial^2 STEC^2}{\partial STEC_i \partial STEC_j} = 2\rho_{i,j}.$$

Ainsi, la dérivée partielle du $STEC$ au carré par rapport aux sous-risques i et j est proportionnelle aux coefficients de corrélation de ces risques. Nous sommes donc capables de construire localement (autour du quantile à 99,5% de la distribution la perte totale) une matrice de corrélation équivalente.

En notant $P = (P_1, \ldots, P_n)$ les $P\&L$ associés à chacun des risques, nous pouvons voir que dans ce cadre gaussien,

$$STEC = q_{99,5\%}\left(\sum_i P_i\right).^{\dagger}$$

Par cette écriture, on peut aussi voir que :

$$STEC = \sum_i \mathbb{E}\left[P_i | \sum_j P_j = STEC\right].$$

Si l'on s'attache à un cas simple avec deux risques X_1 et X_2 tels que $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2)$ avec $\mathbb{C}ov\,(X_1, X_2) = \rho$.

Dès lors,

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}\right).$$

$$X_1 | (X_1 + X_2 = S) \sim \mathcal{N}\left(\frac{(\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2) \times S}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \sigma_1 - \frac{\rho^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_2\sigma_1}}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\big[X_1 | X_1 + X_2 = S\big] = \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2) \times S}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

et de manière symétrique,

$$\mathbb{E}\big[X_2 | X_1 + X_2 = S\big] = \frac{(\rho\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2^2) \times S}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

On en déduite donc les contributions diversifiées de chacun des risques au STEC.

†. L'opérateur $q_\alpha(X)$ correspond au quantile d'ordre α de la variable aléatoire X.

De plus, on peut voir que pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$, le quantile d'ordre 99,5% est :

$$q_{99,5\%}(X) = \sigma q_{99,5\%}(Y) \text{ où } Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, on retrouve la distributivité de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\big[X_1|X_1+X_2=S\big] + \mathbb{E}\big[X_2|X_1+X_2=S\big] = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_1^2+2\times\rho\times\sigma_1\times\sigma_2)\times S}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2} = S$$

Cette écriture nous permet alors d'avoir une vision supplémentaire des *Transmission Factor* :

$$STEC = \sum_i TF_i \times STEC_i = \sum_i A_i \times STEC_i \text{ ainsi,}$$

$$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P_i|\sum_j P_j = STEC\right]}{STEC_i}.$$

Nous pouvons déterminer les risques qui contribuent « vraiment » le plus au *STEC*. En considérant la quantité ${}^tX^tA$, nous trouvons répartition diversifiée des risques au sein du STEC.

Finalement, ce premier chapitre a permis de mettre en avant des relations entre les paramètres du modèle et certains indicateurs actuariels (SCR, *Transmission Factor*). Nous avons aussi mis en avant le passage possible d'un modèle de risque par agrégation de valeurs extrêmes à un modèle de risque continu, sans perte d'information. Cela sera utile pour le STEC marché qui est un modèle de risque continu, et dont nous voulons trouver l'équivalent par agrégation de valeurs extrêmes. Avec cette modélisation équivalente nous serons capables de calculer des quantités d'intérêt de manière « simple ».

Chapitre 3

Étude sur le *STEC* marché

Pour souci de simplification, nous noterons par la suite lorsque cela sera utile :

- IR = *Taux d'intérêts*
- V_{IR} ou $VolIR$ = *Volatilité implicite des taux*
- $Corp$ = *Corporate Spread*
- Gov = *Government Spread*
- Eq = *Equity*
- V_{Eq} ou $VolEq$ = *Equity implied Volatility*
- FX = *Foreign rates*
- RE = *Real Estate*
- HF = *Hedge Funds*
- PE = *Private Equity*
- Inf = *Inflation*
- VA = *Volatility Adjuster*

L'objectif de ce chapitre est d'une part de passer du modèle interne marché par simulations Monte-Carlo à un modèle d'agrégation de risques extrêmes, d'autre part d'avoir une vision plus « simple » du STEC marché et de la constitution réelle de ce dernier. Cependant pour le STEC marché les hypothèses gaussiennes faites sur la vie ne sont pas valables. Tout d'abord la normalité des risques est rejetée par le test de Shapiro-Wilk, le STEC n'est pas issu de l'agrégation elliptique. De plus, la comparaison entre les deux types de risques s'étend si l'on revient à une granularité plus fine : les P&L par risque sont des fonctions linéaires des facteurs de risque pour la vie alors que ce n'est pas le cas pour le risque marché. Une autre différence majeure est la présence d'effets croisés pour les risques marché qui n'existe pas dans les risques vie. On peut aussi ajouter à cela une propriété qui prendra une importance toute particulière par la suite :

- Pour la vie : $STEC = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$ [*] car $P\&L_{total} = \sum_i P\&L_i$.
- Pour le marché : $STEC \neq q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$ car $P\&L_{total} = \sum_i P\&L_i$ + effets croisés.

∗. L'opérateur $q_\alpha(X)$ correspond au quantile d'ordre α de la variable aléatoire X.

Le tableau 3.1 renseigne les STEC par risque, et le scénario amenant à une perte totale égale au STEC marché : le scénario STEC, c'est-à-dire le scénario qui a le 55ème P&L total le moins élevé.

	IR	V_{IR}	$Corp$	Gov	Eq	V_{Eq}	FX	RE	HF	PE	Inf	Agrégé
STEC *standalone*	904	997	173	314	459	184	81	171	10	152	68	
Scénario STEC	133	1153	16	-172 †	356	35	-98	29	13	137	-181	1055

Tableau 3.1 – STEC *standalone* et scénario STEC du risque de marché (en M €).

Dorénavant nous allons utiliser les résultats obtenus théoriquement dans le cadre gaussien pour le STEC marché. Nous commencerons par étudier le STEC marché en mettant de côté les risques taux et volatilité implicite des taux afin de ne pas être mis en difficulté par les effets croisés. Après cela, nous intégrerons les risques taux et volatilité implicite des taux en complétant les résultats précédents avec d'autres techniques. L'objectif principal est de trouver une matrice d'agrégation qui permette d'une part d'obtenir les *Transmission Factor* via la décomposition d'Euler et d'autre part de retrouver le STEC marché en agrégeant les STEC *standalone*.

3.1 Obtention d'une sous-matrice de corrélation marché

Dans cette partie nous allons mettre en pratique les résultats de la partie portant sur un STEC gaussien. Cependant, pour pouvoir mettre cela en place, des hypothèses ont été ajoutées et les données légèrement modifiées. Pour commencer, les risques taux et volatilité implicite des taux n'ont pas été considérés ici afin de ne pas être impacté par les effets croisés. En effet, les taux et la volatilité implicite des taux sont les risques qui portent le plus gros effet croisé d'après les experts métiers d'AXA. Ensuite, la définition des pertes totales, c'est-à-dire la méthode d'agrégation des risques a aussi été modifiée pour disposer de plus de possibilités calculatoires. La perte totale sera jusqu'à la partie 3.4.1 égale à la somme des P&L des risques hors taux et volatilité implicite des taux :

$$P\&L_{total} = \sum_i P\&L_i.$$

Numériquement nous obtenons un *STEC* de 915 M €. Jusqu'à la partie 3.4.1 ce sera le STEC de référence. Nous allons à présent aborder la méthodologie présentée ci-avant pour calculer une matrice de variance-covariance sur le risque marché ainsi que les *Transmission Factor*. Pour rappel, si nous étions sous les hypothèses de risques gaussiens, où Σ est la matrice de variance-covariance et $\boldsymbol{X}$ le vecteur des STEC *standalone*, nous aurions :

$$STEC = \sqrt{\boldsymbol{X'}\Sigma\boldsymbol{X}}, \text{ mais aussi,}$$

$$STEC = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right),$$

$$\frac{\partial^2 STEC^2}{\partial STEC_i \partial STEC_j} = 2\rho_{i,j},$$

†. Les montants des risques Government spread et corporate spread sont avec VA.

avec, $\rho_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice de variance-covariance Σ.

Empiriquement, le calcul de cette dérivée nécessite de déterminer des variations de $P\&L_{total}$ suite aux variations des P&L par risques. La définition temporaire du STEC va nous permettre de calculer des quantités d'intérêt $STEC(\pm i, \pm j)$.

$$\text{En notant, } \; STEC(\alpha j, \beta k) = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i + \alpha\frac{P\&L_j}{100} + \beta\frac{P\&L_k}{100}\right) \text{ avec } \alpha, \beta \in \{-1, 1\}.$$

On notera aussi

$$\Delta STEC(i, \pm j) = STEC(i, j) - STEC(i, -j),$$

et,

$$\Delta STEC(-i, \pm j) = STEC(-i, j) - STEC(-i, -j).$$

Ainsi, pour calculer les matrices de variance covariance nous suivons les étapes suivantes :

1. Choquer le risque i de 1%, puis choquer le risque j à respectivement 1% et -1%, soit

$$\Delta STEC(+i, \pm j).$$

2. Choquer le risque i de -1%, puis choquer le risque j à respectivement 1% et -1%, soit

$$\Delta STEC(-i, \pm j).$$

3. Calcul final,

$$\frac{\left[\frac{\Delta STEC(+i,\pm j)}{2\Delta_j} - \frac{\Delta STEC(-i,\pm j)}{2\Delta_j}\right]}{2\Delta_i} = 2\rho_{i,j} \text{ avec } \Delta_k = \frac{P\&L_k}{100}.$$

En pratique sur le segment nous obtenons finalement la matrice Σ_{mark} suivante :

$$\Sigma_{\text{mark}} = \begin{array}{c} \\ Corp \\ Gov \\ Eq \\ VolEq \\ FX \\ RE \\ HF \\ PE \\ Inf \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \text{Corp} & \text{Gov} & \text{Eq} & \text{Vol Eq} & \text{FX} & \text{RE} & \text{HF} & \text{PE} & \text{Inf} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0,11 & 0,78 & 0,58 & -0,04 & 0,27 & 0,44 & 0,48 & -0,26 \\ 0,11 & 1 & 0,17 & 0,13 & -0,01 & 0,06 & 0,10 & 0,10 & -0,06 \\ 0,78 & 0,17 & 1 & 0,89 & -0,05 & 0,42 & 0,66 & 0,73 & -0,40 \\ 0,58 & 0,13 & 0,89 & 1 & -0,04 & 0,31 & 0,48 & 0,55 & -0,30 \\ -0,04 & -0,01 & -0,05 & -0,04 & 1 & -0,02 & 0,02 & -0,03 & 0,02 \\ 0,27 & 0,06 & 0,42 & 0,31 & -0,02 & 1 & 0,23 & 0,26 & -0,14 \\ 0,44 & 0,10 & 0,66 & 0,48 & 0,02 & 0,23 & 1 & 0,40 & -0,22 \\ 0,48 & 0,10 & 0,73 & 0,55 & -0,03 & 0,26 & 0,40 & 1 & -0,25 \\ -0,26 & -0,06 & -0,40 & -0,30 & 0,02 & -0,14 & -0,22 & -0,25 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous trouvons avec cette matrice de corrélations un $STEC$ de 1 001 M €. Ainsi, avec cette méthodologie issue du cadre gaussien, les résultats semblent peu satisfaisants avec une erreur de

l'ordre de 10%. Cependant, comme on l'a vu précédemment, les parts de chaque risque dans le risque total s'estiment par le biais des coefficients de la décomposition d'Euler, qui sont égaux aux *Transmission Factor* (pour rappel, ces derniers représentent la conséquence sur le *STEC* de l'augmentation d'une unité d'un *STEC standalone* cf 2.5).

Le tableau suivant présente respectivement les *Transmission Factor* issus du « modèle » (c'est à dire les coefficients d'Euler) et les *Transmission Factor* « bruts » calculés sur les 11 000 scénarios. Ces TF bruts ont été calculés de manière la plus directe possible, c'est-à-dire en prenant pour un « risque i » donné le ratio :

$$\frac{P\&L_i}{STEC_i}.$$

Avec $STEC_i$ le STEC *standalone* du « risque i » et $P\&L_i$ la perte de ce risque sur le scénario dont la perte totale est égale au STEC. La considération de ce ratio est due à la formule du cadre gaussien :

$$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P\&L_i | \sum_j P\&L_j = STEC\right]}{STEC_i}.$$

quantiles	$Corp$	Gov	Eq	$VolEq$	FX	RE	HF	PE	Inf
TF bruts	0,715	0,156	1,093	0,811	-0,047	0,383	0,606	0,672	-0,368
TF modèle	0,737	0,449	0,910	0,805	0,037	0,496	0,564	0,698	-0,153
Contribution modèle	13%	14%	42%	15%	0%	8%	1%	11%	-3%

Tableau 3.2 – *Transmission Factor* bruts et issus de la matrice de corrélation.

On remarque que selon les risques les TF sont plus ou moins biens représentés par les coefficients d'Euler (donc la matrice de corrélations estimée). Les seuls TF « problématiques » sont ceux de *Government Spread* et Inflation (qui ont respectivement un impact trop élevé et trop faible par rapport aux simulations). Les estimations des TF de *Corporate Spread, equity, Equity Implied Volatility, FX* et *Private Equity* sont quasi parfaitement retrouvés.

On peut tout de même remarquer que les TF sont surévalués avec notre modèle, ce qui est positif d'un point de vue réglementaire. En effet, comme on a pu le voir précédemment, le *STEC* calculé au moyen de cette matrice est supérieur au *STEC* calculé par le quantile de la somme des pertes.

Finalement, on conclut que cette méthode ne donne pas les résultats attendus. L'explication la plus probable est la présence d'effets croisés qui viennent réduire le STEC mais qui ne sont pas pris en compte par la matrice d'agrégation car par nature différents. Au delà des effets croisés, le TF modèle brut est par sa manière de calcul tributaire du scénario ayant le $P\&L_{Total}$ égal au STEC. Ce phénomène est ce que l'on a appelé l'effet tirage.

3.2 Démonstration de l'effet tirage et calcul alternatif des *Transmission Factor*

L'étude menée ci-avant n'a pas donné de résultats satisfaisants pour le calcul du STEC marché par agrégation des STEC *standalone*, et dans une moindre mesure pour le calcul des TF. Étudions ces derniers afin d'obtenir une méthode robuste. Dans le cadre du modèle interne AXA

sur le calcul des *STEC* marché (*STEC* des sous-risques et *STEC* marché), les TF sont calculés en référence au scénario STEC (le scénario qui donne comme perte totale le STEC). Pour quantifier cette prédominance dudit scénario dans le calcul des paramètres, comme précédemment basons-nous dans un cadre simplifié :

- Nous considérons tous les sous-risques sauf les risques taux et volatilité implicite des taux pour mettre de côté les effets croisés.
- Le *STEC* marché est obtenu comme étant le quantile à 99,5% de la somme des risques marché : $STEC = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$.

Cependant en faisant cela, nous sommes très sensibles au scénario STEC et ses caractéristiques. Prenons l'exemple simplifié de ne considérer que trois scénarios, le scénario STEC et les deux scénarios autours (respectivement les quantiles d'ordre 99,51% et 99,49% aux arrondis près) :

Quantile	*Corp*	*Gov*	*Eq*	*VolEq*	*FX*	*RE*	*HF*	*PE*	*Inf*	*STEC*
99,49%	-80	-85	-567	-157	96	-67	-7	-132	3	-916
99,50%	-125	-54	-577	-168	4	-86	-9	-102	127	-915
99,51%	-35	-116	-459	-124	1	-20	-3	-195	67	-914

Tableau 3.3 – Mise en avant de l'effet tirage sur les scénarios marché.

Nous voyons sur le tableau 3.3 que les *STEC* marché sont quasi similaires à ±1 M € près, en revanche les P&L par sous-risques varient énormément, et vont mécaniquement faire bouger les TF. Le tableau suivant renseigne les TF sur ces trois scénarios :

TF	*Corp*	*Gov*	*Eq*	*VolEq*	*FX*	*RE*	*HF*	*PE*	*Inf*
TF(99,49%)	0,41	0,23	1,017	1,03	-0,89	0,31	0,64	0,84	-0,015
TF(99,50%)	0,71	0,16	1,10	0,81	-0,05	0,38	0,61	0,67	-0,37
TF(99,51%)	0,19	0,33	1,00	0,72	-0,014	0,33	0,30	1,24	-0,28

Tableau 3.4 – Impact de l'effet tirage sur les *Transmission Factor*.

On voit sur cet exemple comme nous pouvions le supputer que d'un scénario à l'autre les TF varient énormément. Ainsi, si l'on choisit le scénario au niveau 99,5% des pertes totales pour calculer les TF, nous aurions un biais de sélection. Le phénomène dévoilé par cette étude est la relation de surjection entre les valeurs prises par les sous-risques et la perte totale : deux scénarios totalement différents peuvent menés à des pertes totales quasi identiques. Pour contrevenir à ce biais, nous avons adopté une méthode de calcul différente.

3.3 Prise en compte et correction de « l'effet tirage »

Comme on l'a vu, les calculs précédents sont entachés d'un problème de sélection. En effet, le scénario qui permet d'obtenir le *STEC* est actuellement l'élément qui détermine les paramètres du STEC marché. Par construction de ce STEC alternatif, le choc d'un sous risque (quel que soit son ampleur) est à peu de chose près additif. Ainsi, si l'on choisit un scénario dont le

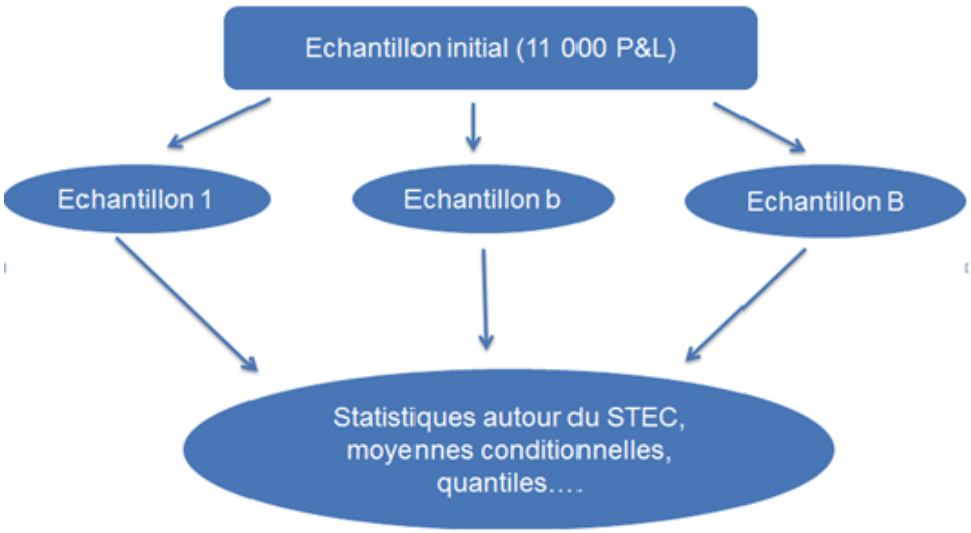
STEC est légèrement différent (± 1 M€), le scénario dit central peut être tout à fait différent, et de fait, les paramètres également. Ainsi, il nous faut trouver un moyen de s'affranchir de ce problème de sélection. Il est à noter que ce phénomène est valable sur le STEC alternatif considéré actuellement, mais se généralise au STEC considéré par AXA.

Puisque les 11 000 scénarios et le STEC ne sont finalement que des réalisations d'un tirage de 11 000 observations d'une loi, nous allons utiliser le *bootstrap* pour obtenir des informations supplémentaires sur celle-ci.

L'idée qui a été mise en place est de calculer les quantités d'intérêt en utilisant des réplications *bootstrap* sans remise (8 000 scénarios parmi 11 000), nous allons « parcourir » un ensemble de scénarios centraux qui en moyenne converge vers le scénario d'intérêt. Plus exactement, la méthodologie est la suivante :

1. Tirage de B échantillons *bootstrap* sans remise de taille 8 000 parmi 11 000.
2. Pour les B échantillons, calcul du quantile à 99,5% et conservation du scénario le fournissant.
3. Contrôle des scénarios obtenus à chaque itération b, si le *STEC* du scénarios b est en valeur absolue supérieur de 10% au *STEC* marché, effectuer un nouveau tirage.

Cette méthodologie permet de détenir des échantillons d'une taille conséquente, mais avec une diversité suffisante pour en moyenne représenter le scénario STEC. Cela est représenté avec la figure 3.1.



Graphique 3.1 – Présentation du tirage *bootstrap*.

L'idée principale du *bootstrap* est d'estimer une quantité (fonctionnelle statistique)

$$T(G) = \int x dG_X$$

à partir d'observations de la variable aléatoire X, $(x_1, \ldots, x_n)$.

Premièrement, si l'on calcule le STEC moyen sur les échantillons *bootstrap*, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[STEC] = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} STEC(b),$$

où $STEC(b)$ est le STEC de l'échantillon b. Nous trouvons un STEC moyen de 916 M € (vs 915 M €). Cela permet en amont de s'assurer que le nouvel échantillon obtenu n'est pas aberrant et comporte les informations nécessaires.

Ensuite, pour continuer dans cette voie, des TF ont été calculés grâce à ces réplications *bootstrap*. Dans notre cas, nous cherchons à estimer les transmissions factors et les éléments de la matrice d'agrégation. Pour ce faire, nous cherchons l'espérance de perte sur chaque scénario STEC qui composent l'échantillon *bootstrap*. Plus synthétiquement, nous cherchons à calculer de manière approchée, pour chaque « risque i » l'équivalent empirique de la formule valable dans le cas gaussien :

$$TF_i = \frac{\mathbb{E}[X_i / \sum X_i = STEC]}{STEC_i} \simeq \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \frac{P\&L_i(b)}{STEC_i(b)}.$$

Où,

- $P\&L_i(b)$ est le « $P\&L_i$ » associé à l' échantillon b.
- $STEC_i(b)$ est le « $STEC$ » marginal du risque i associé à l' échantillon b.

Après avoir simulé 100 000 réplications sans remise de 8000 scénarios parmi 11 000 selon la méthodologie précédente, nous obtenons l'espérance des transmissions factors avec le tableau 3.5.

	$Corp$	Gov	Eq	$VolEq$	FX	RE	HF	PE	Inf
TF	0,628	0,370	0,880	0,650	-0,110	0,635	0,610	0,680	-0,200

Tableau 3.5 – Correction de l'effet tirage sur les *Transmission Factor* au moyen de réplications *bootstrap*.

Un autre point qui est relié à ce calcul conditionnel : celui des coefficients de la matrice de variance-covariance. L'estimation de cette matrice sur le scénario qui permet de retomber sur le $STEC$ est rendue délicate. Dans la même logique que pour le calcul des TF, nous allons calculer de manière approchée la quantité vue dans le cadre gaussien :

$$\frac{\partial^2 STEC^2}{\partial STEC_i \partial STEC_j} = 2\rho_{i,j}.$$

Alors,

$$\forall\ i,j,\ \rho_{ij} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \frac{\partial^2 STEC^2(b)}{\partial STEC_i(b) \partial STEC_j(b)}$$

Cependant les résultats obtenus sont loin d'être satisfaisants, en effet le STEC retrouvé en agrégeant les STEC *standalone* au moyen de cette matrice d'agrégation est de 939 M €.

Finalement, la part d'erreur liée à l'effet tirage paraît minime dans la reproduction du STEC via une matrice d'agrégation. En effet, même en corrigeant cet effet grâce à un tirage *bootstrap*, les résultats ne sont pas satisfaisants. Le seul élément qui *a priori* peut biaiser ces résultats

est la non-normalité des risques. En revanche, les TF sont selon les experts métiers d'AXA cohérents avec les attentes.

Les travaux présentés ci-dessus étaient basés sur les risques marchés sans les taux et la volatilité des taux pour ne pas avoir à se soucier des effets croisés. Ces effets croisés s'expliquent principalement par une réplication du passif via des instruments financiers. La partie suivante présente un moyen d'intégrer les risques taux et volatilité implicite des taux et de mesurer leurs effets croisés, le tout en prenant en considération les conclusions faites auparavant.

3.4 Régression sur le *STEC* marché

Nous allons dorénavant modéliser le *STEC* marché à partir des 11 sous-risques en prenant à présent les taux et la volatilité de ces derniers mais aussi le Volatility Adjustement (VA). En vertu de la mesure de correction de la volatilité prise par l'ACPR (cf [ACPR]) : « les organismes d'assurance peuvent appliquer une correction pour volatilité de la courbe des taux d'intérêt sans risque pertinente à utiliser pour calculer la meilleure estimation de leurs engagements ». Cela a pour objectif que les assureurs ne soient pas trop impactés en vision économique par la variation de valeur des obligations due à la volatilité des *spreads*. En effet, les assureurs ont vocation à conserver ces obligations jusqu'à maturité et ne sont donc pas sensibles aux effets de marché sur ces produits. Cela va engendrer différents effets croisés qui seront pris en compte. Parmi ces derniers, le plus important est celui entre les taux et la volatilité implicite des taux. Finalement, nous considérerons seulement les effets croisés suivants :

- Taux / tous les sous risques
- *Equity / Volatility Equity*
- *Equity / Hedge Funds*

Avant de présenter la méthodologie de modélisation du *STEC* marché, donnons un exemple d'effet croisé. Dans le cas de *swaptions* intégrées au portefeuille, les variations économiques auront un effet propre sur les taux et sur la volatilité implicite des taux. Cependant, l'effet total n'est pas égale à la somme de ces deux effets, mais additionné à un terme supplémentaire dû au choc conjoint des taux et de la volatilité : l'effet croisé. En d'autres termes, les effets croisés peuvent être vus comme une « synergie » entre les variables explicatives. Soit :

$$\text{P\&L total } \neq \sum_i P\&L_i$$

3.4.1 Méthodologie générale de l'explication du STEC par les P&L des risques

Grâce aux différentes techniques de régression, plusieurs choix s'offrent à nous. Cependant, les caractéristiques des données en présence vont nous amener à limiter le panel. Premièrement, la brique de base de notre régression est le choix des données qui serviront à estimer les paramètres. Si l'on considérait l'ensemble des 11 000 scénarios, nous aurions une telle variance sur la variable à expliquer (P&L total variant de $-2\,293$ M€ à $2\,670$ M€) et sur les variables explicatives, que les données formeraient un nuage de point dense sans « forme particulière ». De plus, certaines données n'ont pour cette étude aucune importance, en particulier les P&L total positifs. Notons

aussi que le profil de risque le plus vraisemblable pour AXA correspond à des baisses de taux mais que certains scénarios proches du scénario *STEC* correspondent à des hausses de taux. Ainsi, pour ne retenir que les scénarios d'intérêt et avoir une quantité suffisante de données, la méthodologie de sélection des données est la suivante :

1. Tirage de B échantillons *bootstrap* sans remise de taille 8 000 parmi 11 000.
2. Pour les B échantillons, calcul du quantile à 99,5% et conservation du scénario le fournissant.
3. Contrôle des scénarios obtenus, si le *STEC* du scénarios b est supérieur ou inférieur de 10% au *STEC* marché, effectuer un nouveau tirage.

Finalement, nous obtenons une base de calcul conséquente (de taille B) dont les scénarios sont proches du « vrai » *STEC* avec une pondération implicite des scénarios en fonction de leur probabilité de tirage. Cet échantillon a par ailleurs donné des résultats satisfaisants sur les calculs de *Transmission Factor*, d'où une confiance sur ce dernier. Cependant, persiste toujours une certaine volatilité des P&L des sous-risques bien que les *STEC* associés soient très proches.

Deuxièmement, il nous faut sélectionner la manière par laquelle nous allons régresser les P&L total par les P&L des sous-risques avec les données à disposition. Puisque les scénarios prennent en compte les effets croisés et les corrélations entre les différents risques ; selon toute vraisemblance les termes propres des sous-risques correspondent aux pertes moyennes comme cela a été montré dans les parties précédentes. Dès lors, si pour un scénario donné on calcule la différence du *STEC* agrégé et de la somme des P&L qui le composent, nous aurions la contribution relative aux différents effets croisés.

En notant Y la variable à expliquer :

$$Y = P\&L_{total} - \sum_i P\&L_i,$$

la régression qui va être mise en place est alors :

$$\text{Expliquer } Y = P\&L_{total} - \sum_i P\&L_i \text{ en fonction de } X = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{i,j} \times P\&L_i \times P\&L_j.$$

Finalement, puisque les données sont dans la zone STEC, nous avons d'après les calculs précédents :

$$P\&L_{total} = \sum_i \tilde{P\&L_i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{i,j} \times \tilde{P\&L_i} \times \tilde{P\&L_j},$$

avec $\tilde{P\&L_i}$ la moyenne pondérée des $P\&L_i$ dans la zone STEC.

Ainsi, avec les coefficients de la régression, nous sommes en capacité de calculer les différents « paramètres » liés au *STEC* marché : TF, contributions relatives *etc.*

Cependant, dans les faits les calculs d'échantillons *bootstrap* peuvent s'avérer trop chronophages et gourmands en espace de stockage pour être efficacement mis en œuvre en pratique. Pour contourner cette embûche, la réflexion qui a été menée est la suivante : avec un nombre de tirage *bootstrap* infini ($B \to +\infty$), nous serions en mesure d'avoir la distribution des scénarios tirés, c'est-à-dire leurs probabilités d'être effectivement tirés.

3.4.2 Pondération équivalente au tirage *bootstrap*

Cette observation a été traitée de la manière suivante : pondérer les scénarios par leur probabilité de tirage. En ayant auparavant trié par ordre croissant les scénarios selon leur $P\&L$ totaux, le scénario étudié sera noté i (donc le scénario ayant le $i^{\text{ème}}$ plus petit $P\&L$ total) et n le nombre de scénarios tirés par tirage *bootstrap* sans remise. Ainsi, le poids du scénario i sera égal à sa probabilité d'être tiré ($\frac{n}{11000}$) et d'être effectivement le quantile d'ordre souhaité parmi le tirage *bootstrap*. La méthodologie de détermination des poids nécessite donc de calculer les quantités suivantes :

1. Probabilité de tiré le scénario i, soit $\frac{n}{11000}$
2. Probabilité que ce scénario i soit bien le quantile d'ordre souhaité : probabilité d'avoir x [‡] scénarios inférieurs à i et $n - x - 1$ scénarios supérieurs en terme de perte totale.

La seconde probabilité est calculée en utilisant une loi hypergéométrique de paramètres $(n, x - 1, 1)$.

En effet, si l'on considère une loi hypergéométrique ($\sim X$) de paramètres (n,p,A), on peut l'interpréter comme : on tire simultanément n boules dans une urne contenant pA boules gagnantes et qA boules perdantes (avec $q = 1 - p$, soit un nombre total de boules valant $pA + qA = A$). On compte alors le nombre de boules gagnantes extraites et on appelle X la variable aléatoire donnant ce nombre. Dans notre cas, une boule gagnante sera un scénario dont la perte est inférieure ou supérieure au quantile cible.

Finalement,

$$poids(i) = \mathbb{P}\left(\text{tirer le scénario } i\right) \mathbb{P}\left(x - 1 \text{ scénarios} \leq i\right) \mathbb{P}\left(n - x - 1 \text{ scénarios} \geq i\right).$$

Par cette méthode de pondération nous disposons donc d'un échantillon de l'ordre de 200 scénarios ainsi que leurs poids. Cela constitue donc une base de donnée qui va nous permettre d'expliquer le STEC en fonction des P&L.

3.5 Méthodes de régressions

Si l'on revient aux définitions théoriques de la régression linéaire, en particulier des coefficients de la régression, on peut écrire β le coefficient de la régression de Y par X par moindres carrés ordinaires (MCO) comme :

$$\beta = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\mathbb{V}ar(X)}$$

Or, dans notre cas le risque $HedgeFunds$ admet des P&L très peu volatiles. Ainsi, lorsque on régresse les la différence des P&L total moins les P&L, l'effet croisé taux / $HedgeFunds$ suit à peu de choses près le mouvement des taux. On obtiens finalement une contribution de 10% au STEC total expliqué cet effet croisé. Cependant, au regard de la composition du portefeuille vie d'AXA cela semble très peu vraisemblable. Finalement la méthode de régression par MCO n'a pas été retenue tant les résultats défaillaient.

‡. x correspond au quantile équivalent sur un échantillon *bootstrap*. Par exemple, si le quantile d'intérêt est le $k^{\text{ème}}$ plus petit, alors $x = \frac{kn}{11000}$.

L'idée d'expliquer par des effets croisés les pertes totales moins la sommes des P&L semble pourtant intéressante, nous allons donc poursuivre sur ce dernier en changeant la méthode d'estimation des paramètres. L'idée est toujours la même, à la différence près que l'estimation des paramètres ne prend pas en compte de manière aussi influente la variance des variables explicatives.

$$\Gamma = \underset{\Gamma}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} \left(Y - \gamma_{i,j} \times P\&L_i \times P\&L_j\right)^2 \ \S$$

Pour obtenir des résultats plus pertinents, deux méthodes de régression ont été testées ; la méthode de *gradient boosting regression* et celle de la régression *ridge*. Nous présentons brièvement ces deux méthodes et conclurons quant à celle qui est la plus efficace pour notre problématique : retrouver le STEC marché à partir des P&L.

3.5.1 *Gradient Boosting Regression*

Dans la problématique des estimations de fonction ou « *predictive learning* », nous avons à disposition un système de réponses (Y) aléatoires associées à un *set* de données explicatives (X) aussi aléatoires. En utilisant un échantillon d'apprentissage, l'objectif est d'obtenir une estimation ou une approximation de $F(X)$ reliant X à Y. Cette fonction F doit minimiser l'espérance conditionnelle d'une certaine fonction de perte (L) sur la distribution jointe de X et Y :

$$F = \underset{F}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}_{x,y}\left(L(y, F(x))\right) = \underset{F}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_y\left(L(y, F(x)|x)\right]\right.$$

Pour une régression linéaire, ou la réponse appartient à $\mathbb{R}$, nous utilisons communément la fonction de perte ρ_{L_2} , suivante :

$$\rho_{L_2}(y, f) = \frac{|y - f|^2}{2}$$

L'algorithme *boosting* correspondant est appelé « L_2-Boosting » (cf [Friedman 2001])
Si l'on repart de la définition d'une régression avec les notations classiques :

$$y_i = M(x_i) + \varepsilon$$

$$e_i = y_i - M(x_i)$$

avec,

- y_i la variable à expliquée.
- x_i les variable explicatives.
- M une méthode de régression quelconque.
- ε, le bruit de la régression, qui résume les incompétences du modèle (M non adaptée, X_i insuffisants *etc*).
- e les résidus observés.

§. Ici la variable Y est toujours : $Y = P\&L_{total} - \sum_i P\&L_i$.

L'idée est de modéliser ce résidu avec un second modèle M' et de l'associer au précédent pour une meilleure prédiction.

$$e_i = M'(x_i) + \varepsilon'.$$

Pour finalement obtenir :

$$\hat{y}_i = M(x_i) + M'(x_i).$$

Lorsque l'on doit optimiser des critères sans formule fermée comme par exemple la fonction de perte $\mathbb{L}^2$ qui est définie par la valeur absolue l'utilité de l'algorithme *gradient boosting* prend tout son sens. Cet algorithme appliqué à la régression s'articule de manière itérative comme suit pour M itérations :

1. Initialisation :
$$F_0(x) = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} L\left(y_i, \gamma\right).$$

2. Pour $m = 1 \dots M$

   (a) Calcul des pseudo-résidus :
   $$r_{i,m} = -\left[\frac{\partial L\left(y_i, F(x_i)\right)}{\partial F(x_i)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

   (b) Calculer le coefficient γ_m en résolvant le problème suivant :
   $$\gamma_m = \underset{\gamma}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} L(y_i, F_{m-1}(x_i) + \gamma r_{i,m}).$$

   (c) Actualiser l'estimation via :
   $$F_m(x) = F_{m-1}(x) + \gamma_m r_m(x).$$

Ces régressions on été effectuées avec les différentes fonctions de pertes : Huber, valeur absolue et L^2. Cependant, quelques soient les fonctions de pertes choisies, les résultats obtenus ne se sont pas avérés concluants. Ces derniers amènent à des effets croisés trop importants pour des risques « neutres » qui n'ont que peu d'incidence. En outre le STEC prédit est loin de ce qui est recherché.

3.5.2 Régression *Ridge*

Désirant conserver toutes les variables, il est possible d'améliorer les propriétés numériques et la variance des estimations en considérant un estimateur légèrement biaisé des paramètres. On se place dans le modèle linéaire

$$Y = \beta_0 \mathbb{1} + X\beta + \varepsilon,$$

où,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{2,1} & \cdots & X_{p,1} \\ X_{1,2} & X_{3,3} & \cdots & X_{p,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1,n} & \cdots & \cdots & X_{p,n} \end{pmatrix}.$$

L'estimateur ridge est défini par un critère des moindres carrés, avec une pénalité de type $\mathbb{L}^2$:

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{j=0}^{p} \beta_j X_{j,i} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2 \right).$$

Ou encore,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} \text{ et } \hat{\beta} = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \left(\|\tilde{Y} - \tilde{X}\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_2^2 \right),$$

avec $\tilde{Y}$ le vecteur Y recentré et $\tilde{X}$ la matrice X centrée par colonne.

Par ailleurs, nous avons

$$\tilde{X}'\tilde{Y} = \left(\tilde{X}'\tilde{X} + \lambda I_p \right) \beta.$$

Ainsi,

$$\hat{\beta} = \left(\tilde{X}'\tilde{X} + \lambda I_p \right)^{-1} \tilde{X}'\tilde{Y}.$$

C'est cette méthode de régression qui a été finalement choisie, ce choix a reposé sur une application des deux méthodes et celle qui a donné les résultats les plus convaincants a été privilégiée.

3.6 Résultats de la modélisation du STEC marché au moyen d'une régression ridge

3.6.1 Application sur le modèle interne

En pondérant les variables par les poids obtenus à la section 3.4.1 nous avons pour rappel obtenu un échantillon de 200 scénarios qui constituent la base d'apprentissage de la régression ridge présentée ci-avant. Cette base d'apprentissage a permis deux choses :

- Déterminer les coefficients de la régression.
- Déterminer les contributions moyennes de chacun des risques :

$$\forall i, \mathbb{E}\big[P\&L_i | STEC\big] = \sum_{i=1}^{n} P\&L_i \times p(i),$$

avec n le nombre de scénarios dans l'échantillon et $p(i)$ le poids associé au $i^{\text{ème}}$ scénario.

Les résultats sont synthétisés avec le tableau 3.6, où il y a les STEC *standalone*, le scénario STEC, les contributions marginales de chacun des risques ainsi que les effets croisés avec les taux et l'*Equity*.

	IR	$VolIR$	$Corp$	Gov	Eq	$VolEq$	FX	RE	HF	PE	Inf
STEC *standalone*	904	997	604 ¶	546	459	184	81	171	10	152	68
Scénario STEC	133	1153	16	-172	356	35	-98	29	13	137	-181
$\mathbb{E}[P\&L_i \vert STEC]$	78	682	336	124	283	98	-24	81	53	98	-68
Effet croisé IR		-276	15	6	-35	-1	17	-19	6	-15	19
Effet croisé Eq	0	0	0	0		-1	0	0	-75	0	0
Quantile équivalent	71%	98%	99,99%	85%	91%	92%	1%	29%	89%	89%	24%
Somme	1 066										

Tableau 3.6 – Principaux résultats de la régression ridge dans la zone STEC (en M €).

Finalement, nous retrouvons le STEC à 12 M € près (-1 066 M € vs -1 054 M €) ce qui fait une erreur de l'ordre de 1%. Cela représente une erreur dix fois moins élevée que celle commise avec la matrice d'agrégation.

Nous remarquons aussi que le profil de perte dans la zone STEC est substantiellement différent du scénario STEC (le 55$^{\text{ème}}$ par ordre croissant des P&L totaux). Cela est mis en avant avec le tableau 3.6, en le complétant par la valeur du VA : -317 M €.

La quantité quantile équivalent permet de voir dans quelle mesure les différents risques se diversifient. En effet, ce pourcentage correspond au rang de la perte moyenne dans la distribution des P&L (les 11 000 scénarios du modèle interne). Plus le quantile est faible, plus la diversification est importante. C'est notamment le cas pour les taux, le FX et l'inflation.

La modélisation des effets croisés a permis de mieux appréhender la diversification des risques (la somme des pertes conditionnelles amènerait à un STEC de 1 363 M €). Cette perte de STEC due à la diversification est principalement drivée par l'effet taux / volatilité implicite des taux qui diminue le STEC de 286 M €. On remarque aussi un fait qui sera important par la suite :

$$STEC \simeq \sum_i P\&L_i + \gamma \times IR \times VolIR = 1086 \text{ vs } 1055$$

Finalement les autres effets croisés se somment à quelques millions, et, n'ont que peu d'importance.

On peut aussi voir sur le tableau 3.7 la répartition des risques par « blocs ». Sur ce dernier on voit la prédominance des blocs Taux et *Equity* qui contribuent à 925 M €, puis un bloc *Spread* dont l'importance est initialement élevée avec 482 M € mais qui est divisée par trois lorsque l'on prend en compte les *volatility adjusters*.

Blocs	Taux	*Equity*	*Spread* sans VA	*Spread* avec VA	VA	Inflation	RE + FX
Valeurs	483	443	482	165	-317	-49	55

Tableau 3.7 – Répartition des risques par blocs (en M €).

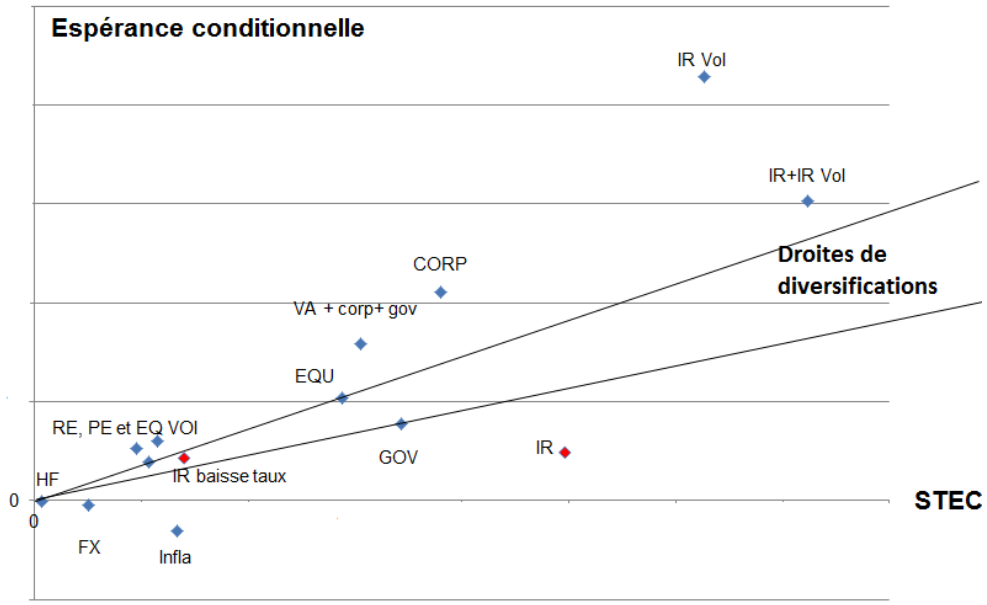
La composition des blocs est la suivante :

¶. STEC sans le VA

- Bloc taux : risques de taux et de la volatilité implicite des taux.
- Bloc *Equity* : risques *Equity*, volatilité implicite des *Equity*, *Private Equity* et *Hedge Funds*.
- *Bloc spread* : risques *Corporate spread* et *Government spread*.

Un point n'a cependant pas été abordé ici : la répartition des effets croisés entre les risques. Plus précisément, si l'on prend l'exemple des risque taux et volatilité implicite des taux, l'effet croisé est de -88 M €. Cependant, rien n'assure que cette quantité se partage équitablement entre les deux risques, ainsi il paraît plus intéressant de parlé de bloc de risque. Ici, nous avons par exemple un bloc taux/volatilité des taux de 484 M € et un autre bloc (qui rassemble l'ensemble des autres risques) de 579 M €.

Un autre moyen d'apprécier la manière dont les risques se répartissent dans le STEC est le graphique 3.2. Sur ce dernier sont présentés les contributions marginales des risques en fonctions des STEC *standalone*, ainsi que certains blocs de risques. Ces droites représentent les taux de diversification dans les cas où les risques ont des comportements similaires, dont la pente est égale au STEC divisé par la somme des STEC *standalone*. La plus pentue correspond aux STEC *standalone* taux ayant un scénario de hausse, tandis que la moins pentue correspond à un STEC *standalone* taux ayant un scénario à la baisse. Les résultats graphiques correspondent bien aux interprétations faites sur les quantiles équivalents du tableau 3.6.



Graphique 3.2 – Diversification des risques.

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.6.2, la modélisation des taux et de leurs volatilités implicites est faite à partir d'un modèle de Black qui ne permet pas de *pricer* des produits lorsque les taux sont négatifs. De fait, pour faire face aux conditions économiques actuelles où les taux sont négatifs, le modèle de Black peut ne plus être adapté. Une étude complémentaire a donc été effectuée en optant pour une modélisation de la volatilité implicite des taux via un modèle normal. Cette nouvelle modélisation permettra aussi de tester la robustesse de notre méthodologie.

3.6.2 Présentation d'un modèle alternatif

Contrairement à la volatilité de Black, la volatilité normale est très peu corrélée avec les taux et donc relativement stable suite à un mouvement des taux. Dans un environnement de taux très bas voir négatifs, les volatilités normales sont cohérentes avec les prix des *swaptions* observés sur le marché. Si l'on est en mesure de définir des taux négatifs, cela permettra d'être cohérent avec les observations sur le marché et en plus permettra d'être en ligne avec la courbe des taux fournie par les EIOPA [‖].

Dans le modèle normal la dynamique du taux *forward* est défini de la manière suivante :

$$\mathrm{d}F_t = \sigma(t, F_t)\mathrm{dW}_t.$$

Qui s'intègre en

$$F_t = F_0 + \sigma \mathrm{W}_t.$$

Ainsi, sous le modèle normale,

$$F_t \sim \mathcal{N}(F_0, \sigma\sqrt{t}).$$

Avec cette modélisation,

- La volatilité n'est plus inversement proportionnelle aux taux.
- La corrélation des taux et de la volatilité implicite est proche de 0.
- Il est dorénavant possible de définir des taux négatifs.

Il y a une relation qui permet de passer de la volatilité implicite dite normale notée σ_N (celle du modèle alternatif) et la volatilité implicite de Black σ_B (celle du modèle actuel) grâce à la formule de Bachelier (cf [Schachermayer et Teichmann 2008] pour plus de détails) :

$$\sigma_N = F_T\sqrt{\frac{2\pi}{T}}\left[2\Phi\left(\frac{\sigma_B T}{2}\right) - 1\right],$$

et en faisant un développement limité de la loi normale,

$$\sigma_B \simeq \frac{\sigma_N}{\text{taux forward}}. \tag{3.1}$$

Cette formule montre que pour une volatilité normale constante, la volatilité de Black évolue en sens inverse du taux *forward* (si l'un augmente, l'autre diminue et *vice versa*).

La même méthodologie a été adoptée sur le modèle alternatif et les résultats sont en cohérence avec les attentes. Dans le modèle actuel, les taux et la volatilité des taux sont corrélés négativement à 80% et les volatilités implicites des taux sont modélisées par un modèle de Black. Cependant, les conditions économiques (taux très faibles voire négatifs) ont amenés à essayer un modèle qui repose sur d'autres hypothèses. En effet, le modèle de black ne permet pas de calibrer la volatilité à partir des prix de marché lorsque les taux sont négatifs.

Le modèle alternatif porte sur ces points, dorénavant nous avons :

- Les taux ne sont plus floorés.
- La volatilité implicite des taux est calculée via des prix qui suivent un modèle normale.

‖. European Insurance and Occupational Pensions Authority

Grâce à ces changements, les taux et leur volatilité sont devenus indépendants et il est dorénavant possible d'obtenir des taux (fortement) négatifs dans les scénarios.

Avec ce modèle alternatif, les données du modèle interne ont été modifiées. Bien que cette modification ne porte que sur la modélisation des taux et donc de fait celle de la volatilité implicite des taux, les 9 autres risques ainsi que le *volatility adjustement* sont modifiés. Cela résulte du fait que les 11 000 scénarios n'ont pas été générés avec le même aléa. Le tableau 3.8 présente ces changements au niveau des STEC *standalone* et du STEC.

	IR	$VolIR$	$Corp$	Gov	Eq	$VolEq$	FX	RE	HF	PE	Inf
STEC *standalone*	573	683	624	576	470	117	174	174	10	157	239
STEC agrégé	1101										

Tableau 3.8 – STEC et STEC *standalone* pour le modèle alternatif (en M €).

Après avoir brièvement présenté ce modèle alternatif, passons à la phase de « *backtesting* » des modélisations précédentes par la régression ridge. Le terme de *backtesting* fait ici appel à la notion de test sur des données différentes afin de voir si le modèle est efficace.

3.7 Robustesse de la méthodologie STEC par régression *ridge*.

Outre le fait de tester l'impact du changement de modèle sur les taux et donc leurs volatilités implicites, le modèle alternatif a principalement pour but de tester la robustesse de la méthodologie mise en place à la partie 3.6.1. Un travail similaire en tous points a été effectué sur les données issues du modèle alternatif à savoir :

- Calcul des poids de chaque scénario $p(i)$.
- Détermination des contributions marginales de chacun des risques au STEC :

$$\mathbb{E}[P\&L_i | \sum_j P\&L_j = STEC].$$

- Détermination des effets croisés grâce à une régression ridge pondérée.

Le tableau 3.9 renseigne les valeurs obtenues en refaisant cet exercice sur les données du modèle alternatif. De nombreux changements sont à noter par rapport au modèle actuel. Premièrement, la qualité du STEC par ce modèle est comparable au précédent puisque l'on retrouve le STEC avec une erreur de 8 M € (1 109 M € vs 1 101 M €).

	IR	$VolIR$	$Corp$	Gov	Eq	$VolEq$	FX	RE	HF	PE	Inf
Perte moyenne	176	443	359	147	300	55	-38	130	5	82	-43
Effet croisé IR		-20	2	6	14	-4	12	-2	-2	-4	5
Effet croisé Eq	0	0	0	0		0	0	0	10	0	0
Somme	1 109										

Tableau 3.9 – Principaux résultats de la régression ridge dans la zone STEC du modèle alternatif (en M €).

Deuxièmement, les effets escomptés avec le modèle alternatif sont visibles :

- Hausse de l'impact taux (176 M € vs 78 M €) associé à une baisse de l'impact vol taux (443 M € vs 682 M €).
- Forte baisse de l'effet croisé entre les taux et la volatilité des taux (-276 M € vs -20 M €).
- Importante hausse de gain par le VA (−507 M € vs -317 M €).
- Enfin, la majorité des autres risques se diversifie moins bien avec des contributions qui augmentent.

Comme précédemment, avec le modèle actuel de la partie 3.6.1, on peut remarquer une certaine logique pour retrouver le $STEC$, on a pu constater empiriquement que :

$$STEC \simeq \sum_i \mathbb{E}\left[X_i | \sum_j X_j\right] = 1\,109 \text{ vs } 1\,101.$$

Finalement, nous avons trouvé une méthodologie qui permet de retrouver simplement et rapidement le STEC marché ainsi que les TF.

Cependant, cette méthodologie est viable par zone et ne se généralise pas forcément correctement aux zones non STEC. Pour cause les effets croisés d'intérêt, en l'occurrence taux/volatilité des taux pour le modèle actuel ne sont pas forcément les mêmes selon la zone. Ainsi, il nous faut trouver un moyen de modéliser les P&L totaux sur l'ensemble des zones de leur distribution, qui plus est de manière automatique. En outre, nous ne modéliserons pas seulement les P&L totaux en fonction des P&L, mais aussi les P&L en fonction des facteurs de risque afin d'avoir une bijection entre ces trois éléments.

Chapitre 4

Étude des P&L marché

Pour rappel, les scénarios renseignés par le modèle interne sont issus des facteurs de risque qui n'ont pas encore été utilisés. Il paraît donc intéressant de déterminer la valeur de ces facteurs de risque que ce soit pour le scénario STEC ou autre. Dans le cas du scénario STEC, cela nous permettra de voir plus en détail à quoi est dû telle ou telle perte (forte baisse des taux de maturité 10 ans par exemple). Cela revêt un intérêt tout particulier pour la direction d'AXA qui se doit de connaître le plus précisément possible les raisons de tel ou tel changement de valeur. Pour aller plus loin, il peut aussi être intéressant de connaître l'impact d'un scénario donné sur les P&L et de se protéger contre des scénarios probables qui se montreraient trop adverses et coûteux en capital. Pour y parvenir, nous modéliserons l'ensemble des sous-risques en fonction de leurs facteurs de risque puis les P&L totaux en fonctions des pertes par risques.

4.1 Modélisation des P&L par les facteurs de risque

De « simples » régressions linéaires que ce soit par les moindres carrés ordinaires, *ridge* ou *gradient boosting* ne permettent pas, ou que partiellement, de décrire les relations entre les variables d'intérêt. Cela n'est pas dû aux limites du modèle de régression linéaire, mais seulement, la linéarité n'est pas adaptée aux données en présence. En particulier, des effets de convexité sont à noter sur les queues des distributions de pertes. Ces effets de convexité viennent d'une part du fait que l'actif n'est pas linéaire (même sur des risques simples comme l'*Equity* avec la présence de produits dérivés) et d'autre part que la réponse du passif n'est également pas linéaire en raison du mécanisme de participation aux bénéfices. Cela aura donc un impact non négligeable sur les calculs de quantiles. Pour pallier ce problème, nous nous sommes tournés vers des techniques de régression non paramétriques, en l'occurrence la méthode de lissage par *splines*.

Bien que des méthodes de régression par *splines* existent pour expliquer une variable par plusieurs variables explicatives (cf [Friedman 1991] en particulier), nous nous sommes restreints aux régressions par *splines* d'une seule variable explicative tant que possible. En effet, mis à part dans le cas où un seul facteur de risque explique le P&L d'intérêt, dans la majorité des cas nous avons à disposition bon nombre de facteurs de risque. Cependant, une modélisation non-linéaire des P&L en fonction de l'ensemble des facteurs de risque associés serait trop peu explicite. Au-delà de la facilité d'interprétation, AXA utilise différents outils interne dont la granularité permet d'utiliser qu'un seul facteur de risque. Pour apporter plus de lisibilité aux modélisations des P&L par les facteurs de risque et être cohérent avec les outils d'AXA, la méthodologie employée est la suivante :

1. Régresser le P&L en fonction des facteurs de risque localement autour des P&L nuls pour obtenir un *proxy*. Par exemple, pour le risque *Equity*, on régresse autour des P&L nuls la composition du portefeuille (CAC 40, S&P ...) pour s'affranchir de la convexité.

2. Utiliser la régression locale pour créer un unique facteur de risque dont les proportions sont celles issues de la régression :
   Si,
   $$Y = \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n,$$
   alors la part du facteur X_i dans le *proxy* sera :
   $$\frac{\beta_i}{\sum_j \beta_j}.$$

3. Régresser le P&L par l'unique facteur de risque associé au moyen de *splines* de lissage.

Remarque : Cette méthodologie a été appliquée pour la majorité des risques, cependant les risques *FX, Inflation* et *Real Estate* sont expliqués par un unique facteur. C'est-à-dire qu'il y a qu'un seul β non nul si l'on revient aux équations ci-dessus.

Avant de passer aux applications numériques, penchons nous brièvement sur l'aspect théorique des *splines* de lissage.

4.1.1 Présentation théorique des *splines* de lissage

L'introduction des fonctions *splines* découle d'une volonté de partitionner l'espace des valeurs prises par la variable X (X réelle à valeurs dans $[a, b]$). On appelle nœuds les points définissant la partition de la droite de X que l'on notera $(k_1, \ldots, k_L)$.

L'idée est d'écrire ensuite f la fonction de $P\&L$ des risques comme :

$$f(x) = \sum_{h \in \mathcal{D}} \beta_h h(x), \text{ où } \mathcal{D} \text{ est un ensemble de fonctions (continues, polynomiales } etc)$$

Un choix peut être de prendre des fonction $h_.$ linéaires par morceaux, avec :

$$h_1(X) = \mathbb{1}_{X<k_1}, h_2(X) = \mathbb{1}_{k_1 \leq X \leq k_2}, \ldots, h_L = \mathbb{1}_{X \geq k_L}$$

La fonction f définie sur $[a, b]$ sera une *spline* cubique si :

- Sur chaque intervalle $(a, k_1), (k_1, k_2), \ldots (k_L, b)$, f est un polynôme cubique.
- La fonction g est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

Une façon aisée d'exprimer le fait que f soit une *spline* cubique est :

$$f(x) = a_i + b_i(x - k_i) + c_i(x - k_i)^2 + d_i(x - k_i)^3, k_i \leq x \leq k_{i+1} \text{ et } f \text{ est de classe } \mathrm{C}^2 \text{ sur } [a, b].$$

où, a_i, b_i, c_i et d_i sont des constantes. Finalement, si l'on résume la régression par *splines*, on peut peut voir cette technique en deux grandes étapes :

- Déterminer les points définissant la partition.
- Déterminer la fonction f à dérivées secondes continues qui minimise l'erreur $\mathbb{L}^2$ pénalisée suivante :

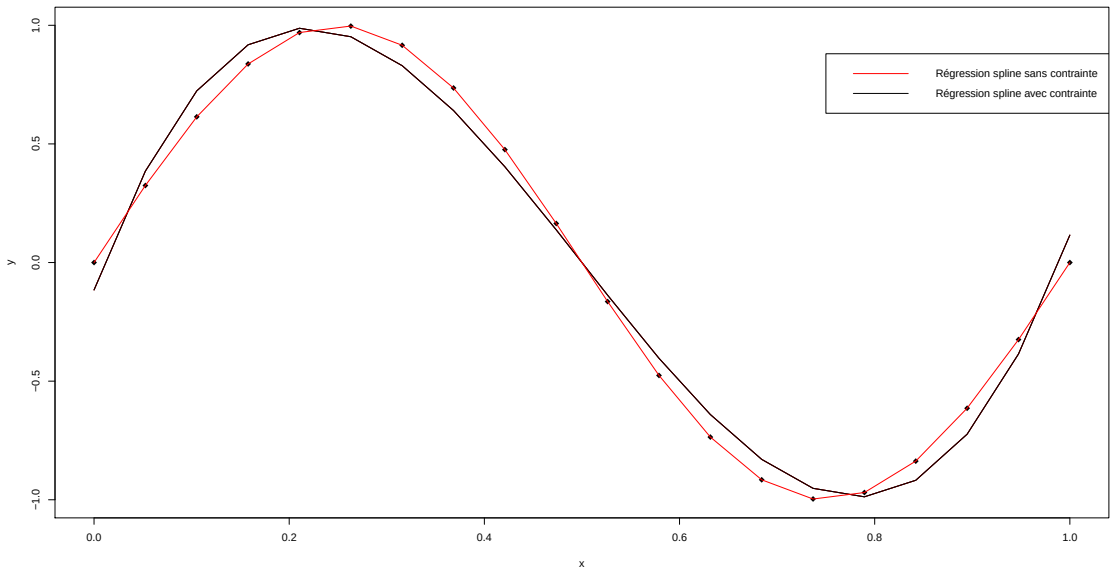
$$\mathbb{E}[f, \lambda] = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Le choix des noeuds est parfois difficile et délicat. Utiliser des quantiles empiriques ou bien des méthodes adaptatives sont des approches possibles. Une manière de s'affranchir de ce choix consiste à considérer n noeuds correspondants aux valeurs de l'échantillon observé.

La seconde partie fait écho avec la forme paramétrique de f : $f(x) = \sum_{h \in \mathcal{D}} \beta_h h(x)$. La détermination de f et λ revient à minimiser l'erreur commise en fittant les données tout en évitant d'avoir une fonction dont la courbure est trop importante. Sans cette contrainte portée par λ, nous aurions certes une adéquation aux données quasi parfaite, mais un *over-fitting* trop important. Le tout en jouant sur les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i dans le cas de *splines* cubiques.

Remarque : Pour modéliser nos P&L, les fonctions *splines* utilisées ont toujours été des polynômes, en revanche le degré de ces derniers peut varier selon la nature des données en question.

On peut par exemple voir sur la figure 4.1 la différence entre des *splines* qui pénalisent la courbure (en noir) et ceux qui ne la pénalisent pas (en rouge).



Graphique 4.1 – Différence entre une régression par *splines* avec contrainte (en noir) et une sans (en rouge).

4.1.2 Application au modèle interne

Après avoir obtenu les *proxies* en faisant des régressions locales, les P&L de chaque risque (hormis les taux) ont été lissés par les *splines* en fonctions des *proxies*. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.

Remarque : Le risque taux n'a pas été présenté ici puisque sa complexité relative aux autres risques a nécessité une modélisation qui diffère. Les résultats de cette dernière sont présentés avec le tableau 4.2.

Risque	$q_{99,5\%}(Risque)$	|Erreur max| (rang)	$\lvert q_{95\%}(Erreurs)\rvert$ *
Vol IR	1 055 vs 996	97 (2)	10
Corp Spread	650 vs 653	90 (3277)	7
Gov Spread	543 vs 546	100 (10982)	18
Equity	464 vs 465	55 (10988)	9
Vol Equity	183 vs 184	15 (98)	3
FX	82 vs 81	4 (134)	1
Real Estate	170 vs 171	1 (2)	0,1
Hedge Funds	10 vs 10	1 (4422)	0,1
Private Equity	151 vs 152	8 (10974)	2
Inflation	68 vs 68	1(2)	0,001

Tableau 4.1 – Modélisation de chacun des risques par *splines* de lissage sur les *proxies* des facteurs de risque (en M €).

À la vue de ce dernier, on peut dissocier deux gros blocs de risques. Un premier bloc où la modélisation est quasi parfaite avec des STEC *standalone* retrouvés quasi parfaitement, des erreurs maximales faibles et des « intervalles de confiance † » faibles. Les risques qui le composent sont l'inflation, *Private Equity, Hedge Funds, Real Estate* et le *FX*. Les raisons qui peuvent être avancées pour expliquer que ces risques soient aussi bien modélisés sont leur nature ; en effet les phénomènes assurantiels qui créent de la convexité n'impactent pas ou très peu ces risques. Une autre explication possible est la relative simplicité entre les facteurs de risque et les P&L avec des impacts quasi linéaires. En résumé nous avons des risques linéaires en les facteurs de risque ou leurs *proxies*.

Le deuxième bloc est quant à lui constitué de risques qui sont expliqués par de nombreux facteurs de risque, et qui induisent par leur nature une certaine convexité au sein du portefeuille. Cependant, les STEC *standalone* sont tout de même bien retrouvés, et les intervalles de confiances tolérables. On peut aussi expliquer les valeurs élevées de certaines erreurs maximales par le fait que les *replicating portfolio* peuvent avoir du mal à capter le comportement du passif dans le cas de scénarios trop extrêmes, c'est-à-dire les scénarios encore plus forts que celui d'ordre 99,5%. Finalement, bien qu'un des blocs est mieux reproduit que l'autre, les résultats sont dans l'ensemble positifs.

Le risque taux a cependant été mis de côté à cause de sa complexité. Pour franchir le rubicon sur ce risque particulier, nous commençons par présenter brièvement une autre méthode de régression non-paramétrique avant d'explorer les résultats.

4.1.3 Les *splines* de régression multivariés

De même que dans le cas d'une régression par *splines* univariée, le pendant en dimension supérieure (de degré $m-1$ avec p variables explicatives) et un ensemble de noeuds $\mathcal{L}$ peut s'écrire sous la forme :

†. Le terme d'intervalle de confiance est un peu abusif ici, mais représente l'idée que dans 95% des cas l'erreur est inférieure ou égale à ce montant.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{L} \beta_h B_h(\boldsymbol{x}),$$

avec, $\boldsymbol{x}$ le vecteur des variables explicatives, ξ un certain noeud et B_h les « fonctions de base » univariées de la forme : x_h^d ou $(x_h - \xi)_+^d$ pour $h = 1, \ldots, p$ et $d = 1, \ldots, m-1$.

Une fois l'ensemble des noeuds $\mathcal{L}$ connu, les estimateurs β_h peuvent aisément être calculés par la méthode des moindres carrés. Toutefois, puisque ce n'est généralement pas le cas, on cherche donc une façon de trouver les bases qui permettent de décrire la relation de la manière la plus précise. Cela fait donc appel à des méthodes d'estimation adaptatives qui paraissent plus adaptées à ce problème.

Deux méthodes existent dans la littérature pour résoudre le problème auquel nous faisons face : MARS et PolyMars qui sont dues à [Friedman 1991], [Kooperberg et O'Connor 1997] ainsi que [Stone et al. 1997] pour la seconde.

Les deux méthodes bien que similaires comportent des différences significatives, cependant elles fonctionnent toutes deux de la même manière :

1. Une phase dite d'addition
2. Une phase d'élimination
3. Choix du modèle final

La phase d'addition consiste à ajouter pas à pas des bases au modèle jusqu'à ce que ce dernier contienne un nombre fixé L_{max} de bases.

La phase d'élimination, où à chaque pas la dimension du modèle est réduite et s'arrête lorsque on obtient un modèle de dimension minimale. La méthode PolyMARS choisit alors parmi l'ensemble des possibilités (ensemble des modèles ajustés aux deux phases précédentes) le modèle qui ajuste au mieux les données.

On peut noter que ces modèles prennent en compte des effets croisés via les produits de tenseurs. En effet, puisque ces méthodes sont basées sur la théorie des ELM (*Extended Linear Models*) le degré m est imposé à 2, c'est-à-dire des *splines* linéaires. Ainsi, les fonctions de bases seront de la forme :

$$x_i \qquad\qquad (x_i - \xi_i)_+$$

et leurs tenseurs :

$$x_i x_j \qquad x_i(x_j - \xi_j)_+ \qquad x_j(x_i - \xi_i)_+ \qquad (x_j - \xi_j)_+(x_i - \xi_i)_+$$

où, x_i et x_j sont deux variables explicatives différentes et ξ_i, ξ_j des noeuds associées.

Ainsi, ces méthodes de modélisation permettent donc de bien prendre en compte les effets croisés que l'on a constatés sur le P&L total dans la zone STEC.

4.1.4 Application aux P&L taux du modèle actuel

Une partie est consacrée à la modélisation des P&L taux puisque ce risque a révélé un profil particulier : un profil en « cloche » (cf figure 4.2) avec de fortes pertes pour des taux hauts ou bas et un gain pour des taux faibles en valeur absolue. D'autre part, les facteurs de risque sont les taux à plusieurs maturités (1Y, 1,5Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 7Y, 10Y, 15Y, 20Y, 30Y et 50Y), cela implique donc de fortes corrélations. Pour ce facteur de risques particulier, il n'a pas été possible de définir un *proxy* des différents facteurs de risque donnant des résultats satisfaisants. C'est pour cela que les P&L taux ont été modélisés via la méthodologie MARS (*Multiple Adaptative Regression Spline*) présentée ci dessus.

Les résultats sont tout à fait satisfaisants comme on peut le voir sur avec le tableau 4.2 :

$q_{99,5\%}(Risque)$	Quantile équivalent	Erreur max (rang)	$q_{95\%}(Erreurs)$
-795 vs -796	-75 vs -77	150 (17)	29

Tableau 4.2 – Indicateurs de la modélisation des P&L taux (en M €).

Le STEC taux est retrouvé à 1 M € près soit 0,06% d'erreur, le quantile équivalent (relatif aux contribution moyennes pondérées des risques au STEC) est lui approché à 2 M € près, alors que dans 95% des cas l'erreur est d'au plus 29 M €. L'erreur maximale est de 150 M €, mais cela est à mettre en regard avec le rang du scénario (classé par P&L) qui est faible. Cela s'explique par le fait que les scénarios extrêmes n'ont pas toujours été bien pris en compte lors de l'estimation du modèle interne (ce qui n'a pas d'impact puisque au delà du réalisable). Notons aussi que cette modélisation des taux n'a finalement retenu comme variables explicatives que les maturités 1Y, 2Y, 3Y, 7Y, 10Y, 15Y, 30Y et 50Y.

4.1.5 Application aux P&L taux du modèle alternatif

Un travail similaire a été mis en place sur le modèle alternatif pour d'une part vérifier de nouveau la robustesse de cette modélisation, et d'autre part voir les impacts d'un changement de modèle. Les résultats sont similaires au tableau 4.1, mis à part les P&L Taux, Vol taux et le VA qui sont les seuls éléments impactés par le changement de modèle.

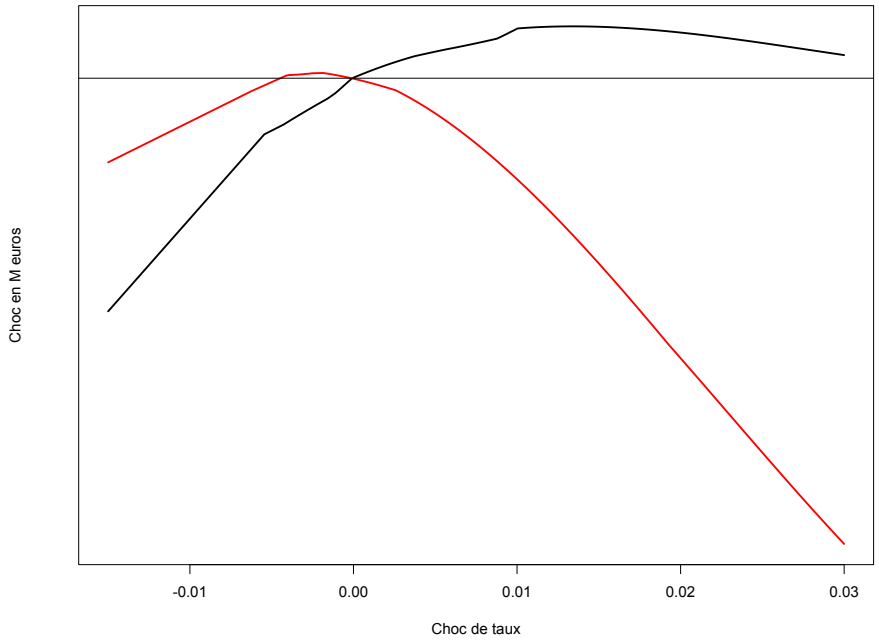
Risque	$q_{99,5\%}(Risque)$	Erreur max (rang)	$q_{95\%}(Erreurs)$
IR	538 vs 540	101 (1829)	22
Vol IR	650 vs 649	31 (1065)	9

Tableau 4.3 – Modélisation de chacun des risques par *splines* de lissage sur les *proxies* des facteurs de risque du modèle alternatif (en M €).

Finalement, ces modélisations non paramétriques à plusieurs variables explicatives s'avèrent être plus qu'efficaces si l'on met de côté les scénarios extrêmes qui ne sont pas toujours calibrés dans le modèle interne.

Ces modélisations nous ont aussi permis de mettre en lumière les profils de pertes des taux (toutes choses égales par ailleurs). La figure 4.2 représente les pertes et profits des taux selon

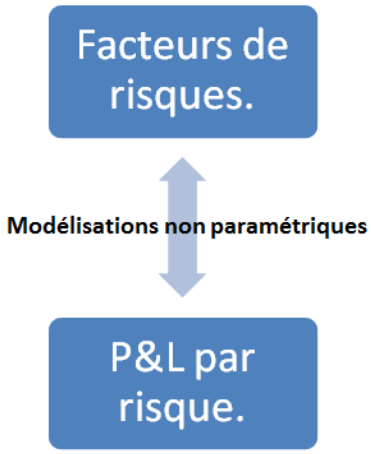
les chocs appliqués au base case[‡]. Sur ce dernier, on voit comme indiqué précédemment le profil « en cloche » du modèle actuel : hormis une fourchette de chocs proches de 0, la hausse ou la baisse des taux fait perdre. *A contrario*, pour le modèle alternatif plus les chocs négatifs sont forts plus la perte est importante, ensuite des gains croissants au fur et à mesure que l'intensité des chocs positifs augmente pour arriver à un point « limite ». Ce point représente dans le modèle d'AXA le déclenchement des rachats dynamiques et le maximum de la participation aux bénéfices des assurés.



Graphique 4.2 – P&L taux en fonctions de chocs parallèles sur le modèle actuel (en rouge) et le modèle alternatif (en noir).
L'échelle des ordonnées n'est pas renseignée pour des problèmes de confidentialité.

Au point d'avancement actuel, à partir des facteurs de risque nous sommes capables de déterminer leurs impacts sur les P&L des 11 risques ainsi que pour le *VA*. Nous le verrons plus tard, mais il est aussi possible de déterminer les facteurs de risque à partir d'un P&L donné. En résumé, au niveau de l'étude actuelle avoir une information sur les facteurs de risque est équivalent à avoir une information sur les P&L comme sur le schéma suivant :

‡. Notons qu'ici les chocs sont parallèles, c'est-à-dire que le même choc est appliqué à toutes les maturités.



Cependant, il nous manque toujours une étape : le passage aux P&L totaux. La partie suivante traite de cette modélisation.

4.2 Modélisation de l'ensemble des P&L en fonction des pertes

4.2.1 Modèle actuel

Pour modéliser les P&L totaux sur l'ensemble de la distribution et non plus sur la zone STEC, une méthode de régression non paramétrique a été adoptée tant la relation entre les pertes par sous-risques et la perte totale semble « compliquée ». Le choix s'est donc porté sur le modèle POLY-MARS (*Multiple Adaptative Regression Spline*) présenté dans la partie 4.1.3. Cette modélisation prend en entrée les 11 P&L par risque ainsi que le VA et renvoie la perte agrégée totale : $P\&L_{total}$. Afin de retrouver le STEC marché à partir de la modélisation POLY-MARS, il nous faut choisir un set de 11 P&L et une valeur du VA. Puisque les résultats issus des pertes moyennes conditionnelles ont été satisfaisants et validés par les experts métiers d'AXA, ce sont ces dernières qui ont été sélectionnés, soit $\mathbb{E}\left[P\&L_i | \sum_j P\&L_j = STEC\right]$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4 :

$q_{99,5\%}(Risque)$	|Erreur max|	$\|q_{95\%}(Erreurs)\|$
1 058 vs 1 055	505	85

Tableau 4.4 – Indicateurs de la modélisation des P&L totaux (en M €).

À la vue de ce dernier, les résultats sont plutôt encourageants avec un quantile (d'ordre 99,5% !) retrouvé à quelques millions d'euros près et un intervalle de confiance à 95% de l'ordre de 85 M €. Cependant, si l'on revient sur l'erreur maximale commise par cette modélisation (505 M €). Cela s'explique en revenant au scénario qui est reproduit avec cette forte erreur, on remarque qu'une vingtaine de scénarios donnent la même perte que ce dernier ; mais ces scénarios ont en moyenne des P&L dix fois moins élevés que ceux du scénario d'intérêt. Finalement, ce scénario peut être vu comme une sorte d'*outlier*.

Remarquons par ailleurs un point essentiel : lorsque l'on modélise le P&L total au moyen des P&L moyens pondérés dans la zone STEC (renseignés au tableau 3.6), nous obtenons des résultats plus que satisfaisants. En effet nous avons retrouvé le STEC à 3 M € près et cela permet de conforter deux idées :

- Les pertes moyennes pondérées dans la zone STEC correspondent effectivement aux pertes qui amènent à atteindre le STEC.
- La modélisation des P&L en fonction des pertes par risques est efficace, du moins dans la zone STEC.

Une fois n'est pas coutume, nous avons testé la robustesse de cette modélisation en l'effectuant sur le modèle alternatif.

4.2.2 Modèle alternatif

Comme pour le modèle actuel, une modélisation POLYMARS a été effectuée sur le modèle alternatif dont les résultats sont présentés avec le tableau 4.5.

$q_{99,5\%}(Risque)$	|Erreur max| (rang)	$\|q_{95\%}(Erreurs)\|$
1099 vs 1101	768	48

Tableau 4.5 – Indicateurs de la modélisation des P&L totaux (en M €) pour le model alternatif.

Les résultats obtenus sont du même ordre que ceux du modèle actuel avec cependant une erreur maximale plus élevée mais un intervalle de confiance à 99,5% plus modéré. Comme pour le modèle actuel, on peut expliquer cette erreur maximale par un scénario extrême où les taux coûtent 2 milliards et l'inflation 160 M €, ce qui pour le profil d'AXA France vie paraît très peu probable voire impossible.

En référence au tableau 3.9, si l'on injecte dans le modèle les pertes moyennes conditionnelles autour de la zone STEC en tant que variables explicatives, nous obtenons de nouveau des résultats satisfaisants. Le STEC est retrouvé avec une erreur de 2 M € soit moins de 1% d'erreur.

4.3 Nouvelle vision des risques marché

Au point d'avancement actuel la vision des risques marché d'AXA France vie est constituée des pertes par risque, des effets croisés et du VA. Cependant, cela n'est pas assez « explicite ». Nous allons donc présenter ci-dessous les facteurs de risque qui sont associés au STEC, c'est-à-dire les chocs à appliquer au *base case* pour obtenir le STEC. C'est ce que l'on appellera par la suite le *Single Equivalent Scenario* ou SES. Pour obtenir ces derniers, nous avons inversé les modélisations précédentes.

4.3.1 Calcul du SES

D'après les parties qui précèdent, nous sommes capables de déterminer :

- Les P&L des risques à partir des chocs. §
- Le P&L total à partir des chocs ou P&L des risques

Or, nous avons vu (3.6) que le STEC était composé des pertes moyennes pondérées autour du scénario quantile et de l'effet croisé taux/vol taux. Ainsi, en prenant comme SES les chocs associés au scénario quantile (le 55ème pour rappel), nous aurions un « biais de tirage ». Pour calculer un SES qui fasse sens aux vues des résultats précédents, nous avons pris comme P&L par risques les pertes moyennes pondérées autour du scénario quantile. Avec ce choix, nous retrouvons le STEC à 3 M € près (-1 052 M € vs -1 055 M €) et les chocs qui composent le SES suivants :

Vol IR	Corp	Gov	Eq	Vol Eq	FX	RE	HF	PE	Inf
57,69%	0,91%	0,20%	-26,27%	19,23%	6,11%	-7,45%	-10,74%	-15,17%	-0.37%

Tableau 4.6 – Chocs SES hors taux.

D'après la modélisation effectuée sur les taux, il paraît compliqué de déterminer le scénario SES qui permet d'obtenir la perte des taux. En effet, le profil en cloche de la courbe des pertes des taux en fonction des chocs (cf figure **??**) donne selon les pertes (c'est le cas pour les 78 M € de pertes) au moins deux solutions, l'une avec des chocs positifs, l'autre avec des chocs négatifs. Même sans considérer de chocs parallèles, la difficulté augmente et aucune solution n'a pour le moment était trouvée avec le nombre important de maturités. Pour trouver le scénario menant à 78 M € de pertes sur les taux, nous avons donc sélectionné le scénario du modèle interne dont le choc est négatif ¶ et qui donne une perte très proche des 78 M €. Le tableau 4.7 renseigne ces chocs qui composent le SES taux.

Maturités	1Y	2Y	3Y	7Y	10Y	15Y	30Y	50Y
SES	-0,096%	-0,097%	-0,096%	-0,46%	-0,72%	-0,66%	-0,98%	-0,62%

Tableau 4.7 – Chocs SES des taux.

4.3.2 Calcul du SES dans le modèle alternatif

Un travail similaire à la partie précédente a été fait, à savoir pour l'ensemble des risques mis à part les taux et la volatilité des taux, les facteurs de risque donnant la contribution moyenne du risque dans le modèle alternatif (cf tableau 3.9) a été calculé. Cela est légitime puisque ces risques ne sont pas impactés par le changement de méthodologie sur les taux. La seule différence provient de contributions différentes pour chacun des risques. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8.

On peut voir sur ce dernier que par rapport au modèle actuel, les chocs sont plutôt proches pour la majorité des risques. Les seuls changements significatifs sont la volatilité *Equity* qui

§. Par abus, nous parlons de P&L (profit & Loss) de sous risques, mais en réalité ces quantités sont des $\Delta P\&l = P\&L(BC + choc) - P\&L(BC)$ comme cela a été présenté dans le premier chapitre.

¶. D'après la partie 3.6, nous avons récupéré les scénarios et les chocs associés dont les poids dans la régression ridge ne sont pas nuls. Il en ressort que la majorité des chocs taux sont négatifs d'où le choix de sélectionner le scénario le plus proche dont les chocs sont négatifs. De plus, cela est cohérent avec les corrélations entre les risques

passe 59% à 35%, le *FX* qui passe de 3% à 10% et le RE qui passe de -7,5% à -12%. Cela n'est d'autre que la traduction de contributions différentes dans les deux modèles, en passant du modèle actuel au modèle alternatif, la contribution de la volatilité *Equity* passe de 98 M € à 56 M €, celle du *FX* de -24 M € à -38 M € tandis que le *RE* passe 81 M € à 130 M €. Un autre point à signaler : bien qu'il y ait un écart de 48 M € les chocs n'ont « qu'une différence » de 48 *bps*. Cela provient d'un effet volume puisque le portefeuille *Equity* est d'une taille conséquente, de l'ordre de un tiers.

Corp	*Gov*	*Eq*	*VolEq*	*FX*	*RE*	*HF*	*PE*	*Inf*
0,97%	0,23%	-27,83%	35,01%	9,87%	-11,75%	-10,33%	-14,86%	-0,23%

Tableau 4.8 – Chocs SES hors taux et volatilité des taux pour le modèle alternatif.

Si l'on considère l'ensemble des risques sauf les taux et la volatilité des taux, aucuns changements n'ont été apportés par rapport à la partie précédente. Dans la même lignée, le risque taux a été modélisé via un modèle MARS mais avec des chocs et des P&L différents, en somme, un changement de données dont les résultats sont disponibles au tableau 4.9. En revanche, le risque lié à la volatilité implicite des taux était issu du calcul d'un *proxy* et d'un lissage par *splines*. Dans le modèle alternatif, avec le changement de modèle mais aussi des chocs (qui sont devenus absolus et non plus relatifs), une modélisation MARS a été mise en place sur ce risque. Le tableau 4.10 présente les résultats du SES de la volatilité des taux.

Maturités	1Y	2Y	3Y	7Y	10Y	15Y	30Y	50Y
SES	-0,13%	-0,080%	-0,030%	-0,096%	-0,19%	-0,24%	-0,34%	-0,23%

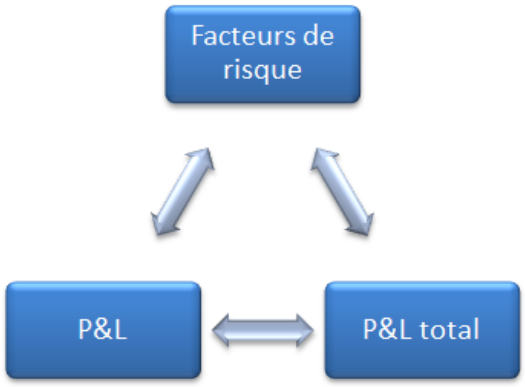
Tableau 4.9 – Chocs SES des taux dans le modèle alternatif.

Comme on peut le voir sur le graphique **??**, dans le modèle alternatif les chocs à la baisse sont beaucoup plus impactant que dans le modèle actuel, on comprend donc que les chocs soient plus faibles que dans ce dernier. Cependant, nous trouvons toujours un scénario de baisse des taux comme attendu.

Maturité	1× 1Y	10× 1Y	20× 1Y	1× 10Y	10× 10Y	20× 10Y	1× 20Y	10× 20Y	20× 20Y
SES	-0.26%	0.25%	0.38%	0.31%	0.21%	0.27%	0.21%	0.23%	0.20%

Tableau 4.10 – Chocs SES de la volatilité des taux dans le modèle alternatif.

Finalement, avec ces dernières modélisations nous avons complété le calcul du *proxy*. Nous avions déjà obtenu pour un « risque i » une relation de bijection entre ses facteurs de risque et ses P&L. Dorénavant, nous avons aussi une relation de bijection entre l'ensemble ces derniers et les pertes totales agrégées c'est-à-dire les $P\&L_{Total}$ comme cela est représenté par le schéma suivant :



4.3.3 Utilisation du SES pour un portefeuille « différent »

Dans ce qui suivra nous utiliserons le SES suite à l'ajout de produits financiers dans le portefeuille. Cependant, rien n'assure que ce SES soit toujours valable suite à cet ajout. Cela fait suite au conditionnement des espérances dans les calculs précédents. Nous regardons donc l'impact d'un produit supplémentaire en univers gaussien.

Si l'on note :

- X le portefeuille de référence qui a permis de déterminer le SES, avec $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X)$.
- ΔX le produit rajouté au portefeuille, avec $\Delta X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\Delta X})$.
- $X + \Delta X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{X+\Delta X})$ et $Cov(X, \Delta X) = \rho$.

D'après les calculs faits dans les parties précédentes, l'ajout d'un produit au portefeuille induit une erreur d'approximation δ du calcul du STEC par le SES égale à :

$$\delta = \mathbb{E}\big[X + \Delta X | X + \Delta X = q_{99,5\%}(X + \Delta X)\big] - \mathbb{E}\big[X + \Delta X | X = q_{99,5\%}(X)\big]$$

Ainsi, sous les hypothèses gaussiennes nous obtenons :

$$\delta = q_{99,5\%}(\mathcal{N}(0,1)) \left[\sigma_{X+\Delta X} - \sigma_X - \rho\sigma_{\Delta X}\right].$$

Finalement, on remarque que l'erreur faite est d'autant plus grande que la corrélation (ρ) est faible en valeur absolue. Si $\rho = 1$ ou -1, l'erreur δ est minimale, si $\rho = 0$, l'erreur est maximale. Cela se comprend économiquement en revenant à la définition du SES. Ce dernier étant représentatif de la diversification des risques au sein du portefeuille considéré, l'ajout d'un produit ayant le même profil n'aura aucun impact.

Pour quantifier cette erreur, nous nous sommes basés sur un cas simplifié. Cela est présenté avec le tableau 4.11 qui représente le montant de l'erreur pour un STEC de 1 000 M € et l'ajout d'un « produit » de STEC *standalone* 100 M € corrélés à ρ %.

ρ	-100 %	-75 %	-50 %	-25 %	0 %	25 %	50 %	75 %	100 %
$\mathbb{E}\big[X + \Delta X \vert S\big]$	900	925	950	975	1 000	1 025	1 050	1 075	1 100
$\mathbb{E}\big[X + \Delta X \vert X + \Delta X = S'\big]$	900	927	954	980	1 005	1 030	1 056	1 077	1 100
Erreur δ	0	2	4	5	5	5	4	2	0

Tableau 4.11 – Erreurs δ selon différents ρ en M €.

Aux regards de ce tableau, on voit bien la relation précédente entre les erreurs et les valeurs du coefficient de corrélation. Sur cet exemple simplifié on voit qu'à partir d'un niveau de corrélation supérieur à 50/75% l'approximation reste valable.

Finalement, on peut en déduire que pour ρ « grand » en valeur absolue :

$$\mathbb{E}\big[X + \Delta X | X + \Delta X = q_{99,5\%}\left(X + \Delta X\right)\big] \simeq \mathbb{E}\big[X + \Delta X | X = STEC\big].$$

4.4 Conclusion intermédiaire

Si l'on résume l'état d'avancement actuel, nous disposons de modélisations alternatives[‖] au modèle interne d'AXA. Le premier travail a été de trouver une méthode pour calculer le STEC, cela a été fait en utilisant les réplications *bootstrap* qui ont donné les contributions marginales de chaque risque et du VA au STEC ainsi que les effets croisés. Cela a permis entre autre de voir les contributions « réelles » des différents risques au STEC ainsi que la diminution due au VA. Nous obtenons finalement un résultat très proche du SCR modèle interne d'AXA.

Cette contribution marginale des risques au STEC en tant qu'*input* dans le modèle qui permet de retrouver le P&L total en fonction des P&L par risques a donné des résultats encourageants. Au-delà du STEC, cette modélisation qui prend en entrée les pertes par risques donne une estimation toute aussi satisfaisante pour les PL totaux. À partir d'un jeu de pertes et de VA, une unique perte totale agrégée est obtenue.

Enfin, les modélisations qui créent un *proxy* des facteurs pour modéliser les PL donnent elles aussi de bons résultats et permettent de faire un lien direct entre les facteurs de risque et les pertes totales. L'ensemble de ces travaux a permis de définir le *Single Equivalent Scenario* qui renvoie au STEC. Cette information permet de connaître avec précision les paramètres économiques qui amèneraient une perte totale égale au STEC à horizon 1 an.

Nous passons désormais à l'utilisation de ce *Single Equivalent Scenario* dans le but de définir une couverture financière.

‖. Alternatives dans le sens où une fois estimées, on peut utiliser ces dernières au lieu du modèle interne tout en ayant des résultats équivalents.

Chapitre 5

Application de la méthodologie SES à la construction de stratégies de couverture

Dans ce qui précède nous avons défini une modélisation qui permet de faire le lien de manière quasi unique entre les conditions économiques (facteurs de risque), les pertes par risque et la perte totale. Cette problématique d'utilisation du modèle interne dans le pilotage de la société est en lien avec les problématiques actuelles. En effet, cela fait écho à l'ORSA qui fait le lien entre la gouvernance et la gestion des risques. Cela va impacter d'une part le calcul d'IRR Solvabilité 2, qui consiste à déterminer le rendement à obtenir pour qu'un *new business* soit rentable selon les conditions économiques à horizon lointain, d'autre part, cela permet de piloter la gestion financière de manière cohérente avec les investissements, les couvertures *etc.*

Nous regarderons les impacts de tel ou tel produit sur les différents « paramètres » d'intérêt que sont les taux, la volatilité implicite des taux, *Equity* et la volatilité implicite *Equity*. Notons qu'une quantité sera d'un intérêt particulier dans la suite : le montant de capital qui devra réellement être apporté par l'actionnaire pour vérifier les contraintes de solvabilité. Ce capital sera appelé *Hard Capital* et fait référence aux visions économiques de Solvabilité 2, en prenant :

- AFR : *Available Financial Resources*
- ANAV : *Adjusted Net Asset value*
- VIF : *Value in Force*
- RM : *Risk Margin*
- RS : Ratio de solvabilité défini par $RS = \frac{AFR}{STEC}$ qui doit être supérieur à 100%.

La réglementation S2 impose aux assureurs d'avoir un ratio de solvabilité supérieur à 100%. Cependant les compagnies sont souvent amenées à cibler un meilleur ratio pour plusieurs raisons :

- La volatilité du ratio, notamment en lien avec les conditions économiques, qui impliquerait des besoins de re-capitalisation récurrents dans le cas d'un ratio de couverture trop faible.
- Dans le cadre de la politique de l'ORSA, la prise en compte des contraintes additionnelles telles qu'une solvabilité à horizon T années.

Ainsi, avec la relation :

$$AFR = ANAV + VIF - RM,$$

pour illustrer une méthode d'optimisation de la couverture financière, nous prendrons par la suite une hypothèse de ratio cible à 150%. Du point de vue du *Hard Capital* à immobiliser, cela se traduit par la contrainte suivante :

$$\max(150\%SCR - VIF - ANAV + RM, 5\%STEC) \,^{*}$$

Cette quantité a été utilisée pour la définition d'un critère qui d'une part pénalise l'augmentation du capital économique (STEC) et d'autre part favorise le gain en ressources (AFR). L'objectif des produits de couverture sera donc de maximiser la quantité suivante :

$$\underbrace{\Delta AFR}_{\text{Gain obtenu dans un scénario dit favorable par rapport au } \textit{base case}} - \underbrace{150\%\Delta STEC}_{\text{Variation de STEC par rapport au } \textit{base case}}$$

Ce critère permet de contrebalancer deux objectifs : d'une part la couverture du SCR financier, d'autre part la rentabilité de l'investissement captée via l'AFR. Plus précisément, si l'on note $P(x)$ le prix d'un produit donné dans les conditions économiques x, nous allons chercher la couverture qui est solution de :

$$\text{argmax}\big[(P(MCET) - P(BC)) - 150\%\,(P(SES) - P(BC))\big]$$

Le prix P_{AFR} fait référence au *Market Consistent Case and Targets* (MCET) qui est le scénario économique prévu à horizon 1 an. Dans notre étude, ce sera notre cas central, celui à partir duquel seront calculer les valeurs d'AFR. Ce MCET contient les mêmes valeurs que le *base case* ou le SES avec quelques points clés :

- Légère hausse des taux par rapport au *base case*.
- Faible volatilité implicite des taux et *Equity*.
- Performance *Equity* de l'ordre de +4%.

Par la suite, on supposera que les investissements seront réalisés dans les fonds propres (ANAV) ce qui implique qu'aucune absorption n'a été prise en compte. Cependant, l'absorption aurait pu être prise en compte « simplement » en regardant les absorptions pondérées dans la zone STEC en utilisant la même méthodologie que celle appliquée sur les pertes.

5.1 Couverture du risque actions

5.1.1 Équivalence avec le modèle interne pour un produit « simple » : les actions

Pour commencer, nous ajoutons aux actifs 100 M € d'actions dans les proportions du portefeuille d'AXA [†]. L'objectif ici est de voir dans quelle mesure cela impacte le STEC selon les conditions économiques et de tester l'approche utilisée par rapport au modèle interne. Par ailleurs, cet exemple permet de confirmer la méthode utilisée en la confrontant à une autre approche : « l'approche par distribution » présentée ci-après.

Le tableau 5.1 renseigne les résultats obtenus :

∗. Dans cette définition du SCR, les fonds propres sont inclus.

†. Ici, les actions ne sont pas intégrées aux fonds assurés afin de ne pas être impacté par la participations aux bénéfices et autres phénomènes assurantiels propres à l'assurance vie.

STEC initial	$\Delta STEC$	ΔAFR	STEC « modèle » [‡]	STEC par distribution [§]
1 052	26	-4,06	1 078	1 084

Tableau 5.1 – Ajout d'un portefeuille Equity (en M €).

Les résultats obtenus sont cohérents puisque le SES donne un facteur de risque de -26% sur l'*Equity* (en prenant comme P&L *Equity* la perte pondérée moyenne de la partie précédente 3.6), ainsi nous retrouvons bien une augmentation du STEC de 26 M € sur un risque « linéaire ». Cette linéarité découle du fait que les actions ne sont pas intégrées aux fonds assurés et ne subissent donc pas d'absorption via le phénomène de participation aux bénéfices. Le gain obtenu, si le *Market Consitstent Economic Targets* se réalise, est de 4,06 M € puisque dans ce scénario, le rendement *Equity* du *proxy* est de 4,06%. Il est à noter que ces variations de valeurs ont été calculées en utilisant les modélisations des risques marginaux précédentes, cela est appelé STEC « modèle » dans le tableau 5.1 et fait référence au calcul du SES précédent.

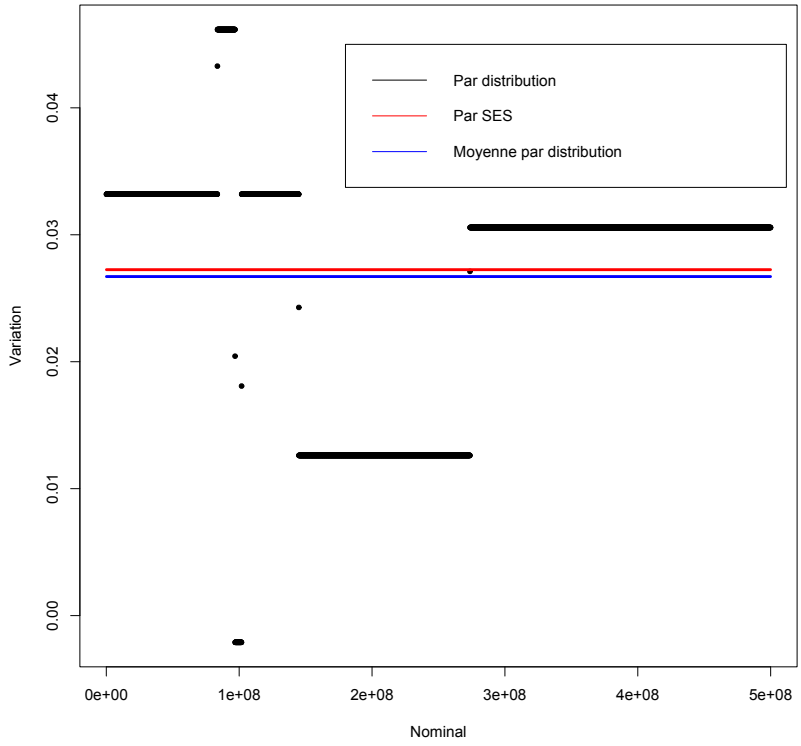
Cependant, afin de s'assurer que les résultats obtenus sont cohérents, un calcul alternatif a été mis en place pour « *backtester* » cette méthode :

- Pour chacun des 11 000 scénarios une valeur de la performance Equity est calculée (le *proxy*), et le gain ou la perte associés à notre investissement *Equity* est calculé.
- Pour chacun des 11 000 scénarios, la performance précédente est ajoutée au P&L total puis le 55$^{\text{ème}}$ P&L total le plus faible est sélectionné.

Cette méthode, appelée STEC par distribution dans le tableau 5.1 ne donne pas un résultat identique à la méthode « modèle » avec un STEC de 1 084 M € vs 1 078 M€. On pourrait penser que les deux méthodes ne donnent pas des résultats similaires, mais en fait cela est dû à un phénomène déjà mis en avant auparavant : l'effet tirage. Ainsi, sur le scénario STEC du modèle interne, le facteur de risque *Equity* est de -34%.

Selon la quantité d'actions ajoutée l'effet tirage se fait ressentir comme le montre la figure 5.1 qui représente la variation de STEC relatif en fonction de la quantité d'*Equity* ajoutée. Plus précisément, on voit que la différence entre l'ajout de A € et de $A + 200\,000$ € d'*Equity* est constante en utilisant le SES, alors que cette quantité varie selon la valeur de A avec la méthode basée sur les distributions.

Par ailleurs, on peut remarquer sur cette nouvelle mise en avant de l'effet tirage que la méthode par simulations converge vers la méthode par SES. L'écart entre la moyenne par distribution (en bleu) et celle par SES (en rouge) est due à l'erreur de 3 M € entre le STEC du modèle interne et celui donné par le modèle non-paramétrique.



Graphique 5.1 – Mise en avant de l'effet tirage.

Finalement, cette étude additionnée à la section 4.3.3, permet de confirmer l'équivalence entre la méthodologie du modèle interne d'AXA (à quelques différences près) et la méthode par SES. Cette dernière présente l'avantage d'être plus simple et rapide puisqu'elle n'implique que le calcul d'un point contre 11 000 scénarios dans l'approche par distribution.

5.1.2 Utilisation de *calls* et *puts* sur actions

Cette partie repose sur le calcul des ΔAFR et $\Delta STEC$ dans le cas d'un achat de *put* ou de *call*. Nous noterons respectivement $BS_{call}(T, K, S_t, \sigma)$ [¶] et $BS_{put}(T, K, S_t, \sigma)$ les prix d'un *call* et d'un *put* à l'instant t de *strike* K, de maturité T, S_t la valeur du sous-jacent à l'instant t et σ la volatilité dans le modèle de Black. Pour nous, le sous-jacent est un panier d'actions dans les proportions du portefeuille AXA.
Nous avons alors dans le cas d'un *call* :

- $\Delta AFR = BS_{call}(T, K, r_{MCET}, \sigma_{MCET}) - BS_{call}(T, K, r_{BC}, \sigma_{BC})$
- $\Delta STEC = BS_{call}(T, K, r_{STEC}, \sigma_{STEC}) - BS_{call}(T, K, r_{BC}, \sigma_{BC})$ avec, $r_{STEC} = (r_{BC} + choc_{STEC})$ et $\sigma_{STEC} = \sigma_{BC} \times (1 + choc_{STEC})$, et de même pour les scénarios *MCET*.

Nous obtenons les résultats du tableau 5.4 pour des *calls* et *puts* d'une maturité 1 an et de nominal 100M en fonction du *strike*. Dans la mesure où le SES est une baisse de 26% de la poche action tandis que le MCET anticipe une hausse de 4%, les *calls* font gagner en ΔAFR

¶. Ici le taux d'actualisation correspond au taux sans risque associé au scénario d'intérêt.

mais perdre en $\Delta STEC$, de manière symétrique les *puts* font perdre en ΔAFR mais gagner en $\Delta STEC$. On observe que la baisse du sous-jacent a plus d'impact sur la couverture que les mouvements de volatilité implicites.

Produit	*strike*	ΔAFR	$\Delta STEC$
call	70%	3,91	-6
call	80%	4	-14
call	120%	1,48	-1,34
put	70%	-0,0015	7
put	80%	-0.91	12
put	120%	-2,33	24,82

Tableau 5.2 – Valeurs de différentes options sur le portefeuille *Equity* d'AXA France selon les *strikes* pour 100 M € de nominal.

Ensuite, lorsque l'on maximise la quantité d'intérêt :

$$\Delta AFR - 150\% \Delta STEC$$

selon le *strike*, toutes choses égales par ailleurs nous obtenons les résultats du tableau 5.3 :

Produit	*strike* optimal	ΔAFR	$\Delta STEC$
call	141,87%	0,49	-0,15
put	142,42% ‖	-3,30	26

Tableau 5.3 – Valeurs de *call* et *put* sur le portefeuille *Equity* d'AXA France pour 100 M € de nominal.

Ces grandes valeurs de *strike* optimaux peuvent s'expliquer en revenant aux formules de *pricing* d'options sous le modèle de Black & Scholes (cf [Black et Scholes. 1973]). Si l'on note

- K le *strike*.
- T la maturité.
- r le sous-jacent.
- σ la volatilité.
- i le taux sans risque.

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{r}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + i\right)T\right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

Alors,

$$BS_{call}(T, K, r, \sigma) = \exp(-it)[r\mathcal{N}(d_1) - K\exp(-T \times r_T)\mathcal{N}(d_2)\ ^{**}], \text{ et}$$

‖. Ce *strike* optimal n'a de sens que si l'on travaille sur un intervalle, en effet il doit être vu comme un optimum local.

∗∗. $\mathcal{N}$ représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite : $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})\, du$. La quantité r correspond au rendement du portefeuille Equity d'AXA, et r_T au taux d'actualisation de l'option.

$$BS_{put}(T,K,r,\sigma) = \exp(-it)[K\exp(-T\times r_T)\mathcal{N}(-d_2) - r\mathcal{N}(-d_1)].$$

Nous considérerons par la suite que le taux sans risque est nul par souci de simplification, soit $i = 0$.

— Dès lors quand K est grand ($K \longrightarrow +\infty$)

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{r}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{T}} \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ainsi,

$$r\mathcal{N}(d_1) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En faisant un travail similaire associé à un développement limité sur la loi normale, nous obtenons :

$$K\mathcal{N}(d_2) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, quand $K \longrightarrow +\infty$,

$$BS_{call}(T,K,r,\sigma) = r\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

— lorsque K est petit ($K \longrightarrow 0$)

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{r}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sqrt{T}} \underset{K\to0}{\longrightarrow} +\infty$$

Soit,

$$BS_{call}(T,K,r,\sigma) = \underset{K\to0}{\longrightarrow} a - bK$$

Puis, en utilisant la parité *call put* :

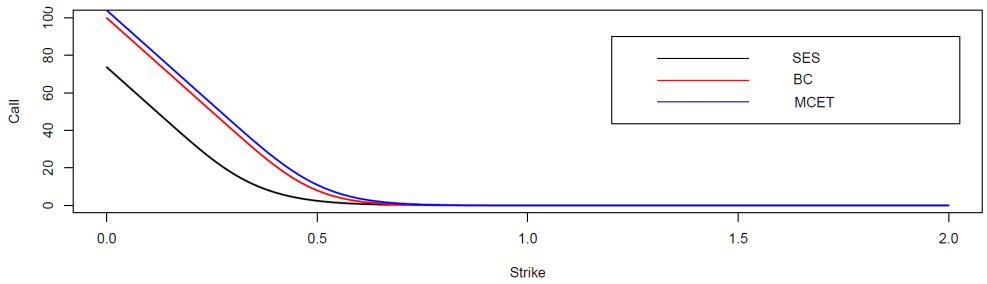
$$BS_{put}(T,K,r,\sigma) - BS_{call}(T,K,r,\sigma) = K\times B(r,T) - r,$$

nous obtenons :

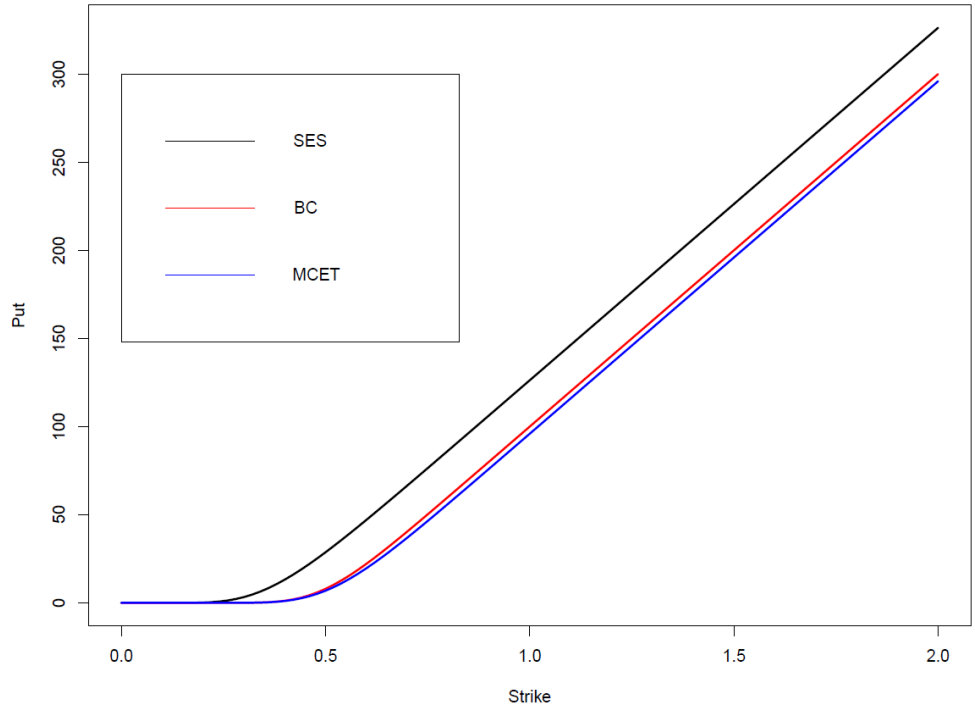
$$BS_{put}(T,K,r,\sigma) = r\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha K + b$$

$$BS_{put}(T,K,r,\sigma) = r\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \underset{K\to0}{\longrightarrow} 0$$

Cela peut se voir avec les graphiques 5.2 et 5.3. On peut apprécier sur ces derniers le caractère linéaire à partir d'un *strike* et nul à partir d'un autre.

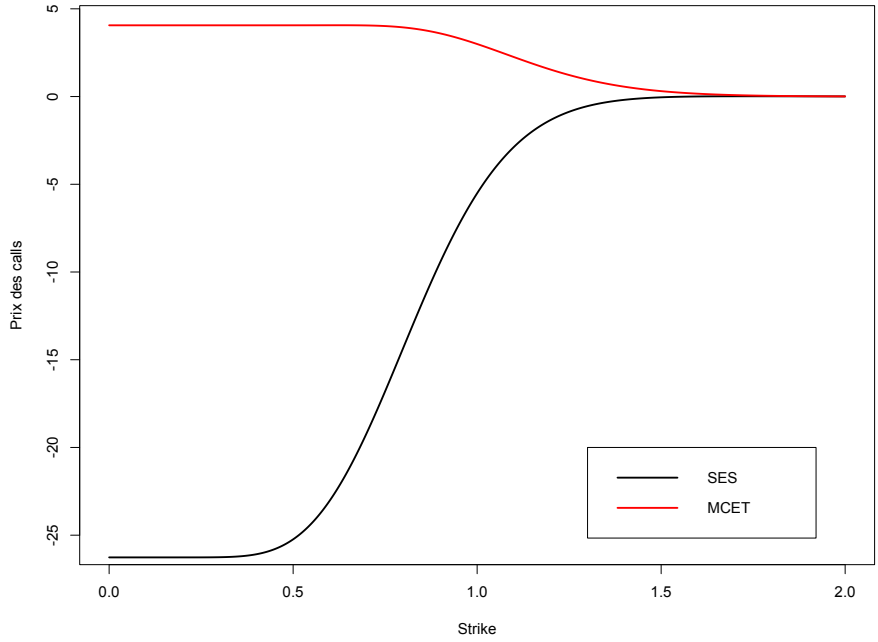


Graphique 5.2 – Variation des prix des *calls* en fonction du *strike* selon le scénario.

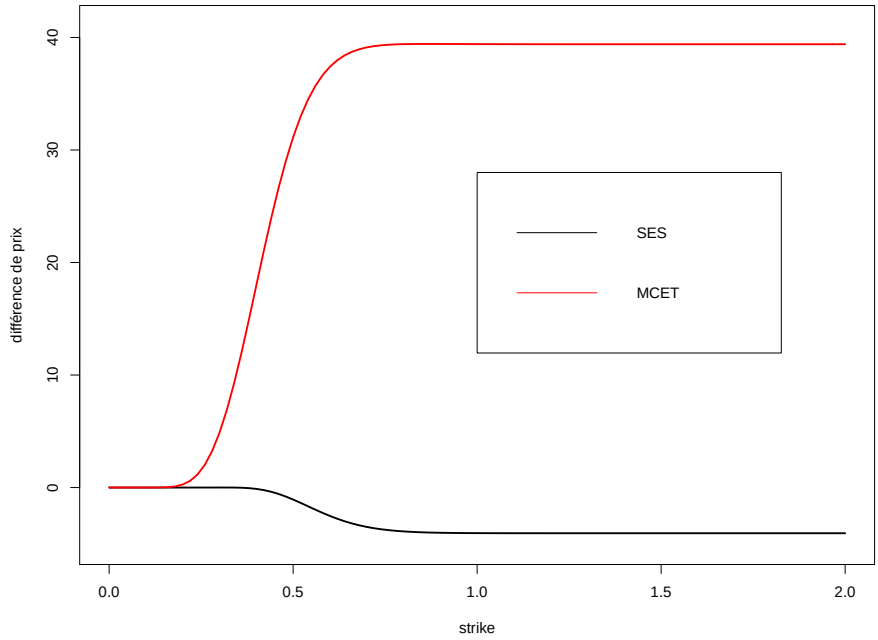


Graphique 5.3 – Variation des prix des *puts* en fonction du *strike* selon le scénario.

Ajoutons pour compléter cette étude les graphiques des variations de pris entre les scénarios MCET ou SES et BC avec 5.4 et 5.5.



Graphique 5.4 – Variation des prix des *calls* en fonction du *strike*.



Graphique 5.5 – Variation des prix des *puts* en fonction du *strike*.

Ces deux dernières nous permettent de voir plus précisément ce qui se passe et pourquoi les *strikes* obtenus sont particulièrement élevés. Pour être plus précis, la quantité $\Delta STEC$ en noir représente la variation de prix des options entre le scénario STEC et le BC ; la quantité MCET

en rouge représente la même chose mais entre le scénario MCET et le BC. Pour les *calls* (figure 5.4) sur la partie où les *strikes* sont environ inférieurs à 80% on peut noter un écart conséquent entre ΔAFR et $1.5 \times \Delta STEC$, avec une tendance à la hausse pour le premier, et une tendance à la baisse pour le second. Sur la partie avec des *strikes* supérieurs à 80% l'écart entre les deux est très faible et constant.

On remarque sur les *puts* (figure 5.5) une certaine symétrie par rapport à l'entonnoir vu sur les *calls*. Nullité des ΔAFR et $1.5 \times \Delta STEC$ lorsque le *strike* est très faible (<20%), puis une croissance de ΔAFR associée à une décroissance de la quantité $1.5 \times \Delta STEC$ pour les *strikes* plus élevés (entre 20% et 80% environ), enfin les deux quantités paraissent rester constantes au-delà.

5.2 Couverture des risques taux

Dans cette section, nous présentons les impacts de différents produits de taux : les Zéro-Coupons et les *swaptions*.

5.2.1 Utilisation de zéro-coupons (ZC)

Dans cette partie différents ZC ont été *pricés* avec différentes conditions économiques (c'est-à-dire différents taux). En notant $B(t,T)$ le prix vu à l'instant $t = 0$ (aujourd'hui) d'un ZC de maturité T dont le taux est r_t, nous utiliserons les formules suivantes :

- $\Delta AFR = B(t,T)(MCET) - B(t,T)(BC)$
- $\Delta STEC = B(t,T)(STEC) - B(t,T)(BC)$

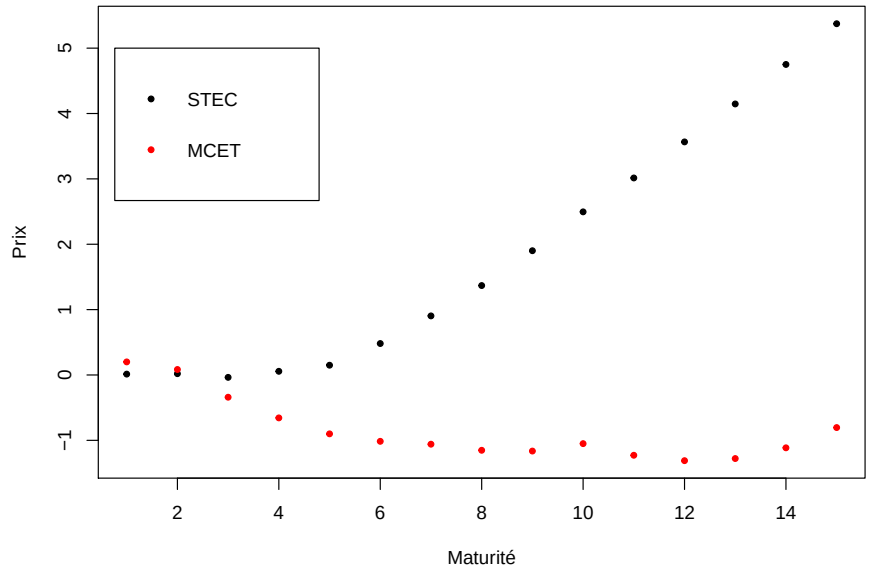
Le tableau 5.4 représente les différentes variations selon les maturités. On peut remarquer sur ce dernier une cohérence si l'on revient à la formule de *pricing* d'un ZC :

$$B(t,T) = \exp(-r_t \times T),$$

plus les taux sont élevés, et/ou plus la maturité est élevée, plus les prix sont faibles. Or, sur les scénarios à disposition les taux BC choqués du scénario STEC sont inférieurs à ceux du BC eux même inférieurs au MCET. Cela est exposé sur le graphique 5.6.

Maturité	ΔAFR	$\Delta STEC$
1	0,20	0,013
2	0,0841	0,019
3	-0,34	0,036
5	-0,90	0,15
10	-1,05	2,49
15	-0,80	5,37

Tableau 5.4 – Valeurs de différents zéro-coupons en M € selon leurs maturités pour un nominal de 100 M €.



Graphique 5.6 – Évolution des prix ZC en fonction des maturités.

Le tableau 5.4 sert à donner des exemples, mais il en demeure pas moins vrai qu'il est symptomatique d'un phénomène auquel nous avons à faire sur d'autres produits. En effet, dans certains cas, selon l'optionalité choisie, il se peut que la maximisation ne possède pas d'optimum fini. Ici sans contrainte particulière, un investisseur rationnel achèterait :

- Un ZC de maturité 1 ans si il veut maximiser ses performances.
- Un ZC de maturité 2 ans si il veut ne consentir aucune pertes en capital économique et en termes de performance.
- Un ZC de maturité « infinie » si il veut optimiser son capital économique sans se soucier de la performance prévue.

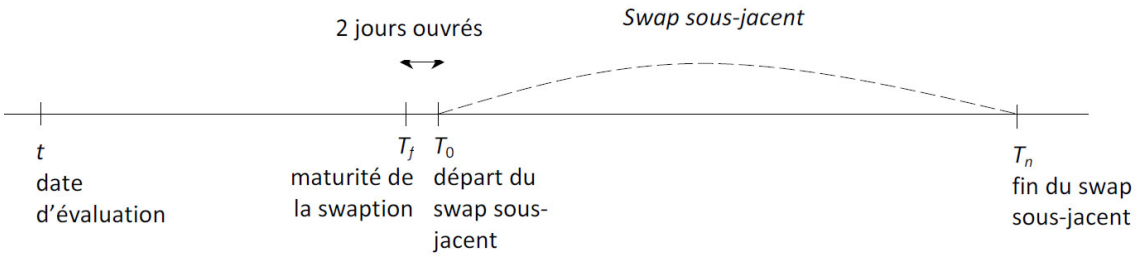
Après avoir vu le schéma de pricing et d'interprétation sur un produit de taux « simple », nous passons à des produits prenant en compte la volatilité.

5.2.2 Utilisation de *swaptions*

On a vu que l'achat de *call* ou de *put* avait une certaine efficacité sur le gain de *Hard Capital*, cependant un autre produit devrait être efficient : les *swaptions*. Une *swaption* est une option dont le sous-jacent est un *swap* de taux commençant à une date future.

Plus concrètement, notons T_0 la date de départ du *swap* sous-jacent, T_n sa date de fin, $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ l'échéancier de sa jambe fixe, et $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ les fractions d'années correspondantes.

Pour alléger les notations on supposera le notionnel du *swap* égal à 1. Une *swaption* payeuse de *strike*K sur ce *swap* sous-jacent est l'option, à la date de maturité $T_f = T_0 - 2$ jours ouvrés, d'entrer dans le *swap* payeur du taux fixe K. La *swaption* receveuse correspondante est l'option d'entrer dans le *swap* receveur du taux fixe K. Cela est présenté avec la figure 5.7.



Graphique 5.7 – Schéma du fonctionnement d'une *swaption*.
Source : [Antonin Chaix].

Le détenteur de la *swaption* payeuse exercera l'option si, arrivé à la maturité TF, le *swap* sous-jacent s'avère profitable ; c'est à dire si $PV_V(T_f) - PV_F(T_f) > 0$. Dans ce cas, il « empoche » la PV du *swap* (virtuellement car il rentre en fait physiquement dans le *swap*). Dans le cas inverse, le gain est nul. Le *payoff* de la *swaption* en date T_f s'écrit ainsi $(PV_V(T_f) - PV_F(T_f))^+$. En utilisant la mesure forward-neutre associée à la date T_f,la *swaption* payeuse peut donc s'évaluer ainsi :

$$PV^P_{SW}(t) = B(t,T_f)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_f}}\left[(PV_V(T_f) - PV_F(T_f))^+\right].$$

Or, la PV du *swap* peut s'écrire en fonction du taux *swap* et du *level* du swap. Le prix de la *swaption* se réécrit

$$PV^P_{SW}(t) = B(t,T_f)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_f}}(LVL(T_f,T_0,T_n)(S(T_f,T_0,T_n) - K)^+),$$

avec,

$$LVL(t,T_0,T_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i B(t,T_i) \text{ et } S(t,T_0,T_n) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{LVL(t,T_0,T_n)}.$$

Considérons le numéraire défini par le *level* du *swap* (panier de zéro-coupons), et notons Q^{LVL} la mesure martingale équivalente associée. L'évaluation de la *swaption* sous cette nouvelle mesure s'écrit :

$$PV^P_{SW}(t) = LVL(t,T_0,T_n)\mathbb{E}_t^{\mathrm{Q}^{LVL}}((S(T_f,T_0,T_n) - K)^+).$$

En utilisant la mesure associée au *level* du *swap*, dite aussi mesure swap-neutre, la *swaption* payeuse peut s'interpréter comme un *call* sur le taux swap. De plus, le taux swap est une martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}^{LVL}$ puisque qu'il s'écrit comme la valeur d'un actif de marché (un portefeuille constitué de deux zéro-coupons) divisée par le numéraire. Comme dans le cas du cap, on peut donc modéliser le taux *swap* comme un processus sans *drift* au moyen du modèle de Black :

$$dS(t,T_0,T_n) = \sigma S(t,T_0,T_n) dW_t^{\mathrm{Q}^{LVL}},$$

où, $W_t^{\mathrm{Q}^{LVL}}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure Q^{LVL}.

Avec pour résultat sous le modèle de Black :

$$PV^P_{SW}(t) = LVL(t,T_0,T_n)BS_{call}(T_f - t, K, S(t,T_0,T_n), \sigma).$$

Comme pour les options, on peut faire des développements limités sur les *strikes* toutes choses égales par ailleurs.

$$PV_{SW}^{P} \underset{K\to 0}{\longrightarrow} a - bK$$

$$PV_{SW}^{P} \underset{K\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$PV_{SW}^{A} \underset{K\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$PV_{SW}^{A} \underset{K\to +\infty}{\longrightarrow} b'K$$

Comme précédemment, avec les *swaptions* nous allons calculer les $\Delta STEC$ et ΔAFR, en notant $P_{SW}(T_n, K, S(t, T_0, T_n), \sigma)$ le prix d'une *swaption* à l'instant $t = 0$ (maintenant), de volatilité σ, de taux *forward* $S(t, T_0, T_n)$, de *strike* K et de maturité T_f.
Nous avons :

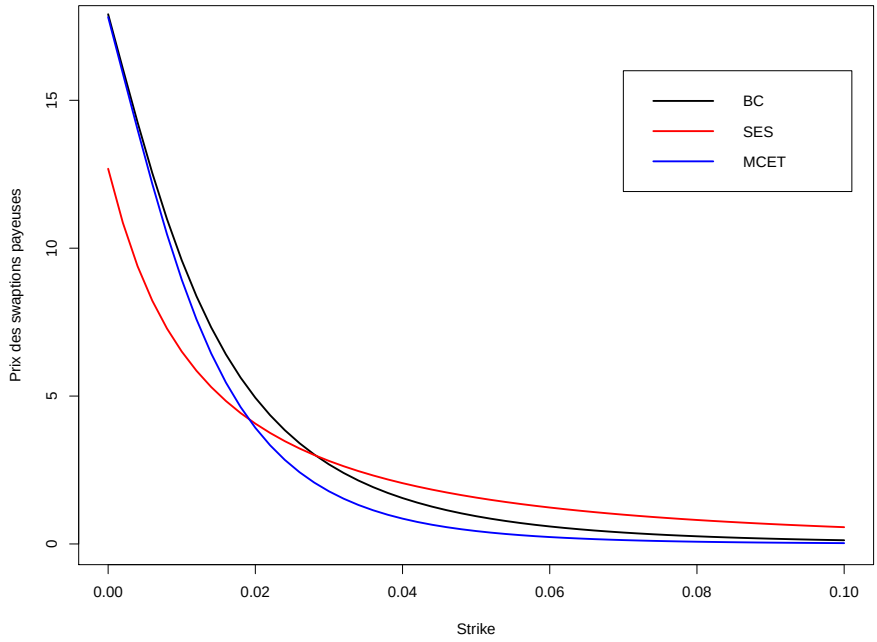
- $\Delta AFR = P_{SW}(T_n, K, S(t, T_0, T_n)_{MCET}, \sigma_{MCET}) - P_{SW}(T_n, K, S(t, T_0, T_n)_{BC}, \sigma_{BC})$
- $\Delta STEC = P_{SW}(T_n, K, S(t, T_0, T_n)_{STEC}, \sigma_{STEC}) - P_{SW}(T_n, K, S(t, T_0, T_n)_{BC}, \sigma_{BC})$
- avec, $S(t, T_0, T_n)_{STEC}$ (*reps.* $S(t, T_0, T_n)_{MCET}$) le taux *forward* selon les conditions économiques de la zone STEC (resp. MCET).

Nous pouvons voir les résultats avec le tableau 5.5.

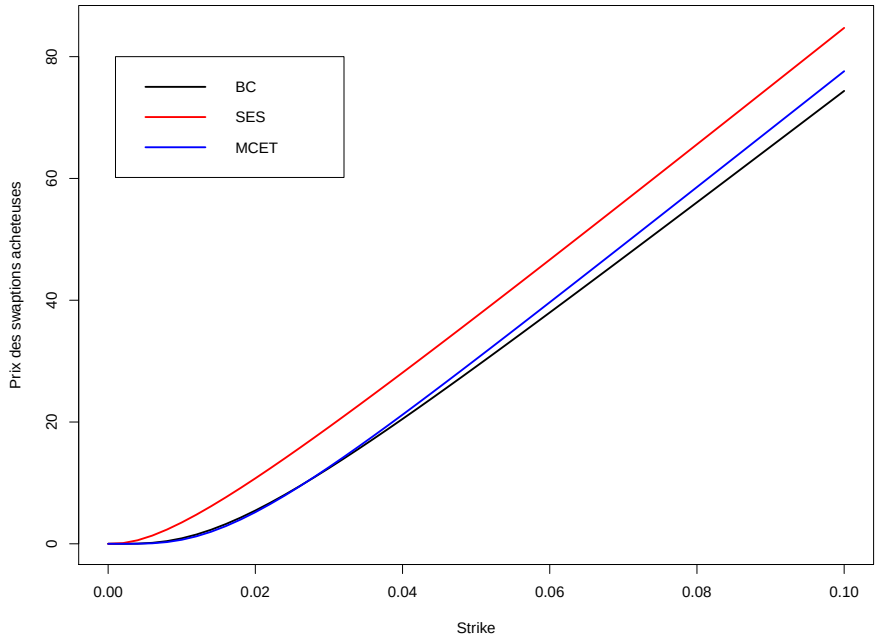
Produit	*strike* optimal [††]	ΔAFR	$\Delta STEC$
Swaption payeuse	6,41%	-0,24	0,64
Swaption acheteuse	$+\infty$ [‡‡]		

Tableau 5.5 – Valeurs de *swaptions* pour 100 M € de nominal.

Comme pour les *calls* et les *puts*, un travail a été effectué sur les *swaptions* pour expliquer les valeurs des *strikes* optimaux à l'aide des graphiques 5.8 et 5.9. Si l'on revient aux définitions mathématiques des prix des *swaptions*, on peut les voir comme des options pondérées le *level* et un sous-jacent différent : le taux *forward*. Ainsi, bon nombre de remarques émises sur les options et les *calls* peuvent s'appliquer ici. On voit tout d'abord sur des *swaptions* payeuses (graphiques 5.8, équivalent aux *calls*) que lorsque le *strike* tend vers l'infini, les prix tendent bien vers 0 et sont élevés pour des *strikes* faibles.



Graphique 5.8 – Variation de prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike*.

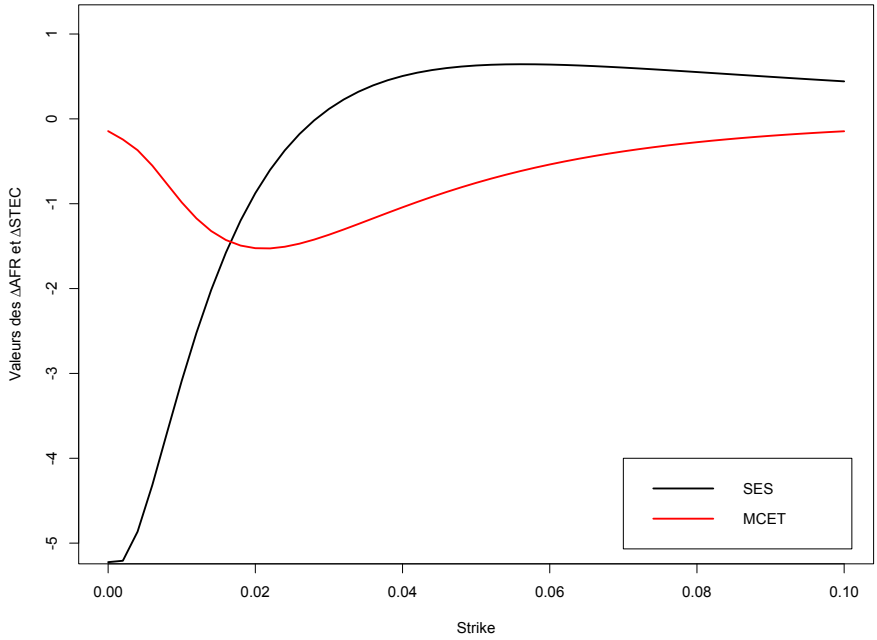


Graphique 5.9 – Variation de prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike*.

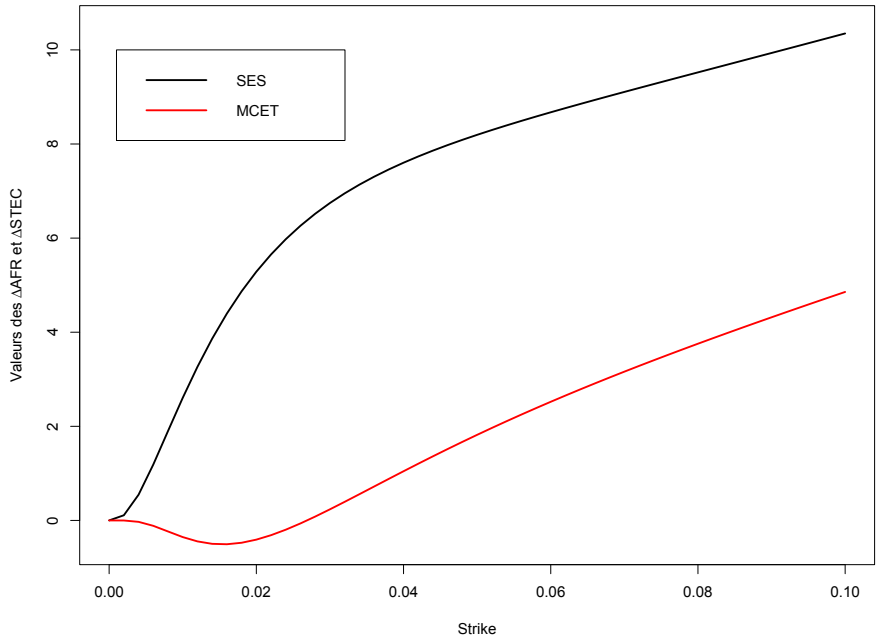
De manière symétrique, pour les *swaptions* acheteuses les prix sont nuls pour des *strikes* faibles puis augment exponentiellement avec ces derniers. Par ailleurs, on remarque un écartement au dessus (resp. en dessous) pour le scénario SES (resp. MCET) par rapport au BC, cet écartement

est de plus en plus marqué au fur et à mesure que le *strike* augmente et s'accentue plus pour le scénario SES que le scénario MCET. Cela s'explique par la constante de proportionnalité du *strike* α : $BS_{put}(T, K, r, \sigma) = r\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha K$ qui est plus élevée avec les paramètres du SES que pour ceux du MCET.

Ajoutons, pour compléter cette étude, les graphiques des variations de prix entre les scénarios MCET et BC, mais aussi SES et BC avec les figure 5.10 et 5.11. On remarque que pour les *swaptions* payeuses, le maximum est clairement défini avec une croissance concave du ΔAFR et forme en cloche pour le $1.5 \times \Delta STEC$. Le point optimum est donc facile à déterminer. En revanche, comme expliqué ci-dessus, les ΔAFR et $1.5 \times \Delta STEC$ ont respectivement un comportement décroissant en fonction du *strike* et décroissant ; en particulier, la croissance de $1.5 \times \Delta STEC$ est substantiellement plus importante que la décroissance du ΔAFR, d'où la non convergence de l'optimum.



Graphique 5.10 – Variation de Δ des *swaptions* payeuses en fonction du *strike*.



Graphique 5.11 – Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike*.

Après avoir constaté ces variations, attachons-nous à expliquer à quel phénomène sont dues ces variations ; en somme regardons quel impact entre celui des taux et celui de la volatilité est le plus significatif. On peut voir l'ensemble de ces effets sur les graphiques de l'annexe A.2 et A.1 pour les *swaptions* respectivement acheteuses et payeuses.

Pour les *swaptions* payeuses, les quantités ΔAFR ne sont pas impactées par les taux et très faiblement par la volatilité. En revanche, les taux faibles ont un fort impact sur le $\Delta STEC$, et la volatilité a un impact assez important pour des *strikes* moyens. Enfin, l'effet croisé a une forme en cloche. Finalement, le *strike* optimal de 6% provient d'une faible perte due aux taux et d'un gain relativement important dû à la volatilité.

Concernant les *swaptions* acheteuses, l'effet volatilité a une forme en cloche en fonction du *strike* avec un maximum situé aux alentours des 3% pour $\Delta STEC$, alors que pour ΔAFR les 3% correspondent à un minimum. Cependant, les maximums et minimums n'ont que peu d'impact pour le résultat final. Ce sont les taux qui drainent le résultat final avec des $\Delta STEC$ et ΔAFR croissants au fur et à mesure que le *strike* augmente.

Les résultats portant sur la maximisation du critère $\Delta AFR - 150\%\Delta STEC$ ne paraissent pas optimaux tant certains produits semblent hors de la monnaie. La sur-prédominance du STEC fait pencher les *strike* vers les extrêmes. Si l'on compare cela avec l'allocation de Markowitz, on maximiserait les rendements ou minimiserait la volatilité sans contraintes, le portefeuille serait alors uniquement constituer de l'actif ayant le meilleur rendement ou la plus faible volatilité. Cela appelle donc à ne pas considérer uniquement le critère précédent, mais à l'associer à une contrainte.

5.3 Couvertures optimale du portefeuille d'AXA

Dans cette partie, nous rappelons brièvement comment s'articule l'allocation d'actifs par Markowitz. Cela aidera à trouver une intuition qui permettra de contraindre la maximisation de la quantité $\Delta AFR + 150\%\Delta STEC$ qui permet d'aboutir à des résultats « cohérents ».

5.3.1 Rappels sur la gestion de portefeuille

Si l'on revient à la théorie de la gestion de portefeuilles, en notant :

- $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ les v.a représentant les n actifs
- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ les quantités de chacun des actifs dans le portefeuille $\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1\right)$.
- $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ (reps. $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$) les rendements (resp. les rendements moyens attendus) des actifs.
- Σ la matrice de variance covariance des actifs.

L'allocation moyenne-variance est de la forme :

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{\pi}}{\text{minimize}} \quad & \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i r_i\right) = \boldsymbol{\pi}^{'} \Sigma \boldsymbol{\pi} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 = \boldsymbol{\pi}^{'} \boldsymbol{e} \\ & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i r_i\right) = \boldsymbol{\pi}^{'} \boldsymbol{\mu} = \mu_p \end{aligned}$$

En résolvant ce programme, nous obtenons le lagrangien du problème (δ et γ sont les multiplicateurs de Lagrange) :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^{'} \Sigma \boldsymbol{\pi} - \delta(\boldsymbol{\pi}^{'} e - 1) - \gamma(\boldsymbol{\pi}^{'} \boldsymbol{\mu} - \mu_p)$$

En supposant que la matrice Σ soit inversible, il vient :

$$\boldsymbol{\pi} = \delta e - \gamma \boldsymbol{\mu}$$

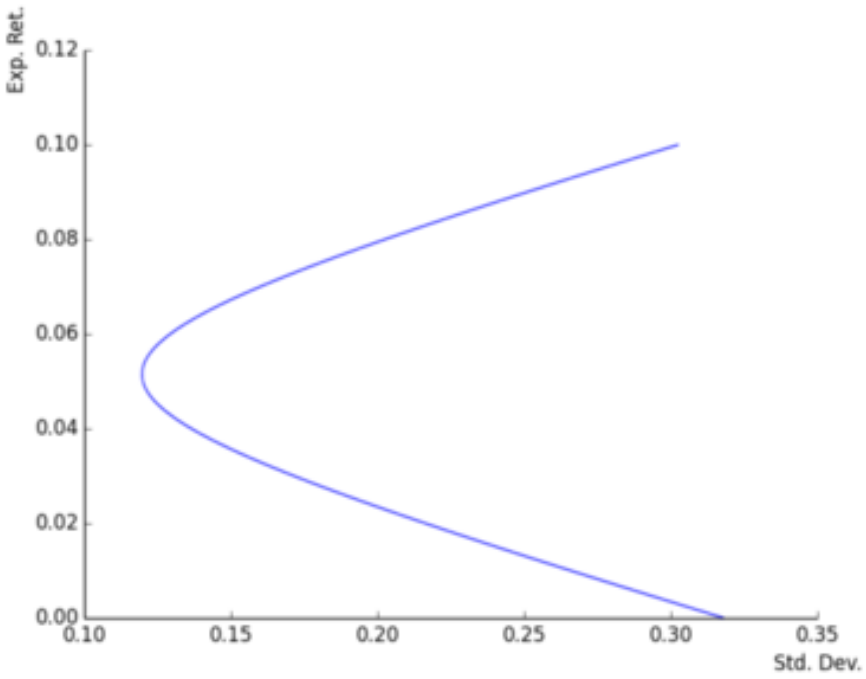
Puis en injectant dans les contraintes :

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{e} = \mu_p, \\ \delta \boldsymbol{e}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma \boldsymbol{e}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{e} = 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boldsymbol{\pi} = (\delta \boldsymbol{e}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\pi}_\mu + (\gamma \boldsymbol{e}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{e}) \boldsymbol{\pi}_1 = \lambda \boldsymbol{\pi}_\mu + (1 - \lambda) \boldsymbol{\pi}_1.$$

Finalement, en faisant varier μ_p nous obtenons classiquement une frontière éfficiente comme présente avec la figure 5.12.



Graphique 5.12 – Exemple d'une frontière d'efficience.

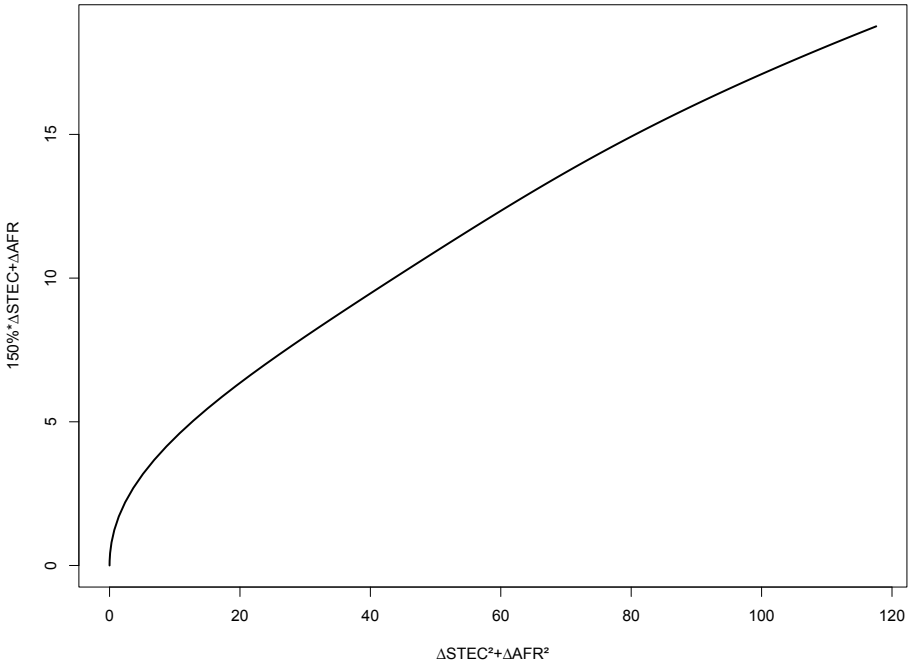
5.3.2 Application au portefeuille d'AXA

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, l'allocation consiste à optimiser la volatilité d'un portefeuille pour une performance donnée. Comme on a pu le voir sur la figure 5.12, plus le performance souhaitée est élevée (rendement), plus le risque imparti est élevé (volatilité). La même logique a été appliquée pour la couverture du portefeuille d'AXA. Cependant, ce ne sera pas les rendements et les volatilités qui seront les garants de performance et de critère de risque. La performance sera assimilée au gain de *hard capital* soit : $\Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC$ tandis que la volatilité sera associée à une pénalisation quadratique sur ΔAFR et $\Delta STEC$. Ainsi, le problème d'optimisation posé est le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser} && \Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC \\ &\text{sous contrainte} && \Delta AFR^2 + \Delta STEC^2 \leq A \end{aligned}$$

D'un point de vue économique, la pénalisation quadratique permet de garantir qu'une couverture impliquant des gains très élevés en STEC mais une sous-performance trop importante sur l'AFR ne sera pas retenue pas le programme.

Ce critère a été utilisé pour les *swaptions* receveuses pour lesquelles des *strikes* extrêmes étaient retenus par la méthode sans contraintes. La figure 5.13 présente ce qui peut être considéré comme une frontière efficiente avec en abscisse $\Delta AFR^2 + \Delta STEC^2$ (assimilé à la variance) et $\Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC$ (assimilé aux gains).



Graphique 5.13 – Pseudo frontière d'efficience sur un portefeuille assurantiel.

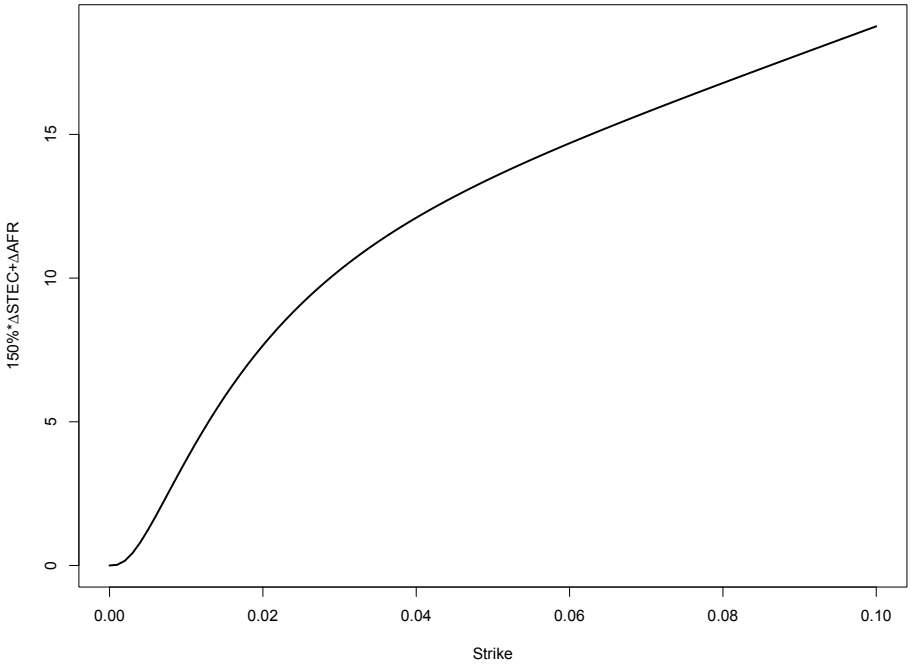
Le tableau 5.6 donne des valeurs selon différents choix de la contrainte $\Delta AFR^2 + \Delta STEC^2$.

Produit	*strikes* §§	ΔAFR	$\Delta STEC$	$\Delta STEC^2 + \Delta AFR^2$
Swaption acheteuse	1%	-0,24	2,60	6,84
Swaption acheteuse	2%	-0,27	5,29	28
Swaption acheteuse	2,7%	0	6,40	40,76
Swaption acheteuse	3%	0,16	6,75	45,58
Swaption acheteuse	4%	0,69	7,60	58,23

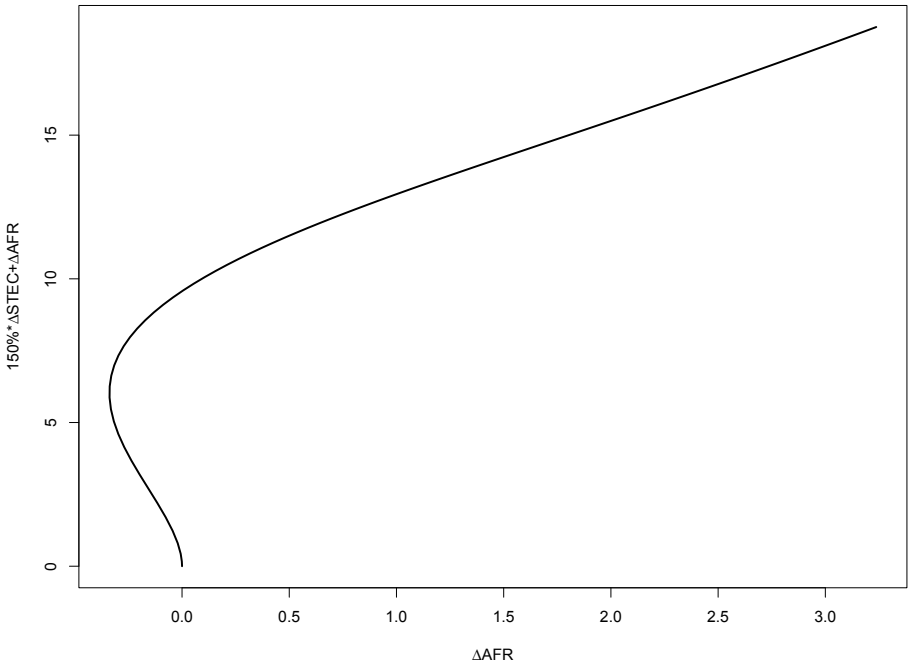
Tableau 5.6 – Valeurs de *swaptions* acheteuses pour 100 M € de nominal.

Ci-après, les représentations du cirtère $150\%\Delta STEC + \Delta AFR$ en fonction des *strikes* et de ΔAFR à titre informatif.

§§. Le *strike* est exprimé en valeur absolue.



Graphique 5.14 – Contrainte en fonction du *strike*.



Graphique 5.15 – Pseudo frontière d'efficience sur un portefeuille assurantiel.

Au vu des résultats précédents, contraindre la « volatilité » de ΔAFR et $\Delta STEC$ permet de

réduire les *strikes* obtenus et donc la « volatilité » de la stratégie de couverture. Les résultats sont tout de même à relativiser dans la mesure où nous utilisons une représentation arbitraire de l'AFR via le MCET. Cependant, cette approche pourrait être généralisée à un ensemble de scénarios pour envisager différentes évolutions économiques. De la même manière on pourrait généraliser cette méthodologie en ne choisissant plus un seul instrument financier mais un portefeuille.

5.4 Compléments sur la couverture des risques de volatilité

Dans la partie précédente, nous avons supposé que la couverture était placée dans les fonds propres et n'était donc pas impactée par les phénomènes d'absorption. Cela implique que ces investissements n'auront pas d'effet sur les risques portés par le passif. En effet, les risques de volatilité implicites ne proviennent pas de l'actif qui contient peu d'options mais plutôt du passif via la stratégie d'allocation, l'ALM et la participation aux bénéfices pour les activités vie. Dès lors que l'on investit dans les fonds assurés, nous allons impacter les mécanismes précédemment cités et donc les risques de volatilité associés.

Bien que nous n'ayons pas mis au point une méthodologie complète pour estimer l'impact d'un investissement dans les fonds assurés, nous proposons ici quelques éléments qui pourraient permettre d'avancer vers ce but. Ainsi, nous exploitons les résultats obtenus avec le modèle alternatif et des observations faites sur des produits « simples ».

Par la suite, nous porterons un intérêt particulier aux grandeurs que sont la *duration* et la convexité, définies comme :

$$GAP_{duration} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}.$$

$$GAP_{convexit} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}.$$

Pour P la valeur d'une portefeuille.

5.4.1 SCR IR et Vol IR pour le modèle alternatif

Pour rappel, l'étude sur le modèle alternatif a montré un transfert de risque entre les taux et la volatilité implicite des taux. Par ce transfert, en comparaison du modèle actuel, la *duration* a augmenté dans le modèle alternatif tandis que la convexité a diminué. En conséquence, si nous comparons le STEC taux (vu à la baisse des taux) dans les deux modèles, nous constatons que celui-ci augmente avec la *duration* tandis que le STEC volatilité implicite des taux diminue avec la convexité.

Nous allons renforcer cette observation par des résultats théoriques sur des produits financiers classiques ayant un profil semblable au portefeuille. Notre objectif est de montrer qu'il est possible de quantifier ce mécanisme de transfert des risques et de l'exploiter via le phénomène d'absorption.

5.4.2 Produit fictif

Dans ce premier exemple, on considère un produit dont le *payoff* est un polynôme de degré 2 en fonction du sous-jacent, ce qui pourrait se rapprocher du profil de risque du portefeuille vie.

Le *payoff* en question sera noté comme suit avec S_t le sous-jacent (par exemple le taux *swap* dans le cas du risque de taux) :

$$P = aS_T^2 + bS_T + c,\ a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Si l'on considère que S_t suit un processus de Black & Scoles : $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, le prix de cet actif à un instant t $(0 \leq t \leq T)$:

$$P_t = \mathbb{E}^{\mathrm{Q}}\left(\exp(-r(T-t)P_T)|\mathcal{F}_t\right),$$

$$\text{or, sous Q, } \ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2}), \sigma\sqrt{T}\right),$$

$$\text{soit } S_t \sim \mathcal{LN}\left(S_0 \exp(\mu T), S_0^2 \exp(2\mu T)(\exp(\sigma^2 T) - 1)\right).$$

Ainsi, le prix de l'option à l'instant $t = 0$ est :

$$P_0 = a\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\exp(-rT)S_T^2)|\mathcal{F}_\prime) + b\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\exp(-rT)S_T)|\mathcal{F}_\prime) + c\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\exp(-rT)|\mathcal{F}_0),$$

soit finalement

$$P_0 = c\exp(-rT) + bS_0 + aS_0^2\exp(rT + \sigma^2 T),$$

et

$$P_t = c\exp(-r(T-t)) + bS_t + aS_t\exp(r(T-t) + \sigma^2(T-t)).$$

Lorsque on calcule les *greeks*, nous obtenons :

$$\Delta = \frac{\partial P_0}{\partial S_0} = 2aS_0\exp(rT + \sigma^2 T) + b.$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P_0}{\partial S_0^2} = 2a\exp(rT + \sigma^2 T).$$

$$V = \frac{\partial P_0}{\partial \sigma} = 2aS_0^2\sigma T\exp(rT + \sigma^2 T).$$

on remarque alors que :

$$V = \Gamma S_0^2 \sigma T$$

En d'autres termes, on observe une relation directe entre la convexité du prix de ce produit et sa sensibilité à la volatilité. On observe que si fixe $a = 0$, le produit n'aura pas de convexité et sa sensibilité à la volatilité serait nulle. On retrouve le mécanisme observé sur le portefeuille vie à savoir la relation entre convexité et risques de volatilité. Une première solution pour quantifier cette relation serait d'assimiler le profil du portefeuille vie à un polynôme de degré 2.

5.4.3 Cas des *swaptions*

Comme second exemple, nous nous intéressons aux *swaptions* puisque celles-ci sont utilisées dans les portefeuilles répliquants pour modéliser le passif.

En utilisant les notations suivantes :

- T la maturité de la *swaption*.
- σ_F la volatilité du taux forward swap.
- i_S le *strike* (un taux forward swap).
- i_F Le taux *forward swap* (maturité T) marché.
- N le nominal.
- $P^P_{swaption}$ et $P^A_{swaption}$ le prix respectif d'une *swaption* payeuse et d'une *swaption* acheteuse.
- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{i_F}{i_S}\right)+\frac{1}{2}\sigma_F^2 T}{\sigma_F\sqrt{T}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{T}$

D'après l'article de [Akume et al. 2003], nous pouvons calculer les *greeks* des *swaptions* payeuses et acheteuses comme :

$$\Delta_{payeuse} = \frac{\partial P^P_{swaption}}{\partial i_F} = N \times LVL \times \Phi(d_1)$$

et,

$$\Delta_{acheteuse} = \frac{\partial P^A_{swaption}}{\partial i_F} = N \times LVL \times (\Phi(d_1) - 1).$$

$$\Gamma_{payeuse} = \Gamma_{acheteuse} = \frac{\partial^2 P_{swaption}}{\partial i_F^2} = \frac{N \times LVL \times \phi(d_1)}{\sqrt{T} \times i_F \times \sigma_F}.$$

$$V_{payeuse} = V_{acheteuse} = \frac{\partial P_{swaption}}{\partial \sigma} = N \times LVL \times i_F \times \sqrt{T} \times \phi(d_1).$$

On obtient comme précédemment la relation :

$$V = \Gamma T \sigma_F i_F^2,$$

Finalement, on observe que la relation valable pour un polynôme à convexité constante (de degré 2) s'étend localement (on remplace la constante a par le Γ qui n'est pas constant pour une *swaption*) au cas d'un *payoff* plus complexe et on peut donc se ramener au cas présenté précédemment.

En utilisant la relation précédente, nous remarquons que le risque lié à la volatilité peut s'écrire comme :

$$\text{STEC volatilité} = \int V \mathrm{d}\sigma = \int \Gamma T \sigma i_F^2 \mathrm{d}\sigma.$$

Par conséquent, le STEC volatilité apparaît comme une fonction directe de la convexité et peut dans certains cas être calculé de manière très simple. Dans le cas d'un investissement dans les fonds assurés, cette relation pourrait être exploitée pour mesurer l'impact induit par l'absorption sur le STEC volatilité. Cet effet ne peut pas être capté par le SES seul.

Conclusion

Dans la première partie de cette étude nous avons considéré le cas particulier du STEC Life où les risques sont supposés normaux et agrégés au moyen d'une matrice. Nous avons mis en avant des relations explicites entre la décomposition d'Euler et les *Transmission Factor*. Finalement, nous avons conclu :

$$TF_i = \frac{\partial STEC}{\partial STEC_i} = \frac{\mathbb{E}\left[P\&L_i | STEC\right]}{STEC_i}.$$

Par la suite, nous nous sommes intéressés au cas du STEC marché, pour lequel l'approche par matrice de corrélations n'est pas efficace. Nous avons cependant pu dériver des résultats équivalents via la méthode du *bootstrap*. Cette approche permet d'obtenir des résultats robustes en se libérant de l'effet tirage. Sur cette base une régression *ridge* a permis d'obtenir les contributions diversifiées (espérances conditionnelles) des différents risques dans le STEC en quantifiant les effets croisés, en particulier entre les taux et la volatilité implicite des taux.

Afin de poursuivre cette analyse, nous avons fait le lien entre les pertes par risque et les chocs économiques associés au moyen de régressions non-paramétriques. Cela nous permet de déterminer des scénarios conduisant à un impact donné, en particulier nous construisons un SES marché pour AXA France Vie. Dans la mesure où ce scénario correspond à la dérivée du STEC marché, il nous permet d'obtenir des impacts diversifiés relativement au portefeuille d'AXA France Vie.

Nous illustrons ensuite l'intérêt du SES dans une application nécessitant de nombreux calculs de STEC, et qui ne serait donc pas réalisable sans avoir recours à un *proxy*. Ainsi, nous nous intéressons à la problématique du choix d'une couverture financière en prenant en compte les contraintes réglementaires en modèle interne. Plus précisément, l'objectif est d'obtenir une couverture offrant un rapport optimal entre réduction du *Hard Capital* et volatilité de la stratégie :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser} && \Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC \\ &\text{sous contrainte} && \Delta AFR^2 + \Delta STEC^2 \leq A \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de notre étude, le fait de conclure sur une couverture au moyen d'une *swaption* receveuse, ou de manière équivalente se protéger contre la baisse des taux. Ceci dépend largement de l'anticipation de hausse très limitée de taux utilisée pour le calcul de l'impact AFR.

Les travaux menés pourraient être améliorés en ne choisissant plus un seul instrument mais un panier d'actifs. Nous pourrions aussi prendre en compte l'absorption dans le cas où l'investissement serait réalisé dans les fonds assurés et non plus dans les fonds propres. Enfin, il serait intéressant d'étendre cette méthodologie au cas du calcul de l'IRR Solvabilité 2.

Bibliographie

[ACPR] ACPR, *Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)*, Lien internet.

[Antonin Chaix] Cours d'Antonin Chaix, *Modèles de la courbe des taux d'intérêt*, Ensae, année scolaire 2015/2016.

[Akume et al. 2003] D. Akume, B. Luderer, and G.-W. Weber., Pricing and hedging of swaptions, *Journal of Computational Technologies*, 8(4) :5–14, 2003.

[Black et Scholes. 1973] F.Black and M. Scholes., The Pricing of Options and Corporate Liabilities *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654.

[Rose-Anne et Jeanblanc-Picqué 1998] D. Rose-Anne & M. Jeanblanc-Picqué. Marchés financiers en temps continu : valorisation et équilibre, Economica, seconde édition (1998).

[Devineau et Loisel 2009] L. Devineau, S. Loisel. Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II,Bulletin Français d'Actuariat, Institut des Actuaires, 2009, 10 (17), pp.188-221.

[Devineau et Chauvigny 2010] L.Devineau & M. Chauvigny. Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II, 2010.

[Dreyffus 2015] M.L Dreyffus., Les grands principes de solvabilité 2, *Éditions L'Argus de l'assurance*, 2015.

[Friedman 1991] Friedman, J. H., (1991), *Multivariate Adaptative Regression Splines.*, The Annals of Statistics, Vol 19, No. 1, 1-141.

[Friedman 2001] Friedman, J. H., (2001), *Greedy Function Approximation : A Gradient Boosting Machine.*, Ann. Statist. Volume 29, Number 5, 1189-1232.

[Kooperberg et O'Connor 1997] Kooperberg, C. et O'Connor, M. (1997). POLYMARS. Documentation disponible avec la librairie « polymars » de S-plus.

[Multistrip swaptions] Xenium Partners, *De l'intérêt des Multistrip swaptions pour les portefeuilles d'assurance vie*, Lien internet.

[Schachermayer et Teichmann 2008] W. Schachermayer, J. Teichmann. How close are the Option Pricing Formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes ?, Mathematical Finance, Vol. 18 (2008), No. 1, pp. 155-170.

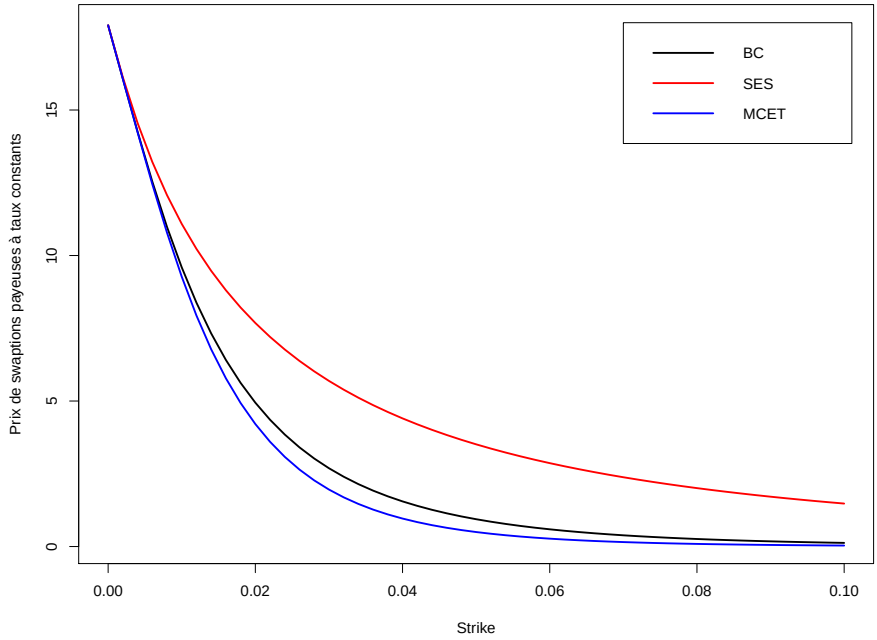
[Stone et al. 1997] Stone, C. J., Hansen, M. H., Kooperberg, C. et Truong, Y. K. (1997). Polynomial Splines and their Tensor Products in Extended Linear Modeling., The Annals of statistics, 25(4) p. 1371-1470.

[Teuguia et al. 2014] ON Teuguia, J. Ren et F. Planchet., *Internal model in life insurance : application of least squares monte carlo in risk assessment*, Documentation ISFA, 2014.

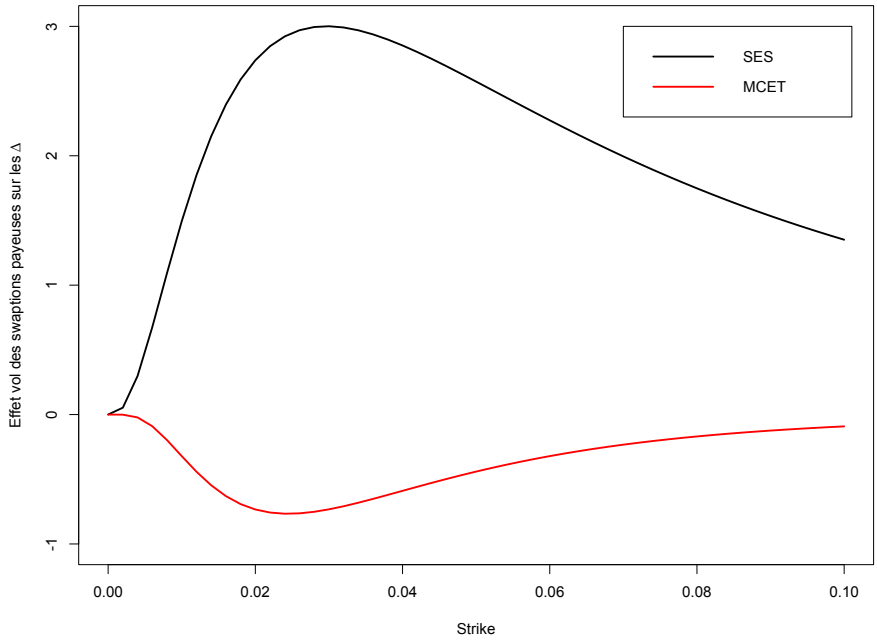
Annexe A

Décomposition des effets taux et volatilité pour les *swaptions*

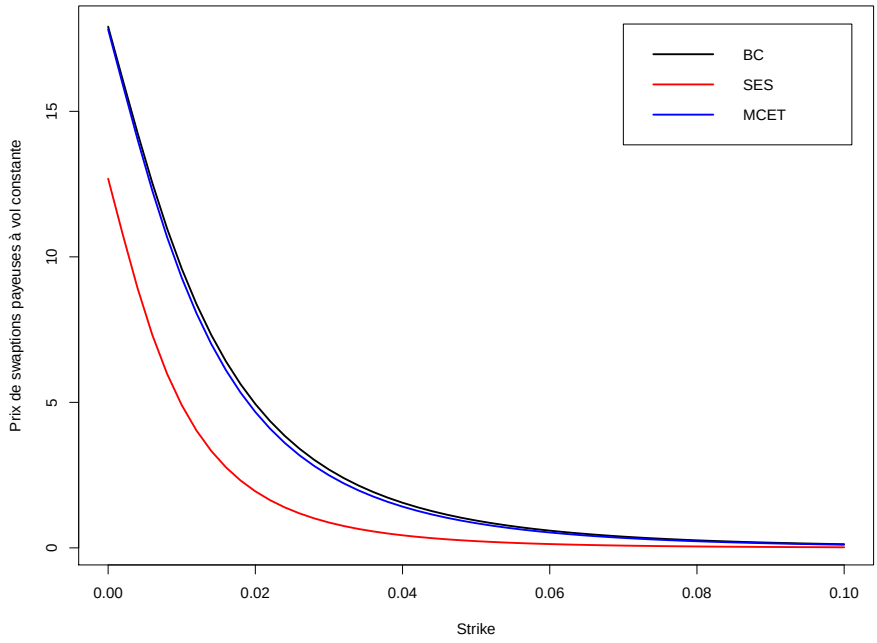
A.1 *Swaptions* payeuses



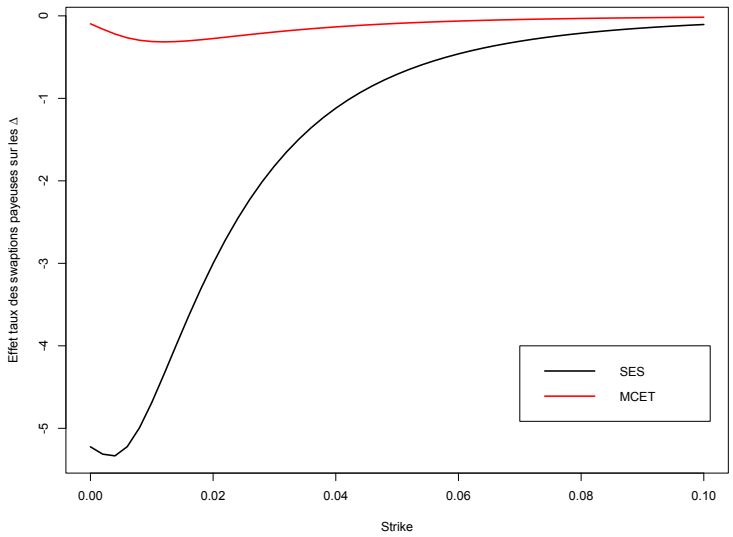
Graphique A.1 – Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec les taux constants.



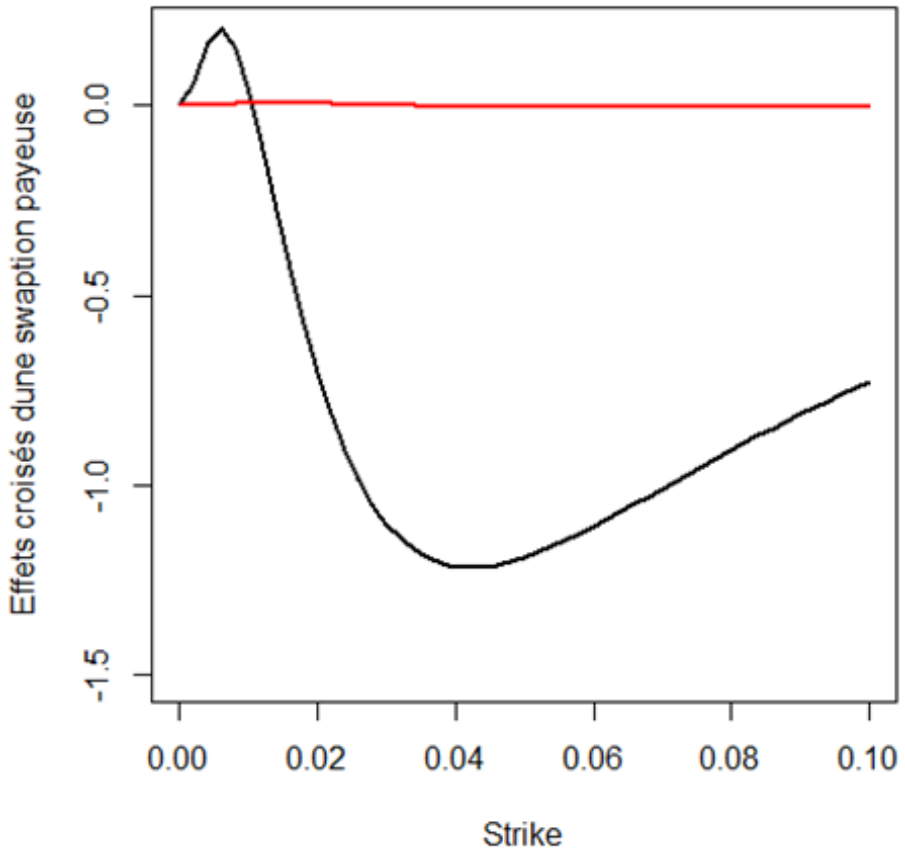
Graphique A.2 – Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec les taux constants.



Graphique A.3 – Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante.

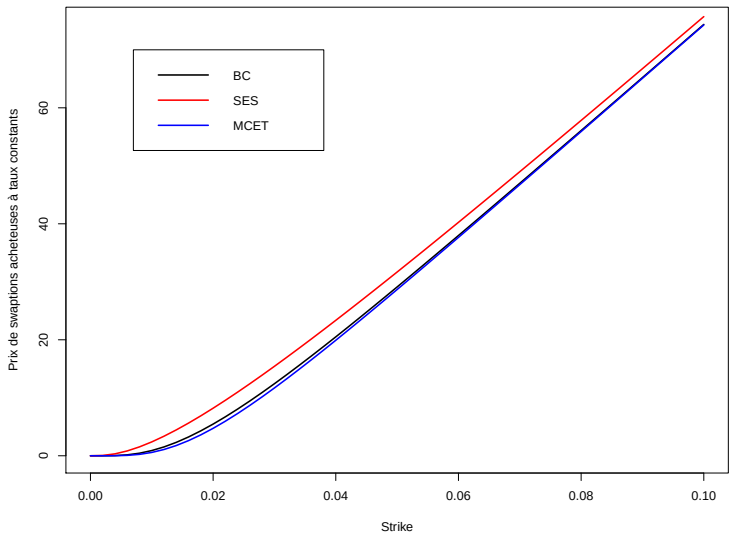


Graphique A.4 – Variation de Δ des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante.

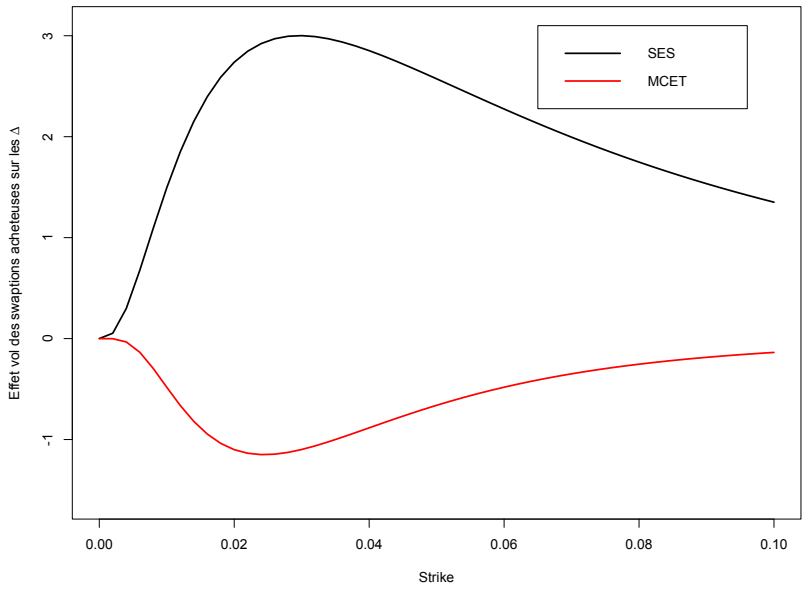


Graphique A.5 – Variation du prix des *swaptions* payeuses en fonction du *strike* selon l'effet croisé taux/volatilité des taux.

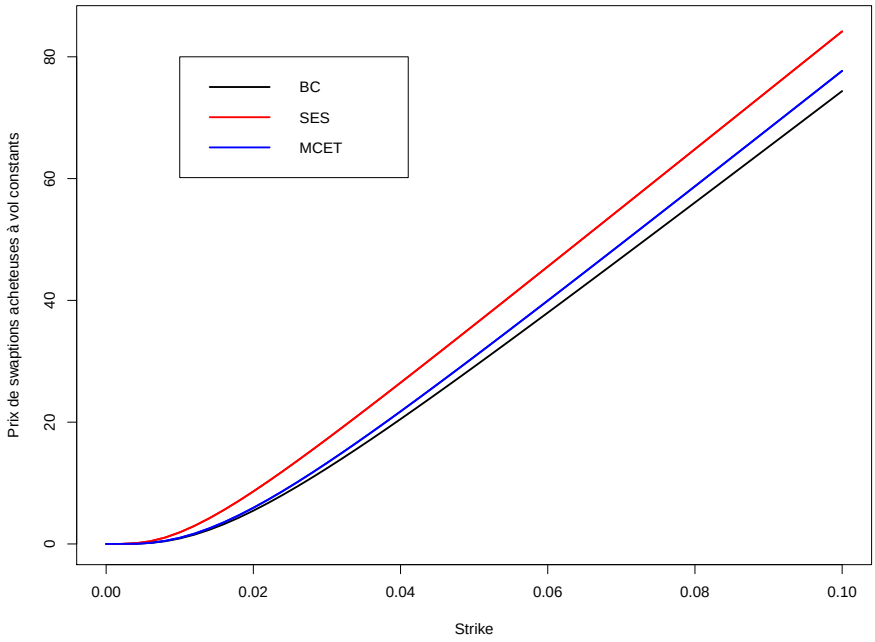
A.2 *Swaptions* acheteuses



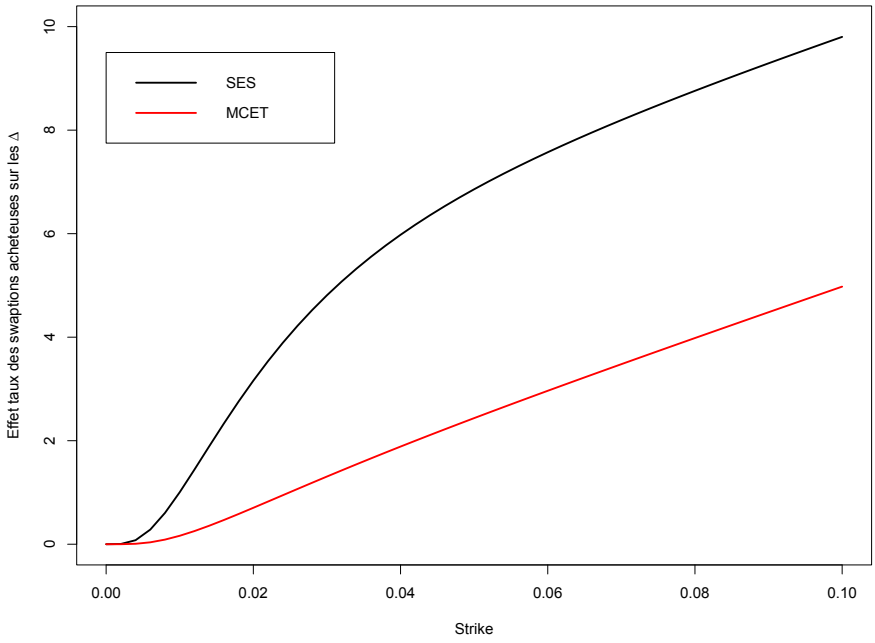
Graphique A.6 – Variation du prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec les taux constants.



Graphique A.7 – Variation du prix des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec les taux constants.



Graphique A.8 – Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante.



Graphique A.9 – Variation de Δ des *swaptions* acheteuses en fonction du *strike* avec la volatilité constante.

Note de synthèse

Introduction

Depuis la mise en place de la directive européenne Solvabilité 2 pour les compagnies et entreprises d'assurance, d'importantes évolutions au sein de ces dernières ont vu le jour. De très nombreux aspects du métier d'assureur (souscription, investissements *etc*) sont impactés par cette nouvelle manière de valoriser les engagements et de gérer les risques. Cela se traduit en particulier par le calcul du *Solvency Capital Requirement (SCR)*, qui correspond au quantile d'ordre 99,5% de la distribution des pertes à horizon 1 an : $q_{99,5\%}(X)$ [*] et représente la conséquence d'un choc biséculaire. Ce montant détermine directement la quantité de fonds propres à détenir et impacte par conséquent la rentabilité des opérations de l'assureur. Le calcul du SCR fait donc l'objet de toutes les attentions avec deux possibilités : le calcul par formule standard ou modèle interne. La formule standard permet d'obtenir simplement le SCR mais ne prend pas en compte les spécificités propres à chaque assureur. Le modèle interne bien que prudent permet d'être au plus proche des risques réels auxquels l'assureur est exposé. C'est par un modèle interne qu'AXA calcule son SCR appelé *Short Term Economic Capital* (STEC).

Nous nous concentrerons sur le SCR modèle interne des risques marché d'AXA France Vie. Ce dernier est obtenu par une approche par distribution via l'utilisation de portefeuilles répliquant. Plus précisément, les performances de 11 grandes classes d'actifs (actions, taux, *spread*, volatilité) sont projetées à horizon 1 an dans 11 000 scénarios économiques. Cela définit la situation nette de l'assureur à un an, ce qui nous permet d'obtenir une distribution de pertes. Ces variations seront appelées $P\&L_i$ (pour le « risque i », $i = 1, \dots, 11$) qui une fois agrégées donnent la variation de perte totale notée $P\&L_{total}$ ou P&L total. *In fine*, le SCR modèle interne est obtenu en prenant le quantile d'ordre 99,5% des 11 000 P&L total, soit la $55^{\text{ème}}$ plus petite de ces valeurs.

Cependant, les calculs effectués en modèle interne peuvent s'avérer trop complexes et chronophages, des approximations sont donc parfois nécessaires. C'est en particulier le cas pour le risque marché d'AXA France Vie qui sera notre objet d'étude. L'objectif principal est donc de trouver un *proxy* du modèle interne qui soit rapide et facile d'utilisation. Une fois le *proxy* trouvé, nous l'utiliserons pour estimer l'impact de couvertures financières sur le SCR, la NAV et le *Hard Capital*. Cela rejoint une problématique d'actualité à savoir le calcul d'IRR dans le cadre de Solvabilité 2.

Calculs théoriques en univers gaussien

Dans le cadre du modèle interne d'AXA pour les risques Vie, on peut voir un rapprochement avec la formule standard. En effet, les pertes par risque sont obtenues via des chocs histo-

∗. X représente la distribution des pertes et $q_{99,5\%}(Y)$ le quantile d'ordre 99,5% de la variable aléatoire Y.

riques, en prenant les pertes extrêmes (quantile à 99,5%) nous obtenons les STEC *standalone* (c'est-à-dire les STEC propres à chacun des risques). Finalement, le SCR est obtenu en agrégeant ces STEC *standalone* via une matrice cohérente avec l'historique et surtout qualifiée de « prudente ».

Dans ce cadre là, en notant $\boldsymbol{X}$ le vecteur des STEC *standalone* et $\Sigma = (\rho_{i,j})_{(i,j)=1,\dots,n}$ la matrice d'agrégation, nous avons :

$$SCR = \sqrt{\boldsymbol{X}'\Sigma\boldsymbol{X}}.$$

Nous définissons le *Transmission Factor* (TF) comme l'augmentation marginale du SCR par rapport à l'augmentation d'un risque :

$$TF_i = \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i}.$$

Mais aussi le vecteur $A_\Sigma = (A_{\Sigma,1}, \dots, A_{\Sigma,n})$ qui correspond à la décomposition d'Euler de la matrice Σ et défini comme :

$$A_\Sigma = \frac{{}^tX\Sigma}{\sqrt{{}^tX\Sigma X}}.$$

Dans ce cadre gaussien, nous obtenons :

- $$\forall\ i = 1, \dots, n, TF_i = \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i} = A_{\Sigma,i}.$$

- $$SCR = \sum_i \mathbb{E}\left[P\&L_i \middle| \sum_j P\&L_j = SCR\right].$$

- $$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P\&L_i \middle| \sum_j P\&L_j = SCR\right]}{SCR_i}.$$

Dans le cadre normal multivarié, ces grandeurs peuvent être calculées de manière exacte à l'aide de la matrice de variance-covariance. Nous allons voir que dans le cas du modèle interne marché l'hypothèse gaussienne ne s'applique pas.

Application au risque marché

Si l'on compare les risques marché et vie du modèle interne, une différence majeure est la relation entre les SCR et P&L :

- Pour la vie : $P\&L = \sum_i P\&L_i$, et donc $SCR = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$

- Pour le marché : $P\&L = \sum_i P\&L_i$ + effets croisés, et donc $SCR \neq q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$.

  Les effets croisés sont principalement dus à la réplication du passif via des portefeuilles répliquant, ainsi qu'aux mécanismes assurantiels que sont les rachats dynamiques et la participation aux bénéfices.

Par ailleurs, l'hypothèse gaussienne ne tient pas dans le cas du marché. Par conséquent les résultats théoriques de la partie précédente ne sont pas applicables. Nous avons donc proposé des équivalents empiriques en se basant principalement sur la décomposition d'Euler. Comme exposé précédemment, nous devons calculer des espérances conditionnelles pour déterminer la contribution diversifiée des risques marché. Cependant nous ne disposons que d'un échantillon de taille 11 000 qui est entaché de ce que l'on a appelé « l'effet tirage » : deux scénarios de chocs donnant un P&L total similaire amènent à des résultats très différents. Dès lors, il nous faut trouver une méthode robuste pour déterminer la contribution des risques.

L'approche retenue consiste à effectuer des tirages *bootstrap* : nous avons effectué 100 000 tirages de 8 000 scénarios parmi 11 000. On en déduit une distribution empirique du scénario quantile :

$$\mathbb{E}\big[P\&L_i | STEC\big].$$

Par ailleurs, pour éviter d'avoir à faire en pratique ce tirage *bootstrap* qui peut-être long nous avons défini des poids $(p(i))$ équivalents en utilisant des lois hypergéométriques. Nous déduisons donc des *Transmission Factor* empiriques dans cet environnement non-gaussien.

Les effets croisés sont captés grâce à une régression *ridge* avec la méthodologie présentée ci-dessous :

- Déterminer les contributions moyennes de chacun des risques :

$$\forall i, \mathbb{E}\big[P\&L_i | STEC\big] = \sum_{i=1}^{n} P\&L_i \times p(i),$$

  avec n le nombre de scénarios dans l'échantillon et $p(i)$ le poids associé au $i^{\text{ème}}$ scénario.

- Estimer les effets croisés en effectuant une régression *ridge* pondérée par les $p(i)$ des P&L total moins les P&L par les effets croisés :

$$\text{Expliquer } Y = P\&L_{total} - \sum_i P\&L_i \text{ en fonction de } X = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{i,j} \times P\&L_i \times P\&L_j.$$

En appliquant cela nous retrouvons le STEC marché avec une erreur de 1% en sommant les contributions moyennes de chacun des risques, les effets croisés et la correction de volatilité : *Volatility Adjustment (VA)*. On remarque que les effets croisés sont négligeables mis à part celui des taux et de la volatilité implicite des taux qui génère une diminution substantielle du STEC.

Nous avons donc trouvé une méthode qui permet de retrouver et d'expliquer le SCR marché du modèle interne. Cependant, il nous faut trouver une méthode permettant d'associer les quantités précédentes à des chocs économiques. Pour ce faire nous modélisons la relation entre pertes et les facteurs de risque avec des méthodes non-paramétriques.

Market Single Equivalent Scenario

La modélisation de ces relations a été faite en deux étapes :

- Modéliser les relations entre les facteurs de risque et les pertes par risque. Cela a été fait via des *splines* de lissage en se basant sur l'allocation d'actifs de l'assurance.
- Modéliser les relations entre les P&L et les P&L totaux. Cela a été fait via des modèles de régressions multivariés non paramétriques (MARS).

Nous obtenons donc une relation entre les trois principaux éléments du modèle interne :

- Les facteurs de risque.
- Les variations de P&L par risque.
- Les variations totales de P&L.

Ces relations ont permis de déterminer le *Single Equivalent Scenario* (SES), présenté aux tableaux A.4 et A.5, qui est le jeu de facteurs de risque redonnant un impact égal au STEC. Le SES peut-être vu comme la meilleure approximation du STEC pour des petites variations du portefeuille. En utilisant ces chocs, nous retrouvons les pertes marginales de chacun des risques (obtenues via les moyennes conditionnelles), qui une fois agrégées redonne le STEC. Avec notre modèle, en utilisant ce SES nous retrouvons le STEC avec une erreur de 0,25%.

Vol IR	Corp	Gov	Eq	Vol Eq	FX	RE	HF	PE	Inf
57,69%	0,91%	0,20%	-26,27%	59,23%	6,11%	-7,45%	-10,74%	-15,17%	-0.37%

Tableau A.1 – Chocs SES hors taux.

Maturités	1Y	2Y	3Y	7Y	10Y	15Y	30Y	50Y
SES	-0,096%	-0,097%	-0,096%	-0,46%	-0,72%	-0,66%	-0,98%	-0,62%

Tableau A.2 – Chocs SES des taux.

Couverture à l'aide de produit financier

L'obtention du SES nous permet d'être en parfaite adéquation avec le pilier II qui spécifie que les risques doivent être intégrés à la gouvernance. En effet, les études nécessitant une utilisation intensive du modèle interne (allocation de capital, calcul de rentabilité par exemple) sont simplifiées par l'utilisation du SES. Un exemple d'application du SES est le choix d'une couverture financière sous des contraintes réglementaires.

Nous proposons d'optimiser un critère basé sur les grandeurs d'intérêt suivantes : le *Market Consistent Economic Targets* (MCET) qui est l'ensemble des prévisions économiques de l'assureur et le *base case* qui représente les conditions économiques au moment du calcul du STEC.

Par ailleurs, en notant :

- ANAV : *Adjusted Net Asset value*

- VIF : *Value in Force*
- RM : *Risk Margin*
- AFR : *Available Financial Ressources* = ANAV+VIF-RM.
- RS : Ratio de solvabilité défini par $RS = \frac{AFR}{STEC}$ qui doit être supérieur à 100%.

Pour illustrer cette méthode d'optimisation de la couverture financière, nous prendrons par la suite une hypothèse de ratio de solvabilité cible à 150%. Cela a pour objectif de faire face à la volatilité du ratio de solvabilité et dans le cadre de la politique de l'ORSA, de prendre en compte des contraintes additionnelles telles qu'une solvabilité à horizon T années. Du point de vue du *Hard Capital*[†] à immobiliser, cela se traduit par la contrainte suivante :

$$\max(150\%SCR - VIF - ANAV + RM, 5\%STEC)\,^{\ddagger}$$

Cette quantité a été utilisée pour la définition d'un critère qui d'une part pénalise l'augmentation du capital économique (STEC) et d'autre part favorise les gains (AFR) dans un scénario central supposé être le MCET. L'objectif des produits de couverture est donc de maximiser la quantité suivante :

$$\underbrace{\Delta AFR}_{\text{Gain obtenu dans un scénario dit favorable par rapport au } \textit{base case}} - \underbrace{150\%\Delta STEC}_{\text{Variation de STEC par rapport au } \textit{base case}}$$

Ce critère permet de contrebalancer deux objectifs : d'une part la couverture du SCR financier, d'autre part la rentabilité de l'investissement captée via l'AFR. Plus précisément, si l'on note $P(x)$ le prix d'un produit donné dans les conditions économiques x, nous allons chercher la couverture qui est solution de :

$$\text{argmax}\big[(P(MCET) - P(BC)) - 150\%\,(P(SES) - P(BC))\big]$$

Cependant, en appliquant ce critère sur différents produits tels que les *calls, puts, zéro-coupons* et *swaptions* en jouant sur les *strikes*, nous obtenons des résultats très en dehors de la monnaie. Étant donné la forme du problème (linéaire), nous n'obtiendrons pas toujours de solutions « finies » sans ajouter de contrainte supplémentaire. Par analogie avec l'allocation de portefeuille de Markowitz nous utilisons une contrainte quadratique qui peut-être assimilée à une mesure de la « volatilité » de la stratégie dans les deux scénarios envisagés (MCET et SES) :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser} && \Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC \\ &\text{sous contrainte} && \Delta AFR^2 + \Delta STEC^2 \leq A \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par cette approche sont résumés dans le tableau A.6 :

†. Le *Hard Capital* représente le montant de fonds propres réel à détenir.
‡. Dans cette définition du SCR, les fonds propres sont inclus.

Produit	*strikes* [§]	ΔAFR	$\Delta STEC$	$\Delta STEC^2 + \Delta AFR^2$
Swaption acheteuse	1%	-0,24	2,60	6,84
Swaption acheteuse	2%	-0,27	5,29	28
Swaption acheteuse	2,7%	0	6,40	40,76
Swaption acheteuse	3%	0,16	6,75	45,58
Swaption acheteuse	4%	0,69	7,60	58,23

Tableau A.3 – Valeurs en M € de *swaptions* acheteuses $5Y \times 10Y$ pour 100 M € de nominal.

Les couvertures retenues servent à se protéger contre une baisse des taux. Cela résulte principalement de la prédominance de l'impact STEC dans le critère qui est lié un scénario de baisse des taux (cf tableau A.5 sur le SES). Nous avons également appliqué cette méthode à d'autres classes d'actifs (actions, volatilité).

Conclusion

Après avoir mis en avant des relations explicites entre la décomposition d'Euler et les *Transmission Factor* dans le cadre gaussien, en particulier mises en exergue par la relation :

$$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P\&L_i | \sum_j P\&L_j = SCR\right]}{SCR_i}.$$

Au moyen d'une approche par réplications *bootstrap*, nous avons dérivé des résultats similaires pour le STEC marché. Les estimations obtenues par cette méthode sont robustes à l'effet tirage, à la non-normalité et prennent en compte les effets croisés dont le plus significatif est Taux/Volatilité implicite des Taux. Par la suite, nous avons établi une relation entre pertes et chocs sur les facteurs de risque permettant de construire un SES. Ce SES a été exploité pour définir des couvertures financières en prenant en compte les contraintes réglementaires et leurs impacts sur les capitaux à immobiliser.

Plusieurs axes d'amélioration peuvent être envisagés pour poursuivre cette étude :

- Étendre l'analyse au choix d'une allocation complète et non plus d'un seul instrument.
- La prise en compte de l'absorption dans le cas où l'investissement serait réalisé dans les fonds assurés et non plus dans les fonds propres.
- Étendre cette méthodologie au cas du calcul de l'IRR Solvabilité 2.

§. Le *strike* est exprimé en valeur absolue.

Executive Summary

Introduction

Since the European Directive Solvency II came into force, several legal developments concerning Insurance Companies took place. Many aspects of the insurance activity (underwriting, investment, ...) are impacted by this reformed way of promoting commitments and managing risks. This induces a particular calculation of the Solvency Capital (SCR) corresponding to a 99,5% quantile of loss distribution over one year : $q_{99,5\%}(X)$ [¶], and represents the consequence of a bicentennial impact. This amount directly determines own funds quantity the Insurer must have, and consequently, will have incidences on business operations' profitability. A particular attention is brought to the SCR determination, leaving two possible options : a calculation by standard formula, or internal model. The standard formula permits to obtain the SCR on a simple way, but does not take into account of each Insurer specificities. On the other hand, the internal model, although prudent, permits to determine as closely as possible real risks exposed by the Insurer. AXA uses as a matter of fact this latter internal model to calculate his SCR called Short Term Economic Capital (STEC).

We will focus on AXA France Vie's SCR internal model of the market risks. It is obtained by a distribution approach using replicating portfolio. More precisely, 11 of main asset categories (equity, rates, spread, volatility) are projected over one year in 11 000 economic scenarios. This clearly defines the Insurer's situation over one year, and provides us to obtain a distribution of losses. These variations will be called $P\&L_i$ (for the « risk i », $i = 1, \ldots, 11$) that once approved gives the total loss variation marked $P\&L_{total}$ ou P&L total. In fine, the SCR internal model is obtained by taking account of the 99,5% quantile of 11 000 P&L which is the $55^{\text{ème}}$ lowest value.

Nevertheless, computations based on the internal model can be complex or time consuming, so approximations are sometimes necessary. This is particularly the case for AXA France Vie's market risks, which ones are the subject of the study here. The main objective is to find a proxy of the internal model that has a quick and easy application. Once the proxy found, we will use it to estimate the impact of the financial coverage on SCR, NAV and Hard Capital. This coincides with a topical issue which is the IRR calculation in the context of Solvency II.

Gaussian computations

In the framework of the AXA's internal model for Life risks, we can observe a lot of similitudes with the standard formula. Indeed, losses for each risk are obtained by shocks based on a historical data. Standalone STEC (i.e the STEC by risk) are 99,5% quantiles of losses distribution,

¶. X represents the losses distribution and $q_{99,5\%}(Y)$ the 99,5% of Y.

and the Life STEC is obtained by the agregation of the standalone STEC with a historical agregation matrix.

In this gaussian framework, if we mark $\boldsymbol{X}$ the vector of standalone STEC and $\Sigma = (\rho_{i,j})_{(i,j)=1,\dots,n}$ the agregation matrix, we obtain:

$$SCR = \sqrt{\boldsymbol{X}'\Sigma\boldsymbol{X}}.$$

Specify the Transmission Factor as the marginal increase from one risk increase:

$$TF_i = \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i}.$$

Also the vector $A_\Sigma = (A_{\Sigma,1}, \dots, A_{\Sigma,n})$ which corresponds to the Euler decomposition of the matrix Σ and is defined by:

$$A_\Sigma = \frac{{}^tX\Sigma}{\sqrt{{}^tX\Sigma X}}.$$

Finally, in the gaussian framework we obtain:

- $$\forall\ i = 1, \dots, n, TF_i = \frac{\partial SCR}{\partial SCR_i} = A_{\Sigma,i}.$$

- $$SCR = \sum_i \mathbb{E}\left[P\&L_i | \sum_j P\&L_j = SCR\right].$$

- $$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P_\&L_i | \sum_j P\&L_j = SCR\right]}{SCR_i}.$$

All these quantities may be exactly computed under gaussian assumptions with the variance-covariance matrix. We will see that in the market internal model hypothesis, gaussian's does not apply.

Application on the market risk

Comparing both Market and Life risks based on the internal model, we obtain the main difference between SCR and P&L connection.

- Life: $P\&L = \sum_i P\&L_i \Rightarrow SCR = q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$.
- Market: $P\&L = \sum_i P\&L_i +$ cross effects, $\Rightarrow SCR \neq q_{99,5\%}\left(\sum_i P\&L_i\right)$. Cross effects are mostly due to liabilities which are replicated by replicating portfolio, dynamical lapses and the profit sharing.

Furthermore, gaussian assumptions are not valid for the market, as a consequence theorical results of the last section are not valid. Regarding that point, we propose an empirical alternative computation mainly based on the Euler decomposition. We have to compute some conditionnal expectations to determine diversified contributions of market risks. However we only have a sample of 11 000 scenarii which is tainted by a phenomenon called « draw effect ». Two shocks scenarii closed in terms of P&L total may finally give very different results. We have to apply a robust method to determine risks contribtution.

The approach retained is a bootstrap sampling. We made 100 000 draws of 8 000 scenarii among 11 000. We deduct an empirical distribution of quantiles:

$$\mathbb{E}\big[P\&L_i|STEC\big].$$

Furthermore, to avoid the time consuming of the bootstrap, we have equivalent weights. We deduct the empirical Transmission Factor in this non-gaussian framework.

Cross effects are captured by a ridge regression following the next methodology:

- Contributions for each risks:

$$\forall i, \mathbb{E}\big[P\&L_i|STEC\big] = \sum_{i=1}^{n} P\&L_i \times p(i),$$

  with n the number of scenarii and $p(i)$ the weigth of the i^{th} scenario.

- Cross effects with a ridge regression weighted by the $p(i)$:

$$\text{Explain } Y = P\&L_{total} - \sum_i P\&L_i \text{ by } X = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{i,j} \times P\&L_i \times P\&L_j.$$

The methodology is satisfactory because the STEC is recovered with a margin of error equal to 1 % adding risks contributions, cross effects and the volatility adjustement (VA). We can notice that the only significant cross effect is between rates and rates implied volatilities. This cross effect provides a STEC diminution.

Now we need to find a method wich makes the connection between previous quantities and economic factors. We have opted for non-parametric methods.

Market Single Equivalent Scenario

The connections have been modeled in two steps:

- Connections modeled between risks losses and risks factors. We use smooth splines based on the asset allocation of the insurance.
- Connections modeled between the risks and total losses. We used non-parametric multivariate regressions (MARS).

Finally, we obtain a connection between the three main quantities:

- Risks factors.
- P&L by risks variations.

- Total variations of P&L.

Using these connections, we can determining the Single Equivalent Scenario (SES) (cf tabular A.4 and A.5). SES are the risks factors which are going give an equal impact to the STEC. These SES may also be seen as the best STEC approximation for small portfolio variations. With these SES, we compute marginal losses for each risks, and returns the STEC by agregating.

Vol IR	Corp	Gov	Eq	Vol Eq	FX	RE	HF	PE	Inf
57,69%	0,91%	0,20%	-26,27%	59,23%	6,11%	-7,45%	-10,74%	-15,17%	-0.37%

Tabular A.4 – SES ' shocks.

Maturités	1Y	2Y	3Y	7Y	10Y	15Y	30Y	50Y
SES	-0,096%	-0,097%	-0,096%	-0,46%	-0,72%	-0,66%	-0,98%	-0,62%

Tabular A.5 – Interest rates SES ' shocks..

Hedging with financial products

The SES allows us to be in perfect adequation with the pilar II of Solvency II, in particular the ORSA. Indeed, studies which need an intensive use would not be so simple without a proxy like the SES. An example of the application of the SES is the choice of a hedge under regulatory constrainsts.

We propose to optimize a criterion based on the following quantities: the Market Consistent Economic Targets (MCET), economic previsions of the Insurer, and the base case which represents the economic conditions at the moment of STEC computing.

We note:

- ANAV: Adjusted Net Asset value
- VIF: Value in Force
- RM: Risk Margin
- AFR: Available Financial Ressources = ANAV+VIF-RM.
- RS: Solvability ratio by $RS_t = \frac{AFR}{STEC}$. This one must be larger than 100%.

To illustrate this optimization method, we will use a target ratio of 150%. This target is larger than 100% to be safe against the ratio's volatility. This target is usefull in the ORSA's framework for the solvability at T years. The following relationship translate the hard capital requirement:

$$\max(150\%SCR - VIF - ANAV + RM, 5\%STEC) \text{ ‖}$$

This quantity has been used to determine a criterion, which simultaneously penalizes the STEC's rise, and economic losses (AFR). The goal is finally to maximize the following quantity:

‖. In this definition of SCR, the equity capital are inclued.

$$\underbrace{\Delta AFR}_{\text{Earnings obtained in a favourable scenario compared with the base case}} - \underbrace{150\%\Delta STEC}_{\text{STEC's variation compared with the base case}}$$

This criterion makes a balance between a hedge of the financial SCR and the rentability of the investment through the AFR. More precisely, if we note $P(x)$ the price of a given product in the x economic conditions, the looking hedge is solution of:

$$\text{argmax}\big[(P(MCET) - P(BC)) - 150\%\,(P(SES) - P(BC))\big]$$

Nevertheless, applying this criterion on products such as caal, put, zero-coupons and swaptions, we obtain results higly out of the money. This phenomenon comes from the form of the problem (linear). We would not obtain « finite » solutions without adding supplementary constrainst. By anology to the Markowitz portfolio allocation, we use a quadratic constrainst which may be assimilated to the « volatility » of the strategy in the two scenarri considered (SES and MCET):

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \Delta AFR + 150\% \times \Delta STEC \\ &\text{under contrainst} && \Delta AFR^2 + \Delta STEC^2 \leq A \end{aligned}$$

Results are presented in the tabular A.6:

Produit	strikes **	ΔAFR	$\Delta STEC$	$\Delta STEC^2 + \Delta AFR^2$
Swaption receiveur	1%	-0,24	2,60	6,84
Swaption receiveur	2%	-0,27	5,29	28
Swaption receiveur	2,7%	0	6,40	40,76
Swaption receiveur	3%	0,16	6,75	45,58
Swaption receiveur	4%	0,69	7,60	58,23

Tabular A.6 – Values of swaptions receivers $5Y \times 10Y$ for a nominal of 100 M €.

Conserved hedges protect us against a rates rising. This mainly comes from the importance of the STEC in the criterion (rates are droping dangerously cf tabular A.5). We have also applicated this methodology in other asset classes (equity, volatility).

Conclusion

After putting forward meaningful relations between Euler's deconstruction (or analysis) and Factor Transmissions under gaussien system, particularly highlighted by the following relation:

$$TF_i = \frac{\mathbb{E}\left[P\&L_i \middle| \sum_j P\&L_j = SCR\right]}{SCR_i}.$$

By taking a bootstrap replications approach, we have delivered similar results for the STEC market. Estimations obtained by this method are solid with stack effect, not-normality and

**. The strike is presented in absolute value.

takes cross effects into account whose most significant one is rates/implied volatility rates. Thereafter, we have established a connection between losses and shocks providing us to build an SES. This SES has been exploited (or used) in order to define financial coverage taking regulatory restrictions into account, and their impacts on capital that has to be immobilized.

Severals lines of improvement can be considered to undertake this study:

— Extend the analysis to complete allocation choice and not of a sole instrument.

— The taking into account of the absorption where the investment would be made in the insured funds and not in the equity capital.

— Extend this methodology to the calculation of the IRR in Solvency 2.