

Conservatoire National des Arts et Métiers

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de
Master Professionnel de Sciences de Gestion,
spécialité Actuariat

Les indicateurs de risque dans la norme IAS 19 : intérêt du corridor

Etudiant : Ferréol BAUDONNIERE

Mémoire soutenu le 18 décembre 2006

Jury :

Président	:	Michel FROMENTEAU
Composition	:	Pierre PETAUTON François WEISS Patrick WARIN Frédéric PLANCHET Serge VAN DER HEYDEN

Résumé

L'harmonisation des règles et des principes comptables s'appliquant aux entreprises des Etats membres décidée par l'Union Européenne et la volonté de donner des informations à destination des marchés financiers et des actionnaires plus complètes (en plus du bilan et du compte de résultat) sur la réalité économique d'une entreprise ont donné naissance à un nouveau référentiel comptable.

Ce référentiel, dont la charge de l'élaboration a été confiée à un organisme supranational, qui existait avant que l'Union européenne ne lui confie cette mission (l'IASB), insiste sur la construction d'états financiers ayant pour objet de fournir des informations sur la situation financière, la performance et les flux de trésorerie de l'entreprise.

Les engagements pris par une entreprise envers ses salariés (régimes de retraite supplémentaire, indemnités de fin carrière,...) font l'objet d'une comptabilisation particulière et d'un état financier propre. Ces éléments sont précisés dans la norme IAS 19.

Cette norme définit en particulier le corridor. Il s'agit d'un mécanisme qui permet de ne pas inscrire en compte une charge (ou un produit) correspondant à ce qui est appelé dans la norme un écart actuariel, pour peu que la valeur effective de l'engagement à comptabiliser reste à l'intérieur d'un corridor. En fait, cela revient à admettre que si deux valeurs d'engagement sont « voisines » (cette notion est évidemment précisée dans la norme), alors elles représentent la même réalité.

La comptabilisation des avantages octroyés au personnel nécessite un modèle statistique assez développé permettant de valoriser ces engagements. Il faut donc se doter d'outils permettant d'appréhender des variables aléatoires comme l'inflation, la croissance des prestations, mais aussi la durée de vie des salariés, le taux de rotation du personnel ou encore les taux d'intérêt et le rendement des actifs financiers.

Une fois connues les règles de comptabilisation des avantages du personnel et après avoir modélisé la valeur de ces engagements, on peut construire un état IAS 19 et profiter des éléments stochastiques sous-jacents pour tester la stabilité de cet état dans un contexte où la variabilité de l'actif ou du passif des engagements est fortement accrue.

A cette occasion, on pourra mettre en lumière le rôle du corridor.

Mots clés

Normes IAS/IFRS – Corridor – PBO – Juste valeur – Ecart actuariel – Retraite complémentaire – Durée de vie – Taux de rotation du personnel – Modèle stochastique – Simulations

Abstract

The harmonization of the rules and the accounting policies applying to the companies of the Member States was decided by the European Union.

The will was to give more completed information on the company economic situation to the financial markets and shareholders (complementary to balance sheet and income statements). A new accounting standards frame was created.

The accountability of the development of this project was given to a supranational organization existing prior to the project called the International Accounting Standards Board. The new standards focuses on financial statements related to financial situation, performance, and cash flow.

The undertakings of the company towards its employees (additional pension plans, end of service payment) are subject to particular accounting rules and specific financial statement. This is specified in the IAS 19 standard which has introduced new concepts and mechanisms.

Among those, the “corridor” is a mechanism which allows not to register a liability or a gain into account. This element is called an actuarial variation in the new standard, and this is possible only if the amount remains in a certain range so-called corridor. Consequently, a same liability can have to distinct values, if these two values are close.

The accounting of the benefits granted to employees requires a new statistics method for financial undertakings evaluation. It is thus necessary to use specific tools for taking into account random variables like inflation, allowance growth, employees lifespan, personnel rotation rate, interest rates and finance assets output.

Once known the rules of the personnel benefits accounting and fixed the model for the evaluation of these undertakings, it is possible to create an IAS 19 statement and to benefit from the subjacent stochastic elements to test the stability of this statement in a context of strongly increased variability of the undertaking credit or liability.

We can then emphasis the corridor role.

KEY WORDS

IAS/IFRS Standards – Corridor – PBO – Fair value – Actuarial variation – Additional pension plan – Lifespan – Personnel rotation rate – Stochastic model – Simulations

Remerciements

Il y a un peu plus de quatre ans, Monsieur Fromenteau m'accueillait dans la formation du CNAM, en magistère d'actuariat. J'ai alors découvert le monde merveilleux de l'actuariat.

Même si je n'ai évidemment pas la prétention d'évoluer dans ce monde aussi bien que le faisait Riemann dans le paysage des zêtas, j'ai trouvé, grâce à cette formation, l'occasion de mettre en musique les quelques connaissances que j'avais en économie et en statistiques.

Au cours de mes années précédentes de formation j'ai appris à construire des notes. Cette formation, et les applications que j'ai pu faire par la suite, m'ont donné le plan pour les agencer en symphonie.

Un grand merci à Frédéric Planchet pour avoir accepté de suivre et d'encadrer mes travaux malgré son emploi du temps fortement rempli. Son éclairage et ses commentaires précieux n'ont été en rien aléatoires et la valeur de son apport et de son appui difficilement mesurables par le référentiel IAS.

Merci aussi à Fabrice L. qui a relu une des nombreuses versions du document et m'a aidé à trouver les formulations justes pour exprimer au mieux les idées présentées.

Je tiens aussi à témoigner ma reconnaissance à Guillaume Leroy et à Michaël Donio. J'ai eu souvent, au cours de ces trois dernières années, l'occasion de les voir exercer avec talent et passion leur métier d'actuaire. Le fait de les côtoyer régulièrement m'a permis de participer à des discussions et à des travaux très riches.

Cette expérience complète parfaitement la formation théorique du magistère.

Introduction

La construction européenne même si elle était au départ un acte politique, s'est réalisée principalement dans une démarche économique. Depuis la signature du Traité de Paris le 18 avril 1951 (Communauté Européenne du Charbon et de l'Acier), jusqu'au dernier traité (Nice, le 11 décembre 2000), la logique qui a guidé la construction d'une Europe économique est une logique de marché (marché commun, marché unique, monnaie unique, lois du marché).

Une nouvelle étape dans l'intégration des économies européennes est franchie, quand au cours de l'année 2002, la Commission européenne annonce son intention d'uniformiser les systèmes comptables de toutes les sociétés de l'Union Européenne, en adoptant des normes comptables internationales, préexistantes ou à créer.

Dans le corps des normes comptables internationales retenu par l'Union Européenne pour s'appliquer aux comptes établis par les entreprises de l'Union, on peut noter deux éléments importants :

- (1) la comptabilisation des passifs et des actifs à leur « juste valeur »,
- (2) le renforcement des états financiers à présenter dans les comptes.

La « juste valeur » est la résultante de la confrontation de l'offre et de la demande à un instant donné dès lors qu'il existe un marché (qu'il soit organisé ou de gré à gré) sur lequel s'échange l'actif ou le passif considéré. A défaut de marché existant, la « juste valeur » d'un engagement est appréciée en fonction des flux financiers futurs (*cf.* par exemple IAS19§50 – comptabilisation et évolution des régimes à prestations définies). Cette notion de « juste valeur » apparaît dans l'ensemble du référentiel IAS/IFRS.

Un autre point extrêmement important, qui résulte de ces normes internationales, est l'introduction d'états financiers complémentaires au bilan et au compte de résultat. Ces états financiers ont pour but de fournir des informations sur la situation financière, la performance

et les flux de trésorerie de l'entreprise. Ils permettent ainsi d'avoir une vision économique plus large de l'entreprise.

* * *

Les normes comptables utilisées dans un contexte international (que ce soit les IAS/IFRS ou les US GAAP) imposent la comptabilisation de tous les engagements sociaux. Ceux-ci doivent être évalués à leur « juste valeur » et doivent apparaître dans un état financier propre.

L'inscription en compte des avantages qu'une entreprise accorde à son personnel et les informations à fournir dans les documents comptables annexes sont traitées dans la norme IAS 19. La première publication de cette dernière remonte à 1983. Elle a été révisée par la suite en 1999, 2000 et 2002.

L'idée de cette norme est que le coût généré par un avantage social doit être inscrit en comptabilité au cours de l'exercice dans lequel de l'entreprise tire bénéfice de la contrepartie de l'avantage (et non au cours de l'exercice de paiement de l'avantage).

La norme identifie cinq catégories d'avantages donnés à un salarié par une entreprise :

- (1) les avantages à court terme,
- (2) les avantages postérieurs à l'emploi,
- (3) les autres avantages à long terme,
- (4) les indemnités de fin de carrière,
- (5) les rémunérations établies sur les capitaux propres.

La norme IAS 19 s'intéresse essentiellement aux catégories (2), (3) et (4). Toutefois, tous les engagements nécessitent une analyse du risque. C'est en fonction des conclusions de cette analyse que l'on classe l'engagement dans l'une des cinq catégories identifiées.

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un régime supplémentaire de retraite relevant de l'article 115 de la loi du 30 août 2003 portant réforme des retraites.

Le traitement de l'engagement diffère selon que le régime est assuré ou non :

- sans contrat d'assurance, l'entreprise porte tout le risque. Cette situation est assez hypothétique (essentiellement pour des raisons fiscales – cf. Partie II.2.2),
- avec un contrat d'assurance, il convient de distinguer les actifs des retraités. En effet, en phase d'activité, le contrat est avant tout un contrat de gestion financière. L'entreprise reste responsable du paiement des capitaux constitutifs des rentes au moment des départs en retraite. En phase de retraite (une fois le capital constitutif de la rente transféré du fonds des actifs vers le fonds des retraités), c'est l'assureur

qui assume le risque. L'entreprise ne porte alors plus de risque hormis peut être celui lié à la revalorisation des rentes.

Dans ce cadre, il convient de déterminer les paramètres et de modéliser les variables aléatoires sous-jacentes, de manière à appréhender le risque, la variabilité et même la distribution de probabilité de la valeur de l'engagement, et ce à chaque instant.

Pour amortir les effets de ces variables aléatoires sur le résultat comptable final, la norme IAS 19 autorise l'emploi d'un dispositif comptable particulier, dénommé « Corridor ». Ce mécanisme consiste à ne pas inscrire de charge (ou de produit) dès lors que les valeurs théoriques de l'actif de couverture et de la juste valeur de l'engagement ne s'écartent pas trop des mêmes valeurs effectivement constatées lors de la clôture d'un exercice comptable. La fourchette de tolérance est calculée en fonction de la valeur de l'engagement et de l'actif de couverture.

Comment s'articulent les états financiers dès lors qu'une entreprise porte dans ses comptes des avantages accordés à son personnel ? Le corridor a-t-il bien un rôle stabilisateur de ces états, au sens où, sans événements majeurs intervenus, au cours de l'exercice, la valeur de l'écart actuariel ne sort pas de ce couloir ?

* * *

La construction et l'élaboration des normes internationales s'appliquant aux entreprises des Etats membres de l'Union Européenne suit un processus bien défini. Ces normes mettent notamment l'accent sur les états financiers qui viennent compléter et préciser les états traditionnels que sont le bilan et le compte de résultat et imposent la comptabilisation des actifs et des passifs à leur « juste valeur ».

Un élément central de la norme IAS 19 est l'écart entre la valeur réalisée (de l'engagement ou de l'actif de couverture) et la valeur estimée sur la base de la situation à la clôture des comptes de l'exercice précédent. La somme de ces deux écarts correspond à l'écart actuariel.

L'état financier propre aux avantages accordés par une entreprise à ses salariés est principalement basé sur l'inscription en compte de cet écart et le suivi au fur et à mesure des exercices comptables successifs du cumul des écarts actuariels qui n'ont pas fait l'objet d'amortissements.

La norme IAS 19 introduit en outre un mécanisme d'amortissement original : le « corridor ». L'emploi de ce dispositif revient à admettre que plusieurs valeurs de l'écart actuariel sont « justes » et peuvent être inscrites dans les comptes.

Un exemple permet d'illustrer l'articulation d'un état IAS 19.

La valeur de l'engagement pris par une entreprise envers ses salariés, ainsi que l'actif de couverture, évalués chaque année à leur « juste valeur » sont les éléments centraux de la norme IAS 19.

Pour appréhender ces variables, c'est-à-dire décrire les lois statistiques auxquelles elles obéissent, il convient de définir de manière exhaustive la liste des variables aléatoires sous-jacentes qui impactent la valeur de l'engagement ainsi que la valeur de l'actif de couverture constitué et de se donner un jeu de notations pour réussir à construire un modèle statistique qui les décrivent précisément.

Une fois doté du référentiel comptable (notamment du fonctionnement de l'état financier IAS 19) et du modèle statistique décrivant la valeur de l'engagement et de l'actif de couverture, il est possible de procéder à des applications numériques sur un cas réel : un régime de retraite d'entreprise où le risque lié aux actifs est conservé dans l'entreprise et celui correspondant aux retraités est porté par une organisme d'assurance.

Les applications réalisées se déroulent en plusieurs phases.

D'abord, il est possible, indépendamment des données individuelles du régime de retraite considéré, d'estimer l'ensemble des paramètres du modèle relevant des variables aléatoires commune à l'ensemble de l'économie (comme le taux d'inflation, le taux de rendement obligataire,...).

Ensuite, une description du régime de retraite utilisé pour les applications précise non seulement les droits et garanties couvertes, mais aussi les principales caractéristiques des populations du régimes (actifs et retraités).

Enfin, il est possible d'établir l'état IAS 19 correspondant à un scénario central d'état de la nature, en obéissant aux règles comptables imposées par la norme IAS 19. A l'aide des lois statistiques suivies par les éléments stochastiques de l'état IAS 19, on peut procéder à des simulations permettant de générer un grand nombre d'états IAS 19. L'influence du mécanisme du corridor est alors mise en évidence à partir de ces simulations.

Pour compléter cette application, et observer comment le corridor réagit dans des situations plus extrêmes, des chocs sur le passif, puis sur l'actif sont impulsés.

Table des matières

RESUME	2
ABSTRACT	4
REMERCIEMENTS	6
INTRODUCTION	7
TABLE DES MATIERES	11
PARTIE I. L'ANALYSE STOCHASTIQUE D'UN ETAT IAS 19	15
1. LES NORMES COMPTABLES INTERNATIONALES	16
1.1. Une volonté politique : l'harmonisation des pratiques et des références comptables en Europe ..	16
1.2. Un organisme normalisateur : l'IASB	17
1.2.1. L'organisation actuelle	17
1.2.2. Le processus d'élaboration des normes	17
1.3. La norme IAS 1 : description des états financiers	18
2. CONSTRUCTION DES ETATS FINANCIERS IAS 19	19
2.1. Le langage IAS 19	19
2.1.1. La valorisation des engagements (IAS 19 §65-69)	19
2.1.2. L'actif de couverture (IAS 19 §102)	20
2.1.3. Le coût des services rendus (IAS 19 §67-69,96)	22

2.1.4.	La charge d'intérêt (IAS 19 §82)	23
2.1.5.	Les gains et pertes actuariels (IAS 19 §92-95)	23
2.1.5.1.	Description des écarts actuariels	23
2.1.5.2.	Le fonctionnement des écarts actuariels	24
2.2.	Les états comptables et financiers	25
2.2.1.	Le bilan (IAS 19 §54)	25
2.2.2.	Le compte de résultat (IAS 19 §61)	26
2.2.3.	L'état comptable en annexe	27
3.	LE MECANISME DU CORRIDOR	31
4.	UN EXEMPLE D'ELABORATION DE L'ETAT COMPTABLE IAS 19	34
5.	LE RISQUE PORTE PAR UN ASSUREUR	36
5.1.	Expression de la VAP totale	36
5.2.	La réglementation pousse à l'externalisation	37
5.3.	Synchronisation IFRS/Solvabilité II	39
PARTIE II. L'ANALYSE STOCHASTIQUE DE LA VALEUR DE L'ENGAGEMENT		
40		
1.	LES VARIABLES QUI IMPACTENT LA VALEUR DE L'ENGAGEMENT	41
2.	LES NOTATIONS	43
3.	LE MODELE	44
3.1.	Le flux de prestation versé	44
3.2.	Les variables économiques	45
3.2.1.	Le taux d'inflation	45
3.2.1.1.	De l'indice des prix au taux d'inflation	45
3.2.1.2.	Le taux d'inflation de court terme	46
3.2.1.3.	Le taux d'inflation de long terme	47
3.2.2.	Les taux de croissance des prestations	48
3.2.2.1.	Les prestations immédiates : les salaires	48
3.2.2.2.	Les prestations futures	49
3.3.	Les variables démographiques	49
3.3.1.	La durée d'activité	49
3.3.1.1.	La durée de vie du salarié	49
3.3.1.2.	La durée de présence dans l'entreprise	51
3.3.1.2.1.	Définitions	51
3.3.1.2.2.	Propriétés	52
3.3.1.3.	La combinaison des deux durées	53
3.3.2.	L'âge de jouissance des prestations	53
3.4.	Les variables financières	54
3.4.1.	Le taux d'actualisation des prestations	54
3.4.1.1.	Le taux court	54

3.4.1.2.	Les taux longs.....	55
3.4.2.	Le taux de rendement des actifs financiers	56
3.4.2.1.	Les actions.....	56
3.4.2.2.	Les obligations synthétiques.....	56
3.4.2.3.	Les obligations indexées sur l'inflation	57
3.5.	L'engagement aléatoire de l'entreprise envers son salarié.....	58
4.	ANNEXES	59
4.1.	Les propriétés de la variable aléatoire $\delta_{t,k}$	59
4.2.	Démonstration des principaux résultats du processus d'inflation en temps continu.....	60
4.2.1.	Résolution de l'équation différentielle.....	60
4.2.2.	Le calcul de l'espérance	61
4.2.3.	Le calcul de la covariance	61
4.2.4.	Résultats plus généraux.....	62
4.3.	Construction du taux d'inflation de long terme.....	62
4.4.	Démonstration des principaux résultats du modèle CIR	65
4.4.1.	Le calcul de l'espérance	65
4.4.2.	Le calcul de la variance.....	66
4.4.3.	La loi du processus CIR.....	67
4.4.3.1.	A partir des processus ORSTEIN-UHLENBECK.....	67
4.4.3.2.	A partir des processus de BESSEL.....	70
4.4.4.	Application numérique.....	70
4.4.4.1.	Simulation d'un échantillon de réalisations du taux court.....	70
4.4.4.2.	Ajustement des observations simulées sur la loi théorique du processus	73
4.4.4.2.1.	Le test d'ANDERSON DARLING.....	74
4.4.4.2.2.	Application du test d'ajustement.....	74
4.5.	Détermination des taux longs dans le modèle CIR	75
4.5.1.	L'expression des taux longs en fonction du taux court	75
4.5.2.	Quelques exemples de formes de la courbe des taux	77
4.5.2.1.	Courbe descendante.....	77
4.5.2.2.	Courbe ascendante.....	78
4.5.2.3.	Courbe bosselée.....	79
4.6.	Les dynamiques des actifs financiers	79
PARTIE III.	APPLICATIONS NUMERIQUES.....	81
1.	ESTIMATION DES VARIABLES COMMUNES A L'ENSEMBLE DE L'ECONOMIE.....	83
1.1.	Le taux d'inflation	83
1.2.	Le taux d'actualisation	90
1.3.	Le taux de rendement des actions.....	95
2.	DESCRIPTION DU REGIME ETUDIE.....	97
2.1.	Description du fonctionnement du régime.....	97
2.1.1.	Les prestations du régime	97

2.1.2.	Les ressources du régime	99
2.2.	Présentation des données.....	99
2.2.1.	Le fonds des retraités	99
2.2.2.	Le fonds des actifs.....	101
3.	APPLICATIONS NUMERIQUES : LE FONDS DES RETRAITES.....	104
4.	APPLICATION NUMERIQUE : LE FONDS DES ACTIFS.....	107
4.1.	Scénario I : le fonds des actifs en l'absence de chocs	107
4.1.1.	Intégration du taux de rotation du personnel dans les calculs viagers.....	108
4.1.2.	De la provision mathématique à la PBO	109
4.1.3.	Elaboration d'un état IAS 19.....	114
4.1.4.	Tests de stabilité de l'état IAS 19	116
4.1.4.1.	Simulation de la PBO au 31 décembre 2004, des prestations et les cotisations	116
4.1.4.2.	Simulation de la valeur des actifs de couverture au 31 décembre 2004	120
4.1.4.3.	Stabilité de l'état IAS 19	124
4.1.4.4.	Analyse du résultat obtenu	126
4.2.	Scénario II : le fonds des actifs dans le cas d'une forte volatilité de l'actif de couverture	126
4.2.1.	Distribution de l'actif de couverture en cas de forte variabilité des taux de rendements	127
4.2.2.	Distribution de l'écart actuariel et probabilité de sortie du corridor	129
4.2.3.	Analyse du résultat obtenu	130
4.3.	Scénario III : le fonds des actifs dans le cas d'un taux de rotation élevé	131
4.3.1.	Distribution des variables du passif dans le cas d'un taux de rotation élevé.....	131
4.3.2.	Distribution de l'écart actuariel et probabilité de sortie du corridor	134
4.3.3.	Analyse du résultat obtenu	135
5.	ANNEXES.....	136
5.1.	Le test d'ajustement de Jarque et Bera	136
5.2.	Méthode des moments généralisés : estimation des trois premiers moments d'une loi de probabilité.....	137
5.3.	Trajectoire des provisions mathématiques d'un portefeuille de rentes	140
5.4.	Prise en compte du taux annuel de rotation dans la table de mortalité	140
CONCLUSION		143
BIBLIOGRAPHIE		145

Partie I. L'analyse stochastique d'un état IAS 19

Afin de faciliter la comparabilité des états comptables entre les entreprises des Etats membres, l'Union Européenne s'est engagée dans une politique d'harmonisation des règles comptables. Pour se faire, elle a délégué, dans un cadre bien défini, à un organisme supranational préexistant la charge de l'élaboration d'un jeu de normes comptables. Cet organisme est l'IASB (*International Accounting Standards Board*).

La première norme de ce référentiel, appelée IAS 1, décrit l'objectif poursuivi par l'ensemble de ces normes et met l'accent sur le rôle important des états financiers à produire dans les comptes annuels. Ces états financiers viennent compléter le bilan et le compte de résultat. Ils doivent fournir aux marchés financiers et aux actionnaires toute l'information nécessaire quant à la réalité économique de l'entreprise pour qu'ils puissent prendre leur décision en matière d'investissement.

La comptabilisation des engagements pris par une entreprise envers ses salariés, engagements qui nous intéressent particulièrement ici, doit être établie selon les règles définies dans la norme IAS 19 (et IFRS 2 par ce qui est des plans de stock options). Une description de ces engagements doit être faite dans un état financier spécifique consacré à ce type d'engagements.

Dans la description de la norme IAS 19, il est important de noter, et comprendre son fonctionnement et ses implications, l'introduction d'un mécanisme comptable un peu particulier : le corridor.

Les concepts et les éléments théoriques donnés par la norme sont mis en application dans un exemple simple afin de mettre en valeur le fonctionnement et l'articulation d'un état IAS 19.

Quand le risque lié à un engagement de retraite, par exemple, est transféré vers un organisme d'assurance, la comptabilisation de celui-ci diffère. Dans ce cas les règles de comptabilisation sont données par la norme IFRS 4.

1. Les normes comptables internationales

Dans le but de faciliter le bon fonctionnement des marchés des capitaux, et finalement ainsi accélérer la poursuite de l'achèvement du marché intérieur des services financiers, l'Union Européenne s'est attachée à améliorer la comparabilité des états financiers des sociétés.

Cet objectif se situe dans la continuité du Marché Unique et de la libre circulation des capitaux, des biens et des services.

Le Règlement¹ du 19 juillet 2002, publié le 11 septembre 2002, du Parlement Européen et du Conseil de l'Union Européenne a été élaboré dans ce sens. Il précise quel organisme peut élaborer des normes applicables dans la l'Union et à quelles conditions.

Il est intéressant de noter l'évolution sémantique de la dénomination des normes introduite par le Règlement du 19 juillet 2002. L'appellation normes comptables internationales, IAS (*International Accounting Standards*) a évolué pour devenir des normes internationales d'information financière, IFRS (*International Financial Reporting Standards*). Cette terminologie souligne le but avoué de ce référentiel comptable : donner une vision économique de l'entreprise, à destination des marchés financiers et des actionnaires.

Toutes les normes publiées avant le changement de dénomination gardent l'appellation IAS et toutes celles édictées depuis sont appelées IFRS. On parle ainsi de la norme IAS 19, qui date de 1983 et de la norme IFRS 2 (Paievements en action).

La mise en oeuvre dans les états de synthèse (bilan, compte de résultat et annexes) du référentiel comptable des normes IAS/IFRS doit se faire à compter du 1^{er} janvier 2005 pour les entreprises faisant appel à l'épargne publique et à partir du 1^{er} janvier 2007 pour les entreprises de plus de 250 salariés.

1.1. Une volonté politique : l'harmonisation des pratiques et des références comptables en Europe

Sur le plan international, deux ensembles de principes comptables co-existent :

- le modèle de l'Europe continentale et du Japon. La comptabilité, élaborée par la réglementation ou la loi, est un outil de contrôle et de régulation sociale,
- le modèle anglo-saxon qui, quant à lui, cherche à donner de l'entreprise une vision plus économique, dans le but de fournir des outils d'aide à la décision et de mesurer la richesse créée pour l'actionnaire.

Les normes établies par l'IASB, même si elles sont préparées en tenant compte des spécificités culturelles des deux modèles, subissent l'influence de la pensée anglo-saxonne

¹ Un Règlement Européen est adopté par le Conseil et le Parlement ou par la Commission seule. Il s'adresse à tous et est directement applicable. Cet acte juridique « contraignant » est plus fort qu'une directive qui elle est destinée aux Etats Membres. Charge à eux de la transposer dans leurs ordres juridiques internes respectifs.

dont les adeptes sont fortement représentés dans les organisations et les instances comptables internationales.

1.2. Un organisme normalisateur : l'IASB

L'IASB, qui est donc chargé de produire des normes comptables internationales, est d'une composition est assez large.

Bien entendu, pour quelle puisse être appliquée dans chacun des pays de l'Union Européenne, chaque norme doit respecter plusieurs critères et sa construction obéit à une démarche précise.

1.2.1. L'organisation actuelle

Le Conseil (ou le *Board*) est composé de quatorze membres, dont un président et un vice-président. Chaque membre a une mission bien précise. Les membres sont recrutés selon leurs expertises techniques et/ou selon leurs connaissances du marché et des affaires.

Cinq membres du Conseil doivent exercer la fonction d'auditeur, trois, avoir une expérience significative dans la préparation des états financiers et sept au moins, avoir des responsabilités dans des institutions nationales. Ils sont nommés pour cinq ans.

1.2.2. Le processus d'élaboration des normes

Pour acquérir force légale dans l'Union Européenne, les normes IAS/IFRS sont soumises à un mécanisme d'adoption qui se déroule en quatre étapes :

- (1) chaque projet de norme fait l'objet d'un avis consultatif de l'*European Financial Reporting Advisory Group* (EFRAG),
- (2) à la lumière de cet avis, l'*Accounting Regulatory Committee* (ARC) prend une décision à la majorité qualifiée,
- (3) la décision est ensuite validée par la Commission Européenne,
- (4) la validation est publiée au Journal Officiel des Communautés Européennes.

Toutes les normes, avant d'être adoptées, comme il est précisé dans le Règlement du 19 juillet 2002, doivent respecter les trois critères d'appréciation suivants :

- la conformité aux textes législatifs européens existants,
- la capacité à donner lieu à une information financière de haute qualité,
- la contribution au « bien public européen ».

1.3. La norme IAS 1 : description des états financiers

La norme IAS 1 qui date de 1975 (une importante révision en a été faite en 1997) introduit de nouvelles dispositions relatives aux états de synthèse qui sont à constituer dans les comptes annuels.

Toujours dans la logique d'une large information donnée aux marchés financiers et aux actionnaires, les entreprises doivent produire des états financiers qui permettent d'obtenir une information plus complète sur la performance de l'entreprise que celle contenu dans le seul résultat du compte éponyme.

L'objectif des états financiers (IAS 1 §5²) à usage général est de fournir des informations sur la situation financière, la performance et les flux de trésorerie de l'entreprise qui soient utiles à un large éventail d'utilisateurs pour la prise de décisions économiques.

La présentation de ces états est très structurée. Ils fournissent des informations sur :

- les actifs,
- les passifs,
- les capitaux propres,
- les produits et les charges, y compris les profits et les pertes,
- les flux de trésorerie.

Ces informations doivent être complétées par des notes annexes aux états financiers.

Ainsi, les engagements pris par une entreprise envers ses salariés doivent naturellement faire l'objet d'une information particulière, d'un état financier propre, obéissant au jeu de normes internationales. Le marché a alors une connaissance aussi précise que possible des passifs, des produits et charges, des flux de trésorerie issus de ces engagements envers les salariés et de l'actif mis en contrepartie des engagements pris.

² Chaque norme obéit à une même structure. Un paragraphe préliminaire, puis des paragraphes séquentiels numérotés (plusieurs paragraphes peuvent être regroupés sous un même titre). Chaque référence à une norme est notée de la même manière dans le présent document et précise les numéros de la norme et du paragraphe.

2. Construction des états financiers IAS 19

Les avantages octroyés par une entreprise à ses salariés, s'ils sont postérieurs à l'emploi, accordés à long terme ou correspondant à une indemnité de fin de carrière, doivent être comptabilisés selon des principes décrits par la norme IAS 19. Un état financier complète l'information présente dans le bilan et le compte de résultat de l'entreprise.

Le délai de mise en application de la norme IAS 19 est identique à celui de l'ensemble du référentiel IAS/IFRS (1^{er} janvier 2005 pour les entreprises faisant appel à l'épargne publique ; 1^{er} janvier 2007 pour les entreprises de plus de 250 salariés).

Il convient de bien définir tous les concepts figurant dans la norme IAS 19 avant de décrire les écritures comptables qui en découlent et de construire un état spécifique de l'annexe.

Une des écritures, en l'occurrence une charge (ou un produit) à intégrer, bénéficie d'un amortissement particulier, déterminé par un « corridor ».

A l'aide d'un exemple, nous mettrons en action les concepts et leurs implications dans les états de synthèse. Le caractère aléatoire de certains éléments sera précisé.

2.1. *Le langage IAS 19*

La norme IAS 19 précise un certain nombre de définitions, de notions et de quantités servant à la comptabilisation des engagements d'une entreprise envers ses salariés.

2.1.1. La valorisation des engagements (IAS 19 §65-69)

La norme IAS 19 impose à l'entreprise (Introduction de la norme) d'évaluer « ses obligations et ses coûts selon la méthode des unités de crédits projetés ». Cette valorisation des obligations et des coûts, avec projection du salaire est appelée « Projected Benefit Obligation » (PBO).

La méthode d'unité de crédit permet d'attribuer à chaque exercice une unité d'engagement correspondant aux droits supplémentaires acquis au cours de ce même exercice. Cette évaluation est faite en considérant l'ancienneté et le salaire qui prévalent lors de l'évaluation (sans projection). Il s'agit en quelque sorte du montant de la prime unique pure d'assurance réclamée pour garantir cet engagement nouveau.

Aucune hypothèse supplémentaire n'est faite dans cette méthode statique sur l'évolution future probable des salaires et de l'ancienneté (qui déterminent aussi les droits futurs).

La norme oblige de faire au moins une hypothèse sur l'évolution du salaire jusqu'au terme de la carrière : les unités de crédit sont donc projetées.

Trois techniques de valorisation de la PBO peuvent être employées (*cf.* PLANCHET et PLOUVIER [2004]).

La méthode de référence est un **calcul en escalier** sur la base des droits effectivement acquis lors de l'évaluation. Il s'agit d'une technique **rétrospective**.

Elle peut être mal adaptée à certains engagements. Dans le cas d'une IFC par exemple, du fait de la condition de présence au terme, une évaluation rétrospective aboutit à un niveau d'engagement nul jusqu'au jour du versement effectif de l'indemnité.

C'est la raison pour laquelle, lorsqu'il existe une condition de présence au terme alors l'une des deux autres possibilités suivantes doit être mise en oeuvre. Ces approches sont prospectives : les droits sont projetés au terme puis répartis entre droits passés, droits acquis dans l'année et droits futurs.

Le mode de calcul de la PBO qui utilise le mode calcul avec « service prorata » est plus adapté cas français (IFC, régime « chapeau »). La PBO ainsi valorisée est égale, pour l'exercice considéré, à la VAP de l'engagement pondérée par l'ancienneté actuelle sur l'ancienneté au terme.

$$PBO_t = VAP_t \times \frac{\text{ancienneté actuelle}}{\text{ancienneté au terme}}$$

La dernière technique, dite PBO avec « acquisition prorata », tient compte de l'ancienneté plafond des droits. Elle convient mieux à des régimes spécifiques (IFC en escalier par exemple).

$$PBO_t = VAP_t \times \frac{\text{ancienneté actuelle}}{\text{ancienneté plafond}}$$

2.1.2. L'actif de couverture (IAS 19 §102)

L'actif de couverture regroupe l'ensemble des actifs, toutes natures confondues (actions, obligations, immobilier), détenus par l'organisme (l'assureur ou l'entreprise), mis en représentation des engagements du régime.

Cet actif, dès lors qu'il n'existe aucune clause contractuelle le reliant directement au passif, est évalué de manière totalement indépendante. La valorisation de l'actif est alors régie par la norme IAS 39 portant sur les instruments financiers. Les mêmes règles s'appliquent donc aux entreprises d'assurance, aux établissements financiers et, en l'espèce, aux entreprises offrant des avantages sociaux à leurs salariés devant être comptabilisés au sens de la norme IAS 19.

L'ensemble des actifs est réparti, selon la définition donnée par la norme IAS 39, en trois catégories principales :

- les actifs de transaction (trading),
- les actifs disponibles à la vente (Available For Sale : AFS),
- les actifs détenus jusqu'à l'échéance (Held To Maturity : HTM).

Une dernière catégorie d'actifs nommée « créances directes créées par l'entreprise » inclut les créances d'exploitation, par exemple les prêts directement consentis à des tiers.

Les actifs des deux premières catégories sont évalués à leur « juste valeur ». Cette juste valeur est égale à leur valeur de liquidation sur les marchés (financiers et immobiliers) à la date de l'évaluation. A défaut de marché, on retient la valeur actualisée des flux à venir.

La comptabilisation des actifs à leur valeur de marché rompt avec la comptabilité classique des pays de l'Europe continentale qui enregistre le coût historique de l'actif (*i.e.* le prix d'achat).

L'entreprise (ou l'assureur) assume un risque financier lié à l'évolution aléatoire de la valeur de l'actif couvrant les engagements. Ce risque se répercute immédiatement dans les comptes.

Les actifs détenus jusqu'à l'échéance (HTM) sont quant à eux comptabilisés à leur coût d'acquisition. Pour qu'un actif soit admissible à cet ensemble, il faut que l'entreprise qui le possède ait l'intention et les moyens de le conserver jusqu'à l'échéance. A défaut, il serait reclassé dans la catégorie AFS, avec les règles adéquates. En cas de cession anticipée significative, l'entreprise peut se voir interdire d'utiliser cette classe d'actifs pendant deux années.

Comme le rappellent F. LUSTMAN et V. LEFLAIVE [2002], les contrats d'assurance prévoient, en général, des possibilités de sorties anticipées, de basculement de support en euros vers des supports en unités de compte... Ces options obligent l'assureur à céder de manière prématurée les actifs qu'il détient. De fait, il ne peut donc, en général, pas comptabiliser d'actifs dans la classe des HTM.

Il convient donc d'étudier chaque prestation offerte par le régime pour déterminer si la contrepartie répond aux critères des HTM.

Dans le cas où un régime prévoit le versement d'une prime si l'employé atteint une certaine ancienneté (médailles du travail), il n'y a pas lieu de céder l'actif mis en représentation de l'engagement de manière prématurée.

Si la pratique d'un tel régime est de verser un mois de salaire au collaborateur qui atteint 30 ans d'ancienneté, alors la stratégie de couverture peut consister (en supposant que le salaire ne varie qu'à la hausse) en l'achat, année après année, d'obligations d'une maturité égale à la durée résiduelle avant versement de la prestation. Si l'employé quitte l'entreprise ou décède préalablement, il faudra alors conserver quand même les obligations pour avoir le droit, avec les règles de comptabilisation qui s'appliquent dans ce cas, de détenir des actifs HTM.

2.1.3. Le coût des services rendus (IAS 19 §67-69,96)

La valorisation des engagements permet de donner un prix au stock des droits acquis par les employés de l'entreprise considérée. Ce stock a été constitué année après année.

La norme IAS 19 précise bien (IAS §68) qu'une « entreprise affecte les droits à prestations aux exercices au cours desquels l'obligation d'assurer des avantages postérieurs à l'emploi est générée ». L'obligation naît du fait que le salarié rend immédiatement un service (par son travail) à l'entreprise, alors que l'entreprise versera l'avantage dans le futur.

Chaque charge devant être comptabilisée au cours de l'exercice qui l'a vu naître, il convient donc de bien séparer le coût des services passés du coût des services rendus au cours de l'exercice.

Les mêmes méthodes et les mêmes hypothèses qui sont utilisées pour déterminer la PBO doivent être reprises pour déterminer le coût des services rendus à rattacher à l'exercice.

En notant SC_t la charge des services rendus pour l'exercice t (Service Cost), on a :

$$SC_t = VAP_t \times \frac{1}{\text{ancienneté au terme}}$$

Les droits de l'année viennent accroître le niveau de l'engagement représenté par la PBO.

En reprenant la formulation de la PBO avec « service prorata », on peut assimiler le coût des services rendus à la dérivée de la PBO par rapport au temps. Ce coût mesure donc la vitesse d'accumulation du stock du capital constitutif de l'engagement.

En effet, l'ancienneté dans l'entreprise est égale à t (cf. notations Partie II). L'expression de la PBO avec « service prorata » devient alors :

$$PBO_t = VAP_t \times \frac{\text{ancienneté actuelle}}{\text{ancienneté au terme}} = \frac{VAP_t}{\text{ancienneté au terme}} \times t$$

En négligeant les dérivées de la VAP et du coût des services rendus dans l'année par rapport au temps, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dPBO_t}{dt} &= \frac{VAP_t}{\text{ancienneté au terme}} = SC_t \\ \frac{d^2 PBO_t}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

La vitesse de variation de la valeur de l'engagement est égale au montant des droits de l'année. Il n'y a pas d'effet d'accélération (la « dérivée seconde » est nulle).

2.1.4. La charge d'intérêt (IAS 19 §82)

Du fait de son échéance qui se rapproche d'une année supplémentaire, la dette actuarielle (PBO) doit être revalorisée. Le taux d'actualisation (ou plus précisément de capitalisation) à utiliser est défini de manière stricte dans la norme (IAS §78). Il est déterminé en début de période.

La charge d'intérêt doit aussi tenir compte des intérêts portant sur le coût des services rendus de l'année (l'équivalent des cotisations) diminué, le cas échéant, de ceux des prestations versées au cours de l'exercice.

La quantité IC_t représente la charge d'intérêt de l'exercice t (Interest Cost). En première approximation, on a :

$$IC_t = (PBO_t + SC_t) \times \text{taux} + (\text{cotisations} - \text{prestations}) \times \left[(1 + \text{taux})^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

On fait l'hypothèse que les prestations (théoriques) sont payées en milieu d'année et que les services rendus sont comptabilisés en début de période.

2.1.5. Les gains et pertes actuariels (IAS 19 §92-95)

La norme IAS 19 précise la notion de gains et pertes actuariels, appelée aussi « écarts actuariels ». A partir de cette présentation, on comprendra le fonctionnement de ces écarts et les situations qui les engendrent.

2.1.5.1. Description des écarts actuariels

Selon le mode de fonctionnement des services internes devant réalisés les états comptables, deux approches sont possibles :

- soit, et c'est le cas standard, les états de l'exercice n sont construits en début d'année suivante,
- soit on a besoin de produire les informations comptables avant la clôture de l'exercice. Dans cette situation, un écart supplémentaire par rapport à la première approche dû à l'estimation que l'on fait en cours d'année de la situation au 31 décembre prochain.

En début d'exercice, on estime, sur la base des informations connues, reprises dans les états comptables de l'exercice antérieur ou issues des modélisations actuarielles effectuées, les éléments suivants :

- la PBO de clôture,
- les droits de l'année,
- la charge d'intérêt,
- les prestations théoriques.

De la même façon, on se donne une projection de l'actif de couverture.

Ces éléments sont déterminés *a priori*. En fin d'exercice, on compare les valeurs estimées avec les valeurs effectivement réalisées. Le résultat de cette comparaison constitue les gains ou pertes actuariels.

Les écarts actuariels peuvent avoir pour origine :

- une dérive constatée entre l'évolution prévue du groupe (décès, rotation, salaire,...) et la réalité,
- un changement dans l'estimation des paramètres du modèle,
- une différence entre le rendement attendu et le rendement effectif de l'actif de couverture.

Ils se scindent donc en deux parties, l'une liée au passif et l'autre liée à l'actif.

Ecart actuariel = (PBO estimée – PBO réalisée) + (Actif réalisé – Actif estimé)

2.1.5.2. Le fonctionnement des écarts actuariels

Le principe général de la détermination des écarts actuariels est le suivant.

Dans un premier temps, on dispose d'une PBO d'ouverture (qui provient de l'évaluation réalisée lors de l'exercice comptable précédant) et l'on détermine par récurrence le montant de la PBO de clôture. La relation de récurrence est la suivante :

$$PBO_{cl\acute{o}ture} = PBO_{ouverture} + SC + IC - Prestations$$

Par ailleurs, dans un second temps, on utilise le modèle pour valoriser l'engagement du régime, à partir des données observées, et déterminer un montant de PBO correspondant à la situation réelle à cette date.

Selon toute vraisemblance, ces deux valeurs de PBO de fin d'exercice diffèrent. En théorie, si tout se passe comme prévu dans les hypothèses, alors il y a égalité. Mais, l'engagement

d'une entreprise envers ses salariés et la valorisation de celui-ci sont modélisés par des variables aléatoires continues. Elles ont donc une probabilité nulle de prendre une valeur donnée. On comptabilise l'espérance mathématique de la valeur aléatoire de l'engagement. La réalisation de celle-ci sera différente.

Il y a donc un écart, dit « actuariel », entre ces deux évaluations.

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- on ne fait ni projection de PBO (*ie.* On effectue les calculs au 31/12/n, sur la base des données à cette même date), ni changement d'hypothèses. Il existe quand même un écart (à moins que les droits de l'année effectivement accordés par le régime soient tels que la relation de récurrence ne soit vérifiée),
- on réalise une projection de PBO, sans changement d'hypothèses. Mécaniquement, on obtient un écart entre la PBO réelle et la PBO projetée. Cet écart doit être amorti dans les conditions précisées par la norme (*cf. infra*),
- Avec un changement d'hypothèse, on obtient une différence entre la PBO évaluée sous les « anciennes hypothèses » et celle calculée avec les « nouvelles hypothèses ». Il y alors un écart à amortir.

Naturellement, cet écart du passif doit être cumulé avec la différence entre la performance attendue des actifs de couverture et celle réalisée. Cette distance n'est pas nulle dès lors qu'il y a projection de PBO (on a alors un actif projeté et au actif réel au 31/12/n).

Il faut bien garder à l'esprit que, *in fine*, on retient le cumul global des écarts, sans chercher à distinguer les causes de celui-ci

2.2. Les états comptables et financiers

La description des standards de présentation des états financiers ainsi que le contenu du rapport à joindre à joindre avec les états financiers (description en annexe des règles et des méthodes de calcul et d'enregistrement des écritures comptables) est donnée par la norme IAS1.

Les trois documents de synthèse sont impactés par les normes IAS. Un effort tout particulier est porté sur l'annexe.

2.2.1. Le bilan (IAS 19 §54)

Le montant de la provision qui doit être inscrite au passif au titre des engagements envers les salariés est le résultat de l'addition des composantes suivantes (1) :

- + la valeur actualisée des obligations,
- + les écarts actuariels non comptabilisés,
- le coût des services passés non encore comptabilisés,
- la juste valeur de l'actif de couverture.

La valeur actualisée des obligations est donnée par le montant de la PBO.

Les règles d'amortissement des pertes actuarielles permettent décrites dans la norme autorisent la comptabilisation sur plusieurs exercices de cet écart. Il reste donc une quantité à amortir (*cf.* Corridor).

La charge des services passés est comptabilisée selon un mode linéaire sur la durée restant à courir jusqu'à ce que les droits correspondants soient acquis au salarié (IAS §96).

Les premier et dernier éléments de l'addition sont frappés d'aléa.

Le résultat peut être positif (un passif) ou négatif (un actif). Dans le second cas de figure, l'entreprise doit évaluer l'actif en prenant le plus faible des deux montants suivants :

- le résultat de l'addition précédente (1),
- la somme des pertes actuariels, du coût des services passés non encore comptabilisés et de la valeur actualisée des prestations futures du régime, nettes des cotisations.

Exemple :

Valeur actuelle de l'obligation	+ 1100
Juste valeur de l'actif de couverture	- 1190
Pertes actuarielles non comptabilisées	- 110
Coût des services passés non comptabilisées	- 70
Total 1	- 270

Pertes actuarielles non comptabilisées	- 110
Coût des services passés non comptabilisées	- 70
Total 2	- 180

L'entreprise comptabilise donc un actif de 180 et indique la somme de 90 dans les informations à fournir (IAS §120(c)(vi)).

2.2.2. Le compte de résultat (IAS 19 §61)

Pour l'exercice à venir, l'entreprise inscrit en charge prévisionnelle (ou en produit, sous réserve de la limite précédente) le résultat de la somme suivante :

- + le coût des services rendus au cours de l'exercice,
- + le coût financier,
- le rendement attendu de l'actif de couverture,
- + les écarts actuariels comptabilisés,
- + le coût des services passés comptabilisés,
- + l'effet de toute réduction ou liquidation de régime (IAS §109-110).

Le coût des services rendus, le coût financier (via le taux d'actualisation) et le rendement attendu de l'actif de couverture sont estimés en début de période.

2.2.3. L'état comptable en annexe

D'un point de vue strictement réglementaire, les grandeurs portées dans les comptes sont les espérances mathématiques des variables aléatoires. Par exemple, le montant de la provision mathématique inscrite dans les comptes d'un organisme d'assurance vie est bien une estimation du montant moyen de la valeur actuelle aléatoire de l'engagement tenu.

Toutefois, afin de tenir compte de la probabilité importante que le niveau de provision soit insuffisant, il existe des marges de sécurité dans les hypothèses réglementaires à retenir dans l'évaluation de l'engagement (taux d'intérêt technique et tables de mortalité « prudents »).

Si la loi de probabilité de la VAP est symétrique autour de l'espérance, alors la probabilité pour que la réalisation soit supérieure à la provision est égale à 50%.

Ce premier niveau de garantie est complété par une exigence minimale de marge de solvabilité.

Un niveau de provision plus élevé pourrait être choisie de manière à ce qu'il soit suffisant dans 90% ou 95% des cas (*cf. infra*).

L'objectif, en décrivant les processus aléatoires sous-jacents, est de remplacer les espérances mathématiques par les distributions de probabilité complètes. On pourra alors mesurer la stabilité de l'état IAS.

L'état IAS 19 est construit à partir des données comptables certifiées de l'exercice précédent (au 31/12/n-1) et des observations de l'exercice courant. On obtient ainsi – dernière colonne de l'état – une situation estimée en fin d'année (au 31/12/n). Situation qui sera comparée à la situation réelle.

D'un point de vue chronologique, l'état comptable au 31 décembre de l'année n est réalisé dans le courant de l'exercice. La PBO au 1^{er} janvier n n'apparaît jamais dans les comptes : c'est la PBO extrapolée au 31 décembre qui est inscrite. Les écarts actuariels sont donc calculés au cours de l'exercice n+1.

La norme IAS 19 ne décrit pas de manière précise un état type. Toutefois, on sait quels sont les éléments devant apparaître. Le type d'état IAS 19 pris ici est celui dessiné par F. Planchet et P. Thérond [2004].

La description fonctionnelle de cet état permet de connaître l'origine des éléments qui le composent et ainsi mieux appréhender son articulation.

Pour visuellement représenter l'état IAS 19 proposé et apprécier sa logique, on utilise la polychromie suivante :

- les cases grisées ne comportent pas de valeur,
- les cellules à fond vert correspondent aux informations provenant de l'exercice comptable précédent,
- celles à fond bleu contiennent les observations de l'année courante,
- les autres sont déduites des précédentes et des hypothèses formulées.

L'état IAS 19 est bâti sous un certain nombre d'hypothèses (*cf. infra* l'analyse stochastique de la valeur de l'engagement). On en fait apparaître explicitement trois ici :

- le taux d'actualisation des flux futurs,
- le taux de rendement attendu des actifs de couverture,
- la durée résiduelle des amortissements.

La norme ne précise pas quelle doit être la durée la durée résiduelle à utiliser. Elle impose simplement, comme pour toutes les autres, une révision triennale de ce postulat. Nous retiendrons une notion de duration pour estimer cette grandeur.

La duration est la somme de tous les temps futurs pondérés par le flux monétaire actualisé de cette même période, corrigée de la valeur initiale de cette série.

Soient $\{\tilde{F}_t, t \in \mathbb{N}\}$ la séquence des flux monétaires futurs probables, $\{A_t, t \in \mathbb{N}\}$ le taux d'actualisation correspondant à chaque période et $C_t = \frac{\tilde{F}_t}{(1 + A_t)^t}, t \in \mathbb{N}$ le coefficient de pondération.

Si l'on note V la valeur aujourd'hui de la séquence actualisée, on a :

$$V = \sum_{t \in \mathbb{N}} \frac{\tilde{F}_t}{(1 + A_t)^t}$$

La duration est égale à :

$$duration = \frac{1}{V} \sum_{t \in \mathbb{N}} C_t \times t$$

On remarque que la somme des coefficients de pondération utilisés est égale à l'unité³. La duration est donc le barycentre des durées.

Voici l'état IAS 19 sur lequel nous allons travailler.

Etat IAS 19

Taux d'actualisation des flux	
Taux de rendement attendu des actifs	
Durée résiduelle des amortissements	

	Réel au 31/12/n-1		Courant n	Estimé au 31/12/n
Valeur actuelle de l'obligation				
Juste valeur de l'actif de couverture				
Couverture				
	Ecart de l'année	Cumul des écarts		
Amortissement des services passés acquis				
Amortissement des services passés non acquis				
Écarts actuariels cumulés à amortir				
Déficit/Excédent				
Détail du coût de la période				
Services rendus sur la période				
Charge d'intérêt				
Rendement attendu de l'actif				
Amortissements des : - services passés acquis, - services passés non acquis - écarts actuariels à amortir, - écarts actuariels pris en charge immédiatement				
Coût de la période				
Cotisations payées				
Prestations versées				

Les données relatives à la situation réelle au 31/12/n-1 sont :

- la PBO à l'ouverture,
- les actifs de couverture,
- les amortissements initiaux.

$$^3 \frac{1}{V} \sum_{t \in IN} C_t = \frac{1}{V} \sum_{t \in IN} \frac{\tilde{F}_t}{(1 + A_t)^t} = \frac{1}{V} \times V = 1$$

Au cours de l'exercice, on relève :

- les amortissements annuels,
- les nouveaux amortissements (des services passés acquis et non acquis),
- les cotisations perçues et les prestations payées (hypothèse de perception et de paiement en milieu d'année).

Les éléments calculés sont :

- le montant des services rendus sur la période (SC), fournit par le modèle,
- la charge d'intérêt de l'exercice,

$$IC = (PBO_{ouverture} + SC) \times \text{taux d'actualisation} - Prestations \left[(1 + \text{taux d'actualisation})^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

- le rendement attendu des actifs de couverture dans l'année,

$$\text{Rendement attendu} = \text{Actif}_{ouverture} \times \text{taux} + (Cotisations - Prestations) \times \left[(1 + \text{taux})^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

- la PBO courante,

$$PBO_{courante} = SC + IC - Prestations$$

- l'actif courant,

$$\text{Actif}_{courant} = \text{Rendement attendu} + Cotisations - Prestations$$

3. Le mécanisme du corridor

Un mode d'amortissement particulier peut être utilisé pour comptabiliser les écarts actuariels (IAS 19 §92). Il ne s'agit pas d'une obligation. L'entreprise est libre de l'exercer ou non. Toutefois, si elle opte pour cette solution, elle doit alors le faire de manière systématique (IAS 19 §93).

Cette règle s'applique qu'ils s'agissent de gains ou de pertes actuariels.

Si la somme des écarts actuariels non encore comptabilisés à la fin de l'exercice précédent excèdent la plus grande des deux quantités suivantes, alors seule la fraction supérieure peut être inscrite dans les comptes.

- 10 % de la valeur de l'obligation de l'entreprise à la date de clôture (PBO),
- 10 % de la juste valeur de l'actif de couverture à la même date.

Cette charge (ou ce produit) est amortie linéairement sur la durée résiduelle de l'engagement. Elle est donc égale au total des écarts actuariels non amortis divisé par la durée résiduelle retenue.

Si l'écart actuariel est inférieur à la valeur du corridor ainsi définie, alors il peut ne pas être comptabilisé.

En annexe, on doit préciser la durée d'amortissement et la valeur du corridor qui a été retenue.

Les hypothèses actuarielles sous-jacentes sont à revoir tous les trois ans.

Ce principe d'enregistrement, ou plus précisément de non enregistrement d'écriture tranche avec les principes classique de la comptabilité. On admet ainsi qu'un ensemble de valeurs est « juste » et n'importe laquelle de ces valeurs peut être inscrite dans les comptes.

L'idée du corridor est assez simple. La valeur de la PBO estimée est une valeur moyenne, une estimation de l'espérance mathématique. La réalisation de cette variable aléatoire, observée sur l'exercice, diffère forcément un peu de cette valeur (la probabilité pour qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur réelle est nulle). Il existe donc de petits écarts.

On doit donc tolérer une légère différence entre la réalisation de la variable aléatoire et la PBO estimée.

Il s'agit, pour reprendre une terminologie plus statistique, de déterminer un « intervalle de confiance » à l'intérieur duquel vont évoluer les observations. Tant que l'écart est inclus dans l'intervalle de confiance, on considère le modèle initial comme étant bien spécifié.

Soit $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

En application du Théorème Centrale Limite, on a :

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - E(X) \right) \xrightarrow{\text{loi}} N(0, V(X))$$

Où $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ est la réalisation des variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$.

Considérons uniquement les écarts aléatoires issus de la PBO.

La variable aléatoire d'intérêt est la valeur de l'engagement : la PBO. Son espérance mathématique est approchée par la quantité appelée « PBO estimée » (par construction du modèle) et l'on observe la PBO réalisée.

On a donc :

$$(PBO_{\text{réalisée}} - E(PBO)) \xrightarrow{\text{loi}} N(0, V(PBO))$$

Et :

$$\Pr \left(\frac{|PBO_{\text{réalisée}} - E(PBO)|}{\sqrt{V(PBO)}} < 1.96 \right) = 0.95$$

Il y a donc 95% de chances pour que l'écart actuariel standardisé soit inférieur en valeur absolue à 1.96.

La règle du corridor utilise le seuil de 10% de la PBO réalisée. Cela signifie en fait que l'on considère que l'écart type de l'engagement aléatoire (PBO) est environ égal à 5% de l'espérance mathématique.

Avec une probabilité de 95% : $|PBO_{\text{réalisée}} - E(PBO)| < 1.96 \times \sqrt{V(PBO)}$.

En remplaçant par les estimateurs (donné par le modèle pour l'espérance et imposé par la réglementation pour l'écart type), on obtient :

$$|PBO_{\text{réalisée}} - PBO_{\text{estimée}}| < 10\% \times PBO_{\text{réalisée}}$$

Il conviendra, lors des applications de vérifier que l'approximation utilisée est réaliste (*ie.* de vérifier la probabilité pour que l'inéquation ci-dessus soit voisine de 95%).

La règle du corridor est assez ambiguë, dans la mesure où elle permet de reporter sur des exercices ultérieurs une charge (dans le cas d'un écart négatif) constatée aujourd'hui. Elle s'oppose à l'un des principes déjà cité de rattachement à l'exercice des charges et produits nés au cours de ce même exercice comptable.

D'autres amortissements proviennent soit de la mise en place des états comptables, soit d'une modification du régime. Ces charges sont lissées sur plusieurs exercices comptables (choix de la durée à définir et à justifier en annexe).

Dans le premier cas, l'entreprise applique la norme IAS 19 à un régime préexistant. La valeur de l'obligation ainsi évaluée diffère, selon toute vraisemblance, du montant de la provision déjà constituée (si elle existe). C'est cet écart qui est amorti.

L'autre charge amortissable est liée à une augmentation des droits accordés par le régime, augmentation qui peut faire naître un coût des services passés.

4. Un exemple d'élaboration de l'état comptable IAS 19

Pour illustrer les explications précédentes, considérons une entreprise qui doit fournir en annexe un état IAS 19 relatif à ses engagements pris envers ses salariés.

A partir des informations connues initialement, du coût des services rendus sur la période (donné ici) et des hypothèses définies préalablement, voici l'état IAS 19 obtenu.

Etat IAS 19

Taux d'actualisation des flux	3.39%
Taux de rendement attendu des actifs	3.39%
Durée résiduelle des amortissements	15

	Réal au 31/12/n-1		Courant n	Estimé au 31/12/n	Réal au 31/12/n	
Valeur actuelle de l'obligation	-110 000		-6 831	-116 831	-120 000	
Juste valeur de l'actif de couverture	100 000		5 932	105 932	99 000	
Couverture	-10 000		-899	-10 899	-21 000	
	Ecarts de l'année	Cumul des écarts			Ecarts de l'année	Cumul des écarts
Amortissement des services passés acquis	0	0		0	0	0
Amortissement des services passés non acquis	0	0		0	0	0
Ecarts actuariels cumulés à amortir	0	15 000		14 733	10 101	24 834
Déficit/Excédent		5 000	-899	3 835		3 834
Détail du coût de la période						
Services rendus sur la période			-3 000			
Charge d'intérêt			-3 831			
Rendement attendu de l'actif			3 432			
Amortissements des :			- 267			
- services passés acquis,			0			
- services passés non acquis			0			
- écarts actuariels à amortir,			-267			
- écarts actuariels pris en charge immédiatement			0			
Coût de la période			-3 665			
Cotisations payées			2 500			
Prestations versées						

Les éléments en fond vert et bleu sont exogènes.

Toutes les autres grandeurs sont calculées selon les équations rappelées plus haut. Pour déterminer le montant de l'amortissement sur l'exercice des écarts actuariels restants, on applique la règle du corridor :

$$267 = \frac{15000 - 10\% \times \max(110000, 100000)}{15}$$

Au 31 décembre de l'année n, on détermine la valeur de la PBO et celle de l'actif de couverture. Un nouvel écart actuariel apparaît qui se cumule avec le précédant (net de l'amortissement chargé dans l'exercice).

5. Le risque porté par un assureur

L'engagement lié aux avantages sociaux peut certes être intégralement porté par la société qui les a octroyés, mais il peut aussi être transféré, via un contrat d'assurance, à un organisme dont le traitement de ces engagements est le métier.

La réglementation pousse d'ailleurs les entreprises à se défaire de cet engagement dont la gestion n'est, naturellement, pas le métier principal au profit d'organisme d'assurance.

Lorsqu'il est tenu par un assureur, organisme contrôlé par l'Autorité de Contrôle des Assurances, des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance (ACAM – Art. L. 310-12 du code des assurances, Art L. 510-1 du code de la mutualité et Art. L. 951-1 du code de la sécurité sociale), le risque est mesuré par la provision mathématique. Ces provisions représentent l'espérance mathématique de la valeur actuelle aléatoire des engagements pris.

On appelle aussi cette quantité la VAP (Valeur Actuelle Probable).

D'autres mesures existent, comme la notion de « value at risk ». Dans ce cas, le niveau de provisionnement, noté PM , serait solution de l'équation suivante :

$$\Pr(VAP < PM) = 1 - \alpha$$

Le seuil α est le niveau d'erreur que l'on est prêt à supporter.

La comptabilisation du risque n'est pas la même selon qu'il est porté par un organisme d'assurance ou par une entreprise (ce ne sont pas les mêmes normes comptables). La réglementation pousse les entreprises qui détiennent ce type d'engagements à les transférer auprès d'un organisme assureur, dédié ou non.

Il est de même pour les règles de prudence et de solvabilité. Les grandes évolutions actuelles, IFRS et Solvabilité II sont relativement synchronisées.

5.1. Expression de la VAP totale

Jusqu'à présent, nous avons déterminé pour un individu donné la valeur actuelle probable de l'engagement que le régime a pris en sa faveur.

Pour un assureur, l'engagement total est égal à la somme de toutes les VAP individuelles évaluées à un instant donné.

Soit $P = \{1, \dots, j, \dots, n\}$ l'ensemble des salariés appartenant au régime considéré. On note $VA^{(totale)}$ la valeur totale de l'engagement et $VA^{(j)}$ l'engagement individuel.

On a :

$$VA^{(totale)}_t = \sum_{j \in P} VA^{(j)}_t$$

Parmi toutes les variables aléatoires intervenant dans le modèle construit plus haut, certaines sont communes à l'économie toute entière, d'autres dépendent de l'entreprise ou de la branche ou bien sont propres à l'individu.

Dans la première catégorie, on retrouve les variables aléatoires suivantes :

- le taux d'inflation,
- le taux d'actualisation,
- le taux de rendement des actifs.

Soit $C_t = \sigma(\Pi_s, A_s, S_s, O_s, OI_s, s \leq t)$, la σ -algèbre engendrée par l'historique des processus.

Conditionnellement à la trajectoire passée des processus décrivant les taux d'inflation, les taux d'actualisation et les taux de rendement des produits financiers, on a :

$$E(VA^{(totale)}_t / C) = \sum_{j \in P} E(VA^{(j)}_t / C)$$

En retenant l'hypothèse selon laquelle la survie dans l'entreprise toutes causes (rotation et décès) est indépendante entre deux individus, on a :

$$V(VA^{(totale)}_t / C) = \sum_{j \in P} V(VA^{(j)}_t / C)$$

Pour obtenir le montant des provisions mathématiques (ou VAP totale), il suffit de sommer, pour chaque affilié au régime, l'espérance mathématique de la valeur actuelle (*cf. infra*).

5.2. La réglementation pousse à l'externalisation

La loi du 21 août 2003 portant réforme des retraites dans son article 115 donne un certain nombre de précisions sur la définition des régimes de retraite à prestations définies et sur le traitement social des contributions des employeurs (régulant au passage un certain nombre de litiges et de contentieux en la matière).

La définition d'un régime à prestations définies est, depuis le 21 août 2003, plus précise (et donc plus restrictive). Le régime de retraite à prestations définies (qu'il soit géré par l'entreprise ou par un organisme d'assurance) doit conditionner la constitution de droits à prestations à l'achèvement de la carrière du bénéficiaire dans l'entreprise. Le financement de ce régime ne doit pas être individualisable par le salarié (Art. L. 137-11 – I du code de la sécurité sociale).

Le financement de ce régime est exonéré de charges sociales.

Toutefois, une nouvelle contribution est instituée par cette loi destinée à alimenter le fonds de solidarité vieillesse (Art. L. 135-1 du code de la sécurité sociale).

Cette contribution s'élève, au choix de l'employeur, soit :

- à 8 % des pensions liquidées après le 1^{er} janvier 2001 et versées après le 1^{er} janvier 2004, après abattement du tiers du plafond de la Sécurité Sociale,
- à 6 % des primes versées à l'assureur destinées au financement du régime ou à 6 % des dotations au provisions correspondant au coût des services rendus au cours de l'exercice.

Le choix effectué par l'employeur doit être fait de manière irrévocable, régime par régime, avant le 5 mai 2004. A défaut de quoi, les deux taxations s'appliqueront.

L'optimisation des charges sociales a pu guider le choix de l'entreprise.

Les organismes d'assurance pouvant porter les risques d'assurance considérés sont les organismes relevant du titre III ou IV (*cf. infra*) du livre IX du code de la sécurité sociale ou du livre II du code de la mutualité ou du code des assurances.

L'article suivant, l'article 116, crée les institutions de gestion de retraite supplémentaire (IRS). Ces institutions de gestion ne peuvent accomplir que des opérations relatives à la gestion administratives des régimes de retraite supplémentaire ou d'indemnités de fin de carrière de leurs entreprises adhérentes.

Les règles de fonctionnement des ces institutions sont semblables à celles des institutions de prévoyance.

Deux situations sont donc possibles :

Soit l'entreprise conserve le risque dans ses comptes en gérant le fonds des actifs, puis le transfère à l'assureur dès lors que l'employé cesse son activité (fonds des retraités). Dans ce cas, seuls les actifs pèsent dans l'état IAS 19 et plus généralement dans les comptes de l'entreprise.

Soit, comme cela est souhaité par la réglementation (article 116 de la loi portant réforme des retraites) un organisme spécialisé, l'institution de gestion de retraite supplémentaire par exemple, porte le risque lié aux deux fonds (actifs et retraités). Le référentiel comptable qui s'applique est alors décrit par la norme IFRS 4.

Une synthèse des situations se réalise lorsque l'organisme d'assurance est captif. Dans les comptes consolidés de l'entreprise et de l'assureur, l'ensemble du risque, lié aux actifs et aux retraités sera présent. Dans ce cas, les comptes de l'assureur en IFRS 4 devront être retraités pour répondre aux exigences de la norme IAS 19.

Ce retraitement n'est pas neutre, dans la mesure où des différences importantes existent entre les deux normes. La norme IFRS 4 a, pour l'instant du moins, un contenu plutôt déterminé par les autorités locales. Les taux d'actualisation et les tables de mortalité à retenir pour valoriser ne sont, par exemple, pas les mêmes.

5.3. Synchronisation IFRS/Solvabilité II

En plus chantier de normalisation comptable (normes IFRS), la Commission Européenne travaille sur un second projet lié directement aux organismes d'assurance, lui aussi de grande ampleur, consacré à la détermination des normes de solvabilité en assurance. Il s'agit du projet « Solvabilité II ». Ce projet est plus large que le premier, puisqu'il concerne tous les assureurs (et non seulement ceux faisant appel public à l'épargne ou dépassant à un certain seuil de salariés comme pour l'application des normes IFRS).

Les règles découlant de ces deux chantiers, même si elles ne suivent pas le même but (dans un cas, il s'agit d'un dispositif comptable, dans l'autre d'un dispositif prudentiel) doivent être cohérentes entre elles. L'une des difficultés réside dans le fait qu'aucun de ces deux référentiels de règles n'est pas figé. Ils doivent donc chacun anticiper ce que l'autre va décider.

Dans le cas des avantages accordés aux salariés, les normes de solvabilité n'interviennent que lorsqu'un assureur gère les prestations offertes par le fonds des retraités.

En effet, s'il n'y a pas eu externalisation du risque auprès d'un assureur, c'est l'entreprise qui assume le risque. Dans ce cas, elle n'a pas à obéir aux règles s'appliquant aux organismes d'assurance.

De même, lorsque le fonds des actifs est transféré auprès d'un assureur, celui-ci ne fait que de la gestion financière. Il ne supporte pas de risque d'assurance.

Par contre, toujours dans le cas d'un régime couvert par un contrat d'assurance, dès lors que les droits du salarié sont liquidés et que le capital constitutif de l'engagement est versé dans le fonds de retraités c'est l'assureur porte le risque. Il doit alors satisfaire aux règles de solvabilité.

Il existe un débat actuellement entre l'IAS Board et le CEIOPS (*cf.* Consultation Paper n°7, CEIOPS) sur la manière d'évaluer le risque d'assurance et donc le niveau de marge de solvabilité à constituer.

Les normes IAS prévoient l'utilisation du 75^{ème} centile de la distribution de la valeur actuelle probable de l'engagement. Pour le CEIOPS il faut retenir pour évaluer le risque viager, la notion d'espérance mathématique de cette même variable aléatoire.

Partie II. L'analyse stochastique de la valeur de l'engagement

On cherche à déterminer et à décrire tous les éléments qui entrent en jeu dans le calcul de la valeur de l'engagement porté par un régime de retraite d'entreprise appartenant à la même catégorie que celui étudié dans les applications numériques (*cf.* Partie III).

Pour se faire, il convient de recenser l'ensemble des variables influant sur la valorisation de l'engagement étudié et de justifier l'emploi de chacune. Après avoir adopté un système de notation uniforme dans l'ensemble du document, on pourra modéliser les variables aléatoires sous-jacentes.

La valeur finale de l'engagement est alors la résultante de l'interaction de plusieurs variables aléatoires dont la loi de probabilité est spécifiée par les équations du modèle construit.

1. Les variables qui impactent la valeur de l'engagement

On cherche à modéliser la variable aléatoire qui représente la valeur de l'engagement que prend une entreprise envers ses salariés. Le type d'engagement est centré sur le cas d'un régime de retraite relevant de l'article 115 de la loi portant réforme des retraites.

Toutes les variables sous-jacentes retenues sont classées dans le tableau ci-après. On peut ainsi définir la nature de celle-ci ainsi que son caractère endogène (une équation du modèle décrit son comportement) ou exogène (sa valeur est fixée *ex ante*).

Nature	Libellé	
Economique	Taux d'inflation	Endogène
Financière	Taux d'actualisation	Endogène
Financière	Taux de rendement des actifs	Endogène
Economique	Taux de croissance des salaires	Exogène
Economique	Taux de revalorisation des prestations	Endogène
Démographique	Mortalité	Endogène
Démographique	Age de jouissance des droits	Exogène
Démographique	Taux de rotation	Endogène
Démographique	Paramètres familiaux	Exogène

Le taux d'inflation : variable sous-jacente du modèle qui impacte, directement ou indirectement, tous les taux économiques et financiers utilisés.

Le taux d'actualisation : détermine le facteur d'escompte des flux futurs de prestation. Le choix de ce taux, ou plus précisément de la série de taux, est fortement encadré par la norme. On retient en général un taux fixe pour une maturité donnée qui correspond à la durée des engagements.

Le rendement des actifs : absent lors de l'analyse du passif et de la modélisation de l'engagement. Il convient cependant de bien garder à l'esprit qu'à un passif doit correspondre un actif au moins égal. Plus précisément, l'élaboration du compte IAS 19 requiert la connaissance du rendement de l'actif.

La croissance du salaire : la croissance du salaire est une combinaison de trois facteurs,

- l'inflation,
- l'évolution du pouvoir d'achat global des salariés,
- l'évolution de carrière du salarié.

Dans le souci de maintenir la valeur réelle des avantages versés, la croissance des prestations peut-être calée sur celle de l'inflation. Dans ce cas, il faut trouver un assureur qui accepte de couvrir la revalorisation sur l'inflation des prestations. La performance de l'actif doit alors être liée à l'inflation (obligations indexées).

A défaut de revalorisation définie *a priori*, la dynamique des prestation sera fonction du rendement *a posteriori* de l'actif, via la participation aux bénéfices ou aux excédents. Ce mécanisme de participation est instauré par la réglementation (Art. L331-3 du code des Assurances et L.212-5 du code de la Mutualité). Son montant est fixé à au moins 90% du solde du compte technique et 85% du solde du compte financier (Art. A331-4 du code des Assurances et D212-1 du code de la mutualité).

Les informations relatives à la présence dans l'entreprise durant la période d'acquisition des droits, ou celles qui concernent la durée de vie humaine sont concentrées dans une même variable (on appelle cette variable aléatoire la durée de vie résiduelle).

L'âge de jouissance : il s'agit de l'âge de départ en retraite. Cet âge est déterminé, dans le contexte qui nous préoccupe, par le règlement du régime, avec une référence aux dispositions des régimes obligatoires. Toutefois, le salarié dispose d'une certaine marge de manœuvre dans la décision de cessation d'activité.

Certains paramètres familiaux peuvent donner lieu à un supplément de droits et donc de prestations.

2. Les notations

Les variables aléatoires sont notées en majuscules.

Les valeurs obtenues pour ces variables aléatoires, les variables certaines et les paramètres sont représentés par des minuscules.

Selon que l'on se place en temps discret ou en temps continu, les notations diffèrent :

$\Pi_t, \Pi(t)$: le taux d'inflation (à court terme) à l'instant t

$\Pi_{t,T}, \Pi(t, T)$ le taux d'inflation de long terme qui prévaut à la date t pour une durée $T-t$

$A_t, A(t)$: le taux d'actualisation (taux court) à l'instant t

$A_{t,T}, A(t, T)$ le taux d'actualisation composé (taux long) qui prévaut à la date t pour une durée $T-t$

$C_{x,t}, C(x, t)$: le taux de croissance du salaire à l'instant t pour une tête d'âge x

$R_t, R(t)$: le taux de revalorisation des prestations à l'instant t

Z : l'âge de jouissance des prestations

x : l'âge du salarié à l'instant t

k, k' : dates postérieures à l'instant t

e : l'âge du salarié à l'entrée dans l'entreprise

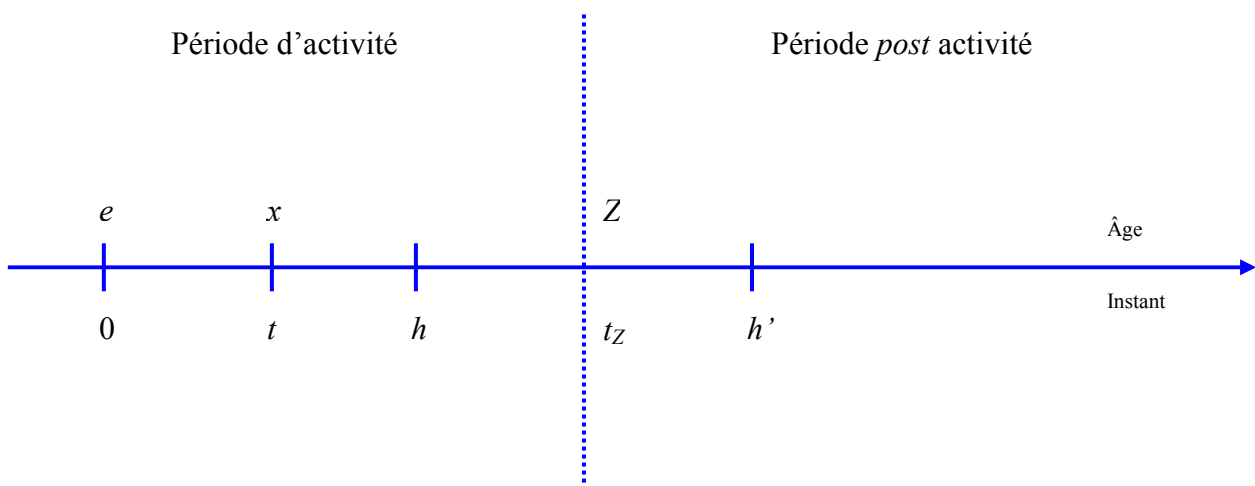
ec_x : l'évolution de carrière d'une tête d'âge x

$T_x, T(x)$: l'espérance de vie résiduelle d'une tête d'âge x

$D_t, D(t)$: le salaire perçu en t

$F_t, F(t)$: le flux de prestation versé en t

fam : l'ensemble des paramètres familiaux



3. Le modèle

On a recensé précédemment toutes les variables sous-jacentes (aléatoires ou non) qui déterminent la valeur de l'engagement que l'on cherche à appréhender.

L'étape suivante consiste à décrire, de manière formelle, le comportement de toutes ces variables.

Notre analyse sera menée conjointement en temps discret et en temps continu. Nous indiquerons donc pour chaque calcul les deux expressions.

Dans la mesure du possible, nous essayerons de donner les expressions des espérances, variances et des lois des processus étudiés. Les démonstrations et quelques exemples seront donnés en annexe.

3.1. Le flux de prestation versé

Le flux de prestations versé par l'employeur est nul durant la période d'activité. Il devient positif lors du départ en retraite. Le montant versé est alors évalué en fonction des salaires perçus (droits acquis), de l'âge et de l'ancienneté. Eventuellement, cette somme peut être modulée par des paramètres familiaux.

Le flux de prestations peut être ainsi unique, ou temporaire, ou viager.

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_t = 0 & \forall t < t_z \\ F_t = F(Z, e, \bar{D}, fam) & t = t_z \\ F_t = \prod_{k=t_z+1}^t (1 + R_k) \times F_{t_z} & \forall t > t_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} F(t) = 0 & \forall t < t_z \\ F(t) = F(Z, e, \bar{D}, fam) & t = t_z \\ F(t) = \exp\left(\int_{t_z}^t R(u) du\right) \times F(t_z) & \forall t > t_z \end{array} \right.$$

Où $\bar{D} = \begin{pmatrix} d_0, d_1, \dots, d_t, \dots, D_{t_z} \\ (d(0), d(1), \dots, d(t), \dots, D(t_z)) \end{pmatrix}$. Il s'agit du vecteur des salaires perçus pendant la période d'activité.

Théoriquement, vue de l'instant t , seuls les flux futurs de salaire sont aléatoires. Pratiquement, on observe seulement les rémunérations pratiquées l'année de calcul.

3.2. Les variables économiques

Les variables économiques du modèle sont communes à l'ensemble de l'économie et donc indépendantes de l'individu dont on évalue les droits. Il s'agit de l'inflation. Elles peuvent également être liées à l'individu. Il s'agit de la dynamique des salaires et celle des prestations.

3.2.1. Le taux d'inflation

La dynamique de l'inflation et la valeur prise par celle-ci constituent la première marche du modèle de WILKIE (cf. WILKIE [1995]). Le niveau de nombreux autres paramètres découle de l'inflation (taux de dividende, taux d'intérêt,...).

Ce modèle est construit à partir de l'indice des prix à la consommation (et non pas directement en prenant le taux d'inflation).

De la trajectoire de l'indice des prix à la consommation on déduit celle du taux d'inflation.

Ce modèle de taux court sera étendu en temps continu (cf. annexes).

A partir du processus ainsi défini, on peut déterminer le taux d'inflation qui prévaut à l'instant t pour une durée $T-t$.

3.2.1.1. De l'indice des prix au taux d'inflation

Soit Ind_t l'indice des prix à la consommation à la date t .

Wilkie modélise la dynamique de ce processus de la manière suivante :

$$\Delta \ln Ind_t = \mu + \alpha_1 (\Delta \ln Ind_{t-1} - \mu) + \sigma_1 \varepsilon_{1,t}$$

Avec

$$\Delta \ln Ind_t = \ln Ind_t - \ln Ind_{t-1}$$

$$\{\varepsilon_{1,t}\} \sim N(0,1)$$

De cette expression, on déduit le taux d'inflation :

$$\Pi_t = \ln \left(\frac{Ind_t}{Ind_{t-1}} \right)$$

En remplaçant le taux d'inflation dans l'équation du modèle de WILKIE, on obtient :

$$\Pi_t = \bar{\pi} + \alpha_1 (\Pi_{t-1} - \bar{\pi}) + \sigma_1 \varepsilon_{1,t}$$

Avec $\mu \equiv \bar{\pi}$

Cette formulation comporte un mécanisme de correction d'erreur : si le taux d'inflation s'écarte de son niveau de long terme, celui-ci est ramené progressivement à l'équilibre. Ce retour se fait à une vitesse exponentielle (α_1^t) et de manière sinusoïdale si le coefficient α_1 est négatif.

Initialement, WILKIE a appliqué ce modèle aux données empiriques de l'indice des prix du Royaume-Uni (période 1919-1982). Toutefois, il a élargi son étude en remarquant que dans plusieurs pays de l'OCDE l'indice des prix à la consommation suivait un processus AR(1).

La simplicité du modèle le rendit très populaire.

Dans la phase d'estimation du modèle d'inflation, il convient de porter une attention particulière à la période d'observation retenue. En effet, si l'on retient l'indice des prix en France entre 1970 et 1985, on ajustera les paramètres (supposés constants dans le temps) à la fois dans une période d'hyperinflation et dans une période de désinflation.

3.2.1.2. Le taux d'inflation de court terme

$$\begin{cases} \Pi_t = \bar{\pi} + \alpha_1 \times (\Pi_{t-1} - \bar{\pi}) + \sigma_1 \times \varepsilon_{1,t} \\ d\Pi(t) = (1 - \alpha_1) \times (\bar{\pi} - \Pi(t)) dt + \sigma_1 \times dB(t) \end{cases}$$

Où :

- $\bar{\pi}$ est le taux d'inflation d'équilibre de long terme ;
- α_1 le coefficient de retour à l'équilibre ;
- σ_1 la volatilité ;
- $\{\varepsilon_{1,t}\}$ un bruit blanc normal ;
- $\{B(t)\}$ un mouvement brownien défini sur un espace donné $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
 - à accroissements indépendants et normaux (d'espérance nulle et de variance dt) ;
 - $B(0) = 0$;
 - $\mathcal{F}(t) = \sigma(B(s), s \leq t)$;
 - P la mesure de probabilité du monde réel.

On retrouve ici la formulation du processus de diffusion décrivant l'inflation donnée par MJ. BRENNAN et Y. XIA [2002].

L'expression des deux premiers moments du processus de diffusion décrivant l'inflation est donnée ci-après. On retrouvera en annexe les démonstrations.

Espérance :

$$\begin{aligned} E[\Pi(t)] &= \bar{\pi} + (\Pi(0) - \bar{\pi}) \times \exp(-(1 - \alpha_1)t) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} E[\Pi(t)] &= \bar{\pi} \end{aligned}$$

Variance :

$$V[\Pi(t)] = \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} - \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} \times \exp(-2(1-\alpha_1)t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V[\Pi(t)] = \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)}$$

Covariance :

$$t \leq s, \text{cov}[\Pi(t), \Pi(s)] = \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} \times [\exp((1-\alpha_1)(t-s)) - \exp(-(1-\alpha_1)(t+s))]$$

$$t \leq s, \lim_{t,s \rightarrow +\infty} \text{cov}[\Pi(t)] = 0$$

Loi du processus :

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{loi}} N\left(\bar{\pi}, \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)}\right)$$

3.2.1.3. Le taux d'inflation de long terme

Considérons que le niveau général des prix soit normé à l'unité à l'instant initial.

On a :

$$\exp(\Pi(t, T)(T-t)) = E\left[\exp\left(\int_t^T \Pi(u) du / \mathcal{F}(t)\right)\right]$$

En résolvant cette équation (cf. annexes), on obtient :

$$\boxed{\Pi(t, T) = \frac{v(t, T)}{T-t} \Pi(t) + \frac{\ln v(t, T)}{T-t}}$$

Où,

$$v(t, T) = \frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)(T-t))}{1-\alpha_1}$$

$$v(t, T) = \exp\left(-\left(v(t, T) - T + t\right) \frac{(1-\alpha_1)\bar{\pi} + \frac{\sigma_1^2}{2}}{(1-\alpha_1)^2} - \frac{\sigma_1^2}{4(1-\alpha_1)} (v(t, T))^2\right)$$

3.2.2. Les taux de croissance des prestations

La norme IAS prend en compte la différence entre les prestations versées immédiatement au salarié (au premier rang desquelles le salaire lui-même) et les prestations différées (décalage supérieur à un an).

La seconde série de prestations est déterminée, en générale, par la première. En effet, dans un régime à prestations définies (Art. 39 du CGI ou Art. 115 de la loi du 31 août 2003 portant réforme des retraites), qui est le cas que nous étudions, le montant de la prestation de retraite est calculée en fonction de la trajectoire des salaires perçus lors de la période d'activité.

3.2.2.1. Les prestations immédiates : les salaires

Le montant de la première (ou de l'unique) prestation qui sera versé au terme par le régime dépend du déroulement de carrière de l'individu considéré. Plus précisément, on prend en compte les salaires perçus pendant toute sa carrière.

Par exemple, le montant de la prestation de retraite peut être basée sur les vingt cinq meilleures années ou égal à 2% du dernier salaire par année d'ancienneté.

A un instant donné, il est possible d'observer la rétribution d'un employé. En théorie, la trajectoire du salaire antérieure à cette date est sensée être connue. Pour autant, en pratique, le travail qui consiste à rechercher, pour chaque membre du régime, la série des rémunérations passées est difficile à mener.

Pour déterminer non seulement l'évolution future, mais aussi pour reconstituer le salaire passé, on utilise un modèle qui donne le taux de croissance du salaire d'une tête d'âge x à l'instant t .

Ce taux de croissance dépend de trois facteurs : l'inflation, l'évolution du pouvoir d'achat et le déroulement de carrière (avancement, prise de responsabilité).

Les termes correspondants à l'évolution du pouvoir d'achat et au déroulement de carrière ne sont pas considérés ici comme aléatoire.

Dans une économie développée, l'accroissement du pouvoir d'achat est la résultante de deux éléments : l'inflation et le partage de richesse s'opérant entre le capital et le travail. Seule la première composante est modélisée ici.

On observe généralement (*cf.* ARRONDEL [2003]) que l'évolution du salaire suit une courbe exponentielle inverse pour un cadre (avec de fortes augmentation de la rémunération en début de carrière) et est quasi-linéaire pour un non cadre.

On pourra, par exemple, se donner *a priori* une courbe de taux d'augmentation de salaire par âge et par catégorie sociale professionnelle. Celle-ci peut être ajustée sur des observations.

En négligeant le terme croisé inflation/évolution du pouvoir d'achat et déroulement de carrière, on peut simplifier l'écriture précédente et retenir :

$$\begin{cases} C_{x,t} = \Pi_t + ec_x \\ dC(x,t) = d\Pi(t) + dec(x) \end{cases}$$

3.2.2.2. Les prestations futures

Si le régime garantit le pouvoir d'achat des prestations payées, alors il convient de revaloriser au niveau de l'inflation les flux monétaires versés.

$$\begin{cases} R_t = (1 + \Pi_t) - 1 \\ dR(t) = d\Pi(t) \end{cases}$$

A défaut, le montant nominal des prestations profite des participations aux bénéfices.

3.3. Les variables démographiques

On considère deux types de variables démographiques : la durée d'activité du salarié et l'âge de départ en retraite.

3.3.1. La durée d'activité

La durée d'activité, ou la durée de présence, du salarié dans une entreprise est une combinaison de deux variables sous-jacentes. La première synthétise la vie humaine et la seconde regroupe toutes autres causes de départ.

Il convient de modéliser chacune de ces deux variables sous-jacentes pour appréhender la variable d'intérêt « durée d'activité dans l'entreprise ».

3.3.1.1. La durée de vie du salarié

Soit T_1 la variable aléatoire représentant la durée de vie humaine.

Les tables réglementaires, annexées au code des Assurances ou au code de la Mutualité, donnent une expression non paramétrique de la mortalité. La série $\{l_x, x = 0, \dots, +\infty\}$ représente le nombre de vivants à un âge donné d'une population initiale.

L'assureur doit utiliser ces tables pour le calcul des provisions mathématiques.

Il est possible d'utiliser des tables d'expérience (à condition quelles soient plus « lourdes », c'est-à-dire quelle reflète une espérance de vie plus longue que les tables réglementaires).

L'utilisation d'une des tables réglementaires ou d'une table d'expérience qui n'est pas exactement construite sur la population du régime présente deux types de risque :

- un risque spécifique lié aux fluctuations d'échantillonnage. Ce risque est maîtrisé au travers de la mutualisation,
- un risque systématique lié à l'erreur de prédiction du niveau de la mortalité future et qui se prête à des techniques de valorisation particulière (voir CAIRNS, BLAKE ET DOWD [2004]). Ce risque existe même si l'on utilise une table d'expérience et/ou une table qui tient compte de la dérive de mortalité. La réalisation de la mortalité future est inconnue.

Ce dernier effet peut être pris en compte en considérant que le taux instantané de mortalité n'est plus une variable déterministe, mais aléatoire.

Soit $h_1(x, t)$ le taux instantané de mortalité d'une tête d'âge x à la date t .

Pour SCHRAGER [2004], le taux instantané de mortalité est une fonction affine de M facteurs non observables.

$$h_1(x, t) = g_0(t) + \sum_{i=1}^M Y_i(t) g_i(x)$$

La dynamique des M facteurs est donnée par le processus de diffusion (de dimension M) suivant :

$$\begin{aligned} dY(t) &= A(\theta - Y(t))dt + \Sigma \sqrt{V_t} dB_t \\ Y(0) &= \bar{Y} \\ V_{t,(ii)} &= \alpha_i + \beta'_i Y(t), i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Où B_t est un mouvement brownien de dimension M .

En notant $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)'$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)'$, on a :

$$V_t = \text{diag}(\alpha + \beta Y(t))$$

La fonction de survie de la durée de vie aléatoire est :

$$S_1(x, t) = E \left[\exp \left(- \int_0^t h_1(x+u, u) du \right) \right]$$

Par analogie avec l'analyse de la structure par terme des taux d'intérêt et le rôle joué par les zéros coupon (*cf. infra*), on déduit que la fonction de survie peut s'écrire sous la forme :

$$S_1(x, t) = \exp[\gamma(x, t) - \delta(x, t)Y(t)]$$

Là encore, les fonctions $\gamma(\bullet)$ et $\delta(\bullet)$ vérifient une équation aux dérivées partielles (avec des conditions initiales et terminales).

La mise en œuvre de ce modèle n'est pas très aisée. SCHRAGER [2004] dans son article fait d'ailleurs plusieurs hypothèses restrictives (absence de corrélation entre les facteurs et espérance des facteurs nulle) pour réussir à estimer les paramètres restants. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas retenu ce type de modélisation de la mortalité dans la suite de développements.

3.3.1.2. La durée de présence dans l'entreprise

La durée d'existence d'un salarié dans une entreprise, hors cause de décès, peut être appréciée de la même manière que la durée de vie humaine, avec une table de mortalité indiquant, pour chaque âge, le nombre d'individus présents dans l'entreprise.

Pour construire cette table, il faut recourir la modélisation un peu plus formelle de la durée de présence dans l'entreprise d'un salarié (hors cause de décès).

Soit T_2 la durée aléatoire de présence, à l'exclusion du décès, dans l'entreprise d'un individu entré à l'âge e .

3.3.1.2.1. Définitions

On note $S_2(t), t \in \mathbb{R}_+$ la fonction de survie de cette durée (*i.e.* l'employé est toujours présent dans l'entreprise à l'instant t).

Supposons (forme assez classique dans l'analyse de variable de durée) que T_2 suive une loi Weibull.

Dans toutes les formulations qui suivent, on peut aisément passer de l'axe des « instants » à l'axe des « âges » par une simple translation.

On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ S_2(t) &= \Pr(T_2 > t / T_2 > 0) \\ &= \frac{\Pr[(T_2 > t) \cap (T_2 > 0)]}{\Pr(T_2 > 0)} \\ &= \frac{\Pr(T_2 > t)}{\Pr(T_2 > 0)} \\ &= \frac{\exp(-\beta(t+e)^\gamma)}{\exp(-\beta e^\gamma)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall t \in IR_+, S_2(t) = \exp(\beta e^\gamma) \times \exp(-\beta(t+e)^\gamma)$$

De cette forme de la fonction de survie découle la densité de probabilité.

$$\forall t \in IR_+,$$

$$f_2(t) = -\frac{dS_2}{dt}(t) = \exp(\beta e^\gamma) \times \beta \gamma \times (t+e)^{\gamma-1} \times \exp(-\beta(t+e)^\gamma)$$

La fonction de « hasard » représente le taux instantané de sortie (hors décès) à un âge donné.

Cette fonction notée h_2 se déduit de la fonction de survie :

$$\forall t \in IR_+,$$

$$h_2(t) = \frac{-\frac{d}{dt} S_2(t)}{S_2(t)} = \beta \gamma \times (t+e)^{\gamma-1}$$

3.3.1.2.2. Propriétés

On donne les contraintes suivantes aux paramètres :

- pour obtenir les « bonnes propriétés »

$$\beta > 0$$

$$\gamma > 0$$

- on observe qu'un salarié plutôt jeune a une mobilité forte et que salarié proche de la retraite est sédentaire. La rotation diminue donc avec l'âge. Cela impose que $\gamma < 1$ (« hazard function » décroissante).

On a alors,

$$\begin{cases} S_2(0) = 1 \\ S_2(+\infty) = 0 \\ \frac{d}{dt} S_2(t) \leq 0, \forall t \in IR_+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(t) \geq 0, \forall t \in IR_+ \\ \int_0^{+\infty} f_2(t) dt = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} h_2(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ \frac{d^2}{dt^2} h_2(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

3.3.1.3. La combinaison des deux durées

On cherche à déterminer la valeur de l'engagement d'une entreprise envers son salarié. Cela signifie qu'au moment du départ en retraite de celui-ci, le capital constitutif de ses droits sort du fonds des actifs pour alimenter les fonds des retraités.

La date de calcul est donc inférieure à la date de départ en retraite.

Soit T la durée aléatoire d'activité d'un individu. Cette durée comprend les deux effets précédents.

On a : $T = \min(T_1, T_2), T_1 \perp T_2$.

Il s'agit d'un modèle à risques concurrents : la réalisation d'une des deux durées censure la seconde.

$$\begin{aligned} S(t) &= \Pr(T > t / T > 0) \\ &= \Pr((T_1 > t / T_1 > 0) \cap (T_2 > t / T_2 > 0)) \\ &= \Pr(T_1 > t / T_1 > 0) \times \Pr(T_2 > t / T_2 > 0) \\ &= S_1(t) \times S_2(t) \end{aligned}$$

3.3.2. L'âge de jouissance des prestations

Le choix du départ en retraite est une décision personnelle fortement contrainte par la réglementation (âge légal de la retraite), par les dispositions conventionnelles (convention collective) et par les conditions générales du régime.

Ce qui incite principalement un individu à travailler plus ou moins longtemps c'est le gain ou les pénalités qu'il peut avoir s'il cesse son activité professionnelle avant ou après l'âge légal de la retraite.

L'abattement subi en cas de départ anticipé peut être tempéré par les paramètres familiaux (enfants à charge, ...) ou des mécanismes de préretraite.

En général, la mise en place de la prestation ne peut pas se faire avant la liquidation des droits dans le régime général.

On observe (*cf.* KALFON et PEUBEZ [2004]) que les non cadres cherchent à se retirer de la vie active dès que possible (départ volontaire, préretraite), alors qu'un cadre cesse son activité plus tard, privilégiant ainsi un meilleur niveau de son revenu de remplacement. Cette situation

est d'ailleurs actée dans certains régimes (par exemple, dans l'armée, les limites d'âge dans les grades sont plus élevés pour les officiers supérieurs et les officiers).

Compte tenu des conséquences financières importantes en cas de départ anticipé et du peu d'avantage en cas de poursuite de l'activité au-delà de l'âge légal, nous considérons ici que l'âge de départ en retraite est un paramètre égal à 65 ans. Rien n'empêchera dans les applications numériques de faire varier ce paramètre pour mesurer la sensibilité de la valeur de l'engagement.

Intuitivement, tout laisserait à penser que les deux situations sont identiques (même valeur de l'engagement) entre toucher une rente moins élevée plus longtemps et percevoir une prestation plus forte pendant moins de temps. C'est ce qui prévaut dans le cas de rentes viagères différées.

Ici, ce sont les conditions de dégradation ou d'amélioration de la prestation de retraite en fonction de l'âge de cessation d'activité par rapport à l'âge légal de départ qui valident ou invalident cette équivalence.

3.4. Les variables financières

Dans les variables financières, on considère le taux d'actualisation des prestations (ou taux du passif) et les taux de rendement des actifs.

3.4.1. Le taux d'actualisation des prestations

Deux types de taux interviennent dans l'actualisation des prestations : le taux court « forward » et les taux longs « futurs ». A partir du premier, on peut obtenir les seconds.

3.4.1.1. Le taux court

Le taux d'actualisation est, ici, égal au taux d'intérêt réel « forward ».

On retient le modèle à facteur de COX, INGERSOLL et ROSS (CIR).

$$\begin{cases} A_t = A_{t-1} + \alpha_2 \times (\bar{a} - A_{t-1}) + \sigma_2 \times \sqrt{A_{t-1}} \times \varepsilon_{2,t} \\ dA(t) = \alpha_2 \times (\bar{a} - A(t))dt + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times dB(t) \end{cases}$$

La définition du mouvement brownien $\{B(t)\}$ est la même que précédemment.

Les principaux résultats sur ce processus sont rappelés ci-dessous (démonstrations en annexe).

Espérance :

$$\begin{aligned} E(A(t)) &= \bar{a} + (A(0) - \bar{a})\exp(-\alpha_2 t) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} E(A(t)) &= \bar{a} \end{aligned}$$

Variance :

$$V(A(t)) = \frac{\bar{a}\sigma^2}{2\alpha_2} + \frac{\sigma^2}{\alpha_2} \times (A(0) - \bar{a}) \times \exp(-\alpha_2 t) + \frac{\sigma^2}{\alpha_2} \times \left(\frac{1}{2}\bar{a} - A(0) \right) \times \exp(-2\alpha_2 t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(A(t)) = \frac{\bar{a}\sigma^2}{2\alpha_2}$$

Loi du processus :

$$A(t) \xrightarrow{\text{loi}} \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} X_{\left(\frac{4\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right)} = \frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \Gamma\left(\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right)$$

3.4.1.2. Les taux longs

On note $A(t, T)$ le taux d'intérêt composé en continue qui prévaut à la date t pour une durée $T-t$. L'équivalent en temps discret est noté $A_{t,T}$.

$$\begin{cases} (1 + A_{t,T})^{T-t} = \prod_{s=t+1}^T (1 + A_s) \\ A(t, T) = \frac{\mu(t, T)}{T-t} \times A(t) - \frac{1}{T-t} \ln(\lambda(t, T)) \end{cases}$$

Où,

$$\lambda(t, T) = \left[\frac{2\gamma \exp\left((\alpha_2 + \gamma) \times \frac{T-t}{2}\right)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}}$$

$$\mu(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha_2^2 + 2\sigma_2^2}$$

A partir de cette formule, il est possible d'obtenir toutes les formes envisageables de la courbe des taux (ascendante, descendante, avec bosse).

Le taux long dépend linéairement du taux court. Cela signifie que le taux court détermine le niveau de la courbe. La forme quant à elle est donnée par la variable temps.

3.4.2. Le taux de rendement des actifs financiers

On peut modéliser trois types d'actifs qui nous seront utiles par la suite :

- les actions,
- les obligations synthétiques,
- les obligations indexées sur l'inflation.

3.4.2.1. Les actions

De manière très classique (*cf.* BLACK et SCHOLLES [1973]), on retient une dynamique du cours des actions de type mouvement brownien géométrique, avec une dérive et une variance constantes :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma \eta_1(t)$$

En se donnant une condition initiale $s(0)$, on a (*cf.* annexes) :

$$S(t) = s(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \eta_1(t) \right\}$$

La formulation en temps discret de l'évolution du prix des actions est (schéma d'EULER) :

$$\ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \mu + \sigma \eta_{1,t}$$

3.4.2.2. Les obligations synthétiques

Une obligation est un actif financier qui verse, généralement à intervalles réguliers, un flux financier (coupons et principal).

Le même flux peut être reconstitué à l'aide de zéro coupons. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, détenir l'obligation ou l'ensemble des zéro coupons donnant le même échéancier est équivalent. Le prix est donc identique.

De manière évidente, si le prix d'une obligation est moins élevé que le prix du portefeuille constitué des zéro coupons procurant le même flux financier, alors il suffirait d'acheter cette obligation et de vendre le portefeuille. Les flux futurs de cette position s'annulent. On réalise un gain immédiat (une opportunité d'arbitrage). Cette situation, si elle existe à un certain instant ne saurait perdurer : la demande d'obligation augmenterait et celle des zéro coupons diminuerait. Les prix s'équilibreraient.

Soit $\begin{cases} O_t \\ O(t) \end{cases}$, le prix à la date t d'une obligation de maturité T qui paye un coupon i_f (taux facial) et de nominal normé à l'unité.

$$\begin{cases} O_t = i_f \times \sum_{k=t+1}^T P_{t,k} + P_{t,T} \\ O(t) = i_f \times \int_t^T P(t,u) du + P(t,T) \end{cases}$$

Où $\begin{cases} P_{t,u} \\ P(t,u) \end{cases}$, $t \leq u$ est le prix d'un zéro coupon de maturité T qui verse un à l'échéance.

3.4.2.3. Les obligations indexées sur l'inflation

Les marchés financiers ont répondu au besoin de couverture contre le risque d'inflation formulé par certains intervenants (dont les assureurs qui possèdent dans leur portefeuille des passifs indexés sur l'inflation) en proposant un instrument financier particulier : l'obligation indexée sur l'inflation.

Le fonctionnement de ce produit est assez simple. La valeur de chaque flux financier effectivement payé par l'obligation indexée est égale à la valeur nominale (déterminée lors de l'achat du titre) pondéré par un coefficient d'indexation. Ce coefficient est calculé quotidiennement.

Considérons un indice représentant l'évolution de l'inflation qui sert de base à la valorisation des coupons et du principal de l'obligation indexée (par exemple l'indice des prix à la consommation de l'INSEE). La valeur de cet indice est Ind_t le jour de l'achat du titre et Ind_{t+h} lors du paiement d'un des flux.

Le coefficient d'indexation est égal au ratio des deux valeurs de l'indice.

Pour le cas des AOTi (qui représentent 20% des OAT émises), ce coefficient est égal à :

$$\text{Max} \left(1, \frac{Ind_{t+h}}{Ind_t} \right)$$

L'instrument couvre le risque d'inflation. En cas de déflation, l'obligation paye la valeur nominale du coupon ou du principal.

BRENNAN et XIA [2004] modélisent le prix d'une obligation indexée construite à partir d'une combinaison linéaire de quatre mouvements browniens corrélés (représentant le taux d'intérêt, le taux d'inflation, le cours des actions et un aléa).

Cette approche a le double inconvénient d'être complexe et difficile à mettre en place (estimation des paramètres).

Il sera possible de considérer le prix d'une obligation indexé de la même manière que pour une obligation traditionnelle. La valeur du flux monétaire généré par l'obligation indexée sera évaluée en considérant le coefficient d'indexation issu de la dynamique de l'inflation retenue plus haut. Cette méthode a l'avantage d'être plus facile à mettre en œuvre, et ne nécessite pas d'estimation supplémentaire (les paramètres des modèles de taux d'intérêt et de taux d'inflation étant déjà estimés).

Soit $\begin{cases} OI_t \\ OI(t) \end{cases}$, le prix à la date t d'une obligation de maturité T qui paye un coupon i_f (taux facial) et de nominal 1.

$$\begin{cases} OI_t = i_f \times \sum_{k=t+1}^T (1 + \Pi_{t,k})^{k-t} P_{t,k} + (1 + \Pi_{t,T})^{T-t} P_{t,T} \\ OI(t) = i_f \times \int_t^T (1 + \Pi(t,k)) P(t,u) du + (1 + \Pi(t,T)) P(t,T) \end{cases}$$

3.5. *L'engagement aléatoire de l'entreprise envers son salarié*

Notre variable d'intérêt, c'est-à-dire la valeur de l'engagement que l'on cherche à mesurer, est notée VA pour un individu donné.

$$\begin{cases} VA_t \stackrel{def}{=} \sum_{k>t} \frac{1}{[1 + A_{t,T}]^{k-t}} \times F_k \times \delta_{t,k} \\ VA(t) \stackrel{def}{=} \int_t^{+\infty} \frac{1}{[1 + A(t,k)]^{k-t}} \times F(k) \times \delta(t,k) dk \end{cases}$$

Où, $\begin{cases} \delta_{t,k}, \delta(t,k) = 1 & \text{si l'individu est présent en } k, \text{ sachant qu'il est en } t \\ \delta_{t,k}, \delta(t,k) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4. Annexes

4.1. Les propriétés de la variable aléatoire $\delta_{t,k}$

$$\Delta_{\delta_{t,k}} = \{0,1\}$$

$$\Pr(\delta_{t,k} = 1) = \Pr(T > k / T > t)$$

$$E(\delta_{t,k}) = \Pr(T > k / T > t) \times 1 + \Pr(T \leq k / T > t) \times 0 = \Pr(T > k / T > t), t < k$$

$$\begin{aligned} V(\delta_{t,k}) &= E[(\delta_{t,k})^2] - [E(\delta_{t,k})]^2 \\ &= \Pr(T > k / T > t) - [\Pr(T > k / T > t)]^2 \\ &= \Pr(T > k / T > t) \times [1 - \Pr(T > k / T > t)] \end{aligned}$$

Compte tenu du caractère irréversible de la mort et du départ de l'entreprise (un salarié quittant l'entreprise, puis y revenant par la suite sera considéré deux fois), on a, pour deux dates (j,k) avec $t < j < k$:

$$\begin{aligned} Cov(\delta_{t,j}, \delta_{t,k}) &= E[(\delta_{t,j}) \times (\delta_{t,k})] - E(\delta_{t,j}) \times E(\delta_{t,k}) \\ &= E(\delta_{t,k}) - E(\delta_{t,j}) \times E(\delta_{t,k}) \\ &= E(\delta_{t,k}) \times [1 - E(\delta_{t,j})] \\ &= \Pr(T > k / T > t) \times [1 - \Pr(T > j / T > t)] \end{aligned}$$

Les mêmes résultats seront obtenus en temps continu.

4.2. Démonstration des principaux résultats du processus d'inflation en temps continu

$$d\Pi(t) = (1 - \alpha_1) \times (\bar{\pi} - \Pi(t)) dt + \sigma_1 \times dB(t)$$

4.2.1. Résolution de l'équation différentielle

Soit $f : (\Pi(t), t) \rightarrow -(\bar{\pi} - \Pi(t)) \times \exp((1 - \alpha_1)t)$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial \Pi(t)}(\Pi(t), t) = \exp((1 - \alpha_1)t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \Pi(t)^2}(\Pi(t), t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\Pi(t), t) = -(1 - \alpha_1)(\bar{\pi} - \Pi(t)) \times \exp((1 - \alpha_1)t)$$

En appliquant le lemme d'ITO :

$$\begin{aligned} df(\Pi(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial \Pi(t)}(\Pi(t), t) \times d\Pi(t) + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial \Pi(t)^2}(\Pi(t), t) \sigma_1^2 dt + \frac{\partial f}{\partial t}(\Pi(t), t) dt \\ &= \exp((1 - \alpha_1)t) \times d\Pi(t) - (1 - \alpha_1)(\bar{\pi} - \Pi(t)) \times \exp((1 - \alpha_1)t) dt \\ &= \exp((1 - \alpha_1)t) \times \sigma_1 \times dB(t) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} -(\bar{\pi} - \Pi(t)) \times \exp((1 - \alpha_1)t) + (\bar{\pi} - \Pi(0)) &= \sigma_1 \int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u) \\ \Leftrightarrow \Pi(t) \times \exp((1 - \alpha_1)t) &= \bar{\pi} \times \exp((1 - \alpha_1)t) - (\bar{\pi} - \Pi(0)) + \sigma_1 \int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u) \\ \Leftrightarrow \Pi(t) &= \bar{\pi} - \exp(-(1 - \alpha_1)t) \times \left\{ (\bar{\pi} - \Pi(0)) - \sigma_1 \int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u) \right\} \end{aligned}$$

4.2.2. Le calcul de l'espérance

En reprenant la forme ci-dessus, on a :

$$E[\Pi(t)] = \bar{\pi} - \exp(-(1 - \alpha_1)t) \times (\bar{\pi} - \Pi(0))$$

$$E[\Pi(t)] = \bar{\pi} + \exp(-(1 - \alpha_1)t) \times (\Pi(0) - \bar{\pi})$$

4.2.3. Le calcul de la covariance

Toujours avec l'expression trouvée précédemment, on a :

$$\begin{aligned} & t \leq s, \\ & \text{cov}(\Pi(t), \Pi(s)) \\ &= \text{cov} \left(\exp(-(1 - \alpha_1)t) \times \sigma_1 \int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u); \exp(-(1 - \alpha_1)s) \times \sigma_1 \int_0^s \exp((1 - \alpha_1)v) \times dB(v) \right) \\ &= \sigma_1^2 \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times \text{cov} \left(\int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u); \int_0^s \exp((1 - \alpha_1)v) \times dB(v) \right) \end{aligned}$$

Les accroissements d'un mouvement brownien sont indépendants et normaux d'espérance nulle et de variance dt .

$$\begin{aligned} & s \leq t, \\ & \text{cov}(\Pi(t), \Pi(s)) \\ &= \sigma_1^2 \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times \text{cov} \left(\int_0^t \exp((1 - \alpha_1)u) \times dB(u); \int_0^s \exp((1 - \alpha_1)v) \times dB(v) \right) \\ &= \sigma_1^2 \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times \int_0^t \int_0^s \exp((1 - \alpha_1)(u + v)) \times \text{cov}(dB(u), dB(v)) \\ &= \sigma_1^2 \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times \int_0^s \exp(2(1 - \alpha_1)u) du \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2(1 - \alpha_1)} \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times (\exp(2(1 - \alpha_1)s) - 1) \end{aligned}$$

$$s \leq t, \text{cov}(\Pi(t), \Pi(s)) = \frac{\sigma_1^2}{2(1 - \alpha_1)} \times \exp(-(1 - \alpha_1)(t + s)) \times (\exp(2(1 - \alpha_1)s) - 1)$$

4.2.4. Résultats plus généraux

Plus généralement, pour $s < t$, on a :

$$E[\Pi(t)/\mathcal{F}(s)] = \bar{\pi} + \exp(-(1 - \alpha_1)(t - s)) \times (\Pi(0) - \bar{\pi})$$

$$V(\Pi(t)/\mathcal{F}(s)) = \frac{\sigma_1^2}{2(1 - \alpha_1)} (1 - \exp(-2(1 - \alpha_1)(t - s)))$$

4.3. Construction du taux d'inflation de long terme

- Soit la variable aléatoire $\int_0^t \Pi(u) du$.

Cette variable aléatoire est une somme de variables normales. Elle suit donc elle aussi une loi normale.

Ses paramètres sont :

Espérance :

$$E\left[\int_0^t \Pi(u) du\right] = \int_0^t \bar{\pi} - \exp(-(1 - \alpha_1)u) \times (\bar{\pi} - \Pi(0)) du$$

$$= \bar{\pi}t + \frac{\bar{\pi} - \Pi(0)}{1 - \alpha_1} \times (\exp(-(1 - \alpha_1)t) - 1)$$

$$= \bar{\pi}t - (\bar{\pi} - \Pi(0)) \times \frac{1 - \exp(-(1 - \alpha_1)t)}{1 - \alpha_1}$$

Pour $s \leq t$ on a :

$$E\left[\int_s^t \Pi(u) du / \mathcal{F}(s)\right] = \bar{\pi}(t - s) - (\bar{\pi} - \Pi(s)) \times \frac{1 - \exp(-(1 - \alpha_1)(t - s))}{1 - \alpha_1}$$

Variance :

$$\begin{aligned}
V\left[\int_0^t \Pi(u) du\right] &= 2 \int_0^t \int_0^u \text{cov}(\Pi(u), \Pi(v)) dv du \\
&= 2 \int_0^t \int_0^u \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} \times \exp(-(1-\alpha_1)(u+v)) \times (\exp(2(1-\alpha_1)v) - 1) dv du \\
&= \frac{\sigma_1^2}{1-\alpha_1} \times \int_0^t \exp(-(1-\alpha_1)u) \left(\int_0^u \exp((1-\alpha_1)v) dv - \int_0^u \exp(-(1-\alpha_1)v) dv \right) du \\
&= \frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} \times \int_0^t 1 - 2 \exp(-(1-\alpha_1)u) + \exp(-2(1-\alpha_1)u) du \\
&= \frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} \left(t - \frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)t)}{1-\alpha_1} + \frac{\exp(-(1-\alpha_1)t)}{1-\alpha_1} - \frac{\exp(-2(1-\alpha_1)t)}{2(1-\alpha_1)} + \frac{1}{2(1-\alpha_1)} \right) \\
&= \frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} \left(t - \frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)t)}{1-\alpha_1} \right) - \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} \left(\frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)t)}{1-\alpha_1} \right)^2
\end{aligned}$$

Pour $s \leq t$ on a :

$$V\left[\int_s^t \Pi(u) du / \mathcal{F}(s)\right] = \frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} \left(t - s - \frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)(t-s))}{1-\alpha_1} \right) - \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} \left(\frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)(t-s))}{1-\alpha_1} \right)^2$$

En posant $v(s, t) = \frac{1 - \exp(-(1-\alpha_1)(t-s))}{1-\alpha_1}$, $s < t$, on obtient, pour $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
E\left[\int_s^t \Pi(u) du / \mathcal{F}(s)\right] &= \bar{\Pi}(t-s) - (\bar{\Pi} - \Pi(s)) \times v(s, t) \\
V\left[\int_s^t \Pi(u) du / \mathcal{F}(s)\right] &= \frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} (t-s-v(s, t)) - \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)} (v(s, t))^2
\end{aligned}$$

- Résultat intermédiaire : la transformée de LAPLACE d'une variable normale.

Soient $X \sim N(0,1)$ et $\Psi_X : \begin{matrix} IR \rightarrow IR \\ \lambda \rightarrow E(\exp(\lambda X)) \end{matrix}$ la transformée de Laplace.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in IR, \Psi_X(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2 + \lambda u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u-\lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2} du \\ &= e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u-\lambda)^2} du \\ &= e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \end{aligned}$$

Soit $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in IR, \Psi_Y(\lambda) &= E(e^{\lambda Y}) \\ &= E(e^{\lambda \mu + \lambda \sigma^2 X}) \\ &= e^{\lambda \mu} E(e^{\lambda \sigma^2 X}) \\ &= e^{\lambda \mu} e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \\ &= e^{e^{\lambda \mu} + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 1$

$$\boxed{\Psi_Y(1) = E(e^Y) = e^{E(Y) + \frac{1}{2}V(Y)}}$$

- Le taux d'inflation de long terme

$t < T$

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\int_t^T \Pi(u) du / F(t)\right)\right] &= \exp\left\{E\left(\int_t^T \Pi(u) du / F(t)\right) + \frac{1}{2}V\left(\int_t^T \Pi(u) du / F(t)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\bar{\Pi}(T-t) - (\bar{\Pi} - \Pi(t)) \times v(t, T) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2}{(1-\alpha_1)^2} T - t - v(t, T)\right) - \frac{\sigma_1^2}{2(1-\alpha_1)}(v(t, T))\right\} \\ &= \exp(v(t, T)\Pi(t)) \times \exp\left(- (v(t, T) - T + t) \frac{(1-\alpha_1)\bar{\Pi} + \frac{\sigma_1^2}{2}}{(1-\alpha_1)^2} - \frac{\sigma_1^2}{4(1-\alpha_1)}(v(t, T))\right) \end{aligned}$$

En notant

$$v(t, T) = \exp \left(- (v(t, T) - T + t) \frac{(1 - \alpha_1)^2 \bar{\pi} + \frac{\sigma_1^2}{2}}{(1 - \alpha_1)^2} - \frac{\sigma_1^2}{4(1 - \alpha_1)} (v(t, T) - T) \right)$$

On a donc :

$$\Pi(t, T) = \frac{1}{T - t} \ln v(t, T) + \frac{1}{T - t} v(t, T) \Pi(t)$$

4.4. Démonstration des principaux résultats du modèle CIR

$$dA(t) = \alpha_2 \times (\bar{a} - A(t)) dt + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times dB(t)$$

4.4.1. Le calcul de l'espérance

En intégrant, on a :

$$A(t) = A(0) + \alpha_2 \int_0^t (\bar{a} - A(u)) du + \sigma_2 \int_0^t \sqrt{A(u)} dB(u)$$

$$E(A(t)) = A(0) + \alpha_2 \int_0^t (\bar{a} - E(A(u))) du$$

$$\frac{d}{dt} E(A(t)) = \alpha_2 \times (\bar{a} - E(A(t))) = \alpha_2 \bar{a} - \alpha_2 E(A(t))$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(\alpha_2 t) \times E(A(t))) &= \alpha_2 \times \exp(\alpha_2 t) \times E(A(t)) + \exp(\alpha_2 t) \times \frac{d}{dt} E(A(t)) \\ &= \exp(\alpha_2 t) \times (\alpha_2 \times E(A(t)) + \alpha_2 \bar{a} - \alpha_2 E(A(t))) \\ &= \alpha_2 \bar{a} \times \exp(\alpha_2 t) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(\alpha_2 t) \times E(A(t)) - A(0) &= \alpha_2 \bar{a} \times \int_0^t \exp(\alpha_2 u) du \\ &= \alpha_2 \bar{a} \times \frac{1}{\alpha_2} (\exp(\alpha_2 t) - 1) \\ &= \bar{a} \times (\exp(\alpha_2 t) - 1) \end{aligned}$$

Réolvons en $E(A(t))$

$$E(A(t)) = \bar{a} + \exp(-\alpha_2 t) \times (A(0) - \bar{a})$$

4.4.2. Le calcul de la variance

La formule d'ITO nous donne le résultat suivant :

$$df(A(t)) = f'(A(t))dA(t) + \frac{1}{2} f''(A(t))[dA(t)]^2$$

Avec $f : x \rightarrow x^2$, on a :

$$\begin{aligned} dA(t)^2 &= 2A(t) \times (\alpha_2 \times (\bar{a} - A(t))dt + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times dB(t)) + [\alpha_2 \times (\bar{a} - A(t))dt + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times dB(t)]^2 \\ &= 2\alpha_2 \bar{a} A(t)dt - 2\alpha_2 A(t)^2 dt + 2\sigma_2 A(t)^{\frac{3}{2}} dB(t) + \sigma_2^2 A(t)dt \\ &= (2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2)A(t)dt - 2\alpha_2 A(t)^2 dt + 2\sigma_2 A(t)^{\frac{3}{2}} dB(t) \end{aligned}$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$A(t)^2 - A(0)^2 = (2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2) \int_0^t A(u)du - 2\alpha_2 \int_0^t A(u)^2 du + 2\sigma_2^2 \int_0^t A(u)^{\frac{3}{2}} dB(u)$$

En espérance,

$$E[A(t)^2] - A(0)^2 = (2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2) \int_0^t E[A(u)]du - 2\alpha_2 \int_0^t E[A(u)^2]du$$

En différenciant par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} E[A(t)^2] = (2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2) E[A(t)] - 2\alpha_2 E[A(t)^2]$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(2\alpha_2 t) \times E[A(t)^2]) &= 2\alpha_2 \bar{a} \times \exp(2\alpha_2 t) \times E[A(t)^2] + \exp(2\alpha_2 t) \times \frac{d}{dt} E[A(t)^2] \\ &= 2\alpha_2 \bar{a} \times \exp(2\alpha_2 t) \times E[A(t)^2] + \exp(2\alpha_2 t) \times \{(2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2) E[A(t)] - 2\alpha_2 E[A(t)^2]\} \\ &= \exp(2\alpha_2 t) \times (2\alpha_2 \bar{a} + \sigma_2^2) E[A(t)] \end{aligned}$$

En remplaçant l'espérance par son expression et en intégrant, on a :

$$E[A(t)^2] = \frac{\bar{a}\sigma_2^2}{2\alpha_2} + \bar{a}^2 + (A(0) - \bar{a}) \times \left(\frac{\sigma_2^2}{\alpha_2} - 2\bar{a} \right) \times \exp(-\alpha_2 t) \\ + (A(0) - \bar{a})^2 \times \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2} \times \exp(-2\alpha_2 t) + \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2} \times \left(\frac{1}{2}\bar{a} - A(0) \right) \times \exp(-2\alpha_2 t)$$

Or, $V(A(t)) = E[A(t)^2] - [E(A(t))]^2$, d'où

$$V(A(t)) = \frac{\bar{a}\sigma_2^2}{2\alpha_2} + (A(0) - \bar{a}) \times \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2} \times \exp(-\alpha_2 t) + \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2} \times \left(\frac{1}{2}\bar{a} - A(0) \right) \times \exp(-2\alpha_2 t) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} V(A(t)) = \frac{\bar{a}\sigma_2^2}{2\alpha_2}$$

4.4.3. La loi du processus CIR

La loi du processus peut se construire soit en prenant comme point de départ les processus ORSTEIN-UHLENBECK, soit en appliquant directement des plus général sur les processus de Bessel et carré de Bessel.

4.4.3.1. A partir des processus ORSTEIN-UHLENBECK

Considérons un processus ORSTEIN-UHLENBECK :

$$dX_j(t) = -\frac{1}{2}\beta X_j(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dB_j(t), j = 1, \dots, d$$

Où,

$$X_j(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right)X_j(0) + \frac{1}{2}\sigma \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{2}\beta u\right)dB_j(u)$$

Chacune de ces variables aléatoires sont normalement distribuées, avec :

$$E(X_j(t)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta t\right)X_j(0)$$

$$\text{cov}(X_j(t), X_j(s)) = \frac{1}{4}\sigma^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\beta(t+s)\right) \times \int_0^t \exp(\beta u)du, t \leq s$$

$$j = 1, \dots, d$$

Soit :

$$A(t) \stackrel{def}{=} X_1^2(t) + \dots + X_d^2(t)$$

On définit l'application suivante :

$$f : (x_1, \dots, x_d) \rightarrow x_1^2 + \dots + x_d^2$$

Les dérivées partielles ont les expressions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_d) &= 2x_j \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_1, \dots, x_d) &= \begin{cases} 2, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme d'Itô avec cette application, on obtient :

$$\begin{aligned} dA(t) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_d) dX_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x_1, \dots, x_d) (dX_j(t))^2 \\ &= \sum_{j=1}^d 2X_j(t) \left(-\frac{1}{2} \beta X_j(t) dt + \frac{1}{2} \sigma dB_j(t) \right) + \sum_{j=1}^d \frac{1}{4} \sigma^2 (dB_j(t))^2 \\ &= -\beta A(t) dt + \sigma \sum_{j=1}^d X_j(t) dB_j(t) + \frac{d\sigma^2}{4} dt \\ &= \left(\frac{d\sigma^2}{4} - \beta A(t) \right) dt + \sigma \sqrt{A(t)} \sum_{j=1}^d \frac{X_j(t)}{\sqrt{A(t)}} dB_j(t) \end{aligned}$$

Soit le mouvement brownien suivant (pour « retrouver » un mouvement brownien dans l'équation ci-dessous, il faut effectuer plusieurs calculs intermédiaire et appliquer le théorème de changement de probabilité de GIRSANOV) :

$$B(t) = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{X_j(t)}{\sqrt{A(t)}} dB_j(t)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} dB(t) &= \sum_{j=1}^d \frac{X_j(t)}{\sqrt{A(t)}} dB_j(t) \\ (dB(t))^2 &= dt \end{aligned}$$

Et,

$$dA(t) = \left(\frac{d\sigma^2}{4} - \beta A(t) \right) dt + \sigma \sqrt{A(t)} dB(t)$$

Or, on a l'expression suivante pour le taux court :

$$dA(t) = (\alpha_2 \bar{a} - \alpha_2 A(t)) dt + \sigma_2 \sqrt{A(t)} dB(t)$$

$$\text{Soit } d = \frac{4\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}$$

$$\text{Pour } j = 1, \dots, d-1, X_j(t) \sim N\left(0, \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t))\right)$$

Donc :

$$\sum_{j=1}^{d-1} \left[\frac{X_j(t)}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t))}} \right]^2 \sim \chi_{(d-1)}^2$$

$$\text{Pour } j = d, X_d(t) \sim N\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_2 t\right)\sqrt{A(0)}, \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t))\right)$$

On obtient donc la loi de $\{A(t)\}$:

$$\boxed{\begin{aligned} A(t) &= \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t)) \chi_{\left(\frac{4\alpha_2}{\sigma_2^2}-1\right)}^2 + \left[N\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_2 t\right)\sqrt{A(0)}, \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (1 - \exp(-\alpha_2 t))\right) \right]^2 \\ A(t) &\xrightarrow{\text{loi}} \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} \chi_{\left(\frac{4\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right)}^2 = \frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \Gamma\left(\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right) \end{aligned}}$$

4.4.3.2. A partir des processus de BESSEL

En effectuant un changement de temps, on montre que le processus de CIR est un processus carré de BESSEL.

$$\text{Soit } Y(t) = A\left(\frac{\sigma_2^2 t}{4}\right)$$

$$dY(t) = a \times (\bar{a} - Y(t))dt + 2\sqrt{Y(t)}dB(t)$$

Et,

$$A(t) = \exp(-\alpha_2 t) \times \rho \left(\frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} (\exp(\alpha_2 t) - 1) \right)$$

$\{\rho(s), s \geq 0\}$ est un processus carré de Bessel de dimension $\frac{4\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}$.

Le processus CIR admet une solution non négative qui est une solution faible (solution en loi et non en trajectoire), un processus de FELLER.

Il est donc possible d'appliquer les résultats connus sur les processus carré de BESSEL pour retrouver la loi du processus (cf. REVUZ et YOR [1999]).

4.4.4. Application numérique

Pour vérifier empiriquement les résultats démontrés ci-dessus, simulons une trajectoire du taux court et vérifions ensuite si celle-ci suit bien la loi attendue.

4.4.4.1. Simulation d'un échantillon de réalisations du taux court

Il existe deux méthodes pour simuler un vecteur de réalisation du taux court. Soit l'on utilise la loi de probabilité décrite plus haut (cf. par exemple DAVIDSON et MACKINNON [2004]), soit on procède en discrétisant le processus stochastique.

Dans le second cas, on a :

$$\Delta A(t) = \alpha_2 \times (\bar{a} - A(t))\Delta t + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times \Delta B(t)$$

Avec :

$$\Delta t = t + 1 - t = 1$$

$$\Delta B(t) = \sqrt{\Delta t} \times \mathfrak{N}(0,1)$$

On a :

$$A_{t+1} = A_t + \alpha_2 \times (\bar{a} - A_t) + \sigma_2 \sqrt{A_t} \mathfrak{N}(0,1)$$

On se donne les paramètres initiaux :

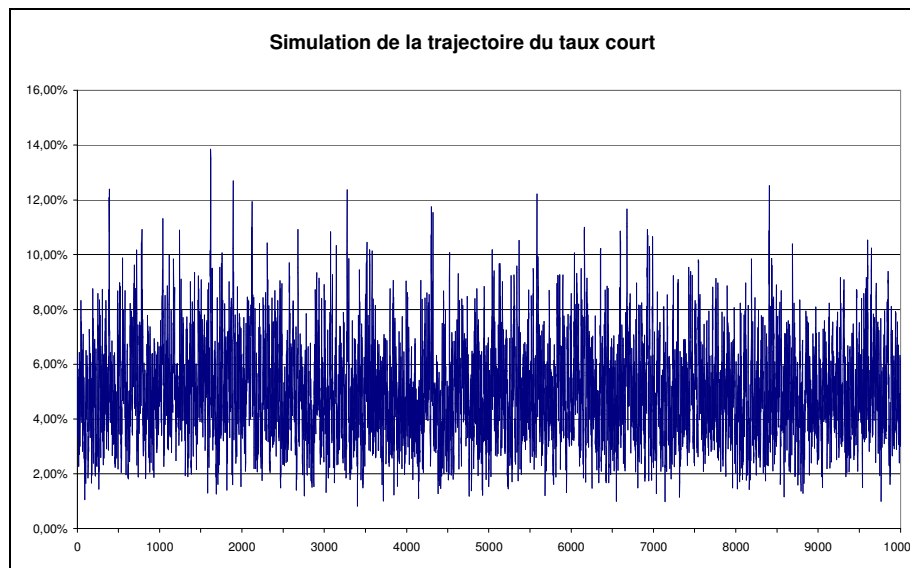
$$a(0) = 6.25\%$$

$$\alpha_2 = 25.00\%$$

$$\bar{a} = 5.00\%$$

$$\sigma_2 = 5.00\%$$

On obtient les réalisations suivantes (10 000 tirages).



Graphique 1 : Simulation de la trajectoire du taux d'actualisation de court terme

A l'aide de cet échantillon, on peut estimer les fonctions de densité et de répartition de la loi de probabilité sous-jacente.

On utilise la méthode du noyau (estimateur non paramétrique) pour estimer la densité de probabilité du processus ayant généré les observations $(x_1, \dots, x_n)$.

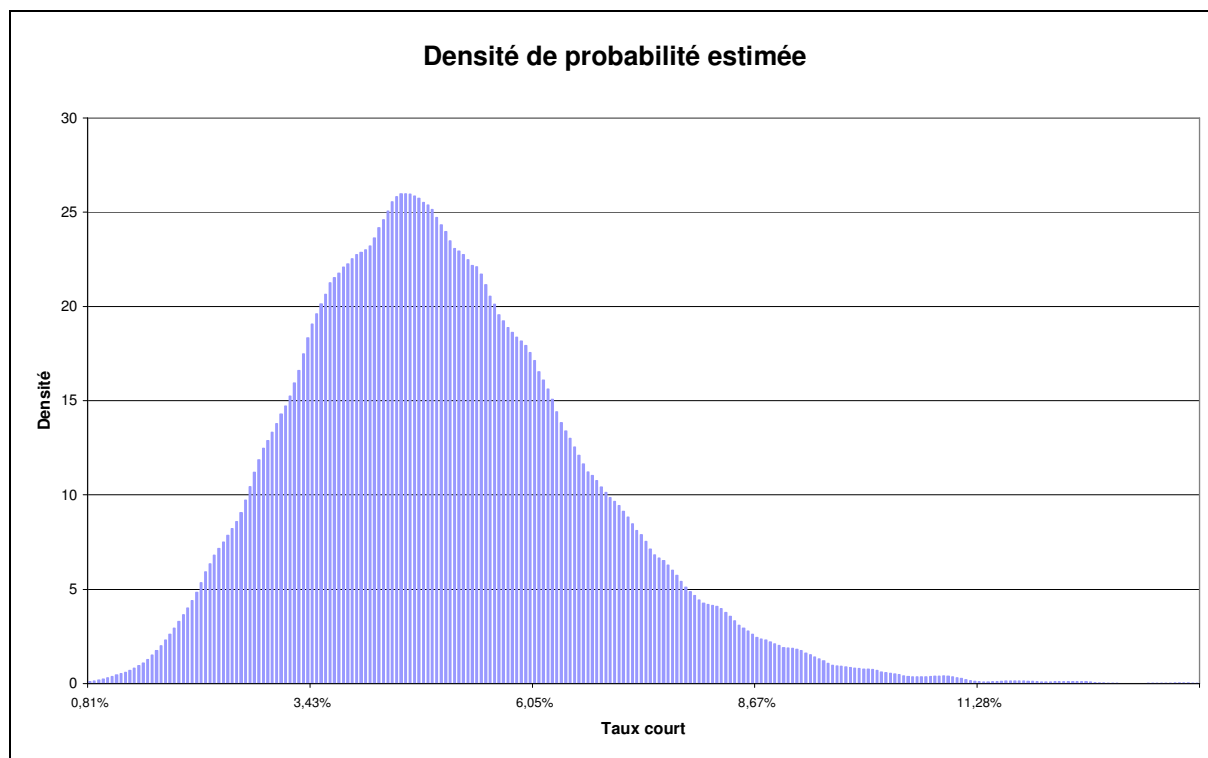
$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - x_i}{h_n}\right), t \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{nh_n} \left(\frac{\hat{f}_n(t) - f(t)}{\sqrt{\hat{f}_n(t) \int_{\mathbb{R}} K^2(u) du}} \right) \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$$

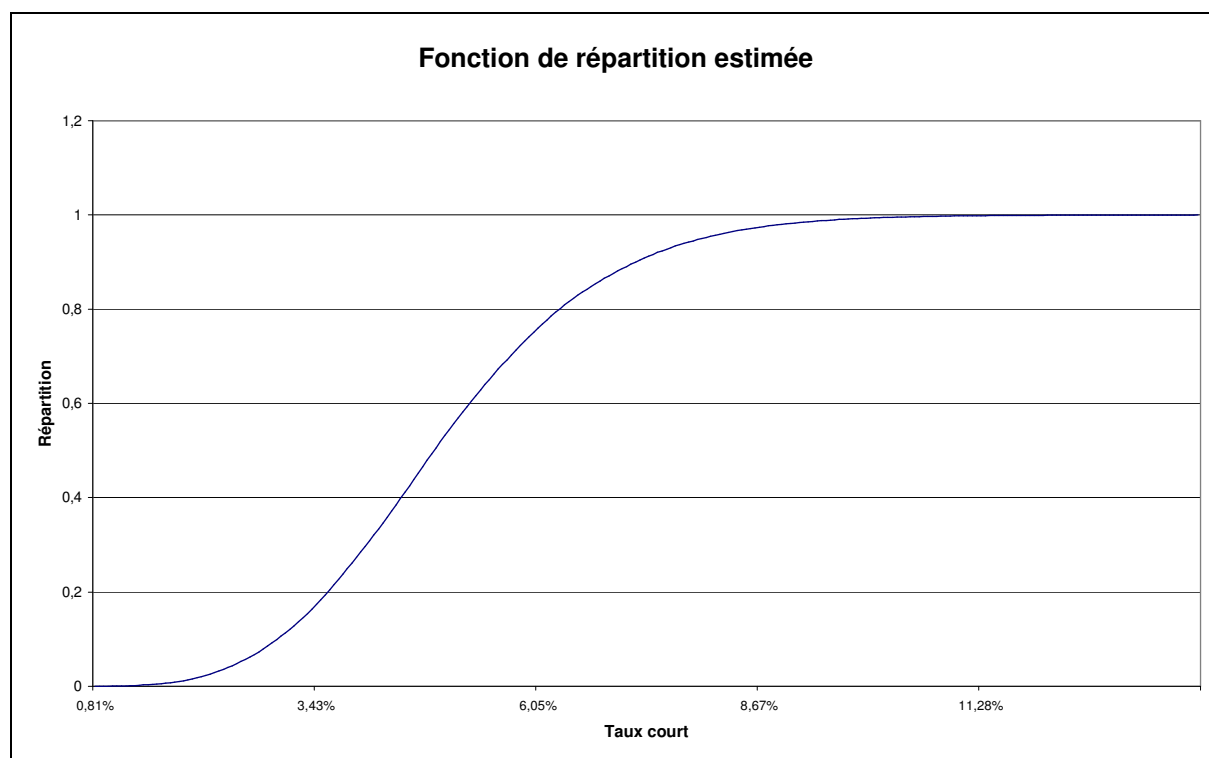
On choisit un noyau du type EPANECHNIKOV

$$K : u \rightarrow \frac{3}{4}(1-u^2)\delta(|u| \leq 1)$$

Avec $h_n = 1.06n^{-0.2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\delta(\bullet)$ la masse de DIRAC.



Graphique 2 : Densité de probabilité estimée du taux d'actualisation de court terme



Graphique 3 : Fonction de répartition estimée du taux d'actualisation de court terme

4.4.4.2. Ajustement des observations simulées sur la loi théorique du processus

La loi limite du taux court est :

$$A(t) \xrightarrow{\text{loi}} \frac{\sigma_2^2}{4\alpha_2} X^2_{\left(\frac{4\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right)} = \frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \Gamma\left(\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}\right)$$

Dans notre exemple,

$$\frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} = 0.50\%$$

$$\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2} = 10$$

4.4.4.2.1. *Le test d'ANDERSON DARLING*

A partir d'un échantillon de valeurs numérique prises par une variable aléatoire, on peut tester l'hypothèse selon laquelle la loi de probabilité de cette variable suit une loi appartenant à une famille de loi.

On teste donc $H_0 : "Pr(X \leq t) = F(t)"$ contre $\overline{H_0}$, où F est la fonction de répartition d'une loi continue déterminée sur laquelle on cherche à s'ajuster.

La loi X a engendrée un n -échantillon, classé par ordre croissant $x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$, de réalisations.

La statistique de test d'ANDERSON DARLING prend la valeur suivante pour l'échantillon donné:

$$a = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \times \ln[F(x_{(i)}) (1 - F(x_{(n+1-i)}))]$$

On rejette l'hypothèse H_0 si la statistique de test prend une valeur « trop grande ».

Ce test est fondé sur le fait que sous H_0 , la statistique de test ne dépend pas de la loi que suit X . Il est plus puissant que le test de KOLMOGOROV SMIRNOV, puisqu'il prend en compte toutes les observations de l'échantillon.

4.4.4.2.2. *Application du test d'ajustement*

Appliquons le test d'ANDERSON DARLING à notre échantillon.

L'échantillon considéré est la série de taux court générée, corrigée du coefficient $\frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2}$.

On obtient les résultats suivants :

$$a = 0.4068$$

$$Pr(A_n \geq 0.4068) = 0.6249$$

On ne rejette pas l'hypothèse H_0 .

En utilisant la méthode de simulation du taux court par discrétisation à partir de l'équation de diffusion, on obtient bien un échantillon de réalisations qui suit la loi théorique.

4.5. Détermination des taux longs dans le modèle CIR

Après avoir déterminé l'expression du taux long en fonction du taux court, on pourra donner plusieurs exemples de la courbe des taux.

4.5.1. L'expression des taux longs en fonction du taux court

On connaît la dynamique du taux court :

$$dA(t) = \alpha_2 \times (\bar{a} - A(t))dt + \sigma_2 \times \sqrt{A(t)} \times dB(t)$$

Soit $P(A(t), t, T), 0 \leq t < T$ le prix d'un zéro coupon émis en date t pour une échéance en T , qui verse la somme 1 au terme.

On a :

$$P(A(t), t, T) = E \left[\exp \left(- \int_t^T A(u) du / F(t) \right) \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times P(A(t), t, T) = E \left[\exp \left(- \int_0^T A(u) du / F(t) \right) \right]$$

En différenciant, on a :

$$\begin{aligned} & d \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times P(A(t), t, T) \\ &= -A(t) \times \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times P(A(t), t, T) dt + \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times dP(A(t), t, T) \\ &= \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times [-A(t) \times P(A(t), t, T) dt + dP(A(t), t, T)] \end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, prenons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} P(A(t), t, T) &= P(A, t) \\ \frac{\partial P}{\partial A(t)}(A(t), t, T) &= P_A(A, t) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial A^2(t)}(A(t), t, T) &= P_{AA}(A, t) \\ \frac{\partial P}{\partial t}(A(t), t, T) &= P_t(A, t) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 & d \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times P(A, t) \\
 &= \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times \left[-A(t) \times P(A, t) dt + P_A(A, t) dA(t) + \frac{1}{2} P_{AA}(A, t) [dA(t)]^2 + P_t(A, t) dt \right] \\
 &= \exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \\
 &\times \left[-A(t) \times P(A, t) dt + P_A(A, t) (\bar{a} - A(t)) dt + \sigma_2 A(t) dB(t) + \frac{1}{2} P_{AA}(A, t) \sigma_2^2 A(t) dt + P_t(A, t) dt \right]
 \end{aligned}$$

Le processus $\exp \left(- \int_0^t A(u) du \right) \times P(A(t), t, T)$ est une martingale. Le terme en dt est donc nul.

De l'équation précédente on tire :

$$-A(t) \times P(A, t) + P_A(A, t) (\bar{a} - A(t)) + \frac{1}{2} P_{AA}(A, t) \sigma_2^2 A(t) + P_t(A, t) = 0$$

On cherche une solution de la forme

$$P(A(t), t, T) = \lambda(t, T) \times \exp(-\mu(t, T) A(t))$$

Avec la condition terminale :

$$P(A(T), T, T) = 1$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \lambda(t, T) &= \left[\frac{2\gamma \exp \left((\alpha_2 + \gamma) \times \frac{T-t}{2} \right)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2}} \\
 \mu(t, T) &= \frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \\
 \gamma &= \sqrt{\alpha_2^2 + 2\sigma_2^2}
 \end{aligned}$$

La relation entre le prix d'un zéro coupon le taux long est la suivante :

$$\begin{aligned}
 P(A(t), t, T) &= \exp(-A(t, T) \times (T-t)) \\
 \Rightarrow A(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln(P(A(t), t, T))
 \end{aligned}$$

D'où l'expression :

$$A(t,T) = \frac{\mu(t,T)}{T-t} \times A(t) - \frac{1}{T-t} \ln(\lambda(t,T))$$

4.5.2. Quelques exemples de formes de la courbe des taux

4.5.2.1. Courbe descendante

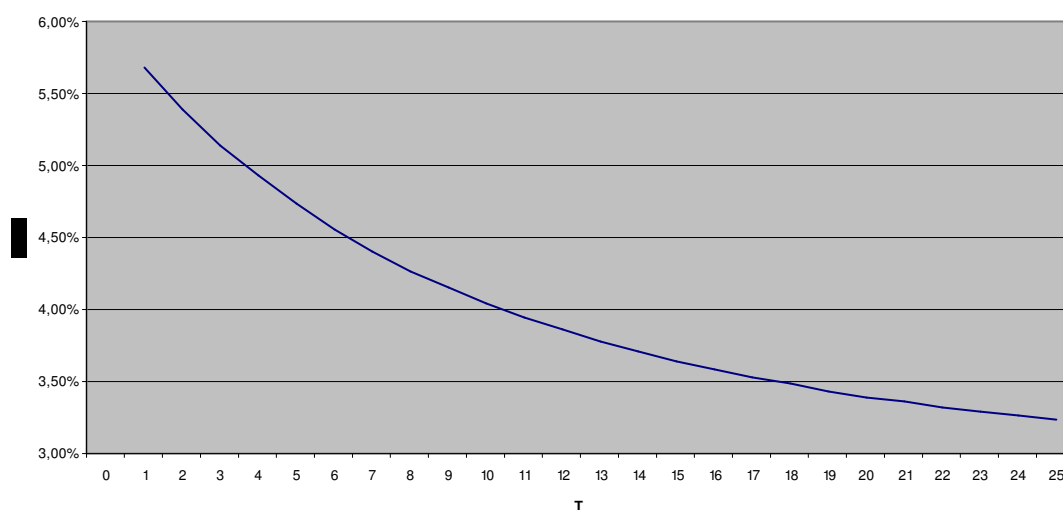
$$a(0) = 6.00\%$$

$$\alpha_2 = 20.00\%$$

$$\bar{a} = 5.00\%$$

$$\sigma_2 = 1.00\%$$

Evolution de $A(0,T)$



Graphique 4 : Trajectoire du taux d'actualisation de long terme. Cas d'une courbe descendante

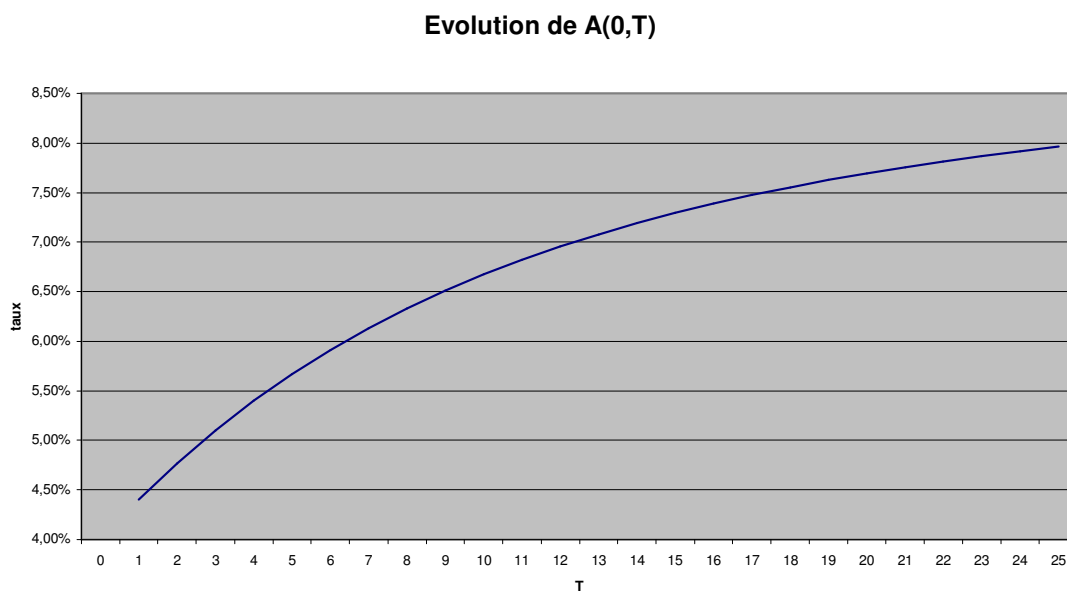
4.5.2.2. Courbe ascendante

$$a(0) = 4.00\%$$

$$\alpha_2 = 10.00\%$$

$$\bar{a} = 5.00\%$$

$$\sigma_2 = 10.00\%$$



Graphique 5 : Trajectoire du taux d'actualisation de long terme. Cas d'une courbe ascendante

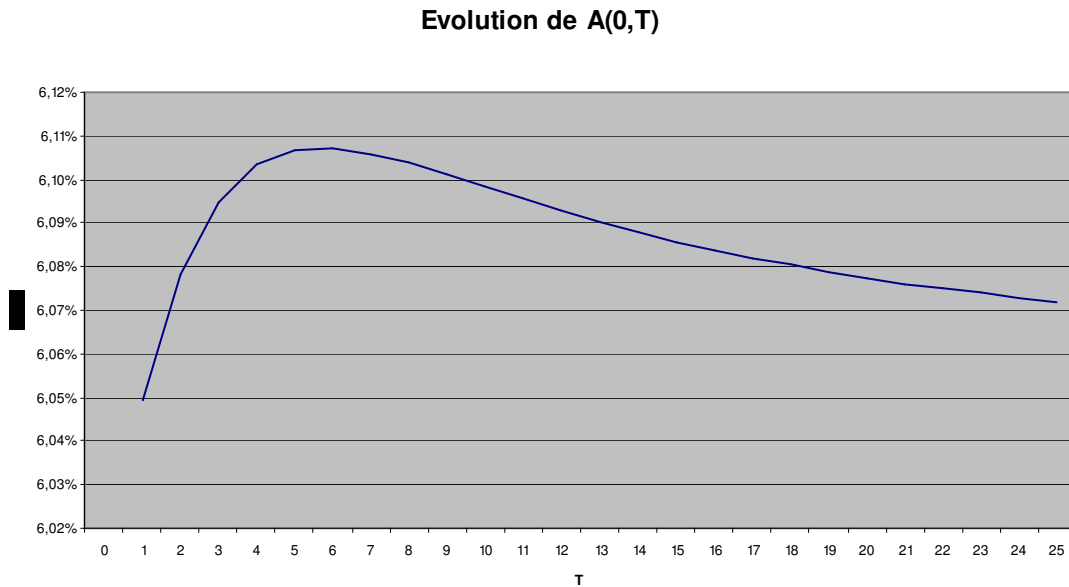
4.5.2.3. Courbe bosselée

$$a(0) = 6.00\%$$

$$\alpha_2 = 25.00\%$$

$$\bar{a} = 5.00\%$$

$$\sigma_2 = 10.00\%$$



Graphique 6 : Trajectoire du taux d'actualisation de long terme. Cas d'une courbe bosselée

4.6. Les dynamiques des actifs financiers

Soit $f : S(t) \rightarrow \ln S(t)$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial S(t)} S(t) = \frac{1}{S(t)}; \frac{\partial^2 f}{\partial S^2(t)} S(t) = -\frac{1}{S^2(t)}; \frac{\partial f}{\partial t} S(t) = 0$$

En appliquant le lemme d'Ito :

$$\begin{aligned}
 df(S(t)) &= \left[\mu S(t) \times \frac{\partial f(S(t))}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \times \frac{\partial^2 f(S(t))}{\partial S^2(t)} \right] dt + \frac{\partial f(S(t))}{\partial S(t)} \sigma S(t) d\eta_1(t) \\
 \Leftrightarrow d \ln S(t) &= \left[\mu S(t) \times \frac{1}{S(t)} - \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \times \frac{1}{S^2(t)} \right] dt + \frac{1}{S(t)} \sigma S(t) d\eta_1(t) \\
 \Leftrightarrow d \ln S(t) &= \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma d\eta_1(t) \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{S(t)}{S(0)} &= \int_0^t \mu - \frac{\sigma^2}{2} du + \sigma \int_0^t d\eta_1(t) \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{S(t)}{S(0)} &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \int_0^t d\eta_1(t) \\
 \Leftrightarrow S(t) &= s(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \eta_1(t) \right\}
 \end{aligned}$$

Partie III. Applications numériques

Les principes et les règles de la comptabilisation des engagements de retraite, et de manière plus large des avantages accordés par une entreprise à ses salariés, sont décrits dans la norme IAS 19. Cette norme introduit un certain nombre de concepts nouveaux (par rapport au langage classique de la comptabilité d'entreprise), comme la valeur actuelle de l'obligation (PBO), le coût des services rendus sur un exercice (SC), et de mécanismes (notamment le corridor) avec lesquels il faut se familiariser et ainsi comprendre leur logique et leur articulation.

Nous avons aussi construit un modèle statistique complet, capable de représenter toutes les variables utiles pour analyser les engagements portés par un régime de retraite supplémentaire, à horizon supérieur à un an, pris par une entreprise envers ses salariés.

Armé des règles et des principes de la comptabilisation des engagements de retraite et du modèle statistique permettant de décrire complètement la dynamique de la valeur d'un engagement de retraite et de l'actif financier qui le représente, nous pouvons passer à l'application sur un cas réel et ainsi construire un état IAS 19 tel qu'il a été défini dans la première partie du document. Sa stabilité est testée en simulant un grand nombre de fois chacune des variables aléatoires sous-jacentes pour décrire tout le spectre des états de la nature possibles et en faisant jouer les paramètres de celles-ci.

On va considérer trois types de situation :

- un cas standard, où l'on utilise les variables aléatoires définies, avec les paramètres estimés,
- un cas où l'on impulse un choc sur les actifs de couverture (chocs qui se traduit par une variance plus forte des rendements des actions et des obligations),
- enfin, un état de la nature dans lequel le taux de rotation du personnel est nettement supérieur à ce qui avait été prévu (choc sur le passif).

Le mécanisme du corridor est ainsi mis en évidence.

Préalablement à cette étape de génération stochastique d'états IAS 19, nous devons estimer les paramètres du modèle adapté au cas particulier étudié ici et présenter le régime servant de support

1. Estimation des variables communes à l'ensemble de l'économie

Parmi toutes les variables endogènes utilisées (cf. Partie II), certaines dépendent uniquement du régime étudié et d'autres sont communes à l'ensemble de l'économie.

C'est le cas des taux d'inflation, d'actualisation et de rendement des actifs financiers. Le régime est dans une situation de « preneur de prix ». Les valeurs de l'inflation et des taux de rendement des actifs financiers lui sont imposées. Par sa seule action, il ne peut pas peser sur ces grandeurs.

Pour l'estimation des paramètres de ces trajectoires, on utilise systématiquement des échantillons d'observations issus des séries publiées par l'INSEE.

1.1. Le taux d'inflation

Le type de trajectoire du taux d'inflation retenue est donné par l'expression ci-dessous :

$$\Pi_t = \bar{\pi} + \alpha_1 \times (\Pi_{t-1} - \bar{\pi}) + \sigma_1 \times \varepsilon_{1,t}$$

On peut réécrire cette équation en faisant clairement apparaître une forme autorégressive d'ordre 1.

$$\Pi_t = (1 - \alpha_1) \times \bar{\pi} + \alpha_1 \times \Pi_{t-1} + \sigma_1 \times \varepsilon_{1,t}$$

Les paramètres du modèle sont estimés à partir de l'indice des prix à la consommation pour l'ensemble des ménages (métropole + DOM) fourni par l'INSEE (identifiant 063919663) observé de janvier 1990 à décembre 2004 (soit 180 points).

Les données utilisées sont des données mensuelles.

Comme le propose WILKIE (cf WILKIE [1995]), on reconstitue le taux d'inflation observé à partir de l'échantillon de l'indice des prix : $\pi_t = \ln\left(\frac{ind_t}{ind_{t-1}}\right)$.

L'estimation économétrique des paramètres se fait en trois étapes :

- vérification du caractère stationnaire de la série étudiée (à défaut, l'estimation serait non convergente),
- estimation (de manière récursive) des paramètres,
- tests statistiques (de nullité des paramètres et de normalités des résidus).

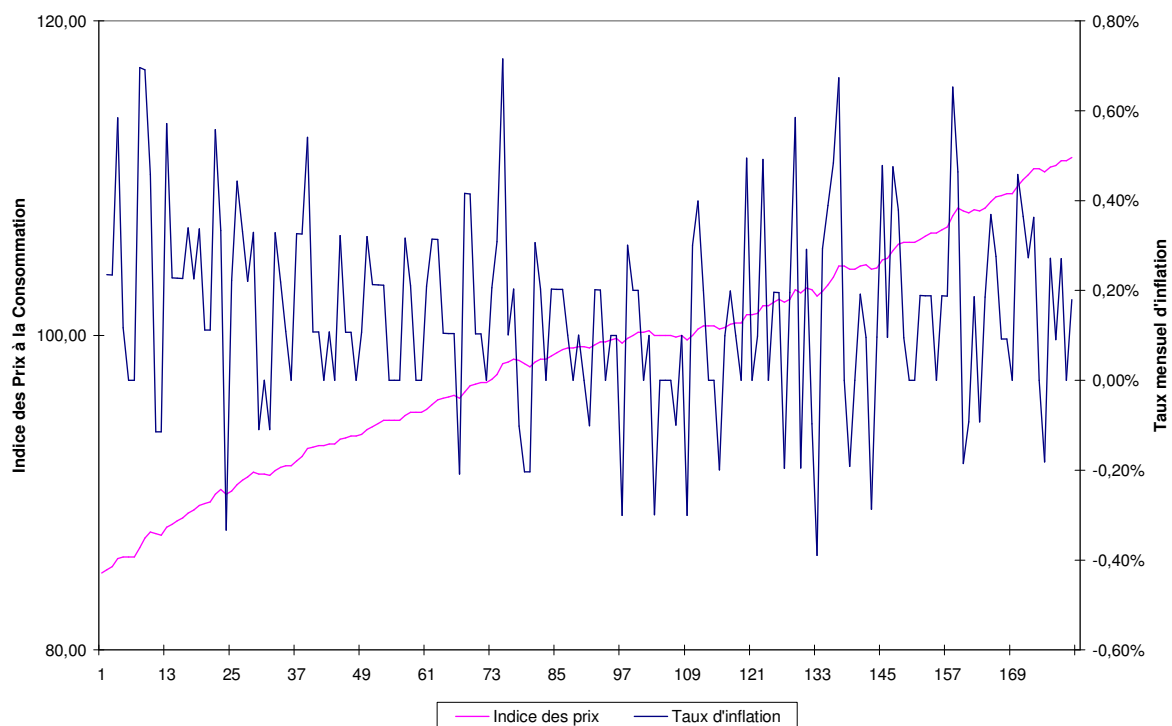
Stationnarité de la série des taux d'inflation

La stationnarité de la série est vérifiée à l'aide de l'un des tests de DICKEY et FULLER [1979]. On parle des tests de DICKEY et FULLER, car la statistique de test utilisée dépend du modèle que l'on retient.

En général, trois modèles sont possibles pour les processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) :

- sans constante ni trend,
- avec constante et sans trend,
- avec constante et trend.

La série des taux d'inflation (période janvier 1990 – décembre 2004)



Graphique 7 : Indice des prix à la consommation et taux annuels d'inflation pour la période janvier 1990 – décembre 2004

En l'espèce, au vu de la trajectoire de la série et du modèle théorique retenu, on cherche à tester l'hypothèse nulle H_0 : « la série des taux d'inflation est $I(0) + c$ » (intégrée d'ordre 0, avec une constante) dans le modèle suivant :

$$Y_t = \varsigma + \rho Y_{t-1} + \eta_t$$

Où $\varsigma \neq 0$ et $\{\eta_t\}$ est un bruit blanc de variance constante.

Tester l'hypothèse H_0 est équivalent à tester l'hypothèse H^*0 : « $\rho = 1$ » contre l'hypothèse « $|\rho| < 1$ ».

Dans le cas où le coefficient devant la variable d'intérêt retardé est supérieur à l'unité, le processus est explosif.

La statistique de test ADF (*i.e.* test de DICKEY et FULLER « augmenté », puisqu'il tient compte d'une constante, alors que le test initial était construit sur un modèle sans constante ni trend), déterminé sur notre échantillon, prend la valeur -8.2754346.

Sous H_0 , la probabilité pour que la variable aléatoire ADF prenne la valeur obtenue sur l'échantillon est nulle. On rejette donc H_0 .

En comparant les valeurs prises par le test de « STUDENT » aux valeurs « standard » (*cf. infra*), on a tendance à réfuter trop souvent H_0 . Il faut donc retenir une loi particulière pour la statistique sous H_0 . C'est bien ce qui est fait ici.

La série est stationnaire, avec constante.

Estimation des paramètres et test de nullité des paramètres

L'estimation des paramètres du modèle se fait sur la base des 178 observations de l'échantillon par la méthode des moindres carrés ordinaires, avec deux régresseurs, une constante et la variable d'intérêt retardée.

Pour utiliser cette méthode d'estimation, on doit faire, puis vérifier, les hypothèses suivantes :

- H_1 hypothèse de linéarité du modèle,
- H_2 hypothèse de non colinéarité des régresseurs (condition technique d'inversibilité de matrice),
- H_3 hypothèse d'homoscédasticité (la variance conditionnelle de la variable d'intérêt par rapport aux régresseurs est constante),
- H_4 hypothèse de normalité conditionnelle.

Accepter l'hypothèse de normalité des résidus de la régression revient à valider H_1 , H_3 et H_4 .

On obtient les résultats suivants :

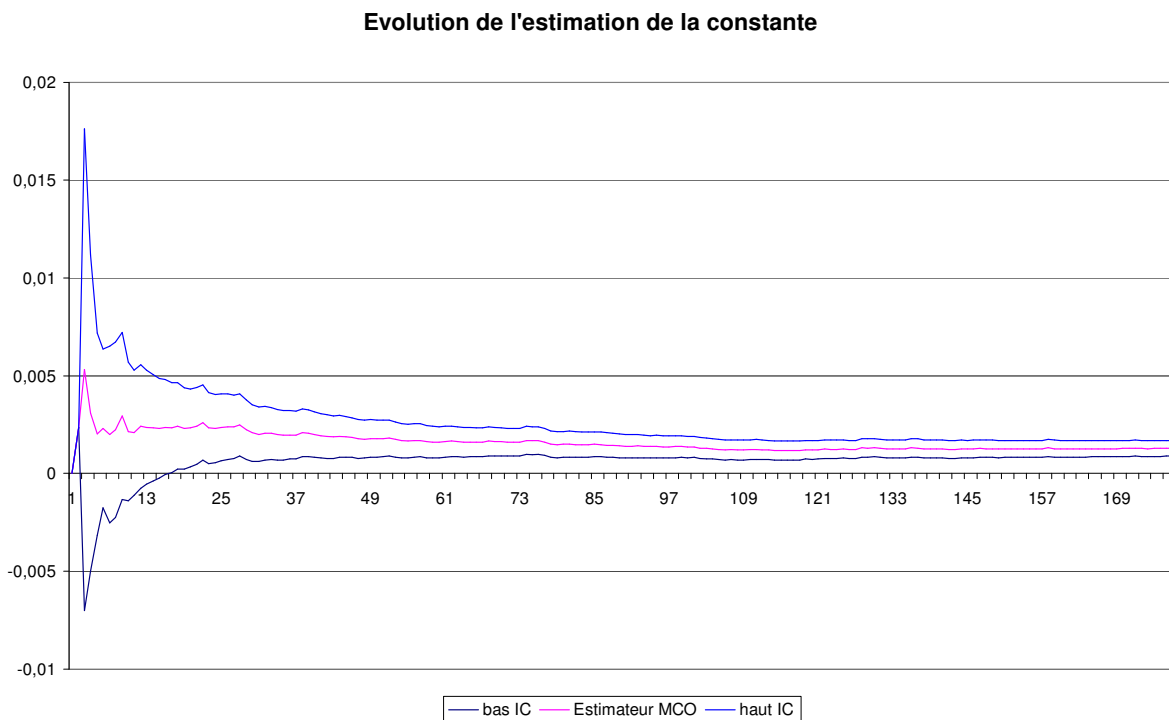
Paramètre	Estimation	Ecart-type	t-STUDENT	p-value
Constante	0.001285	0.000196	6.547034	0.00000
Variable retardée	0.149770	0.074556	2.008815	0.046085

On rejette l'hypothèse de nullité de chacun des deux paramètres, avec une probabilité d'erreur inférieure à 5.00%.

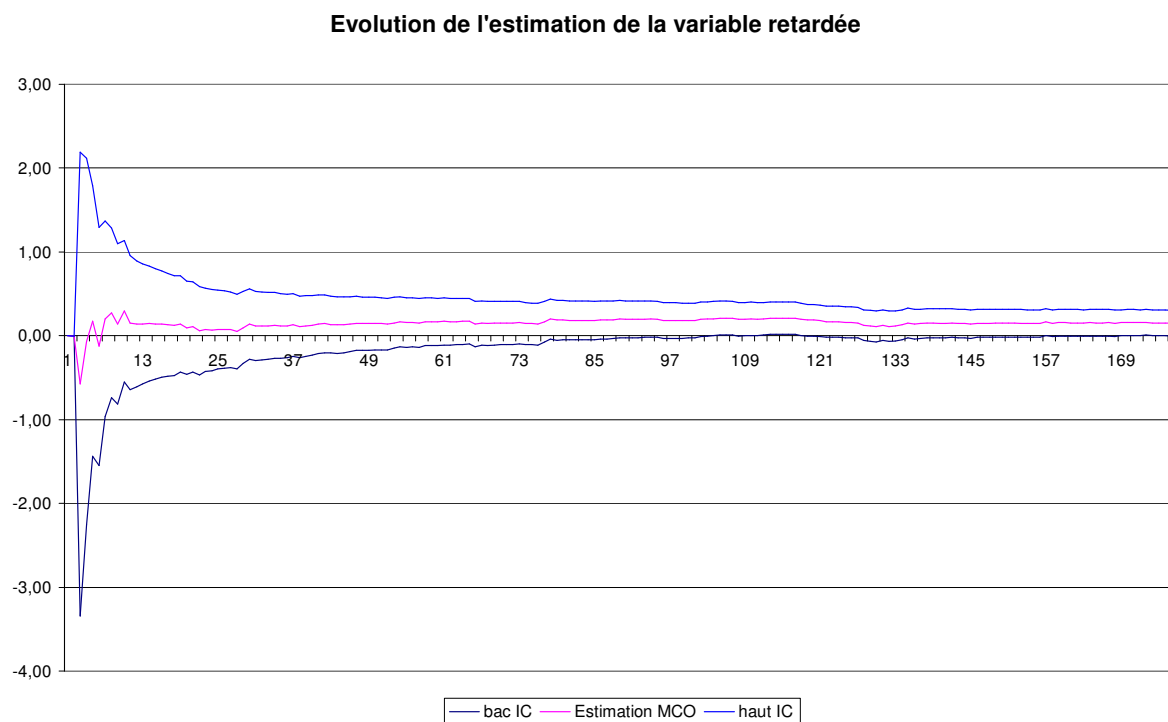
Pour mieux apprécier le résultat de l'estimation, on peut utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires récurrents.

Il s'agit simplement de calculer, par itérations successives, l'estimateur du vecteur de paramètres d'intérêt, en incorporant à chaque fois une nouvelle observation.

Les deux graphiques suivants montrent la trajectoire de l'estimateur au fur et à mesure que l'on allonge la longueur de l'échantillon. Les bornes qui encadrent cette trajectoire représentent l'intervalle de confiance à 95%.



Graphique 8a : Estimation récurrente des paramètres du modèle d'inflation



Graphique 8b : Estimation récursive des paramètres du modèle d'inflation

Test de normalité des résidus

La normalité des résidus de la régression est testée à l'aide de la statistique de JARQUE et BERA (un descriptif de ce test est fourni en annexe).

On teste H_0 : « le processus est normalement distribué ». On rejette H_0 si la valeur obtenue sur l'échantillon de la statistique de test est « trop grande ». En pratique, on rejettera l'hypothèse de normalité si la probabilité pour que la variable aléatoire dépasse la valeur de la statistique est inférieure à 5.00 %.

On obtient les résultats suivants :

Ecart type empirique	0.002140
Skewness empirique	0.122670
Kurtosis empirique	3.183220
Valeur de la statistique JARQUE et BERA	0.691480
Probabilité de dépassement	70.77 %

On ne rejette donc pas l'hypothèse de normalité des résidus.

Le modèle retenu

On a obtenu les résultats suivants :

$$(1 - \alpha_1)\bar{\pi} = 12 \times 0.001285$$

$$\alpha_1 = 0.14977$$

$$\sigma_1 = \sqrt{12} \times 0.002141$$

Le modèle initial est :

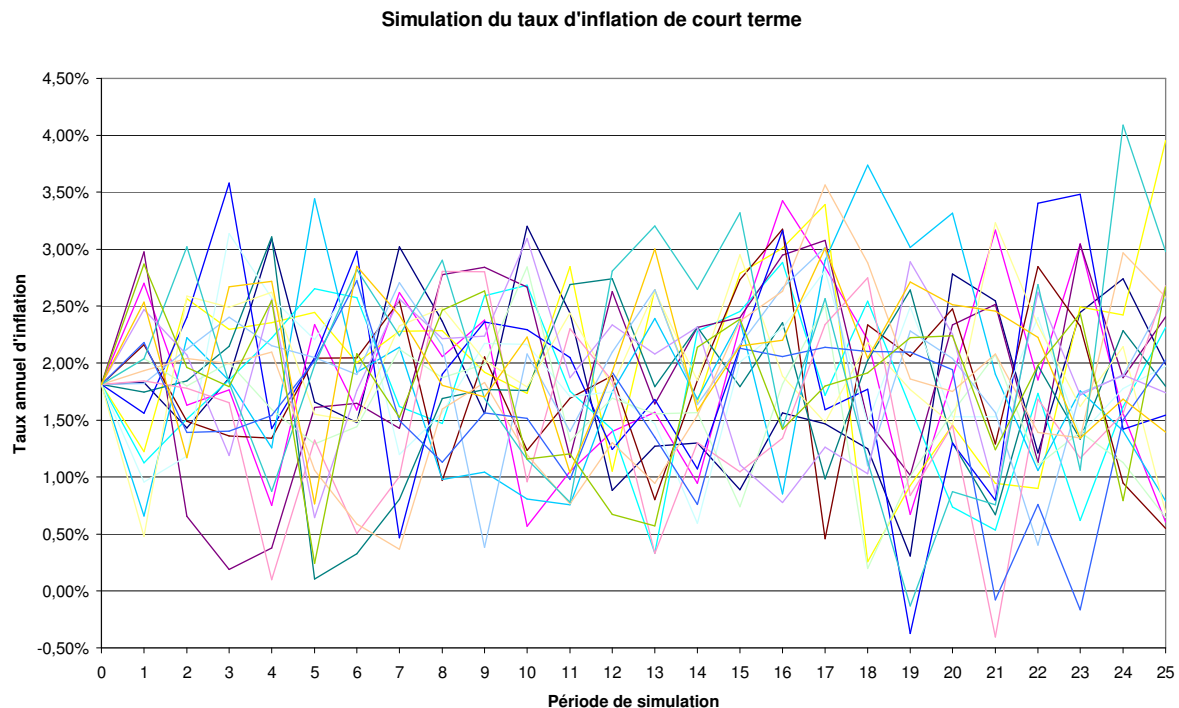
$$\Pi_t = \bar{\pi} + \alpha_1 \times (\Pi_{t-1} - \bar{\pi}) + \sigma_1 \times \varepsilon_{1,t}$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs estimées, on a :

$$\Pi_t = 0.018136 + 0.14977 \times (\Pi_{t-1} - 0.018136) + 0.007417 \times \varepsilon_{1,t}$$

A partir de cette équation, il est possible de simuler des trajectoires de taux d'inflation de court terme. Pour se faire, il suffit de se donner une condition initiale (dans les graphiques ci-après cette condition s'écrit $\pi_0 = \bar{\pi}$) et de tirer de manière aléatoire des réalisations de la loi normale centrée réduite.

Par exemple, voici des trajectoires que l'on peut obtenir :



Graphique 9 : Simulation de trajectoires du taux d'inflation de court terme à partir de l'estimation des paramètres du modèle d'inflation

Test de stabilité des paramètres

Sur la base d'un échantillon d'observations de l'indice des prix pour la période janvier 1990 à décembre 2004, nous avons pu vérifier la bonne spécification du modèle et estimer les valeurs des paramètres du modèle.

L'année suivante, au 31 décembre 2005, il faudra vérifier la validité de la valeur retenue des paramètres sur un échantillon de même longueur, mais décalée de douze mois.

Si l'on effectue ce travail dès à présent en prenant les observations de la même série sur la période allant de janvier 1991 à décembre 2005, on obtient les résultats suivants :

Paramètre	Estimation	Ecart-type	t-STUDENT	p-value
Constante	0.001277	0.000193	6.609938	0.000000
Variable retardée	0.096262	0.075050	1.282646	0.201303

La série est toujours stationnaire en différence, et les résidus de la régression précédente sont bien normalement distribués.

Comparons les valeurs des paramètres sur les deux périodes.

Soient $\{\beta_i^j, (i, j) = \{1, 2\} \times \{1, 2\}\}$ les paramètres du modèle pour les deux périodes (i pour la variable et j pour la période) et $\{\hat{\beta}_i^j, (i, j) = \{1, 2\} \times \{1, 2\}\}$ leurs valeurs estimées.

Testons l'hypothèse $H_{0i} : \beta_i^1 = \beta_i^2, i=1,2$

On utilise la statistique de test suivante :

$$Z_i = \frac{\beta_i^1 - \beta_i^2}{\sqrt{\frac{1}{T}(\sigma_{\beta_i^1}^2 + \sigma_{\beta_i^2}^2)}}$$

Sont H_{0i} , la statistique de test $Z_i, i=1,2$ suit asymptotiquement une loi normale centrée réduite.

Après expérimentation, en remplaçant les variables aléatoires par leurs valeurs estimées sur les deux échantillons, on obtient :

$$Z_1 = 0.3880$$

$$Z_2 = -102.5142$$

Le résultat obtenu n'est guère surprenant. Pour ce qui de la constante, dans les deux cas, on peut accepter l'hypothèse selon laquelle la valeur est nulle. Par transitivité, on peut déduire l'égalité des deux valeurs obtenues sur chaque échantillon. Quant à la variable retardée, les intervalles de confiance à 95% sont disjoints.

Cette constatation, qui prévaut aussi pour les autres variables du modèle, signifie que, d'une année sur l'autre, les valeurs des paramètres peuvent être révisées. Cette révision donnant lieu des écarts actuariels. Il faut donc définir préalablement des règles strictes encadrant les corrections des valeurs des paramètres (délai, valeur de l'écart suffisante, ...). La norme IAS 19 impose une fréquence d'au moins cinq ans.

1.2. Le taux d'actualisation

Nous avons retenu comme dynamique du taux d'actualisation un processus de COX, INGERSOLL et ROSS (CIR).

Comme le fait observer RONCALLI [1998], l'estimation des paramètres de ce type de modèle peut se faire de deux façons différentes. On peut soit prendre comme point de départ les prix observés des zéro coupons, soit utiliser directement le taux court prévalant sur le marché (cf. Partie II).

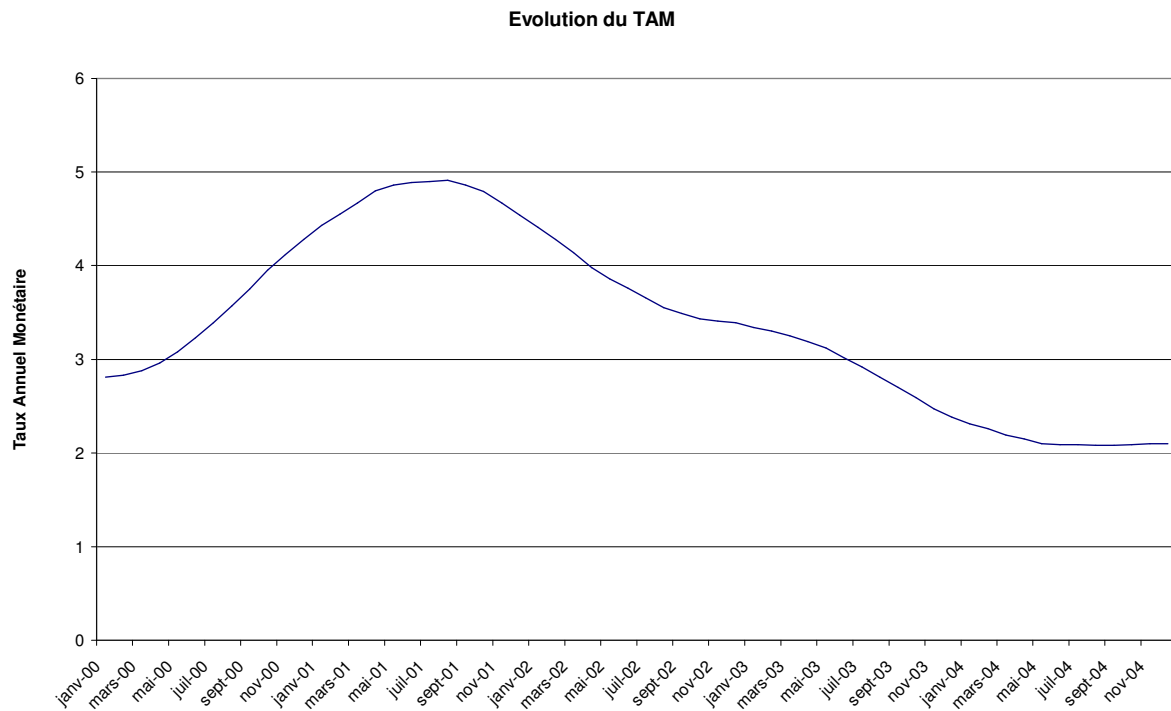
Compte tenu des fonctions de passage taux court/prix des zéro coupons fortement non linéaire, ces deux approches ne donnent pas les mêmes résultats.

Notre choix s'est porté sur la seconde méthode (à la différence de DUTEY et LEFLAIVE [2000]). Elle a l'avantage de bien appréhender la partie courte et moyenne de la courbe des taux, à la différence de la première qui spécifie plutôt la partie longue.

Le modèle est le suivant :

$$A_t = A_{t-1} + \alpha_2 \times (\bar{a} - A_{t-1}) + \sigma_2 \times \sqrt{A_{t-1}} \times \varepsilon_{2,t}$$

Pour estimer les paramètres du processus CIR, on utilise la série du Taux Annuel Monétaire (TAM) sur la période janvier 2000 à décembre 2004, soit 60 observations (identifiant INSEE : 060391691).



Graphique 10 : Evolution du Taux d'intérêt Annuel Monétaire (TAM) pour la période janvier 2000 – décembre 2004

On utilise la méthode des moments généralisés pour cette estimation (cf. par exemple FLORENS et MARIMOUTOU [2004]).

La méthode des moments généralisés

Soient $\theta = (\bar{a}, \alpha_2, \sigma_2^2)$ le vecteur de paramètres d'intérêt et $\{P^\theta, \theta \in \Theta\}$ la collection des probabilités sur l'échantillon.

Si le modèle est bien spécifié, alors les observations effectivement disponibles ont été engendrées par un mécanisme aléatoire représenté par l'une des probabilités d'échantillonnage.

On note E_θ l'opérateur d'espérance calculée sous cette probabilité et $\{a_1, \dots, a_T\}$ l'échantillon observé.

Le principe général de cette méthode est de remplacer la probabilité d'échantillonnage par la probabilité empirique.

On a : $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi(a_t, \theta) \xrightarrow{p.s.} E_\theta[\psi(a_t, \theta)]$

On considère alors le système d'équations $E_\theta[(a_t, \theta)] = 0$.

L'estimateur $\hat{\theta}_T$ est solution du système $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \psi(a_t, \theta) = 0$

La valeur théorique de trois premiers moments du processus

On considère ici la loi limite du processus $\{A_t, t > 0\}$.

Les valeurs limites des trois premiers moments sont :

$$E[A(t)] = \frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \times \frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2} = \bar{a}$$

$$V[A(t)] = \left(\frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \right)^2 \times \frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 \bar{a}}{2\alpha_2}$$

$$\mu_3[A(t)] = \left(\frac{\sigma_2^2}{2\alpha_2} \right)^3 \times 2 \times \frac{2\alpha_2 \bar{a}}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^4 \bar{a}}{2\alpha_2}$$

Le système d'équations à résoudre est donc :

$$\begin{cases} E[A(t) - \bar{a}] = 0 \\ E\left\{ [A(t) - E(A(t))]^2 - \frac{\sigma_2^2 \bar{a}}{2\alpha_2} \right\} = 0 \\ E\left\{ [A(t) - E(A(t))]^3 - \frac{\sigma_2^4 \bar{a}}{2\alpha_2} \right\} = 0 \end{cases}$$

Estimation des paramètres

Soit $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3)$ les moments empiriques calculés sur l'échantillon donné.

On a :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \hat{a} \\ \hat{\mu}_2 = \frac{\hat{\sigma}_2^2 \hat{a}}{2\hat{\alpha}_2} \\ \hat{\mu}_3 = \frac{\hat{\sigma}_2^4 \hat{a}}{2\hat{\alpha}_2} \end{cases}$$

Ou, de manière équivalente :

$$\begin{cases} \hat{a} = \hat{\mu}_1 \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_3}{2\hat{\mu}_2^2} \\ \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\mu}_2} \end{cases}$$

Pour annuler l'écart systématique (le biais) de cet estimateur à distance finie (*cf.* annexes), on utilise les estimateurs corrigés.

Les résultats obtenus sont, avant correction :

$$\begin{cases} \hat{a} = 3.396833 \\ \hat{\alpha}_2 = 0.232872 \\ \hat{\sigma}_2^2 = 0.116769 \end{cases}$$

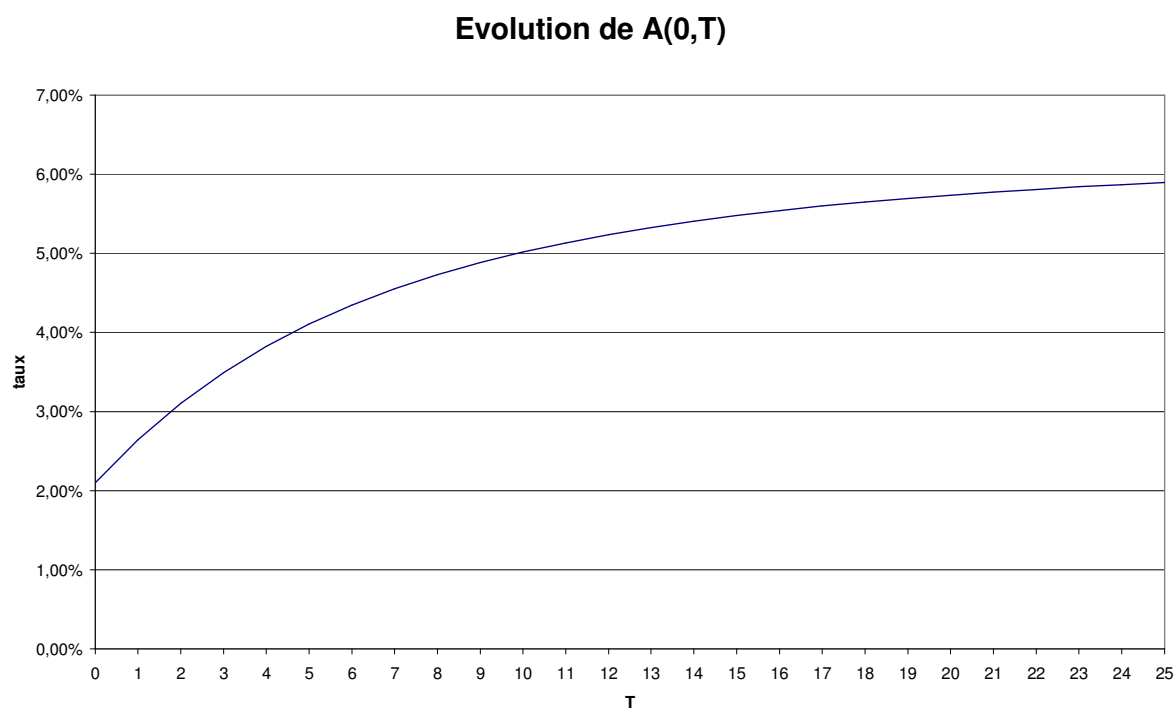
Après correction :

$$\begin{cases} \hat{a} = 3.396833 \\ \hat{\alpha}_2 = 0.228925 \\ \hat{\sigma}_2^2 = 0.112876 \end{cases}$$

D'où la formulation retenue :

$$A_t = A_{t-1} + 0.228925 \times (3.396833 - A_{t-1}) + 0.335971 \times \sqrt{A_{t-1}} \times \varepsilon_{2,t}$$

A partir cette équation, il est possible de construire les taux longs (cf. Partie II §3.4). On obtient alors le graphique ci-après, en prenant $a_0 = 2.10\%$ (la dernière valeur connue).



Graphique 11 : Trajectoire du taux d'actualisation de long terme construite à partir de l'estimation du modèle de taux

1.3. Le taux de rendement des actions

Le cours des actions est décrit par le processus suivant :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma \eta_1(t)$$

Les données de la série retenue sont représentées dans le graphique ci-dessous. Il s'agit du taux de rendement des actions en fin de mois (identifiant n° 060393715) sur la période janvier 2000 à décembre 2004.



Graphique 12 : Evolution du taux de rendement des actions pour la période janvier 2000 – décembre 2004

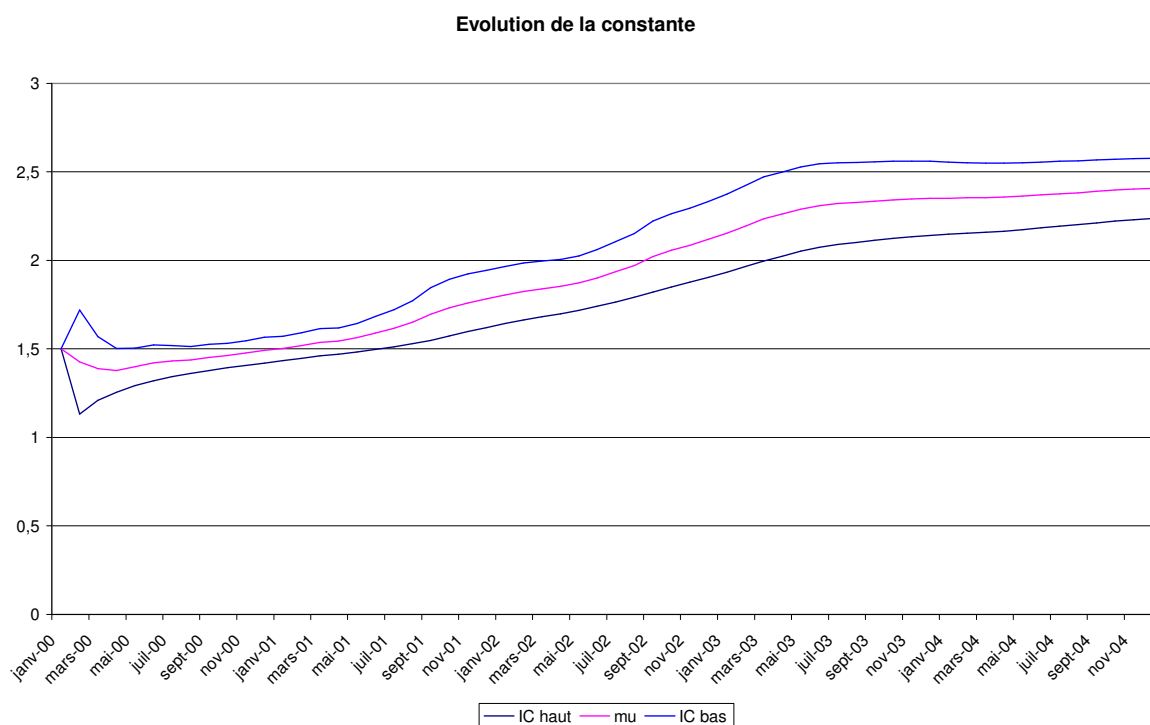
Estimation des paramètres et test de nullité

Par la méthode des moindres carrés ordinaires, on obtient les résultats de l'estimation suivants :

Paramètre	Estimation	Ecart-type	t-STUDENT	p-value
Constante	2.406333	0.084365	28.522882	0.000000

La constante a une valeur différente de zéro.

L'évolution de l'estimation récursive de ce paramètre est donnée par le graphique ci-après.



Graphique 13 : Estimation récursive des paramètres du modèle de taux d'actualisation

Test de normalité des résidus

La normalité des résidus de la régression est testée à l'aide à l'aide de la même statistique que précédemment (la statistique de JARQUE et BERA).

Variance	0.42704735
Skewness	0.04752
Kurtosis	2.18961
Valeur de la statistique JARQUE et BERA	1.63669
Probabilité d'erreur	0.44116

Le modèle retenu

Après estimation, on a :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 2.406333dt + 0.653489 \times \eta_1(t)$$

2. Description du régime étudié

Nous nous plaçons dans le cas où le fonds des retraités est géré par un assureur. L'entreprise ne supporte alors, pour ces engagements, plus aucun risque. Seul un risque lié à la revalorisation des prestations peut demeurer, selon les dispositions prévues par le règlement du régime. Par contre, le risque sur les individus actifs (personnes qui sont en phase d'acquisition des droits) est entièrement assumé par l'entreprise. Il n'y a pas d'externalisation du risque vers un organisme d'assurance.

On pourrait imaginer un cas intermédiaire où le fonds des actifs serait géré par un assureur qui porterait le risque financier. Le risque technique restant, lui, à la charge de l'employeur.

Lorsqu'un actif part en retraite, le montant de l'engagement inscrit dans les comptes de l'entreprise est versé au fonds des retraités. En pratique, il se peut que le capital constitutif de la rente soit différent de la valeur de l'engagement évaluée selon le référentiel IAS19.

Après avoir décrit précisément le régime (les cotisations prévues, les prestations garanties,...) nous décrirons les principales caractéristiques de la base de données utilisée.

2.1. *Description du fonctionnement du régime*

On examine le régime de retraite d'une importante institution financière du royaume du Maroc. Le règlement intérieur de ce régime en fait, dans son fonctionnement, un régime relativement voisin de ceux que l'on rencontre en France.

Le fait que l'on utilise des données marocaines ne pose pas de difficultés : on ne cherche pas à appliquer les normes IFRS dans le contexte marocain, mais à illustrer le fonctionnement d'un compte IFRS avec des données réalistes. Ces données alimentent donc un exemple illustratif et non une étude à remettre à un client.

Le régime considéré à titre d'exemple prévoit le versement, sous conditions, d'une rente viagère réversible en partie au conjoint survivant. En contre partie de cette prestation, des cotisations sont payées, par les salariés et par l'employeur, sur la base de la rémunération actuelle.

Il n'y a donc pas de lien direct entre une cotisation versée et un droit à prestation. Nous sommes dans le cas d'un régime à prestations définies (art. 115 de la loi portant réforme des retraites et art. 39 du code général des impôts).

2.1.1. Les prestations du régime

Un salarié acquiert un droit à rente dès lors qu'il remplit l'une des deux conditions suivantes :

- (1) être âgé d'au moins 55 ans et avoir une ancienneté supérieure ou égale à 15 ans ;
- (2) avoir effectué une longue carrière (ancienneté de 30 ans).

Le premier point décrit la situation classique. Le salarié atteint l'âge de la retraite en ayant effectué une carrière suffisamment longue dans l'entreprise. Il bénéficie d'une pension versée par le régime.

La seconde disposition traite des très longues carrières. Il permet notamment au personnel ayant commencé à travailler tôt de pouvoir partir en retraite avant d'avoir atteint l'âge légal.

Le montant de la rente qui est payée au nouveau retraité est calculé en fonction de l'ancienneté, des dernières rémunérations perçues et du dispositif qui lui a permis de toucher sa rente (situation (1) ou (2)).

Le montant de la prestation viagère acquise dépend de l'ancienneté (exprimée en années), de la moyenne des trois dernières rémunérations et d'un coefficient de pondération. La prestation est plafonnée.

Pour mémoire, dans la première partie nous avons défini les notations suivantes :

Z : l'âge de jouissance des prestations

e : l'âge du salarié à l'entrée dans l'entreprise

L'ancienneté retenue pour calculer le montant des droits à rente est donc la différence des deux quantités précédentes.

t_Z : la date d'entrée en jouissance de la prestation

D_t : le salaire perçu en t

$C_{x,t}$: le taux de croissance du salaire à l'instant t pour une tête d'âge x

ec_x : l'évolution de carrière d'une tête d'âge x

Π_t : le taux d'inflation (à court terme) à l'instant t

La moyenne des trois dernières rémunérations annuelles à l'instant t_Z , notée $\overline{D}$, est égale à :

$$\overline{D} = \frac{1}{3} (D_{t_Z-3} + D_{t_Z-2} + D_{t_Z-1})$$

En utilisant l'équation de salaire du modèle qui précise que le taux annuel de croissance du salaire est la somme de l'inflation et de l'évolution de carrière, on a :

$$D_{t_Z-2} = \frac{D_{t_Z-1}}{1 + \Pi_{t_Z-2} + ec_{Z-2}}$$

$$D_{t_Z-3} = \frac{D_{t_Z-1}}{(1 + \Pi_{t_Z-2} + ec_{Z-2}) \times (1 + \Pi_{t_Z-3} + ec_{Z-3})}$$

F_t : le flux de prestation versé en t

Le montant de la rente initiale est :

$$F_{t_z} = \inf(2.5\% \times (Z - e), 87.5\%) \times \overline{D}$$

On considère donc qu'au-delà de 35 annuités de service, les années de travail ne produisent plus de droits à rente supplémentaires. Il existe, à partir de ces anciennetés, une forte incitation au départ en retraite.

La rente est réversible au conjoint survivant à hauteur de 50%. Elle est annuelle et versée à terme à échoir.

Par hypothèse, on considère ici que dès que l'une des deux conditions (1) et (2) est remplie, alors le salarié part en retraite et le montant de la provision correspondant à la valeur de l'engagement de retraite est basculé au fonds des retraités.

Par ailleurs, si le salarié quitte l'entreprise avant l'entrée en jouissance de la rente, les droits à prestation sont perdus et il perçoit un capital égal à la somme des cotisations qu'il a versé depuis l'origine de son adhésion au régime.

Il est important de bien avoir à l'esprit que ses avantages sont en général définitivement acquis une fois que le service de la prestation a débuté. Avant, ils peuvent être revus.

2.1.2. Les ressources du régime

Le régime bénéficie de deux ressources : des cotisations employeur et des cotisations employés. Ces deux cotisations sont assises sur la même assiette (tout comme les prestations d'ailleurs) à savoir le salaire versé à l'employé.

La part employeur s'élève à 15% du salaire, celle de l'employé à 13%.

2.2. Présentation des données

Pour faire connaissance avec le régime étudié, et avant de passer à l'application numérique en tant que telle on peut regarder un certain nombre de résultats statistiques sur les bases de données.

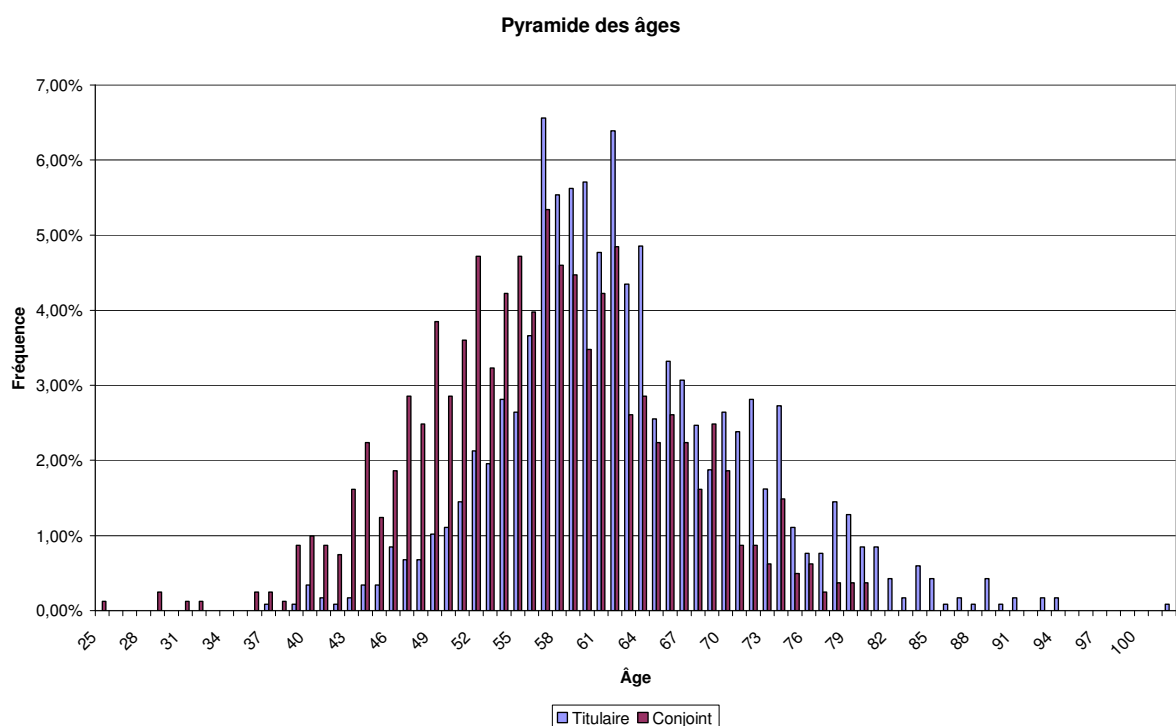
On fait bien la différence entre les retraités et les actifs.

2.2.1. Le fonds des retraités

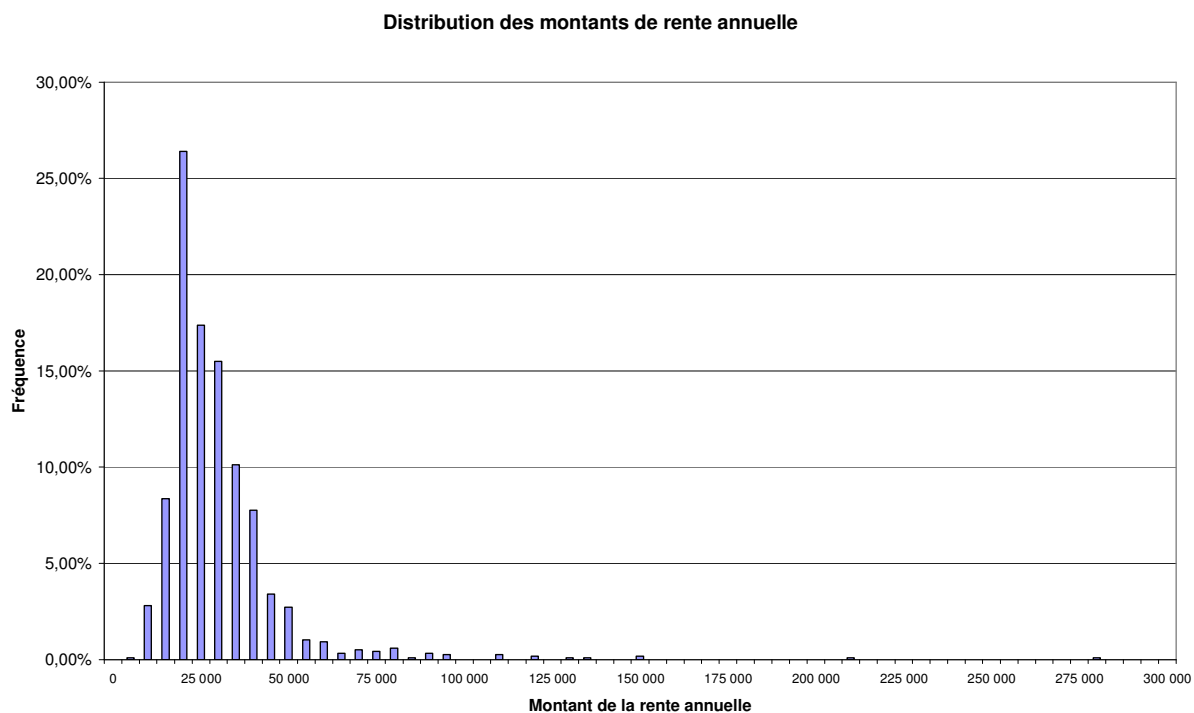
La population des retraités du régime étudié est composée de 1 174 individus, dont 60 % sont des hommes.

Les titulaires d'une pension sont à 70 % mariés et à 26 % veufs. Le complément à 100% est composé de personnes célibataires ou divorcées.

Les deux graphiques qui suivent présentent la pyramide des âges des retraités et de leur conjoint (si le retraité est marié) ainsi que la distribution des rentes annuelles versées par le régime.



Graphique 14 : Pyramide des âges des retraités du régime



Graphique 15 : Histogramme des montants de rente annuelle servie

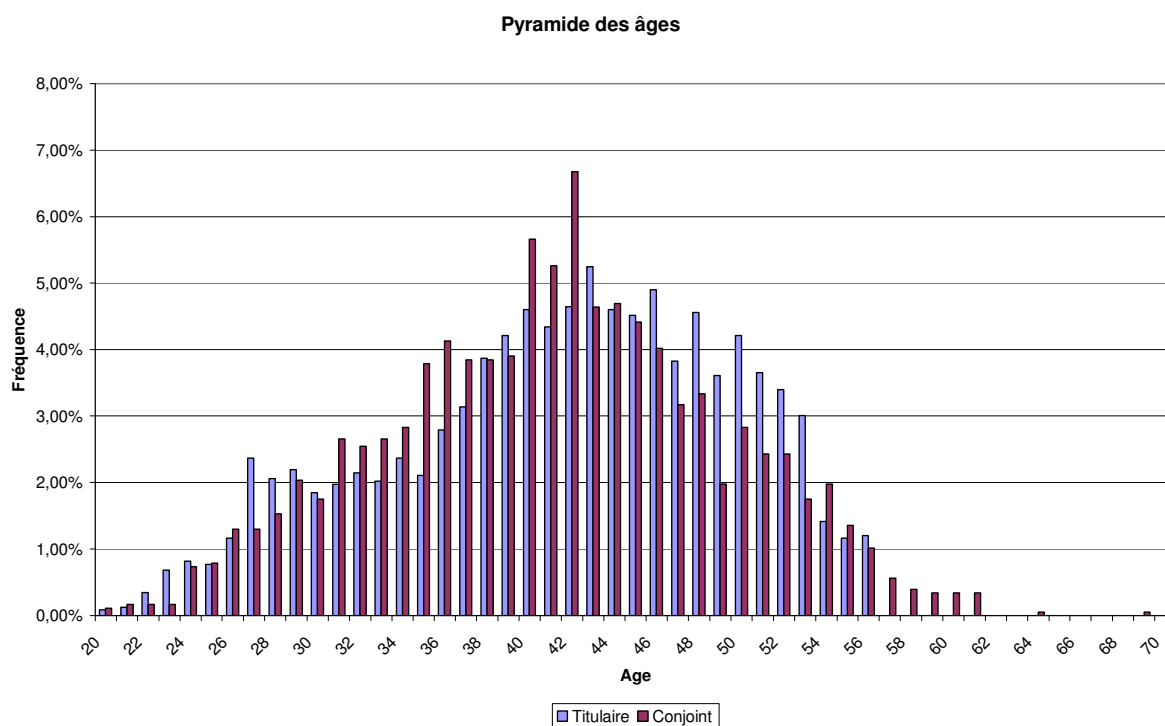
2.2.2. Le fonds des actifs

On compte, dans le fonds des actifs, 2 326 salariés cotisants au régime. Il y a donc 1.98 actif pour un retraité.

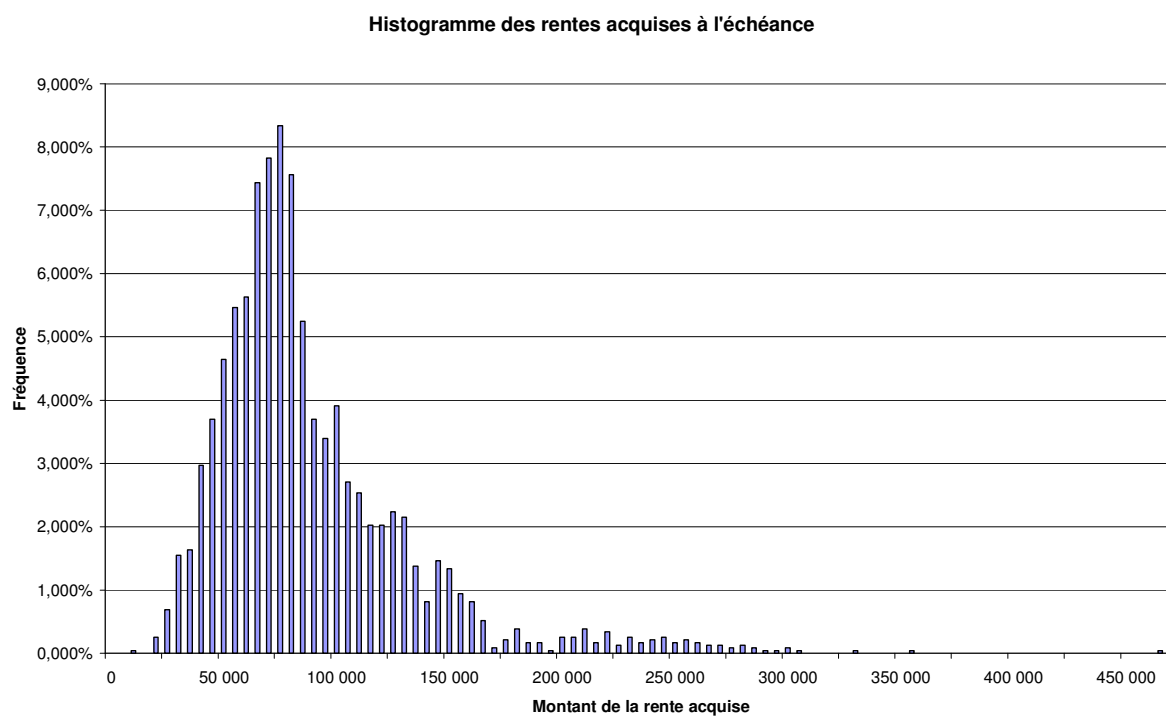
La répartition par sexe de la population des actifs est sensiblement la même que pour celle des retraités, puisque l'on recense 65% d'homme (60% pour les retraités).

Même si l'on compte à peu près la même proportion d'individus mariés dans les deux populations - les actifs et les retraités – il est une différence notable : le taux de célibat est assez fort chez les cotisants, alors que la deuxième situation de famille la plus forte chez les rentiers est le veuvage.

Comme pour la première catégorie d'individus, on peut tracer les pyramides des âges des bénéficiaires potentiels de rente et des bénéficiaires de la réversibilité ainsi que l'histogramme des rentes acquises.

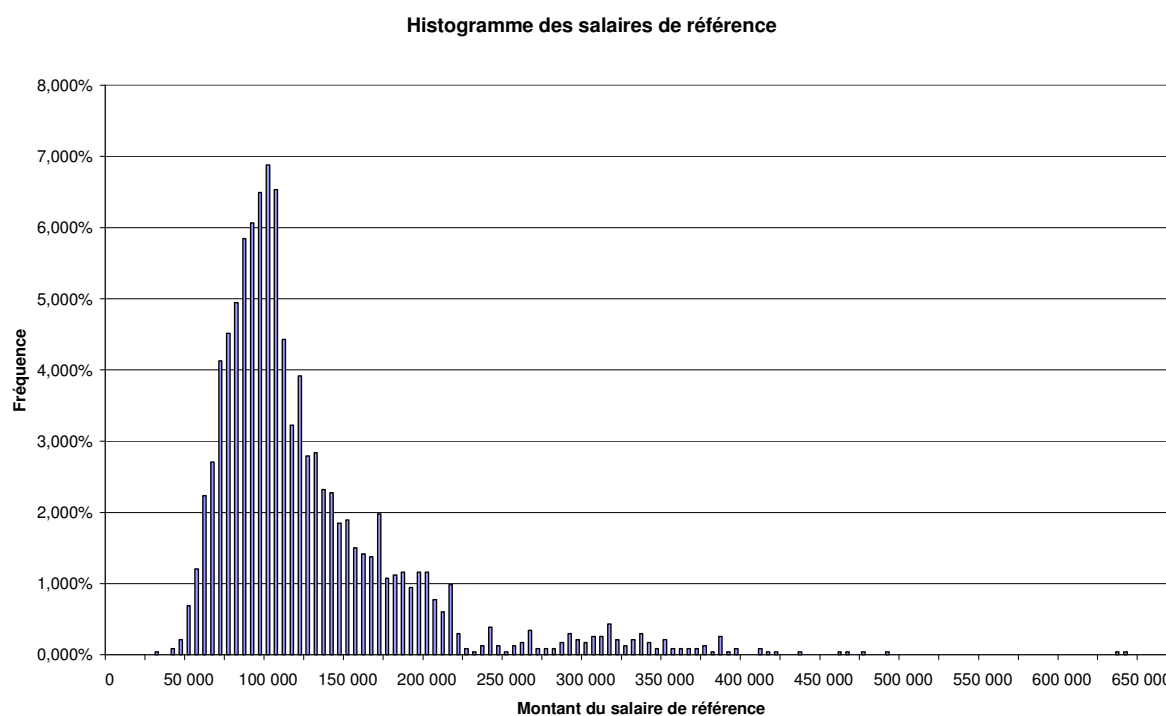


Graphique 16 : Pyramide des âges des actifs du régime



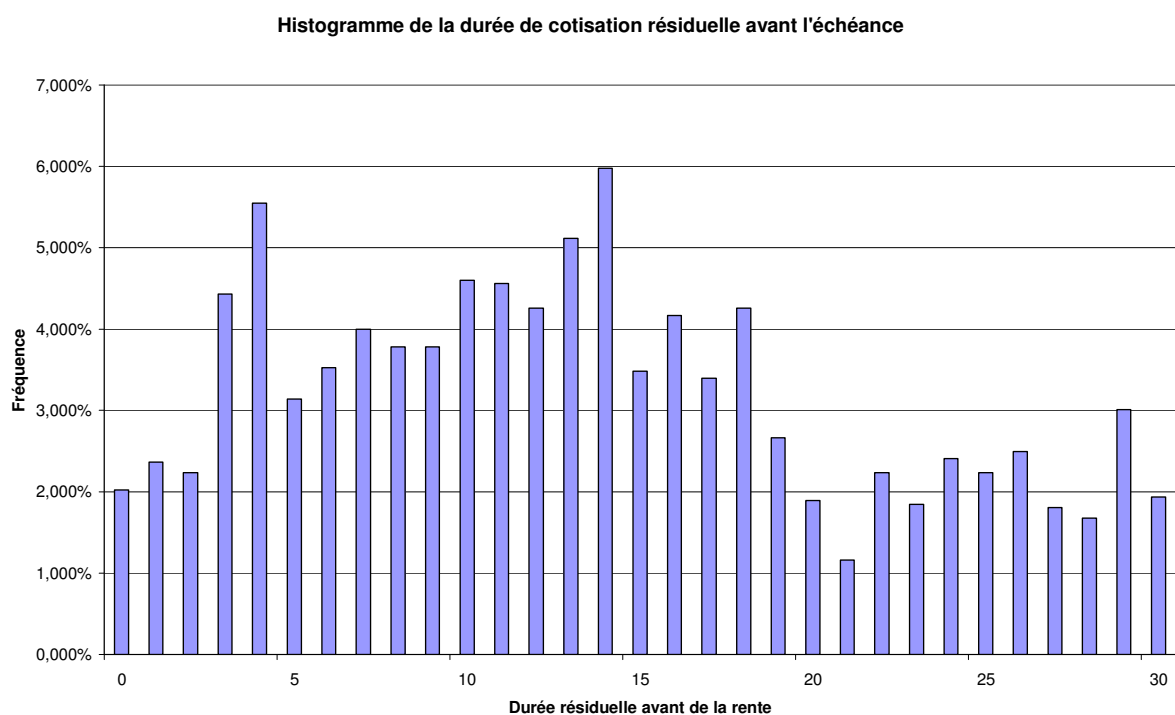
Graphique 17 : Histogramme des montants de rente annuelle acquise à l'échéance

La forme de la distribution des rentes acquises correspond à celle de la distribution des salaires de référence sur lesquels elles sont basées.



Graphique 18 : Histogramme des salaires de référence

La durée résiduelle, exprimée en années, avant l'entrée en jouissance de la rente est représentée par le graphique ci-après.



Graphique 19 : Histogramme de la durée de cotisation résiduelle avant l'échéance

3. Applications numériques : le fonds des retraités

L'application numérique dans ce cas est simple : on connaît l'âge du pensionné et de son conjoint et la prestation annuelle versée ou qui sera versée à la seconde tête.

Conformément à la réglementation, l'engagement viager est évalué, contrat par contrat, en retenant la table par génération TG93⁴ (nous avons donc une table par année de naissance entre 1887 et 1993) et un taux d'intérêt technique « prudent » (égal à 60% du TME calculé sur les bases définies par les articles A. 331-1-1 et A 335-1 du code des Assurances ou A. 212-10 et A. 212-12 du code de la Mutualité).

La rente est annuelle et payée à terme à échoir. Le coefficient de réversion de la prestation au premier décès (sous condition de vie de la seconde tête) est de 50%.

En utilisant les notations actuarielles classiques, on a :

$\ddot{a}_x$ la valeur actuelle probable d'une rente viagère d'un euro à échoir versé à une tête d'âge x .

$\ddot{a}_{xy}$ la valeur actuelle probable d'une rente viagère d'un euro à échoir versé à un groupe de têtes (disparaissant au premier décès) d'âge xy .

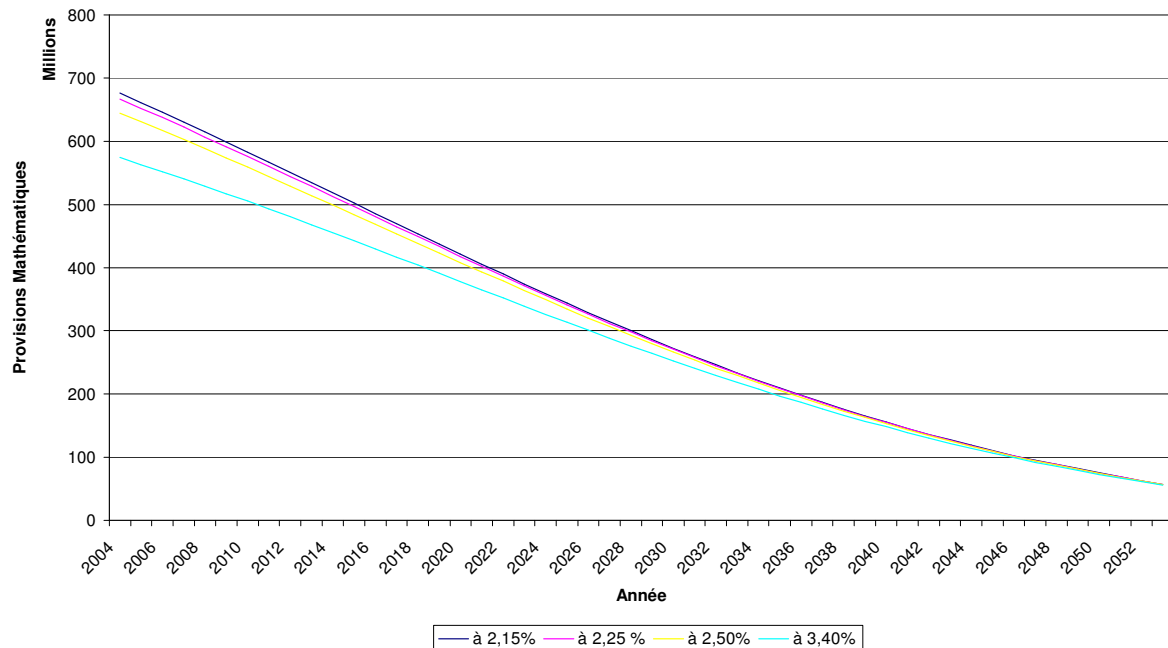
La valeur actuelle probable d'une rente unitaire réversible répondant aux caractéristiques définies est $\ddot{a}_x + 50\%(\ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy})$.

Pour maîtriser l'évolution future de l'engagement, on calcule, pour chaque rente, la trajectoire de la provision mathématique sur 50 ans. On somme ensuite pour une même date les résultats individuels ainsi déterminés pour obtenir le montant de la provision global à constituer à tout instant.

⁴ Un arrêté du 1^{er} août 2006 publié au Journal Officiel du 26 août 2006 introduit de nouvelles tables de mortalité, distincte selon le sexe de l'assuré, dans le code des Assurances : les tables TGH05 et TGF05

Le graphique ci-après retrace, pour plusieurs taux techniques, la trajectoire de la provision mathématique à constituer.

Trajectoire de l'engagement global selon le taux d'intérêt technique utilisé



Graphique 20 : Trajectoire de l'engagement global du régime au titre des retraités actuels selon le taux d'intérêt technique utilisé

Le montant des provisions mathématiques inscrit dans les comptes d'un assureur est égal à la valeur actuelle probable (VAP) de l'engagement porté. Cette quantité, pour un assuré j s'exprime de la manière suivante :

$$VAP^j = E \left(\sum_{t \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times I_{(t,j)} \right)$$

On note i le taux d'intérêt technique (servant à l'actualisation des flux futurs) et $I_{(t,j)}$ une fonction indicatrice qui vaut un si l'on verse à la date t la prestation à l'individu j et zéro sinon. Le montant des prestations est supposé constant *a priori*.

Le montant de la provision mathématique globale est égal à la somme sur tous les pensionnés des PM individuelles.

En notant VAP^{coll} cette quantité, on a :

$$VAP^{coll} = E\left(\sum_j VAP^j\right) = \sum_j E\left(\sum_{t \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times I_{(t,j)}\right)$$

On obtient les trois résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dVAP^{coll}}{dt} < 0 \\ VAP^{coll} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right.$$

Pour les détails de calcul, on pourra se référer en annexe.

Le graphique précédent corrobore bien la forme de la trajectoire que l'on s'attend à obtenir : une trajectoire décroissante avec le temps, convexe et tendant vers zéro.

4. Application numérique : le fonds des actifs

En utilisant la modélisation définie précédemment et les données du régime étudié, on peut construire un premier état IAS 19.

A partir de ce premier état comptable, en tirant de manière aléatoire chacune des variables non déterministe qui composent l'état IAS 19, on obtient des réalisations successives du montant de l'écart actuariel aléatoire et une estimation de la densité de probabilité de cette variable aléatoire. Dans le même temps, on étudiera le nombre de fois où cette variable sort du corridor introduit dans la norme comptable IAS 19.

Après avoir réalisé et analysé ce premier scénario, on va impulser des chocs dans un premier temps sur l'actif de couverture et dans un second sur le passif. On pourra alors voir dans quelle mesure le mécanisme du corridor stabilise l'état IAS 19.

4.1. *Scénario I : le fonds des actifs en l'absence de chocs*

Dans le fonds des actifs, les risques sont portés par l'entreprise sauf, éventuellement, le risque financier (porté alors par un assureur qui assure la gestion financière des fonds).

Par rapport au calcul classique de provisions mathématiques d'une rente en cours de service basé sur une table de mortalité, la valorisation de l'engagement de rente en phase de constitution dans le cadre d'un régime d'entreprise, puis sa comptabilisation, nécessite quelques adaptations.

Le calcul des provisions mathématiques s'appuie sur une table qui décrit le taux de sortie du groupe par âge qui intègre la mortalité, mais aussi les autres causes de départ du groupe (le démission, le licenciement, ...).

La provision mathématique individuelle doit être décomposée pour obtenir la PBO. Comme on l'a déjà vu (*cf.* Partie I), cette notion permet d'évaluer les obligations et les coûts d'un régime selon la méthode des unités de crédit projetés.

La provision mathématique donne une valeur actualisée probable à l'engagement pris. La méthode de la PBO permet, quant à elle, d'affecter à chaque exercice comptable une partie cette valeur.

Avec ses éléments, on peut remplir un état IAS 19 et tester la stabilité du résultat en faisant varier les éléments stochastiques.

4.1.1. Intégration du taux de rotation du personnel dans les calculs viagers

Dans la première partie consacrée à la description des éléments intervenant dans la valorisation des engagements pris, au-delà d'un an, par une entreprise envers ses salariés, nous avons vu que la variable aléatoire décrivant la durée d'activité du salarié dépend de deux causes de départ : la mortalité et la rupture du contrat de travail (démission, licenciement,...).

La mortalité retenue dans cette application, que nous avons déjà utilisée pour le fonds des retraités, est celle décrite par les tables de mortalité par génération TG93.

Le taux annuel de rotation (départ hors cause de décès et avant la fin de carrière) est donné par la fonction de « hasard » d'une loi WEIBULL (modélisation retenue dans la première partie).

L'idée que doit faire apparaître cette série de taux de rotation est que, plus on est proche du départ en retraite, moins la mobilité en forte.

Le taux annuel de rotation a la forme suivante :

$$h_2(x) = \beta\gamma \times x^{\gamma-1}$$

Avec les contraintes suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \beta, \gamma > 0 \\ \forall x \in IR_+, \frac{dh_2(x)}{dx} < 0 \\ \forall x \in IR_+, h(x) \leq 1 \end{array} \right.$$

De manière exogène, les paramètres ont été calés aux valeurs suivantes :

$$\beta = 30, \gamma = 5\%$$

Ces valeurs paramétriques conduisent à un taux annuel de rotation du personnel environ égal à 10% pour une personne âgée de 18 ans et 3% à 55 ans.

Pour se ramener à un cas classique, il faut construire une série $\{\tilde{l}_x, x \geq 0\}$ représentant, pour tout âge, le nombre d'individus vivants et présents dans l'entreprise, à partir de la série $\{l_x, x \geq 0\}$ décrivant la mortalité et de la rotation du personnel construite précédemment.

Soient $q_x, \tilde{q}_x, x > 0$ les taux annuels de mortalité et de départ, toutes causes confondus hors mortalité, de l'entreprise.

On a :

$$1 - \tilde{q}_x = (1 - h_{2,x})(1 - q_x), x > 0$$

Où $h_{2,x}$ représente le taux annuel de rotation de l'effectif salarié de l'entreprise considérée (cf. Partie I).

Les séries des nombres probables de « vivants » (*ie.* présents dans l'entreprise à l'âge x) se déduisent de la manière suivante :

$$\tilde{l}_{x+1} = \tilde{l}_x \times (1 - \tilde{q}_x), x > 0$$

Tous les calculs actuariels classiques sont désormais réalisés à partir de cette loi ainsi construite.

En annexe, un certain nombre de résultats de cette loi de survie sont précisés.

4.1.2. De la provision mathématique à la PBO

De la même manière que pour le fonds des retraités, nous allons calculer la trajectoire des provisions mathématiques correspondant à l'engagement pris par l'entreprise envers ses salariés dans le régime de retraite étudié.

La méthode utilisée pour construire la série des provisions mathématiques pour chaque assuré est la suivante :

- récupération des données utiles (année de naissance du salarié et, le cas échéant, du conjoint, situation familiale, ancienneté actuelle dans l'entreprise, salaire actuel),
- projection du salaire au terme (en fonction des règles d'accord de la prestation de retraite, d'un taux annuel d'inflation égal à 1.81 % - *cf.* résultats numériques précédents - d'un taux de croissance des salaires uniforme de 2% par an),
- détermination de l'ancienneté au terme et surtout du montant initial de la prestation de rente, ainsi que la durée du différé avant perception de la prestation,
- calcul de la provision mathématique (évaluée avec la table incluant l'effet de rotation du personnel) correspondante pour chaque engagement individuel.

La trajectoire des provisions mathématiques est égale à la somme des provisions individuelles pour chaque date.

Il existe une différence importante selon que l'engagement, que l'on décrit ici, est porté par un assureur ou par l'entreprise elle-même.

L'assureur est tenu, comme nous l'avons déjà évoqué, d'utiliser un taux d'actualisation « prudent », fixé ici à 2.25%, alors que l'entreprise elle va retenir un taux d'intérêt « économique », en phase avec les taux de rendement que l'on trouve au même instant sur le marché (3.39% dans notre application numérique).

Par contre, l'assureur peut ne pas tenir compte de la revalorisation future des prestations (qui sera accordée par le mécanisme de la participation aux bénéfices ou aux excédents Articles A. 331-4 du code des Assurances et D. 212-1 du code de la Mutualité), alors que l'entreprise doit intégrer cette dérive de l'engagement.

En pratique, les deux situations, et donc les deux valorisations de l'engagement, sont voisines.

En effet, par définition, la valeur de l'engagement est égale à la somme sur toutes les dates possibles des prestations probables actualisées.

En notant a le taux d'actualisation économique, i le taux prudent et r le taux de revalorisation de la prestation, l'expression de la valeur actuelle probable (VAP) prend la forme suivante :

- pour un assureur,

$$VAP = \sum_{t \in IIR_+} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation}_t \times \Pr(\text{verser la prestation en } t)$$

- pour une entreprise

$$VAP = \sum_{t \in IIR_+} \frac{1}{(1+a)^t} \times \text{prestation}_t \times (1+r)^t \times \Pr(\text{verser la prestation en } t)$$

Les deux quantités sont égales si, toutes choses égales par ailleurs :

$$\frac{1}{(1+i)} = \frac{(1+r)}{(1+a)}$$

En différenciant l'équation précédente on obtient :

$$dr = -\frac{1+a}{(1+i)^2} di$$

Cela signifie donc qu'accroître le taux de revalorisation annuel des prestations revient à abaisser le taux d'intérêt technique (ou prudent) utilisé pour évaluer l'engagement.

Dans notre application, nous nous plaçons dans le cas de figure où les deux situations sont équivalentes. Ainsi, le taux annuel de revalorisation des prestations est égal à 1.11%.

Nous allons déterminer la trajectoire des provisions mathématiques sur un demi siècle en utilisant d'abord la table de mortalité classique TPG 93, puis la table construite en intégrant les autres causes de sortie.

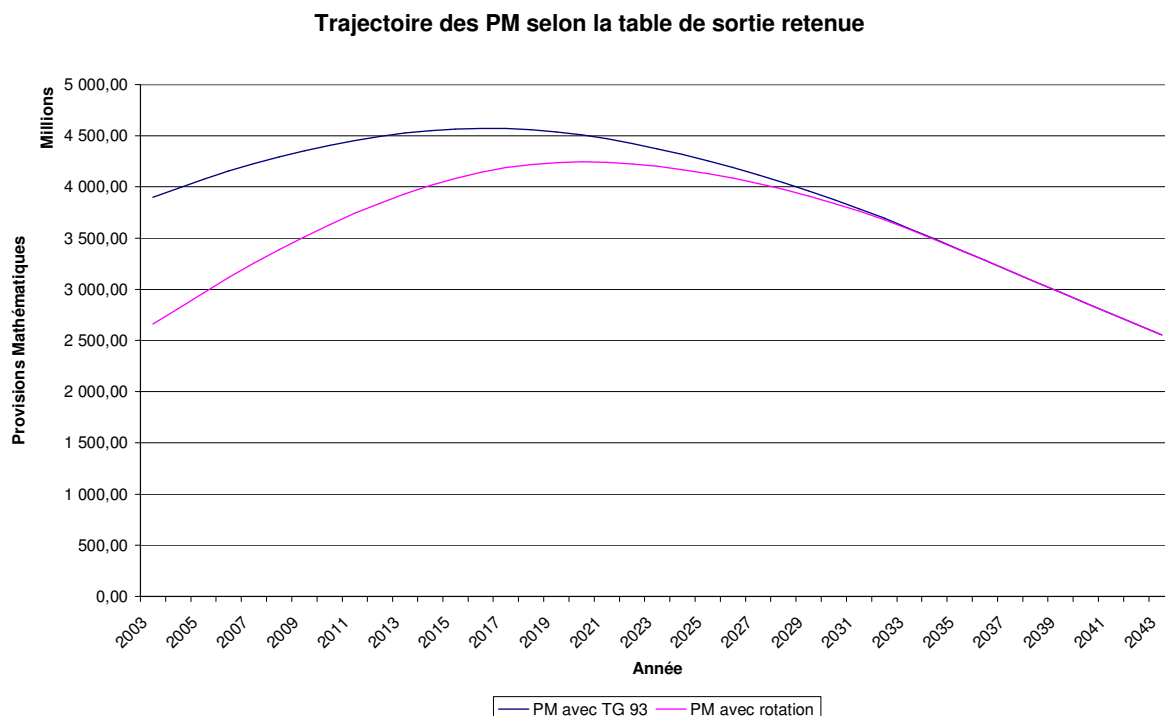
Les trajectoires obtenues ont donc une forme « en cloche ». Pour chaque individu, la valeur de l'engagement croît, jusqu'à l'entrée en jouissance de la rente. A partir de cet instant, la dynamique de la provision mathématique s'inverse, pour tendre vers 0.

Les montants de provisions mathématiques à constituer sont rigoureusement identiques dès lors que l'ensemble des salariés est en phase de jouissance de leur rente, puisque l'on utilise alors la même table de sortie.

Le graphique suivant retrace pour chacune des deux tables de sortie du régime retenue la trajectoire du montant global de provisions mathématiques à constituer pour chaque exercice.

Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- taux de croissance des salaires, 2% par an,
- taux d'inflation, 1.81%,
- taux d'intérêt technique 2.25%. Cette situation est équivalente à la combinaison d'un taux d'actualisation des flux futurs de 3.39% et un taux de croissance des prestations de 1.11%.

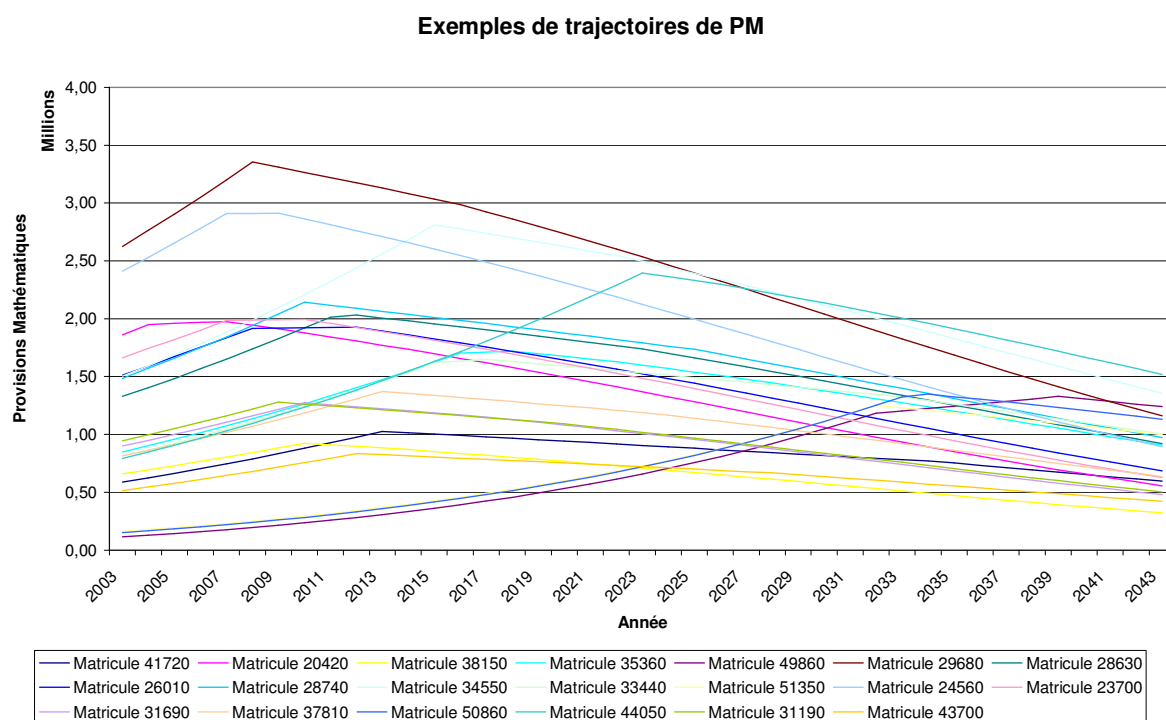


Graphique 21 : Trajectoire des provisions mathématiques (fonds des actifs) selon la table de sortie retenue

A titre d'exemple, tirons de manière aléatoire vingt salariés (identifiés par leur matricule) et traçons la dynamique de l'engagement individuel. On retient la table de sortie incluant la rotation des effectifs.

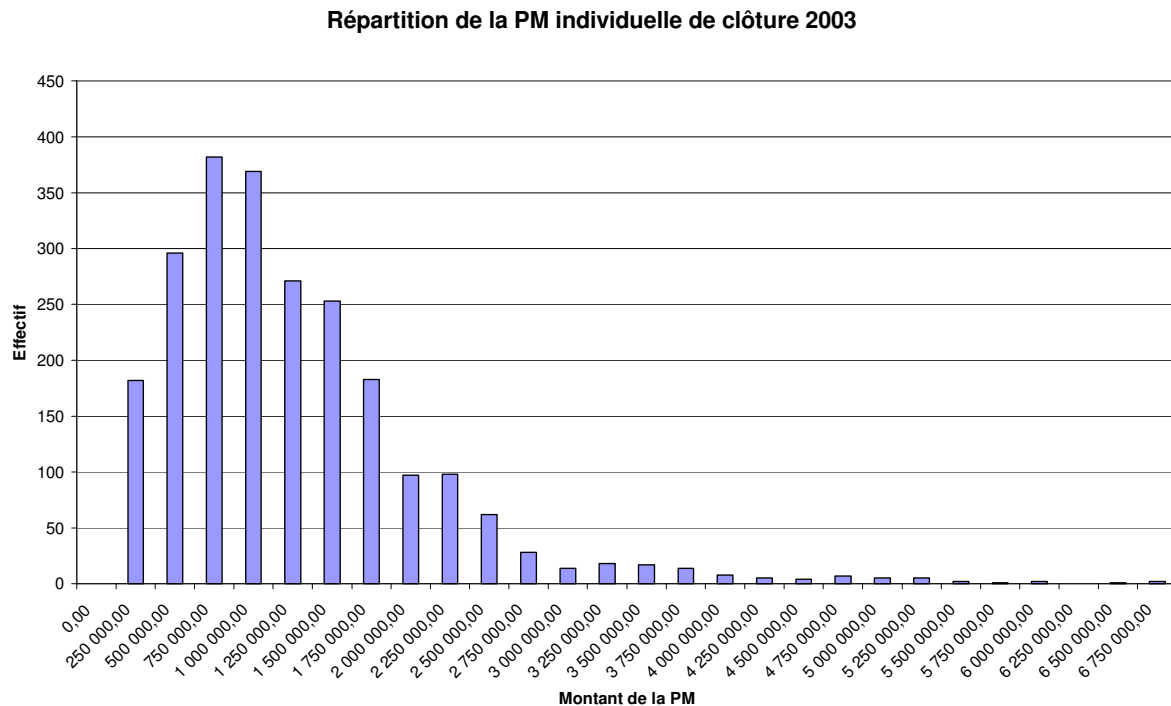
Pour sélectionner ces vingt individus, il suffit d'associer un nombre aléatoire, compris entre 0 et un, à chacun d'eux, puis de retenir, par exemple, ceux à qui l'on associe les vingt plus petits nombres.

On obtient les trajectoires suivantes :



Graphique 22 : Exemples de trajectoires de provisions mathématiques de l'engagement de retraite accordé à des actifs du régime

L'histogramme suivant permet de se faire une idée de la distribution du montant de la provision mathématique de l'engagement individuel de retraite sur l'ensemble de la population.



Graphique 23 : Histogramme des provisions mathématiques individuelles des actifs du régime (au 31 décembre 2003)

Pour l'instant nous avons déterminé, pour chaque salarié, l'évolution de la provision mathématique sur 40 ans. Pour obtenir le montant de la valeur actuelle de l'obligation (PBO), telle que définie dans la deuxième partie, il suffit de d'appliquer à la valeur actuelle probable de l'engagement d'un individu un coefficient égal au ratio entre l'ancienneté actuelle et l'ancienneté au terme, au moment de l'entrée en jouissance de la rente.

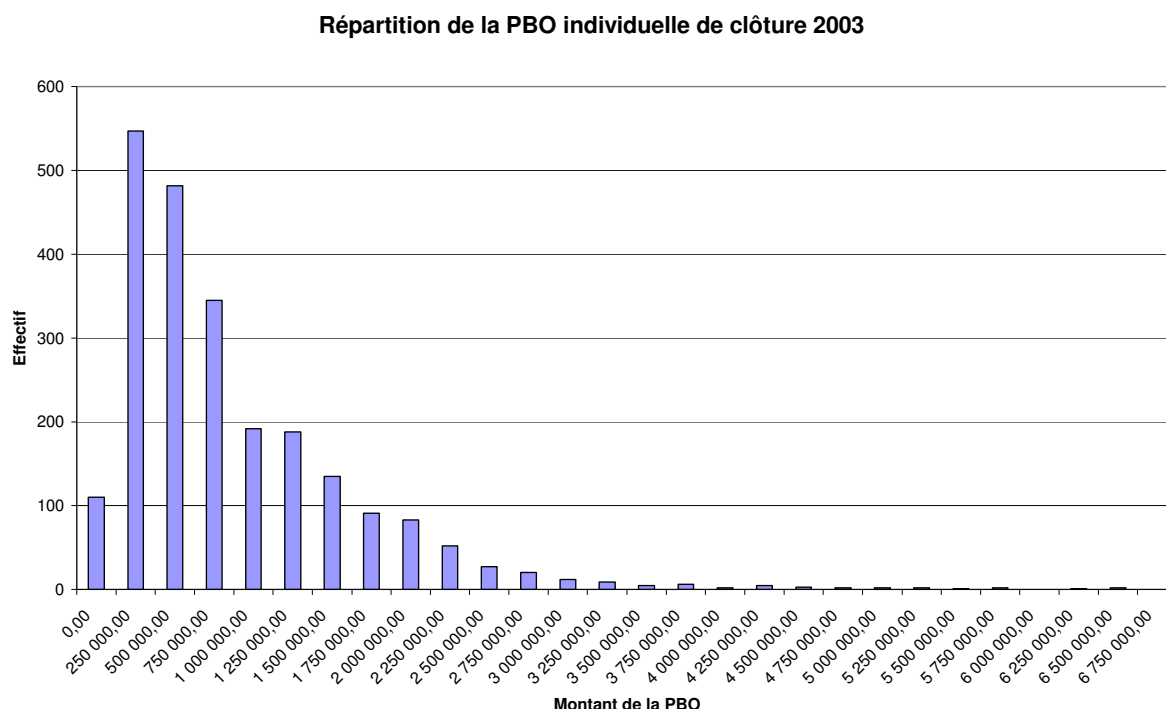
Ce montant global sert de base pour bâtir l'état IAS 19.

4.1.3. Elaboration d'un état IAS 19

Pour chacun des individus qui se constituent des droits à prestations dans le régime étudié, on détermine le montant de la valeur actuelle de l'obligation de l'entreprise (PBO) correspondant.

Ce calcul individuel ne pose aucune difficulté : on connaît pour tous les salariés le montant de la valeur actuelle probable de l'engagement (VAP), l'ancienneté actuelle et l'ancienneté au terme.

On obtient la distribution des montants de PBO individuelle de clôture 2003 suivante :



Graphique 24 : Histogramme des PBO des actifs du régime (au 31 décembre 2003)

De même, il est facile de déterminer le coût des services rendus en appliquant à la VAP de chaque individu un coefficient égal à l'inverse de l'ancienneté au terme.

La notion de durée résiduelle présente dans l'état IAS 19 est assimilée dans le modèle à la durée des flux futurs de prestations. A partir des espérances de « vie » calculées avec la table de sortie intégrant la rotation des effectifs, on peut projeter les flux futurs (en intégrant évidemment le différé avant la jouissance de la rente) de prestations. On obtient sur les données une durée résiduelle de 22 ans.

Cette durée est relativement longue du fait d'un taux de rotation relativement faible (*cf. infra* applications numériques).

Les prestations versées par le régime dans l'année courante correspondent aux sommes transférées vers le fonds des retraités et au remboursement des cotisations versées par le salarié en cas de départ de l'entreprise (toutes causes confondues).

En début d'année, il est possible de déterminer le montant de la prestation issue des transferts vers le fonds des retraités.

Reprenons l'état IAS 19 qui a été construit dans la deuxième partie en le complétant avec les éléments calculés sur la base de données du régime.

On fait l'hypothèse selon laquelle, au 31 décembre 12/2003, la valeur actuelle de l'obligation du régime est égale à la juste valeur de l'actif de couverture.

Taux d'actualisation des flux	3.39%
Taux de rendement attendu des actifs	3.39%
Durée résiduelle des amortissements	22

	Réel au 31/12/2003		Courant 2004	Estimé au 31/12/2004	Réel au 31/12/2004	
Valeur actuelle de l'obligation	- 1 735 435 046		- 69 047 568			
Juste valeur de l'actif de couverture	1 735 435 046		- 5 388 191			
Couverture			- 74 435 759	- 74 435 759		
	Ecarts de l'année	Cumul des écarts			Ecarts de l'année	Cumul des écarts
Amortissement des services passés acquis	0	0		0		
Amortissement des services passés non acquis	0	0		0		
Ecarts actuariels cumulés à amortir	0	0		0		
Déficit/Excédent			- 74 435 759	- 74 435 759		
Détail du coût de la période						
Services rendus sur la période			- 95 429 916			
Charge d'intérêt			- 60 604 189			
Rendement attendu de l'actif			57 769 645			
Amortissements des : - services passés acquis, - services passés non acquis - écarts actuariels à amortir, - écarts actuariels pris en charge immédiatement			0 0 0 0			
Coût de la période			- 98 264 459			
Cotisations payées			23 828 700			
Prestations versées			- 86 986 536			

Le code couleurs utilisé est le suivant :

- vert clair pour toutes les informations connues à l'ouverture (présents dans les comptes de l'exercice précédent),
- bleu ciel pour les éléments calculés en début de période,
- vert foncé pour les réalisations simulées,
- rouge la variable d'intérêt.

4.1.4. Tests de stabilité de l'état IAS 19

Pour tester la stabilité de l'état IAS 19, nous allons simuler les variables aléatoires de cet état, à savoir la valeur de l'obligation de l'entreprise envers ses salariés au 31 décembre 2004, le montant des prestations versées en cas de départ anticipé, les cotisations perçues par le régime et la juste valeur de l'actif de couverture à cette même date.

On pourra ainsi mesurer la variabilité de l'écart actuariel cumulé à amortir.

Les simulations sont réalisées à partir des estimations des paramètres obtenues plus haut.

En première approche, on considère qu'une variation du taux d'actualisation a , naturellement, un impact sur la valorisation de l'actif obligataire, mais que l'évaluation de l'engagement (la PBO) demeure quant à elle insensible à ces variations. Deux explications justifient ce choix dans la modélisation :

- le taux d'actualisation des flux futurs retenu pour évaluer le passif est fixé *a priori*, en début de période, en fonction des conditions économiques qui prévalent à cet instant. Il s'agit donc d'un paramètre fixé par l'entreprise indépendamment d'une quelconque cotation. La norme impose cependant une révision régulière des paramètres fixés,
- l'indépendance entre le taux utilisé au passif et celui employé pour établir la juste valeur de l'actif de couverture peut être aussi dû au fait que, si l'entreprise est effectivement responsable des avantages qu'elle a octroyés à ses salariés, elle peut néanmoins confier la gestion financière de l'actif de couverture à un assureur (en versant initialement une prime d'assurance, puis ultérieurement les cotisations salariales et patronales nettes des remboursements anticipés).

Il n'en demeure pas moins qu'une analyse actif/passif serait un prolongement intéressant.

4.1.4.1. Simulation de la PBO au 31 décembre 2004, des prestations et les cotisations

Méthode de simulation :

Pour chacun des salariés présents au 31 décembre 2003, on calcule le montant de la PBO au 31 décembre 2004. Celui-ci est nul si le salarié est parti en retraite ou s'il a quitté l'entreprise au cours de l'année 2004.

A l'aide de la table de sortie utilisée pour calculer la valeur actuelle de l'engagement (qui inclut la rotation du personnel), on détermine, pour chaque employé, la probabilité de sortie courant 2004.

On génère ensuite pour chaque individu un nombre aléatoire entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à la probabilité de sortie, alors considère que l'employé a effectivement quitté

l'entreprise (et donc on affecte une pondération égale à zéro à sa PBO précédemment évaluée). A défaut, le salarié est réputé présent au 31 décembre 2004.

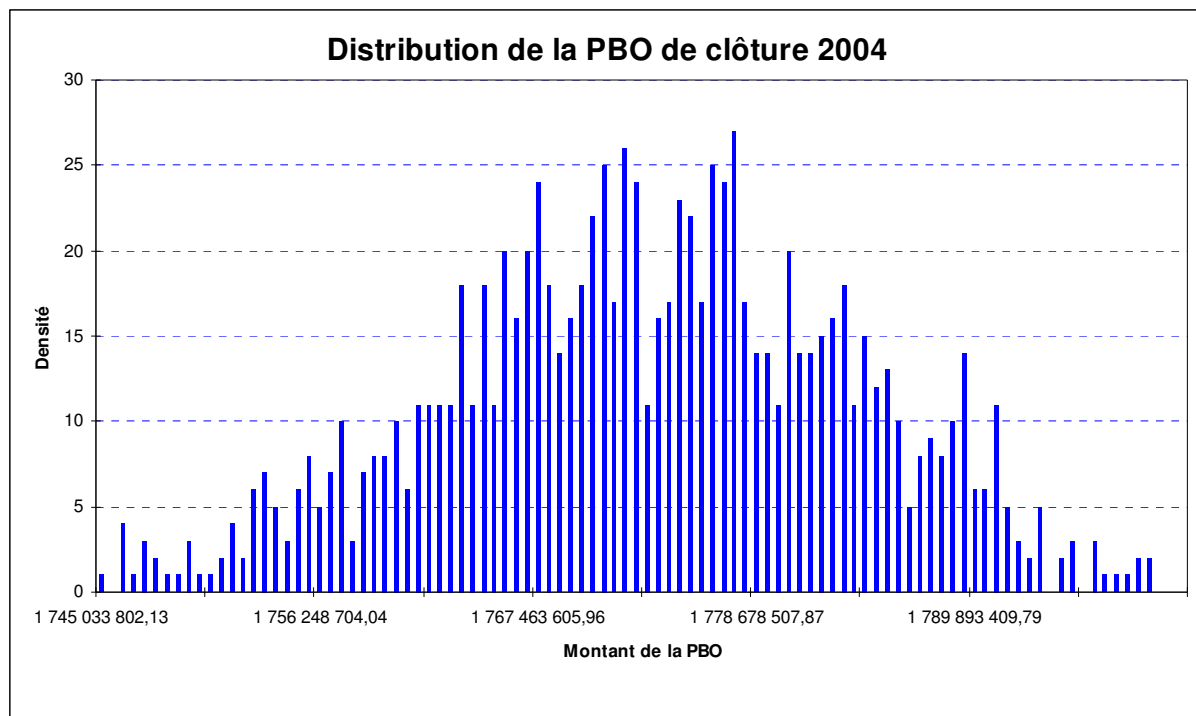
En effet, considérons une variable aléatoire dichotomique qui vaut un si l'individu, présent dans l'entreprise au 31 décembre 2003 l'est toujours un plus et tard zéro sinon. Cette variable aléatoire suit une loi de BERNOULLI de paramètre $1 - q_x$. Un moyen de simuler cette loi de probabilité est celui décrit précédemment.

En simulant plusieurs fois ces nombres aléatoires, on obtient autant de valeurs possibles de la PBO.

Dans le même temps, il est possible de déterminer le montant de la prestation versée (somme des cotisations payées par le salariés jusqu'au jour de son départ) ainsi que les cotisations perçues. On supposera que les départs ont lieu en milieu d'année (*ie.* l'employé a versé la moitié des cotisations dues sur une année).

Mise en œuvre de la simulation et résultats :

La simulation est effectuée sur 1000 tirages de chacune des lois uniformes. On obtient donc 1000 réalisations de la PBO au 31 décembre 2004 dont voici la distribution empirique :

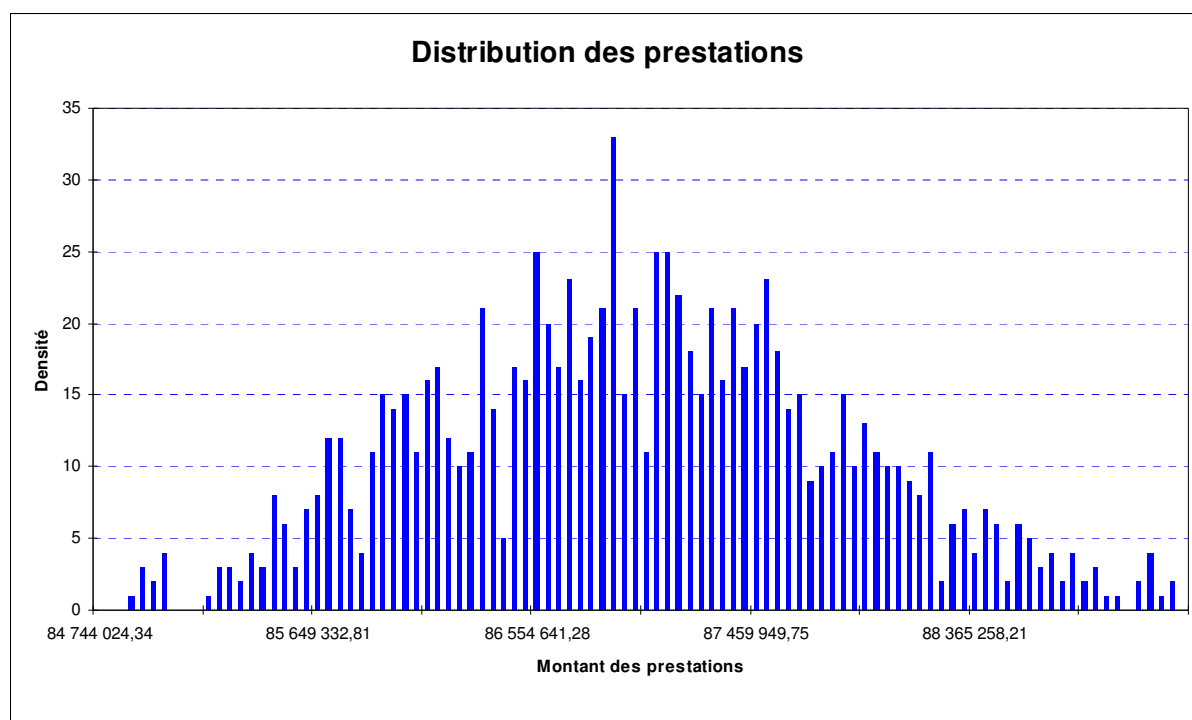


Graphique 25 : Scénario I – Distribution empirique de la PBO au 31 décembre 2004

Pour le montant des prestations on obtient la distribution empirique qui suit.

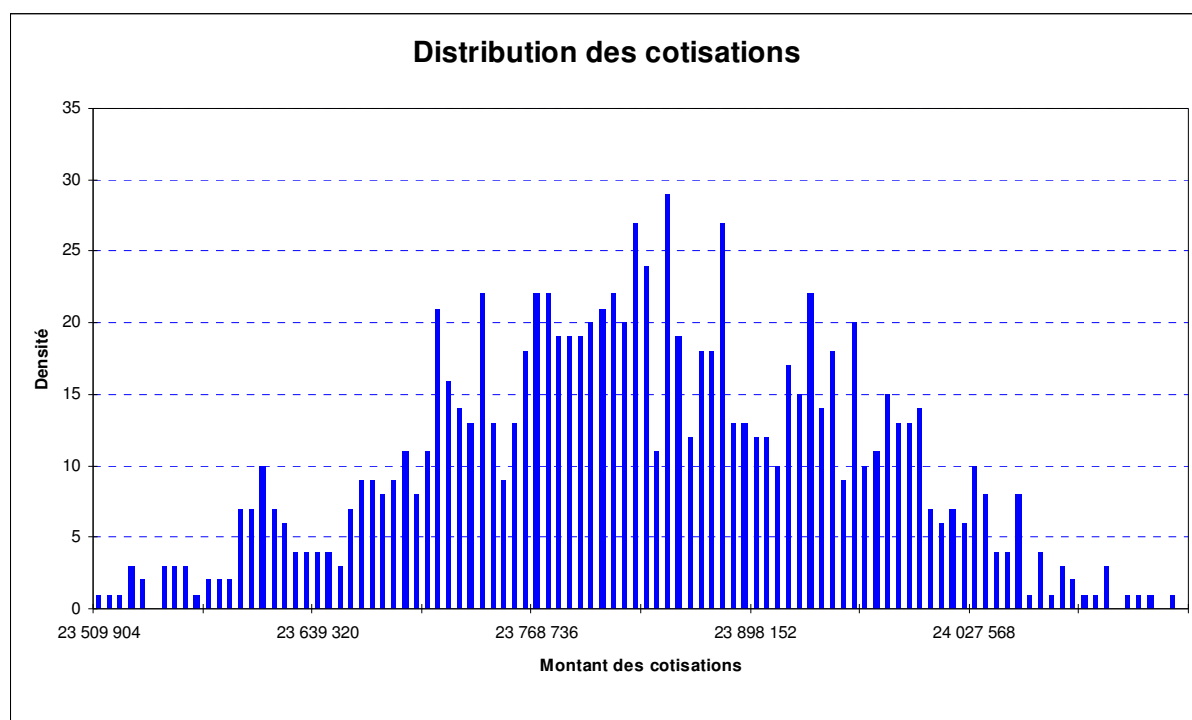
Pour un salarié qui quitte l'entreprise (hors départ en retraite) les cotisations versées en 2004 sont remboursées et sont incluses dans les prestations. Dans la mesure où cet effet s'annule, on considère qu'il n'y a pas de cotisations ni de prestations au titre de l'exercice 2004.

Pour les départs en retraite, c'est la PM au 31 décembre 2003 (qui est alors identique à la PBO, puisque l'ancienneté actuelle est égale à l'ancienneté au terme) transférée au fonds des retraités qui est imputée sur le poste prestation de l'année 2004.



Graphique 26 : Scénario I – Distribution empirique des prestations 2004

Pour les cotisations, nous obtenons le graphique suivant :



Graphique 27 : Scénario I – Distribution empirique des cotisations 2004

Les résultats statistiques obtenus pour les trois variables aléatoires sont les suivants :

Statistiques	PBO 2004	Prestations	Cotisations
Nombre de simulations	1 000	1 000	1 000
Moyenne	1 772 911 093	86 986 536	23 828 700
Médiane	1 773 017 758	86 964 683	23 828 782
Ecart type	10 892 053	880 276	126 779
Skewness	-0,21	0,18	-0,17
Kurtosis	2,97	2,96	2,95
Coefficient de variation	0,01	0,01	0,01
Min	1 738 202 321	84 163 822	23 369 886
Max	1 808 014 993	89 904 702	24 217 310

4.1.4.2. Simulation de la valeur des actifs de couverture au 31 décembre 2004

Par hypothèse dans ce premier scénario, la valeur de l'obligation du régime envers ses affiliés au 31 décembre 2003 est égale à l'actif de couverture. Il n'y a pas d'écarts à amortir à cette date.

On suppose que l'actif est composé à 20% d'actions (dont la dynamique du rendement est décrite plus haut) et à 80% d'obligations zéro coupon de maturité identique à la durée des engagements soit 22 ans. Cette hypothèse permet d'utiliser les processus décrits dans la deuxième partie pour obtenir la distribution de probabilité empirique de la valeur des actifs de couverture au 31 décembre 2004. En pratique, si la gestion de l'actif n'est pas confiée à un assureur, l'actif de couverture peut être constitué par n'importe quel actif détenu par l'entreprise dans le cadre de son activité (centrales nucléaires, rames de TGV, usines d'assemblage d'automobiles,...). La méthode de valorisation des actifs reste la même : la somme actualisée des flux de trésorerie futurs attendus.

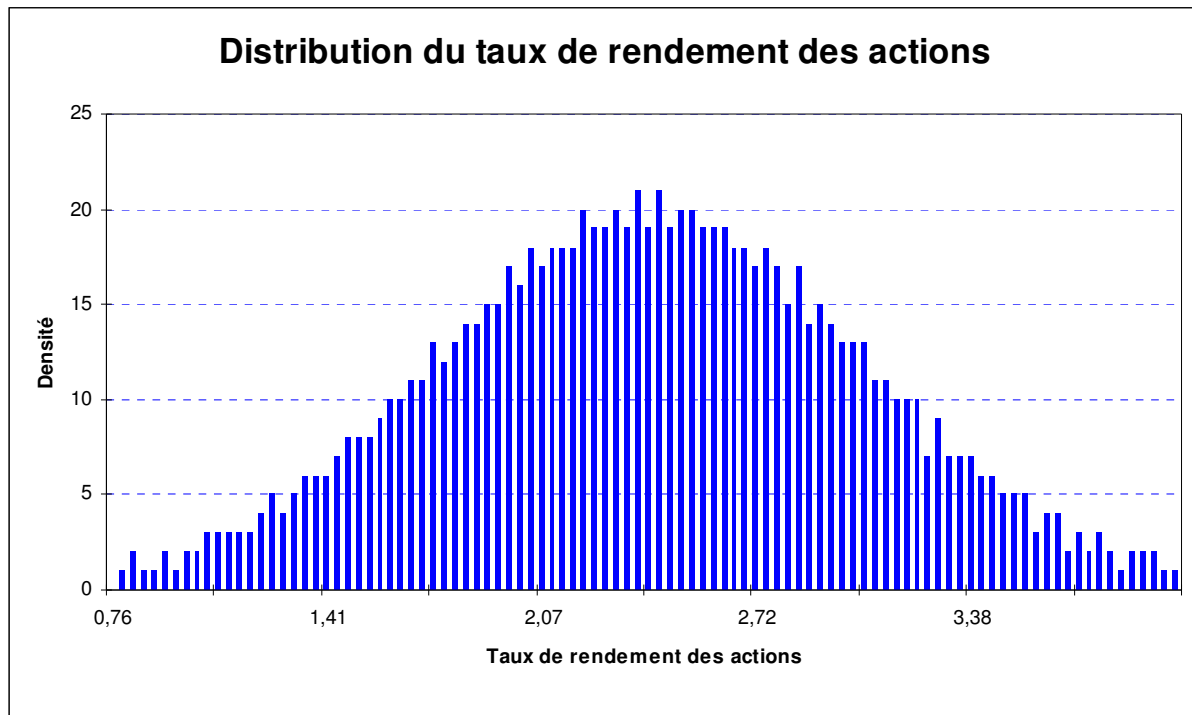
Dans notre cas, l'entreprise considérée est une banque.

Le rendement de chacun de ces deux classes d'actifs financiers (actions et obligations) suit une trajectoire propre, définie dans le modèle initial. Ce modèle nous permet de générer des réalisations des deux variables aléatoires.

Le rendement des actions

Le taux de rendement des actions suit une loi normale d'espérance 2.40 et de variance 0.43. On reprend ici le résultat de l'estimation de l'équation du taux de rendement des actions faites précédemment.

En simulant 1000 tirages de cette loi, on obtient la densité de probabilité suivante :



Graphique 28 : Scénario I – Distribution empirique du taux de rendement des actions pour l'année 2004

Le rendement des obligations

A l'aide des formules démontrées en première partie, on peut calculer le prix à une date t d'un zéro coupon de maturité T qui prévaut en fonction du taux d'intérêt de court terme.

Pour mémoire, voici les résultats que l'on avait obtenus :

$$A(t, T) = \frac{\mu(t, T)}{T - t} \times A(t) - \frac{1}{T - t} \ln(\lambda(t, T))$$

Avec

$$\lambda(t, T) = \left[\frac{2\gamma \exp\left((\alpha_2 + \gamma) \times \frac{T-t}{2}\right)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\alpha_2}{\sigma_2^2}}$$

$$\mu(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{(\alpha_2 + \gamma) \times (\exp(\gamma(T-t)) - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha_2^2 + 2\sigma_2^2}$$

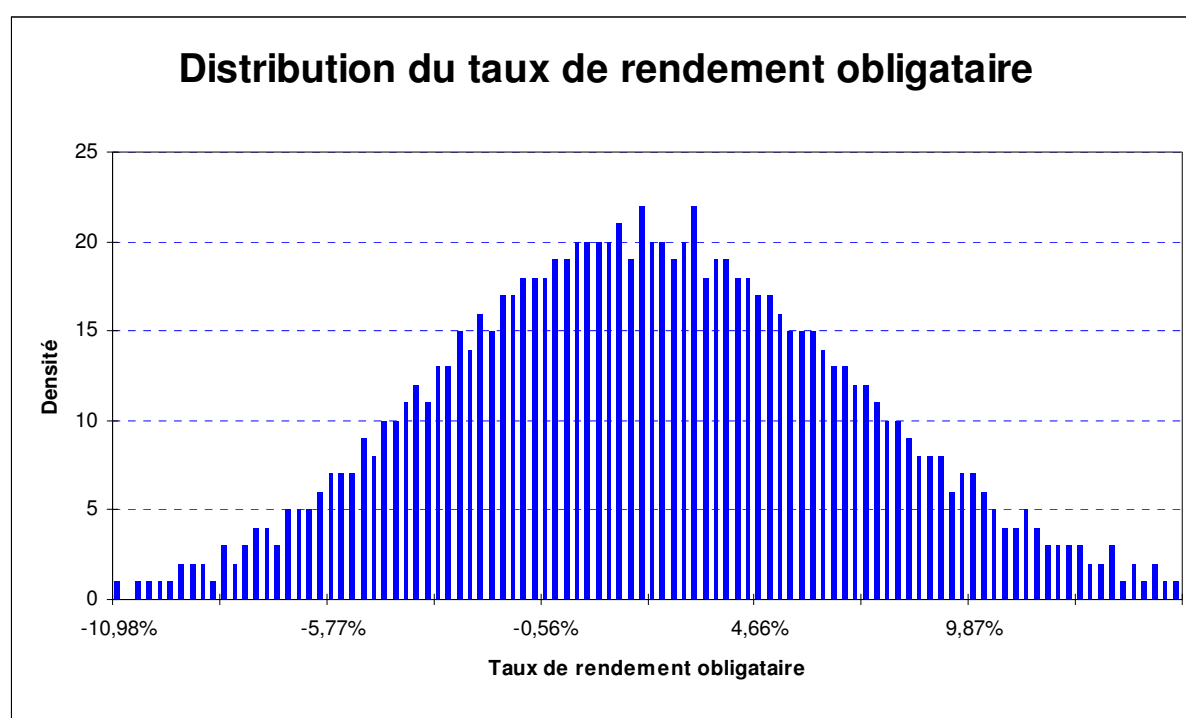
Et

$$P(A(t), t, T) = \exp(-A(t, T) \times (T - t))$$

En utilisant ces formules et les paramètres estimés, on connaît au 31/12/2003 le prix d'un zéro coupon de maturité 22 ans $P_{a_0,0,22} = 0.5266$.

En simulant le taux court dans un an, on obtient des réalisations de $P_{a_1,1,22}$.

Le taux rendement de l'actif obligataire est le taux de croissance entre ces deux quantités. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir des rendements négatifs. La distribution de ce taux de rendement est :



Graphique 29 : Scénario I – Distribution empirique du taux de rendement obligataire pour l'année 2004

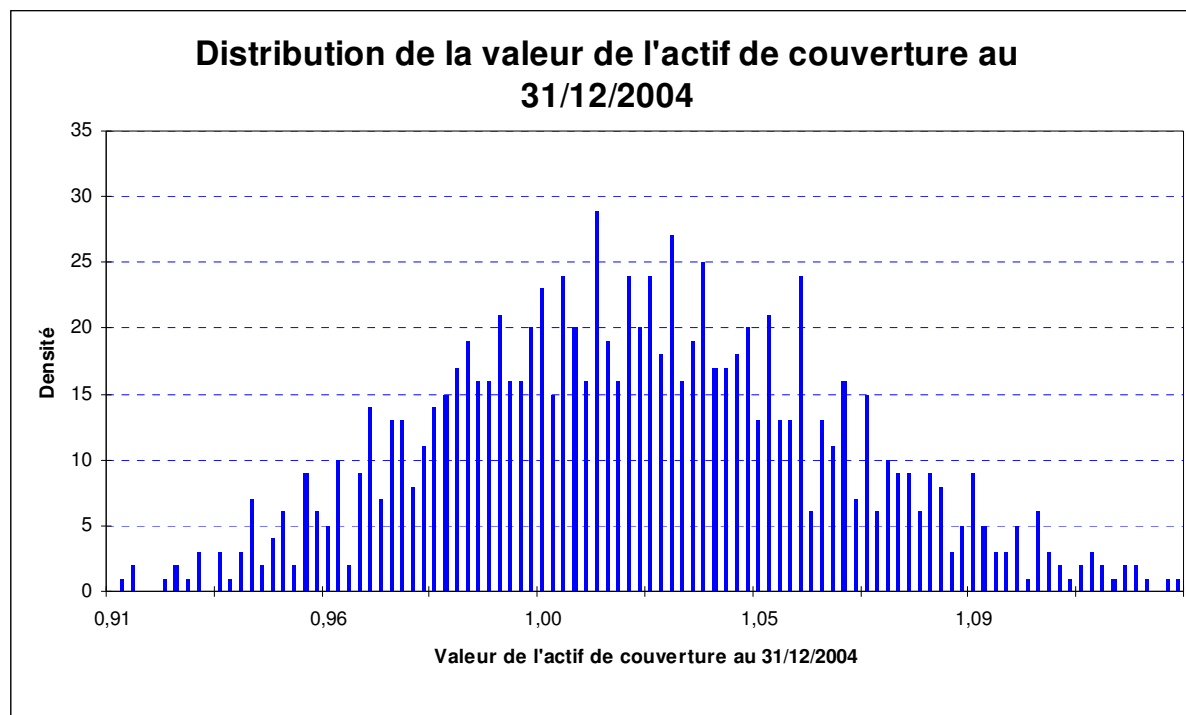
En reprenant les hypothèses sur la structure de l'actif et en utilisant les réalisations simulées des taux de rendement des actions et des obligations, on peut construire une distribution pour la valeur de l'actif de couverture au 31/12/2004.

Structure de l'actif au 31 décembre 2003 :

Type d'actif	Montant investi
Action	347 087 009
Obligation	1 388 348 037

Considérons 1 euro d'actif investi. Il y a donc 20 centimes sur un support actions et le complément en obligations.

Le graphique ci-après trace la distribution de probabilité simulée de la valeur de cet euro un an plus tard.



Graphique 30 : Scénario I – Distribution empirique de la valeur de l'actif de couverture au 31 décembre 2004

Les principaux résultats statistiques des trois distributions précédemment étudiées sont rassemblés dans le tableau qui suit.

Statistiques	Taux rendement action	Taux de rendement obligation	Valeur de l'actif de couverture
Nombre de simulations	1 000	1 000	1 000
Moyenne	2,40%	2,04%	1,02
Médiane	2,40%	1,87%	1,02
Ecart type	0,66%	5,15%	0,04
Skewness	- 0,01	0,20	0,20
Kurtosis	3,00	3,16	3,05
Coefficient de variation	0,27	2,52	0,04
Min	0,10%	-15,62%	0,89
Max	4,61%	22,89%	1,18

4.1.4.3. Stabilité de l'état IAS 19

En ayant simulé d'un côté les données du passif (PBO de clôture, prestations et cotisations de l'année), et de l'autre la juste valeur de l'actif de couverture à la même date, on dispose de 1000 réalisations de chacune de ces variables aléatoires.

Il est important de noter que les trois variables du passif sont liées. Les réalisations de celles-ci sont indissociables. En effet, à un niveau de PBO initial correspond un couple de cotisations et prestations de l'année.

Méthode de simulation

A partir de l'état IAS 19 construit précédemment, on fait varier chacun des éléments aléatoires, en tirant des réalisations de celles-ci dans les lois de probabilité estimées établies dans l'étape antérieure.

On obtient ainsi des réalisations de la variable d'intérêt « écart actuariel cumulé à amortir ».

Pour chaque simulation $j, j = \{1, \dots, 1000\}$, on génère un tirage de deux variables aléatoires uniformes indépendantes, notées (U_1^j, U_2^j) , et l'on considère la partie entière de ce couple multiplié par 1000.

Par exemple, si, après expérimentation, le couple aléatoire (U_1^j, U_2^j) , $j, j = \{1, \dots, 1000\}$, prend la valeur (0.6148, 0.3224), alors on retient pour ce tirage, la 614^{ème} réalisation empirique du triplet (PBO de clôture, prestations de l'année, cotisations de l'année) et la 322^{ème} de la valeur de l'actif de couverture au 31/12/2004.

Les deux tableaux suivants présentent un extrait des lois de probabilité empiriques utilisées.

Données du passif

N° tirage	PBO clôture	Prestations	Cotisations
613	1 776 384 674,78	86 700 673,16	23 843 932,08
614	1 776 400 341,92	86 812 624,91	23 805 210,32
615	1 776 426 242,83	86 709 802,77	23 858 850,22

Données de l'actif

N° tirage	PBO clôture
321	1 804 436 018,20
322	1 710 027 570,54
323	1 723 743 553,40

Pour ces valeurs, on obtient un écart actuariel cumulé à amortir de 8 086 873. Valeur incluse dans le corridor.

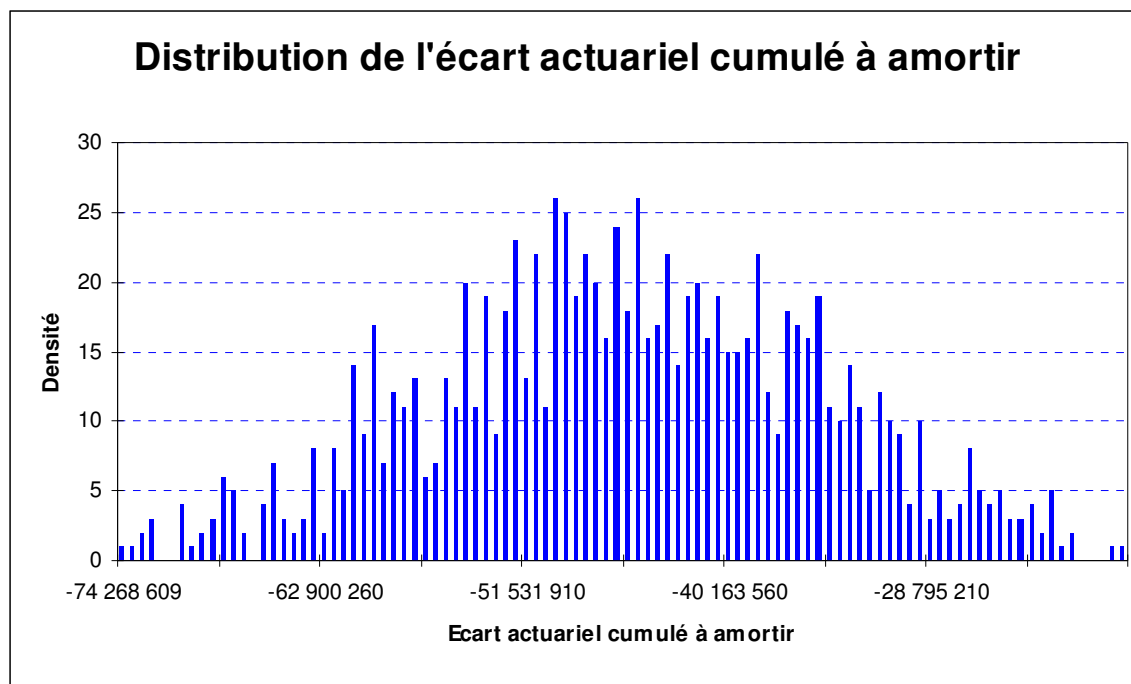
Mise en œuvre de la simulation et résultats :

On réalise l'exercice décrit plus haut 1000 fois de suite. On obtient la distribution de probabilité empirique de l'écart actuariel cumulé à amortir aléatoire et on compte le nombre de fois où une réalisation de cette variable aléatoire sort du corridor.

Les résultats statistiques de la loi de probabilité ainsi simulée sont rassemblés dans le tableau suivant. Dans la mesure où l'écart actuariel ne sort jamais (dans ce premier jeu de simulations), les résultats statistiques de cette variable sont un peu « particuliers ».

Statistiques	Sortie du corridor	Ecart actuariel
Nombre de simulations	1 000	1 000
Moyenne	0,00	-45 796 797
Médiane	0,00	-45 891 870
Ecart type	0,00	11 247 279
Skewness	0,00	-0,02
Kurtosis	+ infini	2,96
Coefficient de variation	+ infini	-0,25
Min	0,00	-85 015 385
Max	0,00	-9 600 197

Traçons la densité de probabilité estimée de l'écart actuariel cumulé à amortir.



Graphique 31 : Scénario I – Distribution empirique de l'écart actuariel cumulé à amortir au 31 décembre 2004

Testons la normalité de la distribution de l'écart actuariel cumulé à amortir. Pour se faire, on utilise la même procédure de test que celle employée lors de l'estimation paramétrique du taux d'inflation.

Résultat du test de normalité

Ecart type empirique	11 247 278,86
Skewness empirique	-0,02
Kurtosis empirique	2,96
Valeur de la statistique JARQUE et BERA	0.1105
Probabilité de dépassement	0.9463

On ne rejette donc pas l'hypothèse de normalité de l'écart actuariel cumulé à amortir aléatoire.

4.1.4.4. Analyse du résultat obtenu

Dans ce premier scénario où l'ensemble des variables aléatoires qui influent sur l'écart actuariel a un comportement « standard » ou « central », la distribution de cette quantité est normale.

Sur le millier de réalisations tiré, aucune ne sort du corridor. D'un point de vue théorique, si l'écart actuariel à amortir est effectivement normalement distribué, alors il devrait exister, si l'on augmente fortement le nombre de simulation, des états de la nature pour lesquels l'écart actuariel sortirait du corridor. En effet, le support d'une loi normale est l'ensemble des nombres réels.

En définitive, dans cette situation, où les chocs sont faibles amplitudes, le corridor joue à plein son rôle d'amortisseur. Finalement, on considère que, même si la valeur effective de la couverture du régime (juste valeur de l'actif diminuée de la valeur actuelle de l'obligation) à la clôture de l'exercice diffère de celle estimé, cet écart est considéré comme étant suffisamment faible pour ne pas être comptabilisé.

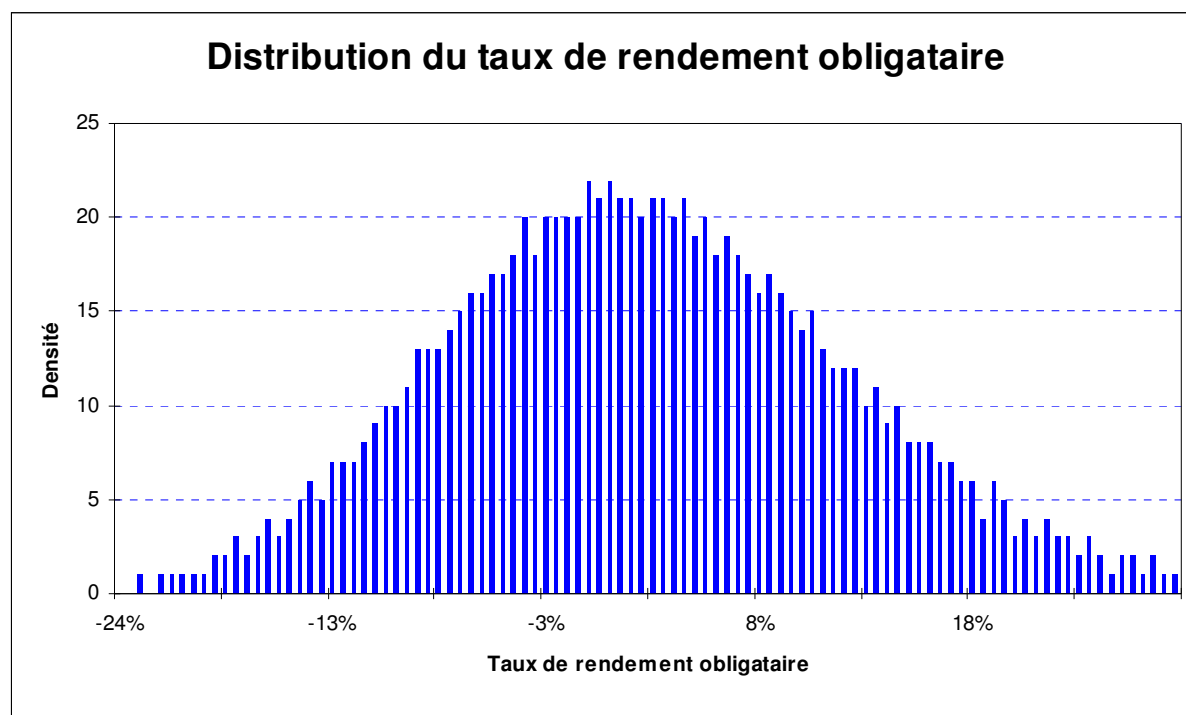
En fait, toute valeur comprise dans le corridor est, en appliquant le référentiel comptable IAS19, « juste ».

4.2. Scénario II : le fonds des actifs dans le cas d'une forte volatilité de l'actif de couverture

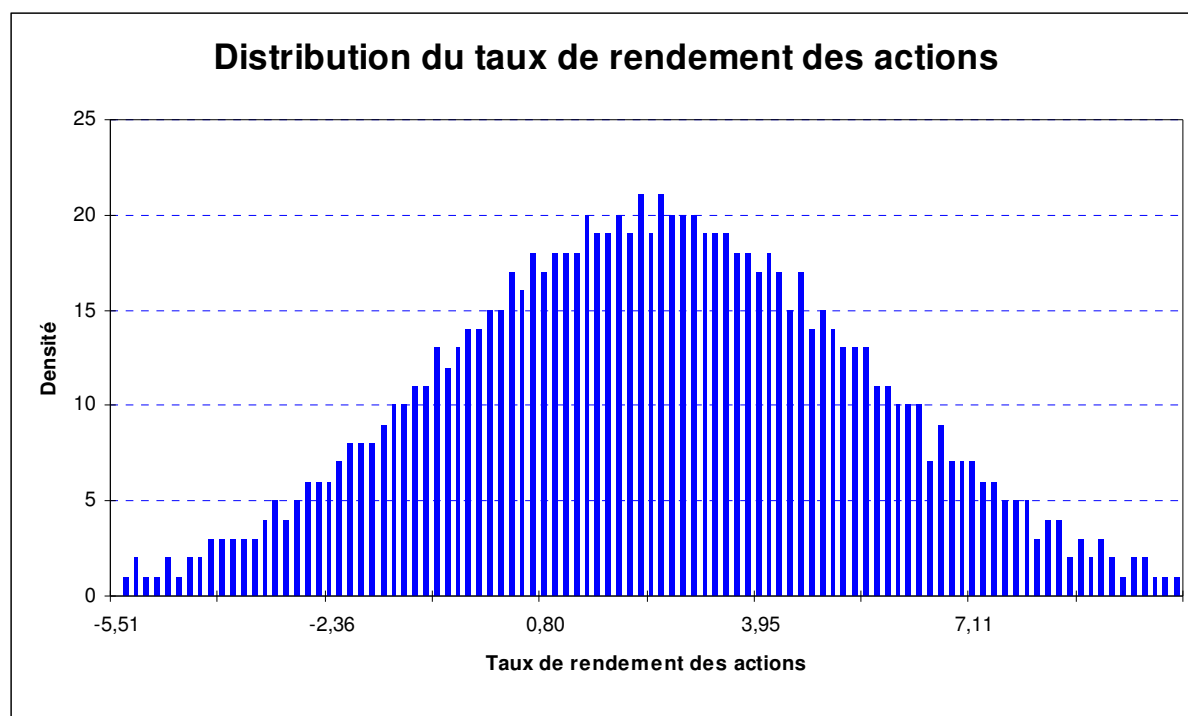
Faisons subir à la situation équilibrée précédente un choc en augmentant la volatilité de l'actif de couverture. Pour se faire, on conserve la même modélisation qu'auparavant pour le taux de rendement des actifs obligataires et action, tout en modifiant un paramètre, l'écart type de la distribution. Ce paramètre est calé à 10%.

4.2.1. Distribution de l'actif de couverture en cas de forte variabilité des taux de rendements

Après simulations, on obtient les deux courbes suivantes des distributions des taux de rendement des actions et des obligations.

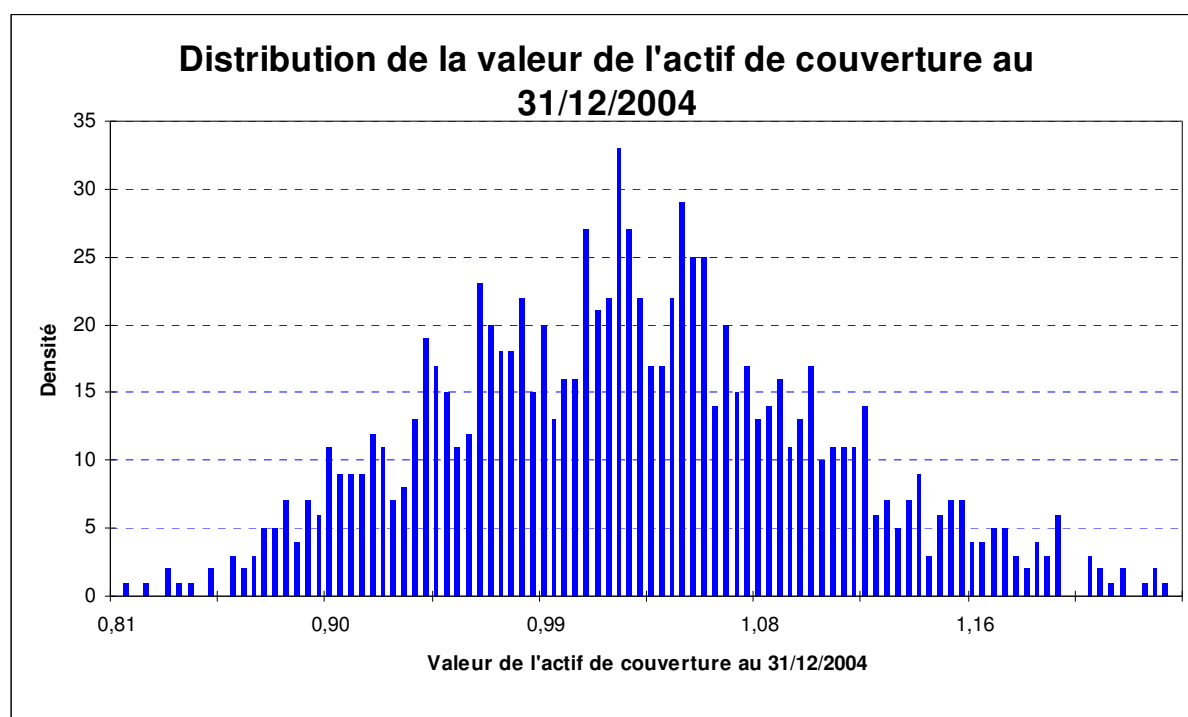


Graphique 32 : Scénario II – Distribution empirique du taux de rendement des actions pour l'année 2004



Graphique 33 : Scénario II – Distribution empirique du taux de rendement obligataires pour l'année 2004

A partir de ces deux distributions, on déduit celle de la valeur de l'actif de couverture au 31/12/2004.



Graphique 33 : Scénario II – Distribution empirique de la valeur de l'actif de couverture au 31 décembre 2004

On obtient les résultats statistiques suivants.

Statistiques	Taux rendement action	Taux de rendement obligation	Valeur de l'actif de couverture
Nombre de simulations	1 000	1 000	1 000
Moyenne	2,40%	2,24%	1,02
Médiane	2,36%	1,75%	1,02
Ecart type	9,99%	10,03%	0,08
Skewness	0,00	0,30	0,25
Kurtosis	2,95	3,11	3,08
Coefficient de variation	4,17	4,48	0,08
Min	-29,12%	-25,08%	0,79
Max	34,50%	41,56%	1,34

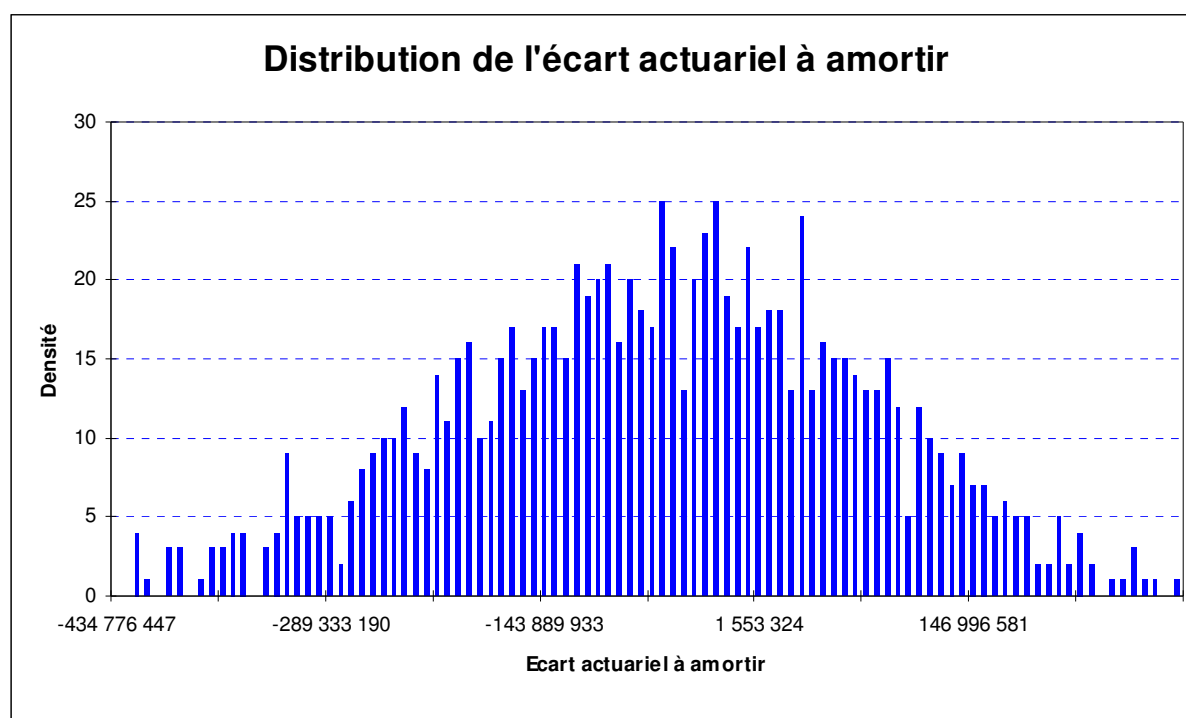
4.2.2. Distribution de l'écart actuariel et probabilité de sortie du corridor

Les données de passif restent inchangées. On utilise donc pour simuler des réalisations de l'écart actuariel à amortir les mêmes lois de probabilité empiriques que dans le premier scénario.

La méthode employée pour obtenir ces réalisations est identique. On va simplement tirer des valeurs de l'actif de couverture dans la loi que l'on vient d'obtenir.

Statistiques	Sortie corridor	Ecart actuariel
Nombre de simulations	1 000	1 000
Moyenne	0,24	-68 411 519
Médiane	0,00	-64 043 195
Mode	0,00	---
Ecart type	0,43	143 518 469
Skewness	1,24	- 0,22
Kurtosis	2,52	2,99
Coefficient de variation	1,80	- 2,10
Min	0,00	-567 275 237
Max	1,00	319 841 750

On obtient la densité de probabilité estimée de l'écart actuariel cumulé à amortir suivant.



Graphique 34 : Scénario II – Distribution empirique de l'écart actuariel cumulé à amortir au 31 décembre 2004

Testons la normalité de l'écart actuariel aléatoire.

Résultat du test de normalité

Ecart type empirique	143 518 469
Skewness empirique	-0.22
Kurtosis empirique	2.99
Valeur de la statistique JARQUE et BERA	8.3991
Probabilité de dépassement	0.015

On refuse l'hypothèse de normalité de la distribution de l'écart actuariel aléatoire dans le cadre du deuxième scénario.

4.2.3. Analyse du résultat obtenu

Dans une situation de forte variabilité des rendements, et de la juste valeur de l'actif de couverture, la distribution de probabilité de l'écart actuariel est déformée. Elle est désormais plus étirée à gauche. Les écarts négatifs sont plus fréquents.

A la différence de la première situation où l'écart actuariel sort du corridor avec une probabilité infime, on constate ici que cet événement survient avec une probabilité estimée de 24%.

Le corridor absorbe encore les trois quarts des chocs, même dans un cas où les rendements de chacun des actifs financiers ont un écart type de 10%.

4.3. Scénario III : le fonds des actifs dans le cas d'un taux de rotation élevé

On reprend comme point de départ le scénario central qui a été construit en premier, et cette fois-ci, on s'intéresse à l'effet qu'engendre sur la stabilité de l'état IAS 19 un passif beaucoup plus variable.

Toutefois, dans ce scénario, la valeur initiale de l'actif de couverture doit être ajustée, de manière à avoir une situation d'équilibre à l'origine.

4.3.1. Distribution des variables du passif dans le cas d'un taux de rotation élevé

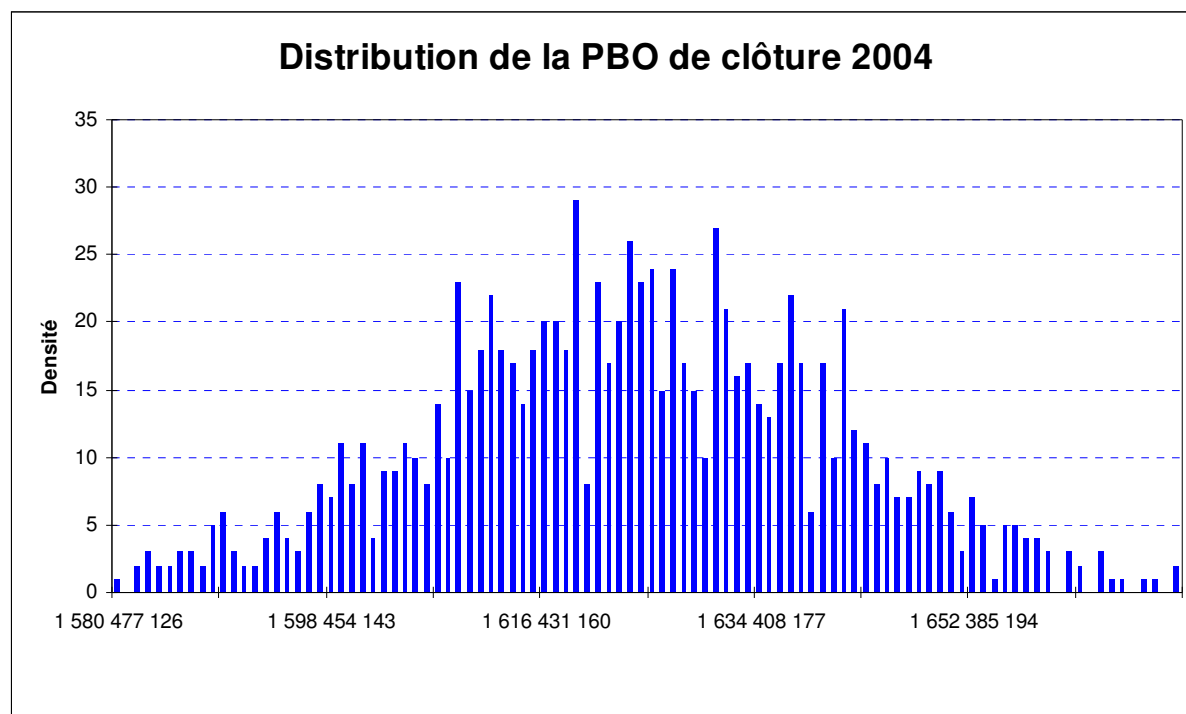
L'utilisation d'un taux de rotation du personnel plus élevé nécessite la construction d'une nouvelle table de mortalité servant à évaluer les engagements portés par le régime de retraite que l'on étudie.

Deux graphiques de l'annexe présentent, pour une tête d'âge née en 1950, l'évolution du taux de rotation et du nombre de « vivant » selon l'âge.

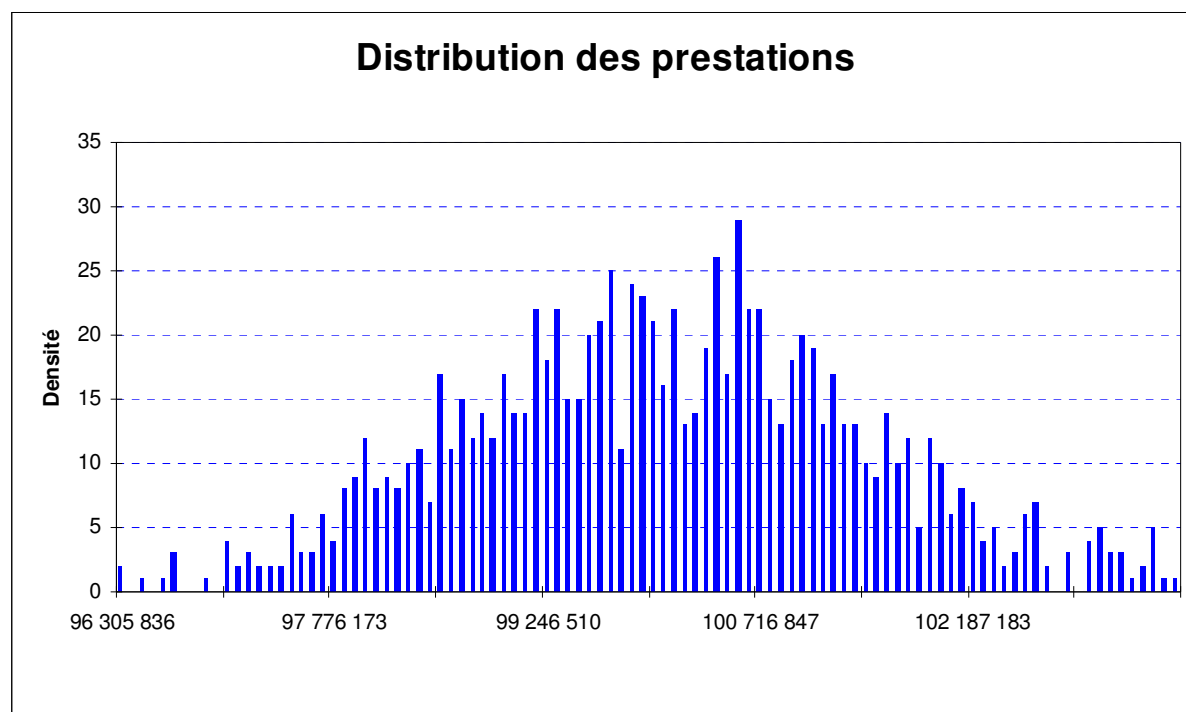
La valeur du paramètre β du taux de rotation du personnel hors cause de décès est modifiée.

Elle fixée à 95 (au lieu de 30 dans le premier scénario). Le taux de rotation est trois fois plus élevé à l'âge de 18 ans (30%) et à l'âge de 55 ans (10%).

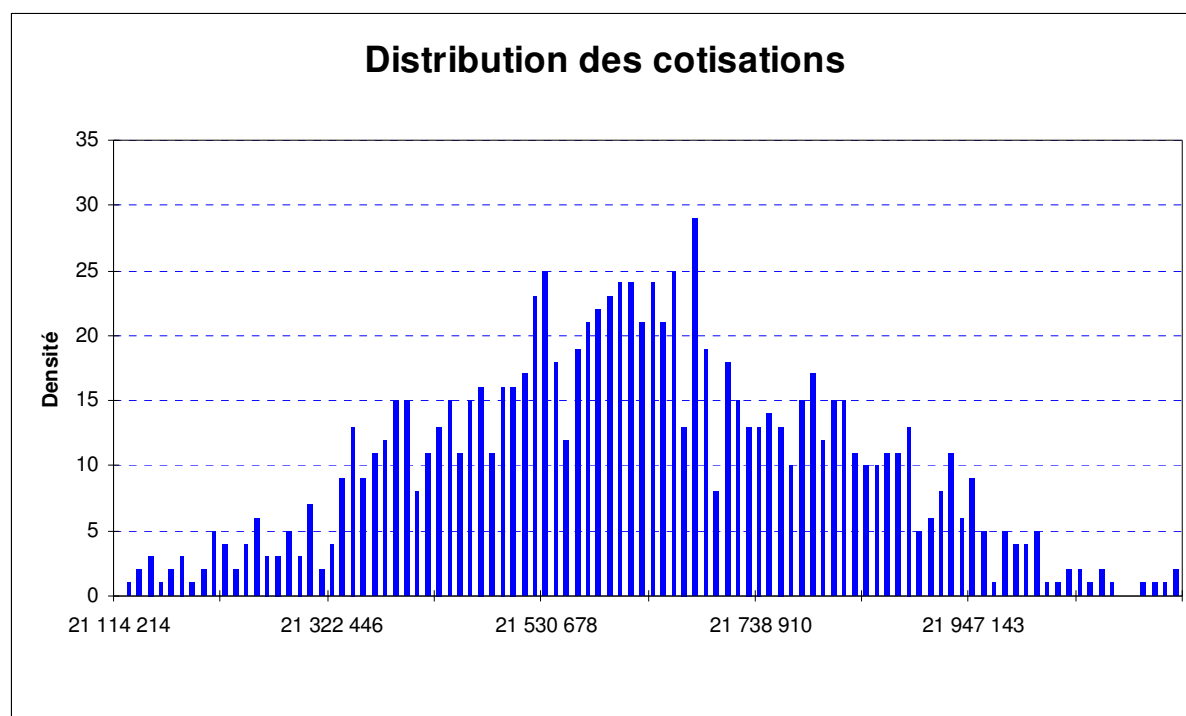
On obtient, pour le deuxième scénario, les distributions empiriques suivantes de la PBO de clôture, des prestations versées et des cotisations perçues en 2004.



Graphique 35 : Scénario III – Distribution empirique de la PBO au 31 décembre 2004



Graphique 36 : Scénario III – Distribution empirique des prestations 2004



Graphique 36 : Scénario III – Distribution empirique des cotisations 2004

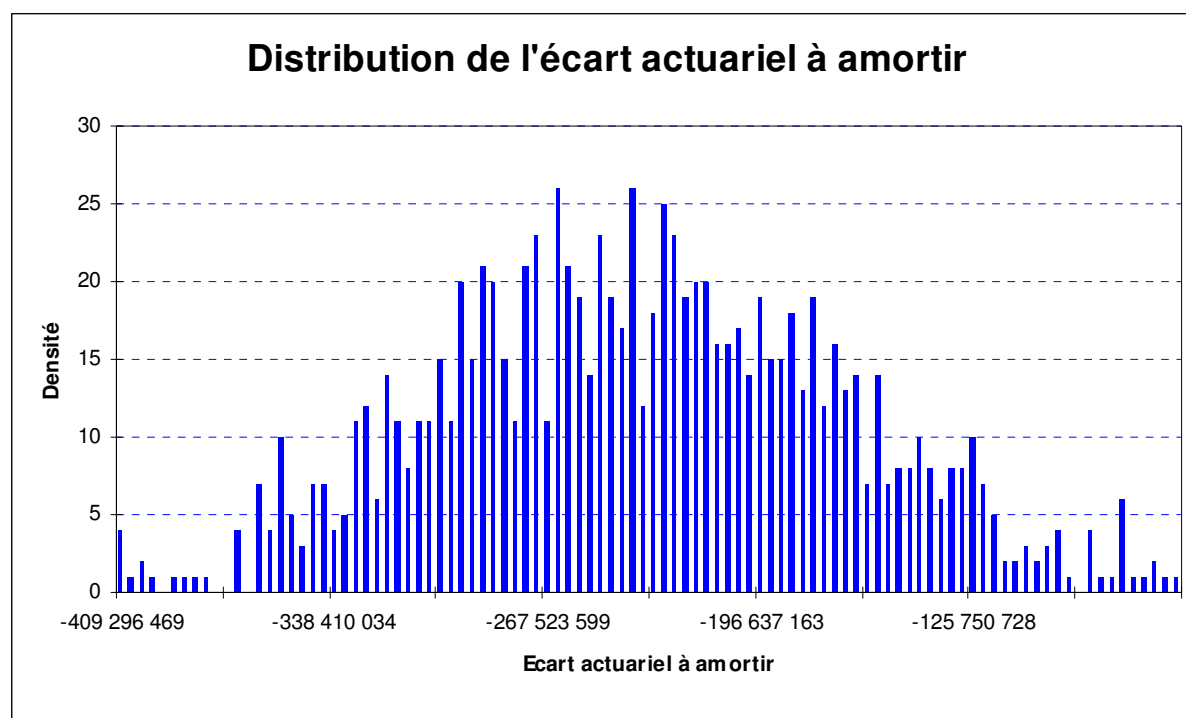
Statistiques	PBO 2004	Prestations	Cotisations
Nombre de simulations	1 000	1 000	1 000
Moyenne	1 623 433 201	100 069 782,72	21 615 885
Médiane	1 623 683 498	100 046 158,15	21 613 510
Ecart type	17 620 857,69	1 425 172,71	204 568,80
Skewness	-0,09	0,08	0,03
Kurtosis	3,08	3,03	2,93
Coefficient de variation	0,01	0,01	0,01
Min	1 555 005 786	95 340 034	21 029 249
Max	1 678 852 285	105 281 080	22 236 949

4.3.2. Distribution de l'écart actuariel et probabilité de sortie du corridor

Tout comme dans les deux scénarios précédents, à partir de tirages réalisés dans les variables aléatoires de l'actif (identiques que dans le premier scénario), on peut simuler des lois de probabilité pour l'écart actuariel aléatoire et pour la sortie du corridor.

On obtient les résultats suivants :

Statistiques	Sortie corridor	Ecart actuariel
Nombre de simulations	1 000	1 000
Moyenne	0,84	-234 884 180
Médiane	1,00	-237 628 579
Ecart type	0,37	68 467 258
Skewness	- 1,80	0,16
Kurtosis	4,25	2,88
Coefficient de variation	0,44	-0,29
Min	0,00	-411 068 630
Max	1,00	1 087 938



Graphique 37 : Scénario III – Distribution empirique de l'écart actuariel cumulé à amortir au 31 décembre 2004

Résultat du test de normalité

Ecart type empirique	204 568.80
Skewness empirique	0.03
Kurtosis empirique	2.93
Valeur de la statistique JARQUE et BERA	5.0921
Probabilité de dépassement	0.0784

Là encore, tout comme dans le deuxième scénario (forte variabilité des taux de rendement des actifs de couverture), l'écart actuariel cumulé n'est plus normalement distribué.

4.3.3. Analyse du résultat obtenu

Quand l'on utilise une trajectoire de la PBO construite avec un taux de rotation élevé, avec l'ajustement que l'on a évoqué sur le niveau de l'actif de couverture initial, cela a pour effet de générer des valeurs « extrêmes » de l'écart actuariel cumulé à amortir.

En effet, la loi de probabilité obtenue pour l'écart actuariel cumulé à amortir présente des queues de distribution plus épaisses que la normale.

Mécaniquement, le taux de sortie du corridor augmente sensiblement. Il ressort, dans la simulation effectuée, à 84%.

5. Annexes

5.1. Le test d'ajustement de Jarque et Bera

On considère une suite de variables aléatoires identiquement distribuées $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ d'espérance μ .

Soient les deux quantités suivantes :

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right]^2}; K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Le test de normalité de JARQUE et BERA (*in* BERA A., JARQUE C. [1980]) repose sur une propriété des lois normales selon laquelle les grandeurs définies plus haut prennent respectivement les valeurs 0 et 3.

On cherche donc à tester l'hypothèse jointe $H_0 : \langle S = 0; K = 3 \rangle$. Il est primordial de tester de manière jointe les deux égalités, car S et K ne sont pas des variables aléatoires indépendantes.

Graphiquement, cela se traduit par une zone de valeurs possibles pour le couple (S, K) , pour un niveau d'incertitude donné, qui a une forme elliptique (et non rectangulaire, en cas d'indépendance).

Sur l'échantillon $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ des valeurs prises par les variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$, S et K prennent les valeurs suivantes :

$$\hat{S}_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^2 \right]^2}; \hat{K}_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Avec $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Sous H_0 , la statistique de test $Z = \frac{n-1}{6} S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2$ suit une loi de Khi-deux à deux degrés de liberté.

5.2. Méthode des moments généralisés : estimation des trois premiers moments d'une loi de probabilité

La théorie de l'estimation par la méthode des moments généralisés (*cf.* par exemple FLORENS et MARIMOUTOU. [2004]) nous donne des estimateurs des moments (*cf. infra*) asymptotiquement sans biais et qui convergent à vitesse standard vers une loi normale.

L'objectif ici est d'aller un peu plus loin en proposant des estimateurs qui conservent leurs propriétés de normalité asymptotique, mais qui de plus sont sans biais à distance finie. On améliore ainsi les estimateurs.

Notations et définitions

Soit $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ une suite de variables aléatoires réelles identiquement distribuées et $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ la réalisation de celle-ci observée sur un échantillon.

On note :

$$\begin{aligned}\mu_X &\stackrel{\text{def}}{=} E(X) \\ \mu_{r,X} &\stackrel{\text{def}}{=} E[(X - E(X))^r] \\ \mu_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \mu_{r,n} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_n)^r\end{aligned}$$

Sur l'échantillon observé, les deux dernières quantités prennent respectivement les valeurs :

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \hat{\mu}_{r,n} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^r\end{aligned}$$

On cherche à montrer que ces valeurs sont des estimateurs asymptotiquement sans biais des moments d'ordre r de la variable aléatoire X . Se faisant, on pourra construire des estimateurs voisins qui seront sans biais à distance finie.

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(\mu_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = E(X)$$

$$V(\mu_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} n V(X) = \frac{\mu_{2,X}}{n}$$

$$\mu_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_n^2$$

$$\begin{aligned} E(\mu_{2,n}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_n^2\right) = E(X^2) - E(\mu_n^2) = (V(X) + E(X)^2) - (V(\mu_n) + E(\mu_n)^2) \\ &= \mu_{2,X} + \mu_X^2 - \frac{\mu_{2,X}}{n} - \mu_X^2 = \frac{n-1}{n} \mu_{2,X} \end{aligned}$$

$$\mu_{3,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_n)^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 - 3\mu_n \mu_{2,n} - \mu_n^3$$

Calculs intermédiaires

$$\mu_n \mu_{2,n} = \mu_n \times \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_n^2\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \mu_n^3 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i^3 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n X_i^2 X_j\right) - \mu_n^3$$

$$E(\mu_n \mu_{2,n}) = \frac{E(X^3)}{n} + \frac{n-1}{n} E(X^2)E(X) - E(\mu_n^3)$$

$$\begin{aligned} E(\mu_n^3) &= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^3\right] = \frac{1}{n^3} E\left[\sum_{i=1}^n X_i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n X_i^2 X_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^n X_i X_j X_k\right] \\ &= \frac{E(X^3)}{n^2} + 3 \frac{n-1}{n^2} E(X^2)E(X) + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E(X)^3 \\ &= \frac{E(X^3)}{n^2} + 3 \frac{n-1}{n^2} \mu_{2,X} \mu_X + 3 \frac{n-1}{n^2} \mu_X^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \mu_X^3 \end{aligned}$$

Calcul de l'espérance de l'estimateur du moment centré d'ordre 3

$$\begin{aligned}
E(\mu_{3,n}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 - 3\mu_n \mu_{2,n} - \mu_n^3\right) = E(X^3) - 3 \times E(\mu_n \mu_{2,n}) - E(\mu_n^3) \\
&= E(X^3) - 3 \frac{E(X^3)}{n} - 3 \frac{n-1}{n} E(X^2)E(X) + 3E(\mu_n^3) - E(\mu_n^3) \\
&= \frac{n-3}{n} E(X^3) - 3 \frac{n-1}{n} (\mu_{2,X} + \mu_X^2) \mu_X + 2E(\mu_n^3) \\
&= \frac{n-3}{n} E(X^3) - 3 \frac{n-1}{n} \mu_{2,X} \mu_X - 3 \frac{n-1}{n} \mu_X^3 + 2E(\mu_n^3) \\
&= \frac{n-3}{n} E(X^3) - 3 \frac{n-1}{n} \mu_{2,X} \mu_X - 3 \frac{n-1}{n} \mu_X^3 + 2 \times \left(\frac{E(X^3)}{n^2} + 3 \frac{n-1}{n^2} \mu_{2,X} \mu_X + 3 \frac{n-1}{n^2} \mu_X^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \mu_X^3 \right) \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} E(X^3) - 3 \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} \mu_{2,X} \mu_X - \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} \mu_X^3 \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} (E(X^3) - 3\mu_{2,X} \mu_X - \mu_X^3) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \mu_{3,X}
\end{aligned}$$

Résultats :

On obtient donc les espérances mathématiques des estimateurs par la méthode des moments généralisés suivants :

$$\begin{cases} E(\mu_{3,n}) = \mu_X \\ E(\mu_{3,n}) = \frac{n-1}{n} \mu_{2,X} \\ E(\mu_{3,n}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \mu_{3,X} \end{cases}$$

Pour obtenir des estimateurs sans biais, il suffit de corriger les résultats obtenus par la méthode des moments généralisés par la constante adéquate.

5.3. Trajectoire des provisions mathématiques d'un portefeuille de rentes

Reprenons l'équation construite pour analyser l'engagement de l'assureur quant au fonds des retraités.

$$\begin{aligned}
 VAP^{coll} &= E\left(\sum_j VAP^j\right) \\
 &= \sum_j E\left(\sum_{t \in IR_+} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times I_{(t,j)}\right) \\
 &= \sum_j \sum_{t \in IR_+} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times E(I_{(t,j)}) \\
 \frac{dVAP^{coll}}{dt} &= \sum_i \sum_{t \in IR_+} \frac{d}{dt} \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times E(I_{(t,j)}) \\
 &= \sum_i \sum_{t \in IR_+} \frac{d \exp(-t \ln(1+i))}{dt} \times \text{prestation} \times E(I_{(t,j)}) \\
 &= \sum_i \sum_{t \in IR_+} -\ln(1+i) \times \frac{1}{(1+i)^t} \times \text{prestation} \times E(I_{(t,j)}) \\
 &= -\ln(1+i) \times VAP^{coll} \\
 \frac{d^2 VAP^{coll}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \times \frac{dVAP^{coll}}{dt} \\
 &= -\ln(1+i) \times \frac{dVAP^{coll}}{dt} \\
 &= [\ln(1+i)]^2 \times VAP^{coll}
 \end{aligned}$$

5.4. Prise en compte du taux annuel de rotation dans la table de mortalité

La table de mortalité, comme son nom l'indique, permet d'appréhender une seule cause de départ du salarié de son entreprise : le décès. Il convient d'intégrer les autres causes de sorties, le licenciement, la démission,...

La durée aléatoire de présence d'un salarié dans l'entreprise considérée (hors décès), dans la modélisation retenue, suit une loi de Weibull de paramètres $\beta = 30, \gamma = 5\%$.

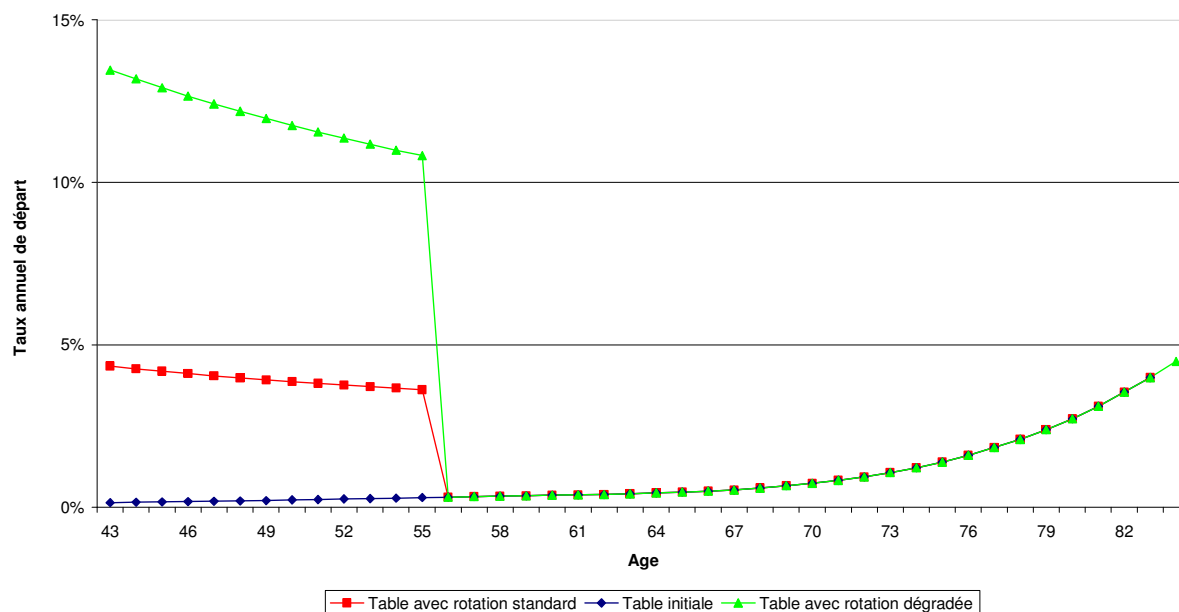
On en déduit alors les taux annuel de rotation en fonction de l'âge de l'individu suivants :

Age	Taux annuel de rotation
19	0,0914693
20	0,08711898
21	0,08317311
22	0,07957739
23	0,07628687
24	0,07326399
25	0,07047714
26	0,0678995
27	0,0655082
28	0,06328359
29	0,0612087
30	0,05926879
31	0,05745101
32	0,05574408
33	0,0541381
34	0,05262429
35	0,05119489
36	0,04984297
37	0,04856234
38	0,04734748
39	0,0461934
40	0,04509561
41	0,04405007
42	0,0430531
43	0,04210137
44	0,04119184
45	0,04032175
46	0,03948856
47	0,03868996
48	0,03792382
49	0,03718819
50	0,03648125
51	0,03580137
52	0,03514699
53	0,03451669
54	0,03390917
55	0,0333232

Pour visualiser l'effet de l'intégration du taux annuel de rotation sur le taux annuel de sortie toutes causes, comparons les deux tables $\{l_x, x > 0\}$ et $\{\tilde{l}_x, x > 0\}$ pour un individu né en 1950. A ces tables de « mortalité », on ajoute une troisième série correspondant à la situation où le taux annuel de rotation est sensiblement plus élevé.

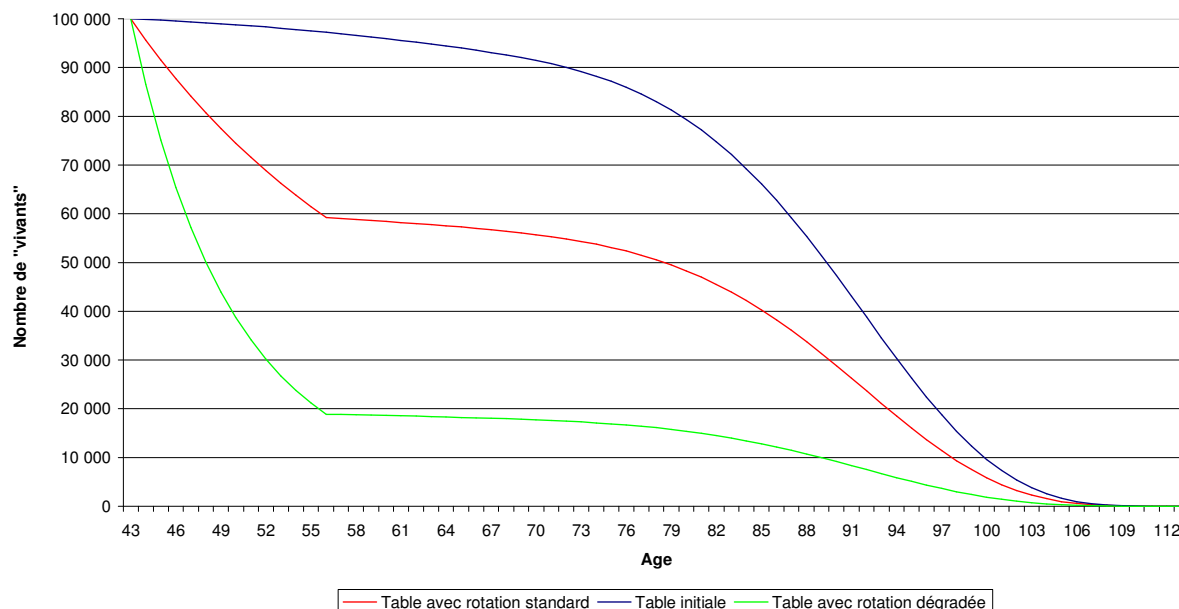
Une fois l'âge de la retraite atteint, il ne reste plus qu'une cause de sortie : le décès. Les deux tables donnent alors la même série de taux annuel de départ du régime.

**Comparaison des taux annuels de départ selon les tables retenues,
pour une tête d'âge née en 1950**



*Graphique 37 : Comparaison des taux annuels de départ selon les tables de sortie retenues
(pour une tête d'âge née en 1950)*

**Comparaison des nombres de "vivants" selon les tables de mortalité,
pour une tête d'âge née en 1950**



*Graphique 37 : Comparaison des nombres de « vivants » selon les tables de sortie retenues
(pour une tête d'âge née en 1950)*

Conclusion

Dans le cas standard, où aucun choc ne survient, ni sur le passif (valorisation de l'engagement), ni sur l'actif de couverture, au cours de l'exercice comptable, le mécanisme du corridor joue pleinement son rôle stabilisateur de l'état financier IAS 19 et des comptes de l'entreprise de façon plus générale.

En effet, en générant, par simulations, mille réalisations d'un état IAS 19 (c'est-à-dire mille situations comptables possibles), l'écart actuariel ne sort pas du corridor défini. Il n'y a donc aucune écriture comptable à enregistrer. Les valeurs de l'actif de couverture et de l'engagement sont « justes », au sens de la norme IAS 19.

Par contre, naturellement, dès lors que l'on impulse des chocs sur l'actif de couverture (taux de rendement beaucoup plus volatile) ou sur le passif (par exemple avec un taux de rotation du personnel plus fort que celui retenu dans le scénario central), l'écart actuariel peut prendre une valeur forte (en regard des montants de l'actif de couverture et de la valeur de l'engagement) et ainsi excéder les bornes du corridor.

La taille du couloir dans lequel un écart actuariel observé est réputé « juste » et ne donne pas lieu à modification des valeurs comptable de l'actif de couverture et de l'engagement, même s'il a une justification théorique (intervalle de confiance à 95% - *cf.* Partie I §3) n'en demeure pas moins large. On peut tolérer une insuffisance des provisions ou de l'actif de couverture de 10% !

Il serait intéressant d'avoir une vision plus dynamique de l'écart actuariel sur plusieurs exercices successifs et en intégrant une relation plus forte entre l'actif et le passif, via le taux d'actualisation.

Au-delà de l'application du référentiel IAS 19 dans le cadre d'un régime de retraite d'entreprise dont les risques afférents demeurent inscrits dans ses comptes, l'ensemble de la méthodologie construite peut être utilisée dans le cadre de la norme IFRS 4.

En effet, l'analyse et la description de toutes les composantes aléatoires sous-jacentes à la valorisation d'un engagement de servir des prestations définies dans le futur, tout comme l'ensemble des outils présentés pour décrire et modéliser ces variables aléatoires permettent d'avoir une image fidèle d'un engagement de retraite complémentaire de la distribution de probabilité de sa valeur. Le travail réalisé ici, comme cela a été souligné lors des développements précédents, peut être prolonger dans le cadre de l'application de la norme IFRS 4, où le risque étudié est porté par un organisme d'assurance.

Bibliographie

- ARRONDEL L. [2003], *Epargne, Assurance Vie et Retraite*, Economica.
- BERA A., JARQUE C. [1980], « Efficient Tests for Normality, Heteroscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals », *Economic Letter* page 255-259.
- BLACK F., SCHOLES M. [1973], « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, vol. 81, n°3, 637-654.
- BRENNAN MJ., XIA Y. [2002], « Dynamic Asset Allocation under Inflation », *Journal of Finance*, vol. 57, 1201-1238.
- BRIGO D., MERCURIO F. [2001], « On Deterministic-Shift Extensions of Short-Rate Models », Working Paper.
- CAIRNS J.G., BLAKE D., DOWD K. [2004], Pricing Frameworks for the Securitization of Morality Risk, *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, 509-540.
- CEIOPS, « Solvency II Project », Consultation Paper n°7.
- COX JC., INGERSOLL JE., ROSS SA. [1985], « A Theory of Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, vol. 53, 385-407.
- COX JC., INGERSOLL JE., ROSS SA. [1985], « An intertemporal general equilibrium model of asset prices », *Econometrica*, vol. 53, 363-384.
- DAVIDSON R., MACKINNON JG. [2004], *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press.
- DICKEY DA., FULLER WA. [1979], « Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root », *Econometrica*, vol. 74, 427-431.
- DONIO M. [2004], « Engagements de retraite d'un régime d'entreprise : le cas de la norme IAS 19 », *support de cours CNAM*.
- DUTEY C., LEFLAIVE V. [2000], « Mesure du Risque d'Illiquidité et d'Insuffisance de Marge du Bilan d'Axa Global Risk », *Thèse d'Actuariat*.
- FARGEON L., NISSAN K. [2003], « Recherche d'un Modèle Actuariel d'Analyse Dynamique de la Solvabilité d'un Portefeuille de Rentes Viagères », *Mémoire d'Actuariat*.
- FLORENS JP., MARIMOUTOU V. [2004], *Econométrie : Modélisation et Inférence*, Armand Colin.
- HULL J. [2004], *Options, Futures and Other Derivatives*, 5ème édition, Pearson Education.

- GIBRAIS V., ADAM AC. [2004] *Le Calcul des Engagements de Retraite Supplémentaire*, Economica.
- KALFON P., PEUBEZ G. [2004], *L'Actuariat des Engagements Sociaux*, Economica.
- LEFLAIVE V., LUSTMAN F. [2002], « Norme IAS et assurance : le point de vue du contrôle prudentiel », *revue Risques* n°52.
- MONFORT A. [1996], *Cours de Probabilités*, 3ème édition, Economica.
- PETAUTON P. [2000], *Théorie et pratique de l'assurance vie*, 2^{ème} édition, Dunod.
- PLANCHET F., PLOUVIER P. [2004], « IAS 19 - Conséquences sur les passifs sociaux », Working Paper.
- PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles Financiers en assurance : analyses de risque dynamiques*, Economica.
- PLANCHET F., THEROND P. [2004], « Nouveau droit comptable belge, application pratique des normes IAS/IFRS – Norme IAS 19 », Working Paper.
- PUPION G., PUPION PC. [1998], *Tests non Paramétriques*, Economica.
- RONCALLI T. [1998], « La Structure par Terme des Taux Zéro : modélisation et implémentation numérique », *Thèse de Sciences Economiques*.
- SCHRAGER DF. [2004], « Affine Stochastic Mortality », Working Paper.
- REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer Verlag.
- TOSETTI A., WEISS F., POINCELIN T. [2003], *Les Outils de l'Actuariat Vie*, Economica.
- WILKIE AD. [1995], « More on a stochastic asset model for actuarial use », *British Actuarial Journal*, vol. 1, 777-964.