

**Mémoire présenté le :**  
**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA**  
**et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Lucas BERNIER

Titre : Calibration de chocs de taux dans le modèle interne de la Caisse des Dépôts

Confidentialité :  NON     (Durée :  1 an     2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de Signature  
l'Institut des Actuaires*

.....

.....

.....

*Membres présents du jury de  
l'ISFA*

.....

.....

.....

*Entreprise : Caisse des Dépôts et  
des Consignations*

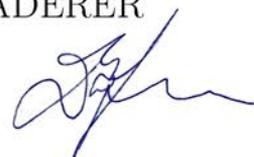
*Nom :*

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entre-  
prise :*

*Nom : Daria HADERER*

*Signature :*



*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

***Autorisation de publication et  
de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actua-  
riels (après expiration de l'éventuel  
délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



# Résumé

Depuis la crise de 2008 les banques centrales ont été obligées de faire chuter les taux d'intérêt nominaux impactant toutes les institutions financières. Cette politique monétaire implique un suivi renforcé du risque de taux dans les portefeuilles bancaires. Dans un tel contexte, ce mémoire se concentre sur le calcul de ce risque et plus précisément la calibration des chocs de taux dans le modèle interne de la Caisse des Dépôts.

Avec l'arrivée imminente de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR<sup>1</sup>), la Caisse des Dépôts souhaite une mise à jour du modèle de calibration. En effet, le Fonds d'Épargne, entité de la CDC, utilise actuellement un modèle AR(1)-GARCH(1,1) pour calibrer ses chocs de taux nominaux et inflation. Celui-ci ne vérifiant plus les tests statistiques il a été convenu de revenir sur la méthode.

Ce mémoire s'efforce de développer la mise à jour de ce modèle en étudiant plusieurs séries de taux dont les taux swap contre Euribor 6 mois de maturité 10 ans (noté EUSA10) et les taux swap contre inflation française de maturité 10 ans (noté FRSWI10) utilisées actuellement. Dans un premier temps, une extension utilisant un modèle ARMA-GARCH est présentée puis une approche, dite "en courbe", permettra d'améliorer la calibration en choquant toutes les maturités des courbes séparément. De même, la copule gaussienne utilisée se verra remplacer par une copule de Student puis une Vine Copula.

Les résultats de l'étude des chocs en translation montrent une certaine cohérence avec la méthodologie précédente. La différence majeure résidant dans l'utilisation d'une copule de Student modélisant la dépendance des séries. En effet, pour des séries identiques les résultats sont cohérents. Néanmoins, le choix des taux mériterait de s'orienter vers des maturités plus longues donnant lieu à des résultats plus conservateurs.

L'extension de ce modèle pour intégrer des chocs en pentification et courbure élimine plusieurs limites de la précédente méthode tout en en créant d'autres. Le choix du modèle d'interpolation étant l'hypothèse majoritaire de cette méthode, ce mémoire s'efforce d'en étudier deux en parallèle : le modèle Nelson Siegel Svensson et l'interpolation polynomiale.

Finalement le Fonds d'Épargne peut se baser sur les deux types de modèles puisqu'il est possible, à condition de sélectionner les bons inputs, d'obtenir des résultats cohérents entre les deux méthodes.

Mots-clés : Risque de taux d'intérêt, projection, ARMA-GARCH, gestion actif/passif, copule, Vine copula, Nelson Siegel Svensson, interpolation polynomiale.

---

1. Tous les acronymes sont décrits dans le glossaire en fin de mémoire.

# Abstract

Since the 2008 crisis, central banks have been forced to lower nominal interest rates, impacting all financial institutions. This monetary policy implies closer monitoring of interest rate risk in bank portfolios. In this context, this thesis focuses on the calculation of this risk and more specifically the calibration of rate shocks in the internal model of Caisse des Dépôts.

With the imminent arrival of the Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), the Caisse des Dépôts wishes to update the calibration model. Indeed, the Fonds d'Épargne, an entity of the hyperref [CDC] CDC, currently uses an AR (1) -GARCH (1,1) model to calibrate its nominal rate and inflation shocks. The latter no longer verifying the statistical tests, it was agreed to revert to the method.

This thesis strives to develop the updating of this model by studying several series of rates including the swap rates against Euribor 6 months with 10-year maturity (noted EUSA10) and the swap rates against French inflation with 10-year maturity (noted FRSWI10) currently used. First, an extension using a ARMA-GARCH model is presented, then an approach, called "in curve", will improve the calibration by shocking all the maturities of the curves separately. Similarly, the Gaussian copula used will be replaced by a Student copula then a Vine Copula.

The results of the translation shock study show a certain consistency with the previous methodology. The major difference lies in the use of a Student copula modeling the dependence of the series. Indeed, for identical series the results are consistent. Nevertheless, the choice of rates should be oriented towards longer maturities giving rise to more conservative results.

The extension of this model to integrate shocks in pentification and curvature eliminates several limits of the previous method while creating others. The choice of the interpolation model being the majority hypothesis of this method, this thesis tries to study two in parallel : the Nelson Siegel Svensson model and polynomial interpolation.

Finally, the Fonds d'Épargne can be based on the two types of models. Conditionally on the choice of inputs to obtain consistent results between the two methods.

Keywords : Interest rate risk, projection, ARMA-GARCH, asset and liability management, copula, Vine copula, Nelson Siegel Svensson, polynomiale interpolation.

# Remerciements

Je remercie en tout premier lieu ma maîtresse de stage Daria HADERER pour m'avoir encadré tout au long de mon parcours dans son service. Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir donné l'opportunité de me concentrer sur ce mémoire tout au long de l'année.

Je remercie tout autant chaleureusement mes collègues de l'équipe Risque global de taux et VAN du bilan : Frédéric ANCHER, Jérôme DECROI et Marianne MOMBEUIL. Merci à eux pour l'aide qu'ils m'ont apportée ainsi que pour l'ambiance de travail qui règne dans ce bureau.

Plus globalement, je souhaite remercier toute l'équipe ALM du Fonds d'Épargne pour l'accueil chaleureux que j'ai reçu ainsi que ma famille et mes amis pour le soutien apporté.

Enfin un grand merci à l'ISFA et ses professeurs pour l'enseignement que j'ai reçu pendant mon cursus ; en particulier Christian ROBERT mon tuteur de mémoire pour son aide.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Environnement de travail</b>	<b>3</b>
1.1 La Caisse des Dépôts et Consignations . . . . .	3
1.1.1 Le Fonds d'Epargne . . . . .	3
1.1.2 Gestion Actif-Passif . . . . .	4
1.2 Risques du Fonds d'Epargne . . . . .	4
1.2.1 Risque de crédit . . . . .	4
1.2.2 Risque opérationnel . . . . .	5
1.2.3 Risque de marché . . . . .	5
1.2.4 Risque de change . . . . .	5
1.2.5 Risque de liquidité . . . . .	5
1.2.6 Risque de taux . . . . .	5
1.3 Règlementation Bâle . . . . .	7
1.3.1 Les accords Bâle I . . . . .	7
1.3.2 Les accords Bâle II . . . . .	7
1.3.3 Les accords Bâle III . . . . .	7
1.4 L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution . . . . .	8
1.5 Interest Rate Risk in the Banking Book . . . . .	9
1.6 Bilan du Fonds d'Epargne . . . . .	10
1.6.1 Actifs . . . . .	10
1.6.2 Passifs . . . . .	12
<b>2 Méthode de calcul du risque global de taux</b>	<b>13</b>
2.1 Méthode des GAPS . . . . .	13
2.1.1 La détermination des GAPS du bilan . . . . .	13
2.1.2 Calcul des sensibilités . . . . .	14
2.1.3 Calibration des chocs . . . . .	15
2.1.4 Calcul du Besoin en Fonds Propres . . . . .	15
2.2 Méthode de la valeur actuelle nette . . . . .	15
2.2.1 Déterministe . . . . .	15
2.2.2 Stochastique . . . . .	16
<b>3 Chocs de taux</b>	<b>17</b>
3.1 Méthodologie de calibration des chocs de taux . . . . .	17
3.1.1 Modèle standard . . . . .	17
3.1.2 Modèle interne . . . . .	17
3.1.3 Tests . . . . .	18
3.2 Production actuelle . . . . .	19
3.2.1 ARMA-GARCH . . . . .	19
3.2.2 Modèle de séries . . . . .	20

3.2.3	Corrélation . . . . .	21
3.2.4	Limites . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Nouveau modèle</b>	<b>22</b>
4.1	Analyse en Composantes Principales . . . . .	22
4.2	Nouveau modèle translation . . . . .	25
4.2.1	Séries étudiées . . . . .	26
4.2.2	Etudes des copules . . . . .	27
4.3	Résultats des modèles . . . . .	28
4.3.1	Présentation de l'étude du couple de série EUSA10 et EUSWI10 . . .	28
4.3.2	Résultats généraux . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Modélisation en courbe des chocs de taux</b>	<b>44</b>
5.1	Avantages du modèle en courbe . . . . .	44
5.2	Modèles d'interpolation . . . . .	45
5.2.1	Modèle de taux de Nelson Siegel Svensson (NSS) . . . . .	45
5.2.2	Interpolation polynomiale . . . . .	47
5.3	Corrélation . . . . .	48
5.3.1	Rappel sur les copules . . . . .	48
5.3.2	Vine Copulas . . . . .	49
5.3.3	Calibration des Vine copulas . . . . .	54
5.4	Méthode semi-naïve . . . . .	54
5.4.1	Méthodologie . . . . .	54
5.4.2	Résultats . . . . .	56
5.4.3	Limites . . . . .	63
5.5	Méthode naïve . . . . .	64
5.5.1	Méthodologie . . . . .	64
5.5.2	Limite . . . . .	64
5.6	Méthode à paramètres . . . . .	64
5.6.1	Méthodologie . . . . .	64
5.6.2	Limite . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Impact sur le Risque Global de Taux</b>	<b>65</b>
6.1	Méthode de calcul des chocs règlementaires . . . . .	65
6.2	Analyse des RGT . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>

# Introduction

Nous sommes actuellement dans une économie où les taux n'ont jamais été aussi bas pendant aussi longtemps. Cela est dû aux politiques des banques centrales et notamment au Quantitative Easing de la BCE initié en 2015 et terminé fin 2018. Cet environnement de taux bas censé faciliter l'emprunt provoque chez les gestionnaires d'actifs des problèmes d'allocation.

Les gestionnaires et les autorités de contrôle s'interrogent sur la possibilité d'une remontée des taux et sur les conséquences que cela aurait sur les portefeuilles bancaires. La Caisse des Dépôts rentre dans une année charnière en 2019 car pour la première fois elle va être soumise au contrôle de l'ACPR. De par son activité de prêteur long terme, la CDC est très concernée par les taux bas puisqu'elle est majoritairement exposée au taux du Livret A, lui-même en parti basé sur le taux EONIA. Notons d'ailleurs que ce taux interbancaire au jour le jour va être prochainement remplacé par un nouvel indice, l'Ester. Outre les problématiques contractuelles ce changement implique de revoir les inputs des modèles.

L'objectif de ce mémoire est la production et calibration d'un couple de chocs de taux nominaux et inflation qui sera ensuite utilisé dans les deux modèles actuellement en production.

Ce mémoire prend place dans le pôle Risque Global de Taux et VAN du bilan du Fonds d'Epargne de la Caisse des Dépôts. Ce groupe français public se démarque des autres banques par son caractère social puisque sa mission d'intérêt général en fait un investisseur à long terme. En effet, la majorité des prêts ont pour vocation le développement de structures publiques de toutes tailles. Pour cela le Fonds d'Epargne utilise l'épargne réglementée (Livret A, Livret Développement Durable et le Livret d'Epargne Populaire) soutenu, le cas échéant par un portefeuille financier. Il faut aussi rappeler que le livret A a vu sa formule mise à jour en juin 2018 pour aboutir à la formule suivante :

- Taux du Livret A =  $\max(\text{Moyenne semestrielle de l'inflation et de l'EONIA}; 0.5)$
- Arrondi au dixième de point le plus proche contre le quart de point dans l'ancienne formule.
- Maintenu à 0,75% jusqu'au 31 janvier 2020.
- Corridor de 50 points de base entre deux révisions successives pour éviter un décrochage en 2020.

La spécificité du Fonds d'Epargne réside dans son passif. En effet, l'épargne réglementée est centralisée au Fonds d'Epargne moyennant un taux distribué aux banques égal au taux du livret majoré d'un spread de +30 bps (points de base). Le taux de centralisation est dicté par un décret de centralisation et est actuellement de 59,5%. Néanmoins, dans un environnement économique défavorable, le Fonds d'Epargne peut augmenter le taux de centralisation afin de respecter deux ratios :

$$\frac{\text{Dépôts (LA,LDD,LEP)} + \text{Fonds Propres}}{\text{Prêts}} \geq 135\%$$

$$\frac{\text{Dépôts (LA,LDD,LEP)}}{\text{Prêts "Habitat Ville"}} \geq 125\%$$

Avec LA = Livret A, LDD = Livret Développement Durable et LEP = Livret Epargne Populaire. Les prêts "Habitat Ville" financent spécifiquement les logements sociaux.

Ces ratios existent afin de limiter le risque de liquidité mais complique considérablement le calcul du risque de taux.

La première partie de ce mémoire pose l'environnement de travail ainsi que le contexte prudentiel de l'étude. Elle s'efforce de développer les problématiques de la gestion actif-passif ainsi que les acteurs réglementaires du secteur. Enfin, l'étude du bilan du Fonds d'Epargne confirme l'importance du risque de taux au sein de la Caisse des dépôts.

La deuxième partie s'intéresse aux deux méthodes de calcul du Risque Global de Taux (RGT). La première, dite des "GAPS de taux", basée sur une modélisation du bilan par obligations synthétiques et la seconde, dite "VaR de la VAN", consiste à actualiser le bilan ligne à ligne, en environnement stressé et scénario central<sup>2</sup> puis calculer la différence. Ce calcul de la Valeur Actuelle Net ou VAN peut se faire selon deux méthodes qui seront décrites dans cette partie : la VAN déterministe et la VAN stochastique.

La troisième partie du mémoire introduit le cœur de l'étude puisqu'elle est consacrée aux chocs de taux. Elle développe la méthode de calibration et de génération des chocs actuellement en production pour mettre en exergue les limites de l'implémentation et justifier l'intérêt de cette étude.

Ensuite, les quatrième et cinquième parties développent la méthodologie ainsi que les résultats de l'étude de chocs en translation dans un premier temps et les modèles de courbes dans un second temps.

La sixième partie compare les impacts des différentes méthodes sur le Risque Global de Taux. Elle met en exergue les limites de certaines méthodologies de projection tout en rappelant les résultats de la méthode réglementaire.

---

2. Scénario correspondant aux hypothèses de base du business plan.

# 1 Environnement de travail

## 1.1 La Caisse des Dépôts et Consignations

La Caisse des Dépôts et des Consignations est une institution financière publique française sous la responsabilité du Parlement. Elle est définie dans l'article L518-2 du Code monétaire et financier : « La Caisse des dépôts et consignations et ses filiales constituent un groupe public au service de l'intérêt général et du développement économique du pays. Ce groupe remplit des missions d'intérêt général en appui des politiques publiques conduites par l'Etat et les collectivités territoriales et peut exercer des activités concurrentielles. »

La CDC gère plusieurs fonds consignés comme les dépôts des notaires qu'elle rémunère ainsi que les comptes de séquestre et avoirs saisis et confisqués. Néanmoins son objectif premier étant l'intérêt général, les priorités de la CDC sont la gestion de l'épargne règlementée, le financement des logements sociaux, les retraites et le soutien de l'économie par des investissements directs dans les entreprises.

Pour ce faire le groupe Caisse des Dépôts compte deux sociétés immobilières : L'ICADE et la CDC Habitat qui s'imposent comme des bailleurs importants dans le secteur. En outre, la CDC gère la retraite publique d'un français sur cinq à travers plusieurs régimes dont la CNRACL, l'Ircantec, le RAFP, le FSPEOIE, la retraite des Mines, la retraite du personnel de la Banque de France ou encore des régimes de retraite catégoriels ou supplémentaires. Enfin, par l'intermédiaire de la Banque Publique d'Investissement (BPI), elle soutient l'activité économique en finançant les petites et moyennes entreprises, les entreprises innovantes ainsi que les entreprises exportatrices.

### 1.1.1 Le Fonds d'Epargne

La CDC a la particularité d'avoir deux bilans distincts. L'un pour compte propre appelé Section Générale et l'autre à but social : Le Fonds d'Epargne. C'est au sein de ce second que prend place ce mémoire.

Le Fonds d'Epargne utilise les livrets règlementés pour financer l'économie. Les trois livrets rentrant dans ses attributions sont le Livret A, le Livret Développement Durable, et le Livret Epargne Populaire. Les caractéristiques de ces livrets sont décrites dans le tableau ci-contre.

Livret	Taux	Plafond	Conditions	Encours
Livret A	0.75%	22 950 €	Toute personne physique, majeure ou mineur <u>Restriction</u> : 1 livret par personne	296.8 Mds € à fin juillet 2019
LDDS	0.75%	12 000 €	Toute personne majeure ayant son domicile fiscal en France <u>Restriction</u> : 1 livret par personne ou 2 par foyer fiscal	110.9 Mds € à fin juillet 2019
LEP	1.25% (TLA + 0.5%)	7 700 €	Toute personne majeure ayant son domicile fiscal en France <u>Restriction</u> : condition de ressource	41.5 Mds € à fin avril 2019

A noter que ces trois livrets sont exonérés d'impôts sur le revenu et de prélèvements sociaux. Dans le contexte économique de taux bas, la Caisse des Dépôts, au travers du Fonds d'Épargne, doit faire face à plusieurs enjeux majeurs. Elle doit :

- Assurer des ressources suffisantes en rémunérant les livrets et ainsi éviter une décollecte massive. D'autant plus que les ressources venant des livrets coûtent à la CDC le taux livret majoré de +30bps (correspondant à la commission payée aux banques).
- Investir dans des projets très long terme avec des dépôts à vue.
- Trouver des rendements sur des produits liquides et sécurisés pour assurer aux épargnants la disponibilité de leurs économies.

On remarquera également la réforme de la formule du taux du Livret A annoncé en juin 2018 et qui prendra effet au premier semestre 2020. Cette nouvelle formule rend la mission du Fonds d'Épargne d'autant plus compliquée qu'une perte de confiance des citoyens dans les livrets règlementés impacterait de manière notable l'économie dans son ensemble.

### 1.1.2 Gestion Actif-Passif

La gestion actif-passif ou ALM pour Asset and Liability Management en anglais est une méthode de coordination des actifs et passifs du bilan de l'entreprise. Elle a pour objectif de piloter les emplois et ressources de l'établissement en vue de dégager la meilleure rentabilité sous contrainte d'un niveau de risque donné (appelé appétence au risque) et d'un cadre réglementaire spécifique au type d'établissement et à son pays.

## 1.2 Risques du Fonds d'Épargne

### 1.2.1 Risque de crédit

Le risque qu'une contrepartie (particulier ou professionnel) ne soit pas en mesure de remplir ses obligations (défaut) ou que la situation financière se dégrade au point que la créance

soit dépréciée. On peut quantifier ce risque de plusieurs manières (rating, CDS, ...).

### **1.2.2 Risque opérationnel**

Le risque de pertes provenant de processus internes inadéquats ou défaillants, de personnes et systèmes ou d'événements externes. Le Comité de Bale a retenu sept catégories de risque opérationnel : Fraude interne ; Fraude externe ; Pratiques en matière d'emploi et sécurité sur le lieu de travail ; Clients, produits et pratiques commerciales ; Dommages aux actifs corporels ; dysfonctionnement de l'activité et des systèmes ; Exécution, livraison et gestion des processus.

### **1.2.3 Risque de marché**

Le risque qu'une perte survienne des suites de fluctuations des prix des instruments financiers composant le portefeuille. Ce risque porte sur plusieurs classes d'actifs : le taux de change, les actions, les matières premières, les taux d'intérêt. A noter qu'il faut distinguer le risque de taux inclus dans le risque de marché qui correspond à une fluctuation court terme impactant le portefeuille sous gestion et le risque de taux lié à l'activité de financement à long terme de la banque.

### **1.2.4 Risque de change**

Le risque pesant sur la valeur d'une devise par rapport à une autre dû à une variation de la valeur future du taux de change. Ce risque n'impacte pas la Caisse des dépôts car de part son statut d'établissement public elle ne peut pas faire d'investissement en dehors de l'Union Européenne.

### **1.2.5 Risque de liquidité**

Le risque se rapportant à un manque de liquidité disponible face aux engagements à court terme. C'est un risque important car il peut mener à la faillite en quelques jours.

### **1.2.6 Risque de taux**

Le risque lié au décalage entre l'actif et le passif d'un point de vue taux. Parce que ce mémoire s'inscrit dans le cadre du risque de taux et à titre d'illustration prenons un exemple volontairement basique.

Considérons le bilan du Fonds d'Epargne simplifié :

- L'actif se compose de crédit pour un nominal de 200 millions €, d'une durée de 50 ans et d'un taux d'intérêt fixe (noté  $r_{fixe}$ ).
- Le passif se compose des dépôts sur livrets rémunérés à taux variable (noté  $r_{TLA}$ ).

Le résultat de la banque dépend du taux variable :

- **Cas  $r_{fixe} > r_{TLA}$  :** Le résultat est positif car la taux fixe rapporte plus que le paiement du taux variable.
- **Cas  $r_{fixe} = r_{TLA}$  :** Le résultat est nul. Les prêts remboursent exactement les dépôts.
- **Cas  $r_{fixe} < r_{TLA}$  :** Le risque de taux apparaît dans cette situation où le taux fixe ne suffit pas à rembourser les dettes.

On comprend dès lors que le risque provient de la hausse du taux variable. La gestion ALM doit identifier ce risque et le couvrir avec par exemple un SWAP de taux receveur du taux variable et payeur du taux fixe.

Le contexte actuel de baisse durable des taux (ci-contre l'historique du taux EURIBOR 1 mois depuis 2000) met en exergue l'importance primordiale d'une gestion du risque de taux efficace pour un établissement comme la Caisse des Dépôts et des Consignations.



FIGURE 1 – Historique du taux EURIBOR 1 mois du 01/01/2000 au 24/12/2019

Les différents aléas inhérents à l'activité bancaire obligent les acteurs du secteur à quantifier ces risques afin de s'en protéger mais surtout protéger les clients. Ces menaces sont d'autant plus pesantes que les banques sont interconnectées, ainsi une faillite de l'une peut se propager et en contaminer d'autres. C'est le risque d'une crise systémique. D'où une vigilance accrue des différents indicateurs de risques.

## 1.3 Règlementation Bâle

La création du Comité de Bâle en 1974 suit la faillite de la banque allemande Herstatt qui contribua à une crise sur le marché des change la même année. Cette décision prise par les gouverneurs des banques centrales du G10 avait pour objectif le renforcement de la sécurité et de la fiabilité du système financier ainsi que l'efficacité du contrôle prudentiel et la coopération internationale des régulateurs. Le comité rassemble aujourd'hui 28 pays dont la France. Le comité de Bâle n'est pas une autorité de contrôle, il conseille les membres quant aux pratiques à adopter dans le cadre d'activités bancaires.

### 1.3.1 Les accords Bâle I

Les premières recommandations du Comité datent de 1988 avec les accords Bâle I. Elles s'intéressent principalement au minimum de fonds propres à détenir afin d'assurer la solidité financière des banques. Pour ce faire elles exigent un ratio de Cooke supérieur à 8%. Ces accords seront adoptés dans la plupart des pays de l'OCDE (Organisation de coopération et de développement économiques) à partir de 1992. Malgré cette première initiative de réglementation Bâle I n'intègre que le risque de crédit et occulte les autres risques tel que le risque de marché. Le développement du marché des actifs dans les années 1990 mène le Comité à une révision des accords.

### 1.3.2 Les accords Bâle II

C'est en 2004 que le Comité de Bâle propose un nouveau cadre réglementaire censé combler les lacunes du précédent. Bâle II appréhende mieux les risques bancaires et repose sur trois piliers :

- Pilier I : Exigence de fonds propres pour lutter contre les risques de crédit/contrepartie, opérationnel et risque de marché.
- Pilier II : Contrôler les niveaux de fonds propres réglementaires et les ajuster si nécessaire au regard des risques. Ainsi qu'inciter les banques à utiliser les meilleures méthodes de gestion des risques.
- Pilier III : Transparence des informations communiquées par les banques quant aux produits et services rendus.

Bâle II introduit un nouveau ratio de solvabilité, le ratio Mac Donough, qui couvre le risque de crédit ainsi que les risques de marché et opérationnel.

### 1.3.3 Les accords Bâle III

A la suite de la crise de 2008, le Comité de Bâle, le FASB (Financial Accounting Standards Board) et l'IASB (International Accounting Standards Board) ont été mandatés cette

même année par le G20 pour compenser les lacunes de Bâle II. Les accords de Bâle III sont publiés en 2010. Les principaux apports de celui-ci sont :

- L'augmentation de 8% à 10,5% du ratio de solvabilité.
- La mise en place de ratios de liquidité : le LCR (Liquidity Coverage Ratio) pour le court terme et le NSFR (Net Funding Stable Ratio) pour le long terme.
- La mise en place d'un ratio de levier visant à encadrer la taille du bilan.
- Pondération des actifs selon la qualité du risque.

Alors même que les accords de Bâle III ne sont pas entièrement mis en place, les travaux d'un futur Bâle IV sont déjà en cours. Ces derniers ont pour objectif de mettre à jour la manière dont sont calculés les actifs pondérés entrant dans le calcul des différents ratios de solvabilité.

## 1.4 L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) nommée ainsi en 2013 a vu le jour en 2010 sous le nom d'Autorité de Contrôle Prudentiel (ACP). Elle assure en France le rôle de contrôleur des activités des banques et assurances. Cet organisme a pour mission de veiller à la préservation et à la stabilité du système financier. L'ACPR protège également les clients, assurés, adhérents et bénéficiaires des personnes sous son contrôle et lutte contre le blanchiment des capitaux et le financement du terrorisme.

L'ACPR contrôle les organismes bancaires et d'assurance de deux manières.

- Le contrôle sur pièces consiste en un examen approfondi des divers éléments comptables transmis par les organismes à un rythme trimestriel ou annuel. Elles sont complétées par les rapports de contrôle interne, de solvabilité et de réassurance. Les documents sont analysés afin d'évaluer les organismes assujettis. C'est le contrôle permanent.
- Le contrôle sur place relaye le contrôle permanent via des missions au sein de l'organisme. Cette phase du processus est plus complète et analyse entre autres :
  - Le niveau de provisionnement et le respect des règles prudentielles ;
  - La qualité de la gestion ;
  - Les règles de gouvernance ;
  - Les outils et procédures ;
  - La réassurance ;
  - La connaissance et la maîtrise des risques ;
  - La solvabilité prospective de l'organisme.

Comme toutes les banques, la Caisse des dépôts est assujettie aux contrôles de l'ACPR. Cependant, son statut d'établissement public lui confèrait une certaine flexibilité par rapport aux contraintes réglementaires. Néanmoins, ce privilège ne s'applique plus et la CDC se re-

trouve assujettie au contrôle de l'ACPR comme toutes les autres banques.

## 1.5 Interest Rate Risk in the Banking Book

L'*Interest Rate Risk in the Banking Book* (IRRBB) est une série de normes en matière d'encadrement du risque structurel de taux publié en 2016 par le Comité de Bâle faisant suite aux recommandations datant de 2004 dans le document *Principles for the management and the supervision of interest rate risk*. Il fait référence au risque présent ou à venir qui pèse sur les fonds propres et les bénéfices de la banque des suites de mouvements défavorables des taux d'intérêt. Ces fluctuations impactent les valorisations des actifs et passifs de la banque menant à une potentielle dégradation de la valeur économique de l'établissement. L'IRRBB constitue un risque important pour les organismes bancaires.

La norme<sup>3</sup> explicite les principaux points mis à jour par le Comité de la manière suivante :

- "des recommandations plus détaillées sont fournies sur la manière dont les banques devraient gérer l'IRRBB, en particulier sur l'élaboration des scénarios de choc et de tensions à appliquer à la mesure de l'IRRBB, sur les principales hypothèses de comportement et de modélisation que les banques devraient envisager pour évaluer leur IRRBB et sur le processus de validation interne qu'elles devraient appliquer à leurs systèmes d'évaluation internes et aux modèles utilisés pour l'IRRBB ;"
- "les exigences de communication ont été mises à jour pour plus de cohérence, de transparence et de comparabilité dans la mesure et la gestion de l'IRRBB. Les banques sont notamment tenues d'indiquer quel impact auraient des chocs de taux d'intérêt sur la variation de la valeur économique de leurs fonds propres ( $\Delta EVE$ ) et la variation de leur revenu d'intérêts net ( $\Delta NII$ ), en se fondant sur une série de scénarios de choc de taux retenus par les autorités ;"
- "le processus de surveillance prudentielle a été revu pour mieux expliciter les facteurs que les autorités de contrôle devraient prendre en considération lorsqu'elles évaluent le niveau d'exposition des banques à l'IRRBB et leur gestion de ce risque. Les autorités pourraient aussi demander aux banques de leur juridiction d'appliquer le cadre standard pour évaluer leur IRRBB (par exemple, quand le système d'évaluation interne d'une banque ne leur paraît pas suffisamment refléter l'IRRBB). Le cadre standard a été actualisé pour mieux refléter les risques ;"
- "les autorités de contrôle doivent rendre publics les critères dont elles se servent pour repérer les banques « hors normes ». Le seuil de repérage a été abaissé : l'un au moins des tests d'importance des valeurs aberrantes appliqués par les autorités devrait comparer la variation de l'EVE d'une banque avec 15 % de ses fonds propres de base (Tiers 1), dans le cadre d'une série de scénarios de choc de taux d'intérêt retenus par les superviseurs ; ceux-ci peuvent pratiquer des tests supplémentaires d'importance

---

3. [www.bis.org/bcbs/publ/d368\\_fr.htm](http://www.bis.org/bcbs/publ/d368_fr.htm)

des valeurs aberrantes avec leurs propres indicateurs. Des conséquences en termes prudentiels et d'insuffisance de fonds propres réglementaires sont fortement à craindre dès lors qu'un examen de l'exposition d'une banque à l'IRRBB met en évidence une gestion inadéquate de ses fonds propres, de ses bénéfices ou de son profil de risque global, ou une prise de risque excessive à cet égard."

La norme distingue trois types d'IRRBB :

- a) "*Le risque de décalage* est lié à la structure par échéance des instruments du portefeuille bancaire et provient du calendrier de révision des taux. L'importance du risque de décalage est différente selon que les variations de la structure par échéance sont identiques sur toute la courbe des rendements (risque parallèle) ou différent selon les périodes (risque non parallèle) ;"
- b) "*Le risque de base* décrit l'incidence des variations relatives des taux d'intérêt pour les instruments financiers qui ont des échéances similaires mais dont la tarification repose sur des indices de taux différents ;"
- c) "*Le risque d'option* provient de positions sur des produits dérivés optionnels ou d'éléments optionnels incorporés dans des actifs, des passifs et éventuellement des postes de hors-bilan, qui permettent à la banque ou à ses clients de modifier le niveau et le calendrier de leurs flux de trésorerie. On distingue en outre le risque d'option automatique et le risque d'option comportementale."

Ces trois types de risque peuvent modifier le prix, le rendement ou le coût de tous les postes du bilan et hors-bilan sensibles aux taux d'intérêts jusqu'à reconsidérer la santé financière de la banque.

## 1.6 Bilan du Fonds d'Epargne

La Caisse des dépôts a la particularité d'avoir deux bilans distincts : La Section Générale qui couvre l'activité pour compte propre et le Fonds d'Epargne dont l'activité majoritaire consiste à financer les logements sociaux. Le bilan du Fonds d'Epargne représente près de 275 milliards d'euros quand celui de la Section Générale pèse 132 milliards d'euros. Ce mémoire prenant place au Fonds d'Epargne il s'efforcera d'en décrire le bilan dans la suite.

### 1.6.1 Actifs

L'activité principale du Fonds d'Epargne est le financement des logements publics. Elle représente 174 Mds d'euros, soit 63% du bilan. Le FE propose plusieurs types de prêt pouvant être regroupés en deux catégories :

- Les prêts habitat-ville
- Les prêts non habitat-ville

Cette distinction vient du fait que la collecte des livrets réglementés (Livret A, Livret Développement Durable et Livret Epargne Populaire) varie afin de respecter des ratios de centralisation.

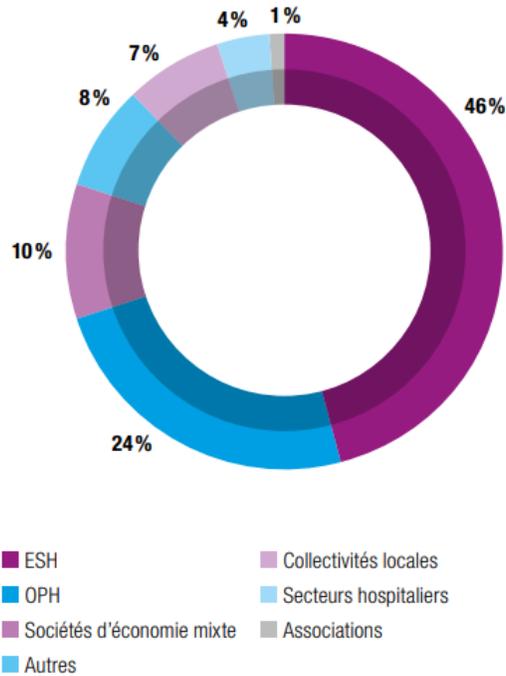


FIGURE 2 – Répartition en 2018 des prêts par type de contreparties en %

La partie des actifs qui n'est pas consacrée aux prêts est investie sur les marchés en actifs financiers. La gestion de ces actifs sert à optimiser les résultats du Fonds d'Épargne et à assurer la rémunération des livrets règlementés tout en répondant aux préoccupations de liquidité. Le portefeuille d'actifs doit pouvoir répondre aux attentes de liquidité dans le cas où l'encours des dépôts diminue, il y a augmentation de la demande de prêts, une variation des taux d'intérêt et/ou de l'inflation. Le rendement de ce portefeuille provenant de dividendes, de coupons et de plus-value sur actions doit permettre de maintenir le résultat positif du Fonds d'Épargne.

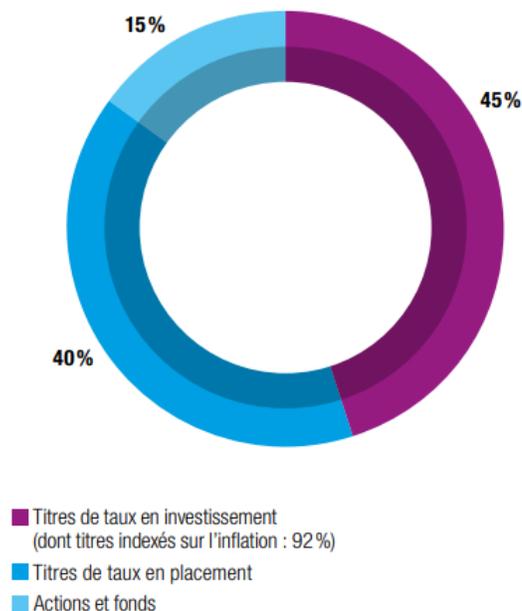


FIGURE 3 – Répartition en 2018 du portefeuille d'actifs financiers en %

### 1.6.2 Passifs

La majorité du passif du Fonds d'Épargne est constituée des livrets réglementés (Livret A, Livret Développement Durable et Livret Épargne Populaire). Au 31/12/2018, l'ensemble des dépôts centralisé représente 253.1 milliards d'euros soit 92% du passif total. La centralisation des dépôts est soumise à deux ratios appelés communément "ratio 125" et "ratio 135". Ils sont rattachés aux deux types de prêts développés précédemment.

$$\frac{\text{Dépôts (LA,LDD,LEP)} + \text{Fonds Propres}}{\text{Prêts}} \geq 135\%$$

$$\frac{\text{Dépôts (LA,LDD,LEP)}}{\text{Prêts "Habitat Ville"}} \geq 125\%$$

Pratiquement, le "ratio 135" a un impact limité sur l'écoulement du bilan dans le calcul du RGT.

Le reste du passif est constitué des fonds propres et résultat du Fonds d'Épargne, emprunts, mises en pension, provisions et comptes de régularisation pour un total de 21.9Md€.

## 2 Méthode de calcul du risque global de taux

Le risque global de taux est le principal risque du Fonds d'Épargne et immobilise presque 50% des besoins en fonds propres de l'établissement. Son calcul s'effectue dans le cadre prudentiel de la CDC.

La méthode de calcul du RGT impose de se placer dans l'hypothèse d'un run-off, c'est-à-dire qu'aucune nouvelle opération ne sera faite sur le bilan. L'objectif étant de quantifier la capacité de l'organisme à supporter une baisse, voire un arrêt, de nouveaux business. On peut à partir de là estimer les provisions permettant de répondre aux engagements de l'entreprise dans un contexte très défavorable.

Il existe plusieurs méthodes de calcul du Risque Global de Taux (RGT). Le Fonds d'Épargne en utilise deux d'entre elles et le développement d'une troisième est en cours. La première, nommée méthode des GAPS, s'obtient en triant les éléments du bilan selon le type d'exposition au risque de taux et regroupés par maturité. Pour chaque maturité, les actifs et passifs sont soustraits pour déterminer les gaps correspondants. Les gaps ainsi obtenus sont multipliés aux sensibilités correspondantes et au choc de taux. Le 1000<sup>ième</sup> besoin en fonds propres le plus important des 100 000 simulés est alors considéré comme RGT. Le  $\Delta$  de VAN correspond à la deuxième méthode. Elle est plus complexe, s'obtient par valorisation et actualisation des postes du bilan aux différents plots de maturité. Et enfin la troisième méthode dite stochastique permet d'incorporer des effets non linéaires au calcul comme les optionnalités des prêts. Dès lors, on peut considérer la première méthode comme un proxy de la seconde.

### 2.1 Méthode des GAPS

La méthode des impasses de taux peut se décomposer en trois parties. La détermination des gaps du bilan, le calcul des sensibilités et la calibration d'un couple de choc de taux.

#### 2.1.1 La détermination des GAPS du bilan

L'objectif est de créer pour chaque plot de maturité, chaque indexation, une échéance des actifs, des passifs et du hors bilan. Les éléments contractuels du bilan sont classés selon la durée résiduelle du contrat. Les opérations non contractuelles comme le livret A, qui représente une grande partie du passif du Fonds d'Épargne sont échelonnées selon des hypothèses de collecte interne à l'entité. Ces conventions d'écoulement ont un impact considérable sur le risque de taux dû aux encours en jeu. La méthode des gaps "traditionnelle" ne fait intervenir que les indexations taux fixes et taux variables. Néanmoins, le Fonds d'Épargne ajoute les gaps de taux indexés inflation puisque son exposition est non nulle et représente une part importante du bilan.

Gap de Taux Fixes = Actifs à Taux Fixes - Passifs à Taux Fixes

Gap de Taux Variables = Actifs à Taux Variables - Passifs à Taux Variables

$$\text{Gap de Taux Inflation} = \text{Actifs indexés Inflation} - \text{Passifs indexés Inflation}$$

L'hypothèse d'écoulement du passif, dépôts des livrets règlementés, consiste en une chute historique sur les 5 premières années suivi d'une décollecte exponentielle calibrée sur la vitesse d'écoulement de l'actif du bilan.

On peut représenter l'échéancier sous forme d'un graphique comme ci-dessous.

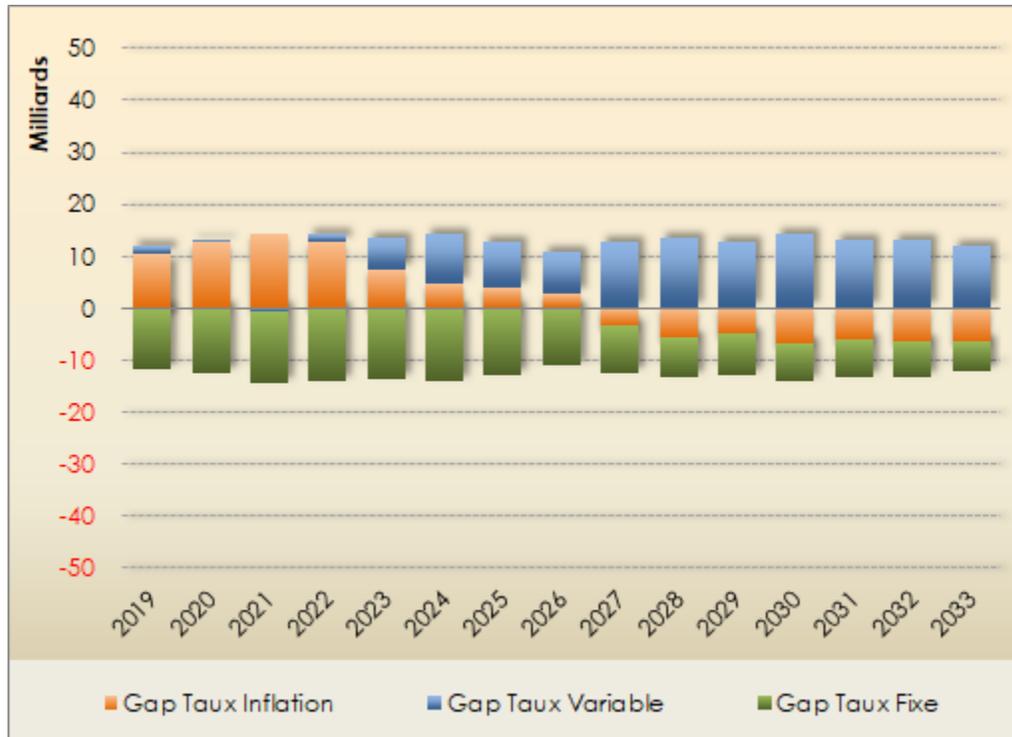


FIGURE 4 – Gap de taux

L'amortissement des gaps est alors défini comme la différence algébrique des gaps entre deux dates consécutives. Par exemple, sur le graphique, le gap taux variable de 2019 est de 10Md€ et en 2020 de 13Md€ ce qui implique un amortissement de gap de +3Md€.

### 2.1.2 Calcul des sensibilités

Le Fonds d'Épargne modélise son bilan à l'aide d'obligations synthétiques de nominal et de maturité correspondant à l'échéancier précédemment développé. La sensibilité représente ainsi la variation de la valeur du portefeuille d'obligation à la suite d'un couple de chocs de taux.

### 2.1.3 Calibration des chocs

Les couples de chocs de taux appliqués sont issus de l'étude de séries temporelles. Cette partie étant le coeur du mémoire, elle sera développée plus amplement dans les sections suivantes.

### 2.1.4 Calcul du Besoin en Fonds Propres

Les valeurs des Besoins en Fonds Propres pour chacun des 100 000 chocs simulés proviennent de la formule :

$$\Delta V_i = \sum_{t=1}^M AmGap_t^{Nom} . sensi_t^{Nom} . \Delta r_i^{Nom} + \sum_{t=1}^M AmGap_t^{Rel} . sensi_t^{Rel} . \Delta r_i^{Rel}$$

Avec :

- $AmGap_t^{Nom}$  (resp.  $AmGap_t^{Rel}$ ) représente l'amortissement de gap indexé taux fixe (resp. taux réel) pour une maturité  $t$ .
- $sensi_t^{Nom}$  (resp.  $sensi_t^{Rel}$ ) représente la sensibilité aux taux fixes (resp. taux réels) pour une maturité  $t$ .
- $\Delta r^{Nom}$  (resp.  $\Delta r^{Rel}$ ) représente le  $i^{me}$  choc de taux nominal (resp. réel).

Une VaR à 99% a été choisie par la direction du Fonds d'Epargne comme niveau de risque tolérable. Cette limite a été fixée, à la création du modèle, pour être en accord avec les chocs du Comité de Bâle. Les impacts des chocs de la méthode standard et de la méthode interne étaient alors similaires.

La méthode des GAPS offre plusieurs avantages opérationnels telles qu'une modélisation simple du bilan grâce à des obligations synthétiques. Néanmoins elle sous-entend une hypothèse forte quant à l'écoulement des postes du bilan. En effet, les prévisions d'écoulement sont identiques dans l'environnement stressé que dans le scénario central. Ceci peut cependant être corrigé en utilisant la méthode de la VAN.

## 2.2 Méthode de la valeur actuelle nette

### 2.2.1 Déterministe

La méthode de la valeur actuelle nette (VAN) déterministe s'apparente à une optique de pricing, c'est la valeur actualisée des cash-flows futurs. Elle s'articule autour de plusieurs étapes.

## Valorisation du bilan

Comme dit précédemment, la première étape de calcul consiste à donner une valeur au bilan dans un environnement "classique". On parle souvent de scénario central. Cette actualisation utilisant des courbes de taux nominaux et taux réels, elles vont dans un second temps être choquées afin d'obtenir une deuxième valorisation du bilan. Deux valorisations du bilan sont ainsi obtenue, l'une en scénario central, l'autre en scénario stressé.

### Calcul des $\Delta$ VAN

Comme son nom l'indique, l'étape suivante consiste à différencier les deux valorisation précédemment calculées pour en déduire des  $\Delta$ VAN pour chaque couple de choc.

### Calcul du Besoin en Fonds Propres

La métrique du RGT s'obtient en choisissant la VaR à 99% de la série des  $\Delta$ VAN.

### Limite

Cette méthode étant gourmande en temps de calcul il n'est pas possible de lancer les 100 000 couples de chocs dans l'outil de projection QRM<sup>4</sup> comme pour la méthode des GAPS. La mise en place d'un proxy est alors nécessaire. Une grille de 30 couples de chocs taux nominaux/taux inflation est lancée dans le logiciel. Une extrapolation sous forme de nappe est ensuite calibrée afin de pouvoir calculer tous les Besoins en Fonds Propres rattachés aux 100 000 couples de chocs. En outre, l'hypothèse d'écoulement des postes du bilan dans le cadre du run-off suit une règle déterministe restreignant de ce fait les scénarios potentiellement extrêmes.

## 2.2.2 Stochastique

La méthode de la VAN stochastique n'est pas utilisée par le Fonds d'Epargne comme outil pour la mobilisation des besoins en fonds propres. La VAN stochastique s'articule suivant les mêmes étapes que la VAN déterministe à ceci près qu'elle offre une plus grande flexibilité dans les hypothèses de calcul. Elle permet, entre autres, d'intégrer certaines optionalités notamment le floor de la formule du taux du Livret A.

### Limite

Contrairement aux deux autres méthodes, la VAN stochastique ne calcule le  $\Delta$ VAN que sur 100 chemins. En effet, les temps de calcul et la puissance des outils ne permettent pas de simuler plus de scénarios. Néanmoins un moteur de convergence est utilisé pour pallier ce problème.

---

4. QRM est un logiciel américain utilisé en ALM

## 3 Chocs de taux

### 3.1 Méthodologie de calibration des chocs de taux

Afin de quantifier l'IRRBB les banques doivent appliquer des chocs de taux d'intérêts pour calculer les variations de valeur économique et les bénéfices de la banque. Détaillons ici deux méthodes distinctes permettant de calibrer les chocs de taux. L'une basée sur les recommandations du Comité de Bâle et l'autre utilisée en interne. Ce second modèle découle de la spécificité du bilan du Fonds d'Epargne, très différent du panel de banques utilisé par le Comité de Bâle.

#### 3.1.1 Modèle standard

Le Comité de Bâle recommande d'appliquer six chocs différents sur la courbe des taux d'intérêt pour rendre compte des possibles déformations de la courbe des taux (parallèle et non parallèle). Les chocs standards sont calibrés sur un panel de séries temporelles journalières absolues de 2000 à 2015 avec plusieurs maturités. Les différents scénarios de chocs sont :

- i) Déplacement parallèle vers le haut
- ii) Déplacement parallèle vers le bas
- iii) Pentification de la courbe (taux courts en baisse, taux longs en hausse)
- iv) Aplatissement de la courbe (taux courts en hausse, taux longs en baisse)
- v) Hausse des taux courts
- vi) Baisse des taux courts

L'ampleur des chocs est calibrée par le Comité et est mise à jour afin de respecter l'environnement économique à l'instant du calcul.

La méthode standard explicitée ci-dessus n'est pas mise en œuvre aujourd'hui par le Fonds d'Epargne. En effet, cette méthode ne prend pas en compte des chocs inflations. Or, le bilan du Fonds d'Epargne est très exposé à l'inflation du fait de ses ressources indexées sur le taux du Livret A.

Etant donné la taille du bilan et son exposition au risque de taux il est intéressant d'étudier le modèle interne qui s'adapte mieux au risque sous-jacent.

#### 3.1.2 Modèle interne

Tout comme la méthode standard, la méthode interne se fonde sur l'étude de séries temporelles des taux nominaux et inflations. Nous tâcherons de développer les choix méthodologiques actuels afin d'en déterminer les avantages et inconvénients et ainsi justifier l'existence de ce mémoire.

### 3.1.3 Tests

Les séries temporelles sont des suites ayant la particularité de dépendre du temps. De ce fait, leur étude implique l'utilisation de plusieurs tests statistiques. Les tests retenus par le Fonds d'Épargne sont listés ci-dessous :

#### Test de Kolmogorov

Ce test permet de savoir statistiquement si un échantillon suit une distribution de probabilité spécifique.

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon d'une loi  $F$  inconnue.

On pose :

- $(H_0)$  : L'échantillon suit la loi choisie.  $F = F_{théorique}$
- $(H_1)$  : L'échantillon ne suit pas la loi choisie.  $F \neq F_{théorique}$

La statistique de test est de la forme suivante :

$$K_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \{ |F_{théorique}(x) - F_{empirique}(x)| \}$$

où  $F_{empirique}$  est la fonction répartition empirique de l'échantillon définie par  $F_{empirique}(x) = \frac{\text{Card}(x_i, x_i \leq x)}{n}$ ,  $F_{théorique}$  est la fonction répartition de la loi choisie et  $n$  étant la longueur de l'échantillon.

On compare la statistique de test à la table de Kolmogorov afin de rejeter ou non l'hypothèse  $H_0$  pour un niveau  $\alpha$  de risque.

#### Test de Dickey Fuller augmenté

Ce test étudie la stationnarité de la série en estimant successivement les paramètres des trois modèles autorégressifs suivant et en comparant la statistique de Student  $t_\pi$  associé au coefficient  $\pi$  aux valeurs critiques de Dickey-Fuller.

$$(i) \Delta y_t = c + \beta t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + \epsilon_t$$

$$(ii) \Delta y_t = c + \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + \epsilon_t$$

$$(iii) \Delta y_t = \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + \epsilon_t$$

où les  $\phi_j, c, \beta$  et  $\pi$  sont des paramètres,  $(\epsilon_t)_t$  est une série de bruit blanc et  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

Soit :

- $(H_0)$  :  $\pi = 0$ , la série est stationnaire.
- $(H_1)$  :  $\pi \neq 0$ , la série est non stationnaire.

Le test consiste à conclure de la significativité du paramètre  $\pi$  dans les équations (i), (ii) puis (iii).

### Test de Ljung-Box

Ce test examine l'autocorrélation de la série. On pose :

- ( $H_0$ ) : La série est non autocorrélée.
- ( $H_1$ ) : La série est autocorrélée d'au moins un ordre.

La statistique de test est de la forme suivante :

$$Q = n * (n + 2) * \sum_{k=1}^m \frac{\hat{r}_k^2}{n - k}$$

où  $\hat{r}_k$  représente l'autocorrélation estimée d'ordre  $k$  de la série,  $m$  le retard maximum étudiée et  $n$  le nombre de valeur de la série. En général pour étudier une série on choisit  $m = \ln(n)$  en vérifiant que la valeur de  $m$  permet d'intégrer au moins une période s'il y a saisonnalité. On compare ensuite la valeur de la statistique à une loi  $\chi_m^2$  à  $m$  degré de liberté.

Si  $Q > q_{1-\alpha}^{\chi_m^2}$  alors ( $H_0$ ) est rejetée et la série est autocorrélée d'au moins un ordre.

### Critères AIC et BIC

Ces deux critères permettent de faire une sélection parmi les modèles testés dans le cadre de ce mémoire. Ils s'écrivent :

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

$$BIC = k \cdot \ln(N) - 2\ln(L)$$

avec  $L$  la vraisemblance du modèle estimée,  $N$  le nombre d'observations dans l'échantillon et  $k$  le nombre de paramètres libres du modèles. Le critère BIC permet de prendre en compte le nombre d'observation contrairement à l'AIC.

## 3.2 Production actuelle

La méthode actuelle pose plusieurs problèmes d'ordre opérationnel et de gestion de risque. Les calculs de calibration ainsi que la génération des aléas sont programmés sous Matlab, ce qui implique l'achat d'une licence onéreuse. De plus, la procédure est longue et fastidieuse pour les équipes opérationnelles. Développons maintenant le modèle actuellement en production au Fonds d'Epargne.

### 3.2.1 ARMA-GARCH

#### Le modèle ARMA

Le modèle ARMA consiste à avoir une partie autorégressive et une partie moyenne mobile, ce modèle est la généralisation des modèles AR et MA.

**Définition** Un processus  $(X_t)$  est dit ARMA( $p, q$ ) s'il existe deux suites réelles  $(\phi_k)$  et  $(\theta_k)$  telles que

$$X_t - \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} = \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \quad \text{avec } (\epsilon_t) \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2).$$

### Le modèle GARCH

Le modèle GARCH est utilisé lorsque la série est hétéroscédastique, c'est-à-dire que la variance du résidu est non constante dans le temps. Il permet de séparer la partie déterministe de la partie aléatoire du résidu.

**Définition** Soit  $(\epsilon_t)$  le résidu du processus  $(X_t)$ .

Le processus  $(X_t)$  est dit GARCH( $p, q$ ) s'il existe deux suites réelles  $(\alpha_k)$  et  $(\beta_k)$  telles que

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t$$

avec :

- $(\eta_t)$  un bruit blanc fort.
- $(h_t)$  et  $(\eta_t)$  deux processus indépendants.
- $h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \alpha_k \epsilon_{t-k} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$
- $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  et  $\sum_i \alpha_i + \beta_i < 1$

### 3.2.2 Modèle de séries

Comme mentionné précédemment les séries temporelles utilisées sont celles des swaps Euribor et inflation française. Ces deux séries ont été choisies à l'origine par un critère de liquidité et une adéquation de la maturité avec la durée globale du bilan du Fonds d'Épargne. L'étude en était venue à la conclusion que les séries suivaient toutes deux un AR(1)-GARCH(1,1) avec des lois de Student de degré de liberté 5 et 10 pour la génération des aléas pour respectivement les taux inflation et les taux nominaux.

Il existe plusieurs méthodes pour modéliser les chocs de taux : les modèles factoriels, les modèles ACP, les modèles de séries temporelles. Nous allons nous focaliser sur l'utilisation de séries temporelles, méthode choisie par le Fonds d'Épargne. Actuellement, les séries différenciées absolument de taux sont modélisées grâce à des AR(1)-GARCH(1,1) puisqu'au moment de l'étude elles présentaient de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité. Il en découle une représentation des taux nominaux et inflation comme ci-dessous :

1. Taux nominaux :

(a)  $(\Delta r_n)_t = a_n + b_n (\Delta r_n)_{t-1} + \epsilon_{n,t}$

(b)  $\epsilon_{n,t} = \sigma_{n,t} \cdot \eta_{n,t}$

- (c)  $\sigma_{n,t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{n,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n,t-1}^2$
  - (d)  $\sigma_{n,t}$  indépendant de  $\eta_{n,t}$
2. Taux inflation :
- (a)  $(\Delta r_i)_t = a_i + b_i (\Delta r_i)_{t-1} + \epsilon_{i,t}$
  - (b)  $\epsilon_{i,t} = \sigma_{i,t} \cdot \eta_{i,t}$
  - (c)  $\sigma_{i,t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i,t-1}^2$
  - (d)  $\sigma_{i,t}$  indépendant de  $\eta_{i,t}$

Les aléas  $\eta_{n,t}$  et  $\eta_{i,t}$  sont simulés avec des Student centrées, réduites et corrélées linéairement afin de prendre en compte l'épaisseur des queues de distributions. Dans le but d'avoir un nombre suffisant de points les séries sont journalières. Pour générer un choc il suffit de simuler 260 aléas (représentant les 260 jours ouvrés de l'année) et la variation de taux pour une année.

### 3.2.3 Corrélation

On remarque que les variations de taux swap nominaux et taux swap inflation sont corrélées sur les marchés. Dès lors, il est important que le choc conjoint prenne en compte cette corrélation. A l'heure actuelle, le Fonds d'Epargne corréle les résidus standardisés, notés  $\eta$  précédemment. Contrairement au modèle GARCH classique, le résidu standardisé ne suit pas une loi gaussienne. Il faut donc adapter la méthode aux résidus Student standardisés. La dépendance entre ces résidus est, pour l'heure, modélisée par un algorithme recréant une copule gaussienne. Le calcul s'articule autour de plusieurs étapes.

1. Après avoir récupéré les résidus standardisés des deux séries de taux empiriques, les résidus de Student sont transformés en leur équivalent gaussien en prenant un quantile. Autrement dit, la valeur empirique du résidus égale un certain quantile en loi de Student. Ce quantile est reporté sur la loi normale. On obtient ainsi l'équivalent en loi normale du résidu.
2. La détermination de la corrélation se fait sur les séries de résidus normaux.
3. La génération des aléas normaux des deux séries à l'aide de la matrice de corrélation précédemment calibrée.
4. Le passage à une loi de Student est réalisé avec la méthode inverse au point 1.

### 3.2.4 Limites

Dans le contexte économique actuel où les taux semblent durablement bas il apparaît que les paramètres de l'autorégression ainsi que de l'hétéroscédasticité ne vérifient plus les tests préalablement cités. Il a donc été convenu de revenir sur la méthode et par la même de rendre le processus plus abordable opérationnellement en développant le nouvel outil sur un logiciel libre de droit comme Python et d'automatiser la génération des chocs pour limiter le risque opérationnel. De plus, l'hypothèse d'une copule gaussienne peut être restrictive.

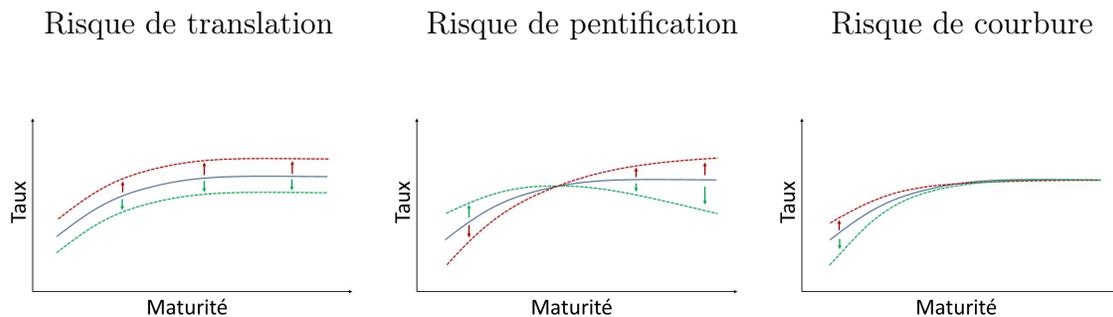
## 4 Nouveau modèle

Dès lors que les tests ne sont pas vérifiés par le modèle on peut le considérer comme inutilisable dans le contexte qui nous intéresse. Dans un premier temps, l'objectif a donc été de mettre à jour le modèle AR-GARCH pour pouvoir l'utiliser dans des délais raisonnables. La précédente modélisation datant de plusieurs années, il a été décidé de repartir d'une feuille blanche.

### 4.1 Analyse en Composantes Principales

La plus grosse approximation du modèle est de considérer un choc en translation sur les courbes plutôt qu'un couple de choc dépendant de la maturité. Il convient donc dans un premier temps de confirmer que ce proxy est légitime.

La première étape consiste à savoir si un choc en translation uniquement est une approximation satisfaisante des mouvements globaux de la courbedes taux nominaux et inflations lors des précédentes années. Pour rappel, le Comité de Bâle identifie trois déformations de la courbe pouvant impacter le risque de taux.



Une analyse en composantes principales (ACP) permet d'identifier l'importance de ces trois risques sur les déformations des courbes et d'en quantifier l'impact. Ces calculs permettent de considérer le risque de translation comme expliquant la majorité de la déformation des courbes sur l'historique. En effet, l'ACP montre que le risque de translation explique 98.7% de la variance pour les taux nominaux et 94 % pour les taux inflations française.

Pour faire cette ACP, l'historique retenu s'étale entre le 6/7/2009 et le 6/7/2019, soit 10 ans. Les séries utilisées sont :

- Taux swap contre Euribor 6 mois de maturité 1 à 30 ans.
- Taux swap contre inflation française de maturité 1, 5, 10, 15, 20, 25 et 30 ans.

## Taux nominaux

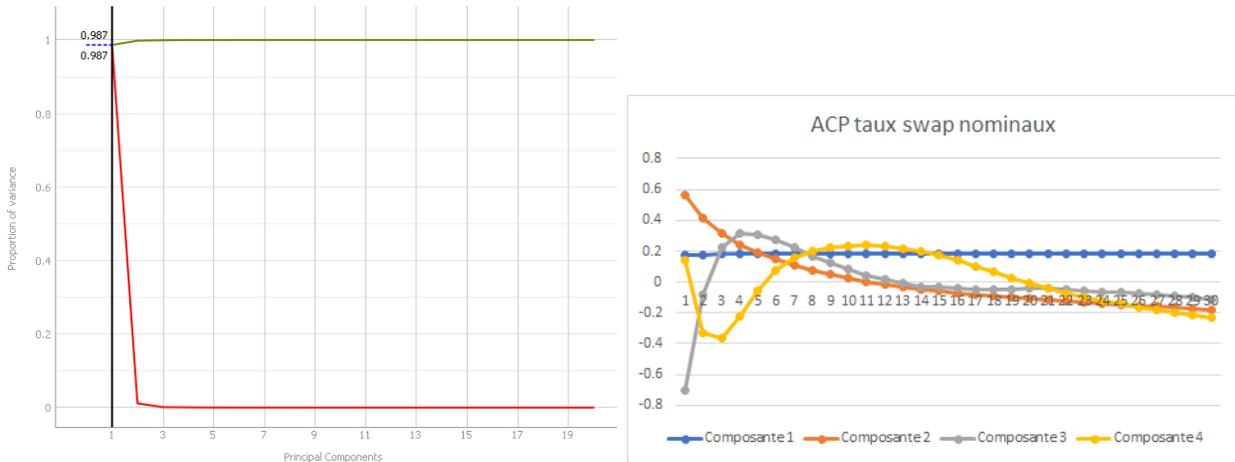


FIGURE 6 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 07/08/2009 au 07/08/2019

Comme l'explique Litterman et Scheinkman dans leur article *Common Factor Affecting Bond Return* la courbe bleue du graphique ci-dessus correspond à un impact en translation. En effet, cette composante modifie de manière constante toutes les maturités de la courbe. De plus, cette composante explique 98.7% de la variance des courbes sur 10 ans d'historique. Dès lors, on peut affirmer que les chocs en translation explique la quasi totalité de la déformation des taux swap Euribor.

Afin de confirmer cet effet dans le temps, nous avons fait cette même étude sur des historiques courts (du 07/08/2009 au 31/07/2014 et du 01/08/2014 au 07/08/2019). Les résultats présentés ci-dessous confirme cette tendance.

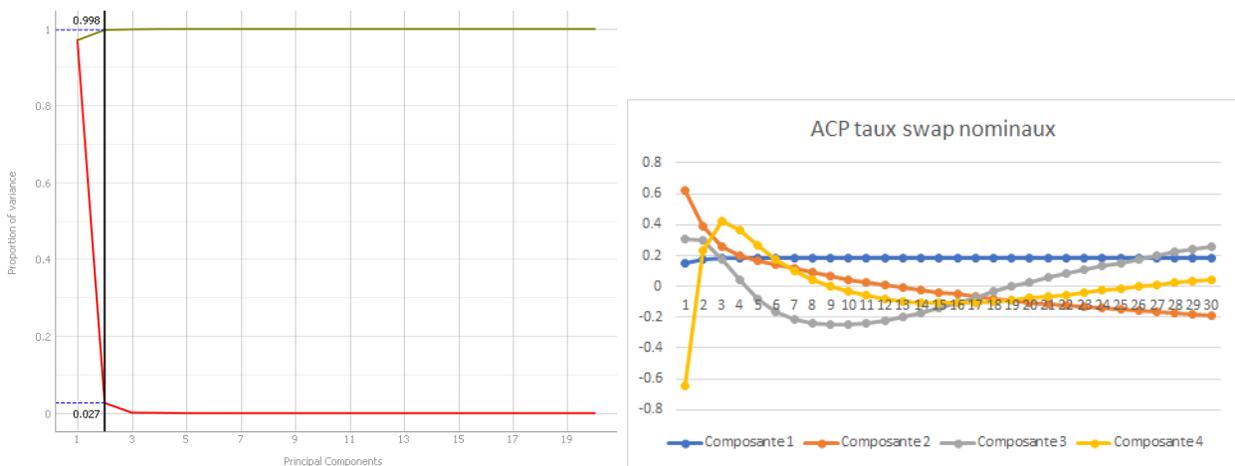


FIGURE 7 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 07/08/2009 au 31/07/2014

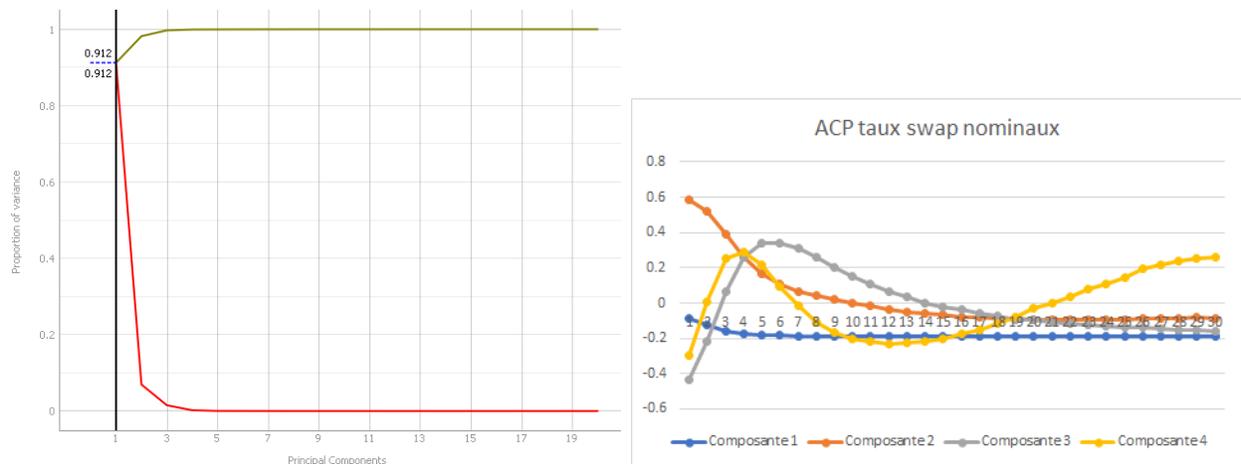


FIGURE 8 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 01/08/2014 au 07/08/2019

## Taux inflation

L'étude de l'inflation par ACP montre des résultats similaires aux taux nominaux. Ci-contre les graphiques explicatifs.

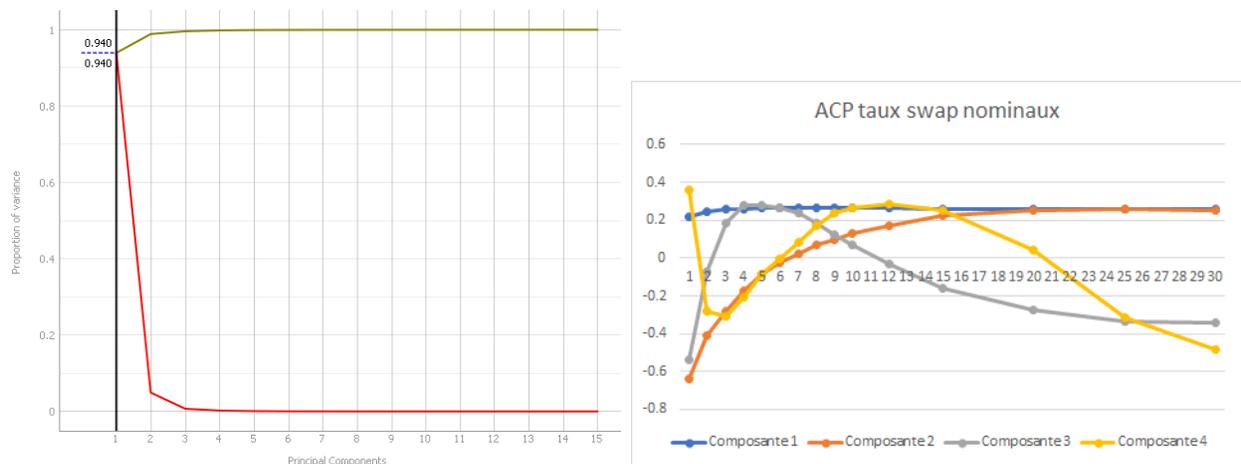


FIGURE 9 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 07/08/2009 au 07/08/2019

On retrouve les 94% expliqués par la translation. De même que précédemment, une ACP complémentaire a été faite sur d'autres plages de temps pour confirmer la constante des résultats.

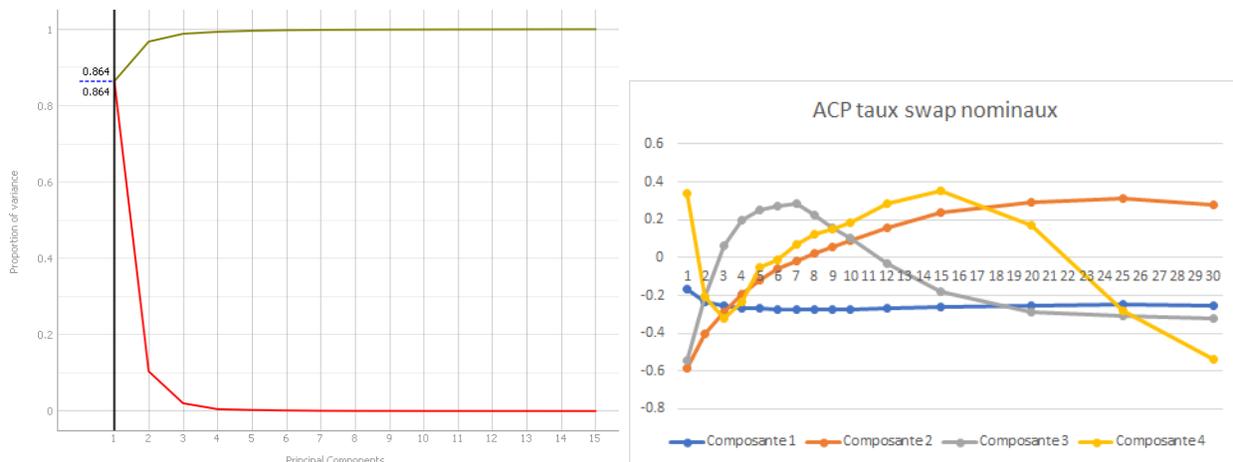


FIGURE 10 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 07/08/2009 au 31/07/2014

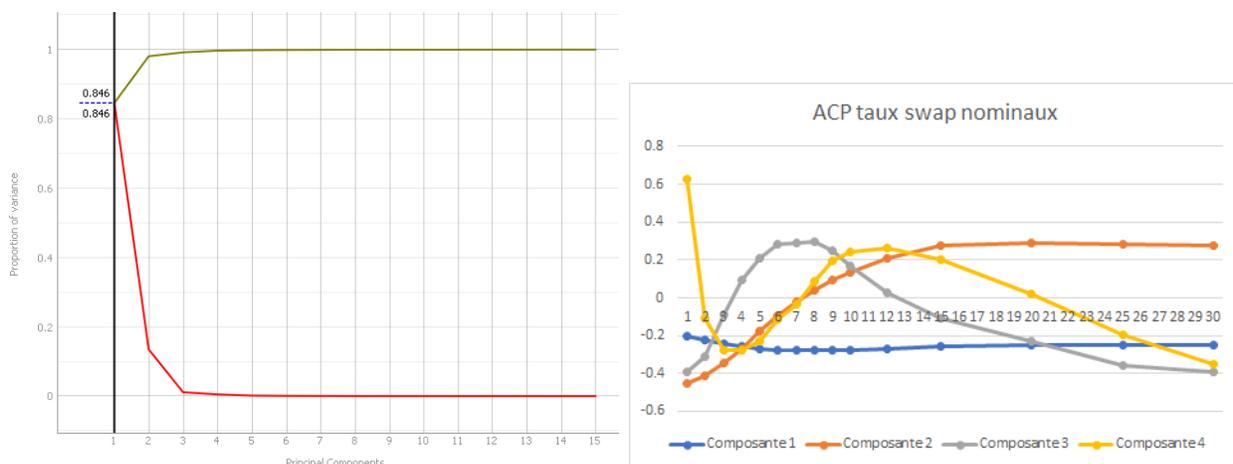


FIGURE 11 – Variance expliquée par composante principale (à gauche) et trajectoire des composantes (à droite) pour un historique du 01/08/2014 au 07/08/2019

Ces deux résultats justifient le précédent choix du Fonds d'Épargne de limiter la génération des chocs à un mouvement en translation et d'écartier les mouvements de pentification et de courbure. Dans cette partie du mémoire, nous allons en faire de même et modéliser l'intégralité de la déformation par un choc constant sur toutes les maturités des deux courbes.

## 4.2 Nouveau modèle translation

Dans l'idée d'une refonte de la modélisation, plusieurs séries ont été ajoutées au spectre des inputs possibles du modèle. A noter que la série de taux nominaux a été retraitée pour la transformer en zéro-coupons. Les séries inflations étant déjà zéro-couponnées à la sortie de Bloomberg, aucune transformation n'a été appliquée. En outre, l'un des critères de réussite

de l'étude étant l'automatisation des calculs, tout sera codé en limitant les manipulations de l'utilisateur. Celui-ci devant néanmoins contrôler les résultats.

#### 4.2.1 Séries étudiées

Les séries de taux actuellement en production sont :

- La série de taux swap contre Euribor 6 mois d'une maturité de 10 ans
- La série de taux swap contre inflation française d'une maturité de 10 ans

On remarque qu'un risque de base existe puisque la série de taux swap inflation utilisée dans le modèle repose sur une inflation anticipée lorsque le risque réel du Fonds d'Epargne provient de l'inflation réalisée.

Pour l'étude, il a été convenu de garder ces deux séries et d'ajouter d'autres variantes afin d'élargir les choix possibles. Les autres taux ont été préalablement sélectionnés au regard de leurs liens avec le bilan (notamment pour l'inflation européenne) et pour leur liquidité. Le tableau ci-contre regroupe les séries étudiées. Pour des raisons de simplicité les termes taux nominaux (respectivement taux inflation) seront utilisés à la place de taux swap contre Euribor 6 mois (respectivement taux swap contre inflation).

<b>Profondeur d'historique</b>	<b>Série (Ticker Bloomberg)</b>	<b>Maturité</b>
10 ans	Taux swap contre Euribor 6 mois (EUSA)	5 ans
		10 ans
		15 ans
15 ans	Taux swap contre Euribor 6 mois (EUSA)	5 ans
		10 ans
		15 ans
10 ans	Taux swap contre inflation française (FRSWI)	5 ans
		10 ans
		15 ans
15 ans	Taux swap contre inflation française (FRSWI)	5 ans
		10 ans
		15 ans
10 ans	Taux swap contre inflation européenne (EUSWI)	5 ans
		10 ans
		15 ans
15 ans	Taux swap contre inflation européenne (EUSWI)	5 ans
		10 ans
		15 ans

## 4.2.2 Etudes des copules

Les copules permettent de caractériser la dépendance de différentes variables aléatoires. Elles sont préférées à la dépendance linéaire mise en place dans la précédente méthodologie de calibration.

**Définition** Une copule est une fonction sur  $[0, 1]^d$  dont les marges sont uniformes sur  $[0, 1]$ .

Il existe plusieurs types de copules. Un échantillon non exhaustif des copules étudiées dans l'étude est expliqué ci-dessous. Afin de simplifier les écritures et en accord avec l'utilisation qui en est faite dans cette partie du mémoire les copules seront explicitées en dimension 2.

### • La copule Gaussienne

**Définition** Soient  $\rho \in [-1, 1]$  le coefficient de corrélation linéaire (ou coefficient de Pearson),  $\Phi^{-1}$  l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite univariée et  $\Phi_\rho(u, v) = \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^u \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(s^2 + t^2 - 2\rho st)}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$ , la loi multinormale de dimension 2.

Alors, pour tout  $(u, v) \in [0, 1]^2$ ,

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

### • La copule de Student

**Définition** Soient  $\rho \in [-1, 1]$  le coefficient de corrélation linéaire (ou coefficient de Pearson),  $T_\kappa^{-1}$  l'inverse de la fonction de répartition de la loi de Student centrée réduite univariée de degré de liberté  $\kappa$  et  $T_{\rho, \kappa}(u, v) = \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^u \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{-(s^2 + t^2 - 2\rho st)}{\kappa(1-\rho^2)}\right]^{-(\kappa+2)/2} ds dt$ ,

Alors, pour tout  $(u, v) \in [0, 1]^2$ ,

$$C(u, v) = T_{\rho, \kappa}(T_\kappa^{-1}(u), T_\kappa^{-1}(v))$$

### • La copule de Clayton

**Définition** Soit  $\Phi_\theta$  le générateur de paramètre  $\theta > 0$  de la copule de Clayton tel que :

$$\Phi_\theta(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1), \quad u \in ]0, 1] \text{ et } \Phi_\theta(0) = +\infty.$$

Alors, pour tout  $(u, v) \in [0, 1]^2$ ,

$$\begin{cases} C(u, v) = \Phi^{-1}(\Phi(u) + \Phi(v)) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} & \text{si } \theta > 0 \\ C(u, v) = uv & \text{si } \theta = 0 \end{cases}$$

- La copule de Gumbel

**Definition** Soit  $\Phi_\theta$  le générateur de paramètre  $\theta \geq 1$  de la copule de Gumbel tel que :

$$\Phi_\theta(u) = (-\ln(u))^\theta, \quad u \in [0, 1] \text{ et } \theta \geq 1.$$

Alors, pour tout  $(u, v) \in [0, 1]^2$ ,

$$C(u, v) = \Phi^{-1}(\Phi(u) + \Phi(v)) = \exp [ -((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta)^{\frac{1}{\theta}} ]$$

La sélection de la copule s'opère par le critère AIC tandis que l'estimation des paramètres de la copule utilise le maximum de vraisemblance.

### 4.3 Résultats des modèles

#### 4.3.1 Présentation de l'étude du couple de série EUSA10 et EUSWI10

Pour donner au lecteur un aperçu des résultats, l'étude des séries de taux swap contre inflation européenne de maturité 10 ans, notée EUSWI10, et de taux swap contre Euribor (6 mois) de maturité 10 ans, notée EUSA10, est détaillée ci-dessous.

#### SERIE DE TAUX SWAP INFLATION EUROPEENNE 10 ANS

- Stationnarité

L'étude de la stationnarité de la série EUSWI10 constitue la première étape de la méthode. Le test de Dickey-Fuller augmenté est appliqué à la série.

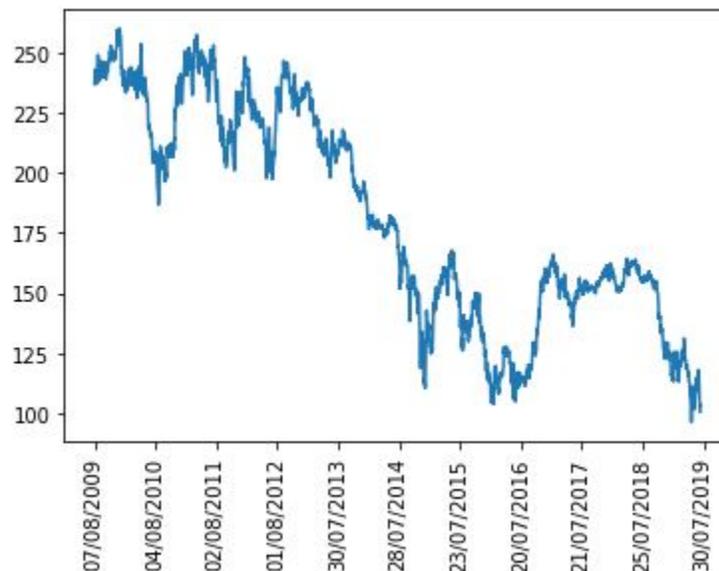


FIGURE 12 – Courbe de taux swap inflation européenne sur 10 ans journalier (2600 points)

```
ADF Statistic : -1.625727
p-valeur : 0.469728
Valeurs critiques:
  1% : -3.432894
  5% : -2.862664
 10% : -2.567368
```

On remarque un trend dans la série qui rejette la stationnarité. De plus, il faut que la statistique de test de Dickey-Fuller augmenté soit inférieure à la valeur critique correspondante au risque considéré pour conclure à la stationnarité de la série.

Puisque les résultats ne concluent pas à une stationnarité, il faut différencier la série.

**Définition** Soit  $(Y_t)$  la série de taux non différenciée.

Soit  $(X_t)$  la série différenciée.

La relation qui lie  $Y_t$  et  $X_t$  et la suivante :

$$X_t = Y_t - Y_{t-1}$$

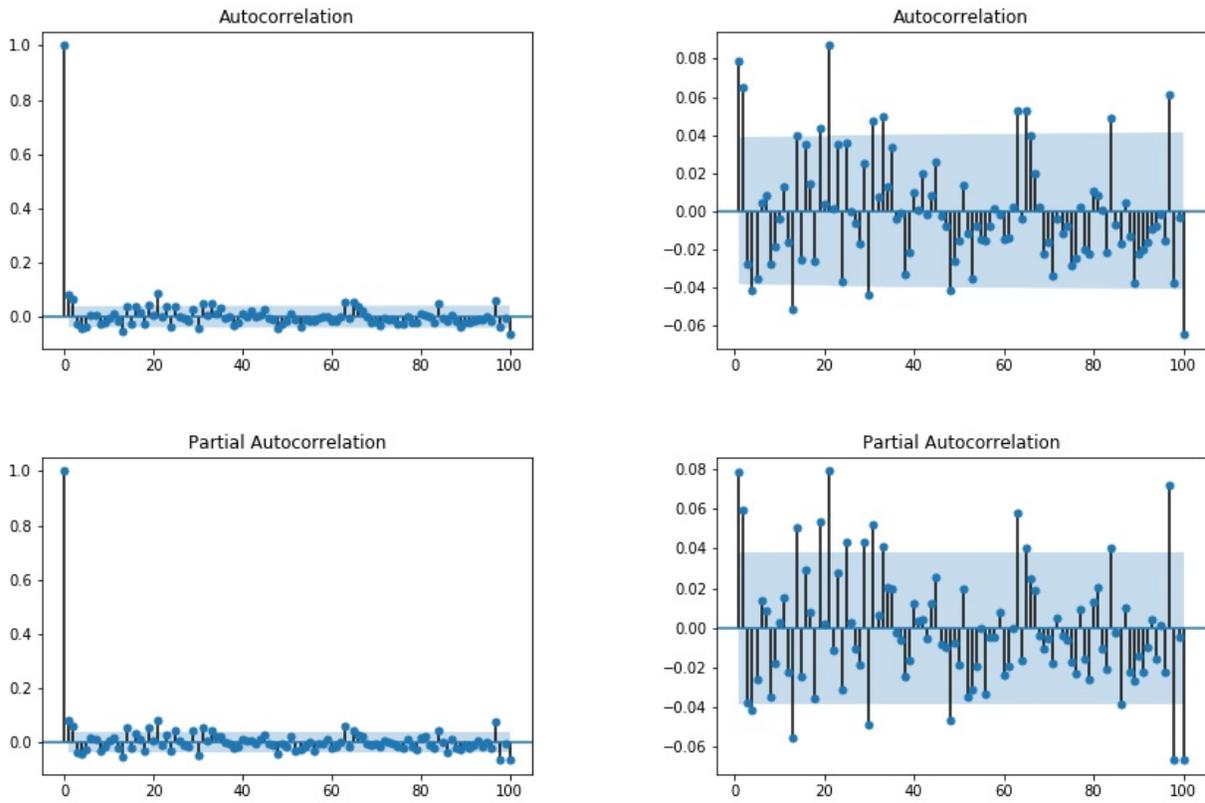
Remarque : La série différenciée compte un élément de moins du fait du premier terme qui ne peut être différencié et qui est donc retiré de la série.

Après une différenciation, les résultats satisfont les critères de stationnarité. La p-value du test de Dickey Fuller augmenté étant inférieure à la table correspondante confirmant ainsi la stationnarité de la série. Les résultats sont présentés ci-dessous.

```
ADF Statistic : -9.081384
p-valeur : 0.000000
Valeurs critiques:
  1% : -3.432894
  5% : -2.862664
 10% : -2.567368
```

- **Autocorrélation**

L'autocorrélation est aussi testée de deux manières. Un premier test consiste en l'étude des autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel de la série et le test de Ljung-Box confirme cette étude par un critère quantitatif.



L'autocorrélogramme et l'autocorrélogramme partiel montrent des corrélations significativement non nulles quoique proche de l'intervalle de confiance signe de la présence d'un ARMA.

Le test de Ljung-Box montre de même une autocorrélation de la série. Dès lors, l'outil sélectionne par critère BIC les paramètres de l'ARMA et calibre ensuite par maximum de vraisemblance la valeur des coefficients du modèle. Les résultats obtenus sont détaillés ci-contre.

ARMA Model Results						
Dep. Variable:	y	No. Observations:	2598			
Model:	ARMA(0, 2)	Log Likelihood	6531.129			
Method:	css-mle	S.D. of innovations	0.020			
Date:	Mon, 19 Aug 2019	AIC	-13056.259			
Time:	11:00:46	BIC	-13038.671			
Sample:	0	HQIC	-13049.886			
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]
ma.L1.y	0.0777	0.020	3.976	0.000	0.039	0.116
ma.L2.y	0.0749	0.020	3.692	0.000	0.035	0.115

FIGURE 13 – Résultats de l'estimation d'un ARMA sur la série inflation européenne

La calibration montre la présence d'un MA 2 de paramètres (0.07,0.0749).

- **Hétéroscédasticité**

Une étude visuelle des résidus permet d'intuire l'hétéroscédasticité de la série. Le test de Ljung-Box appliqué sur les résidus de l'ARMA au carré permet de confirmer la présence d'une variance non constante du résidu.

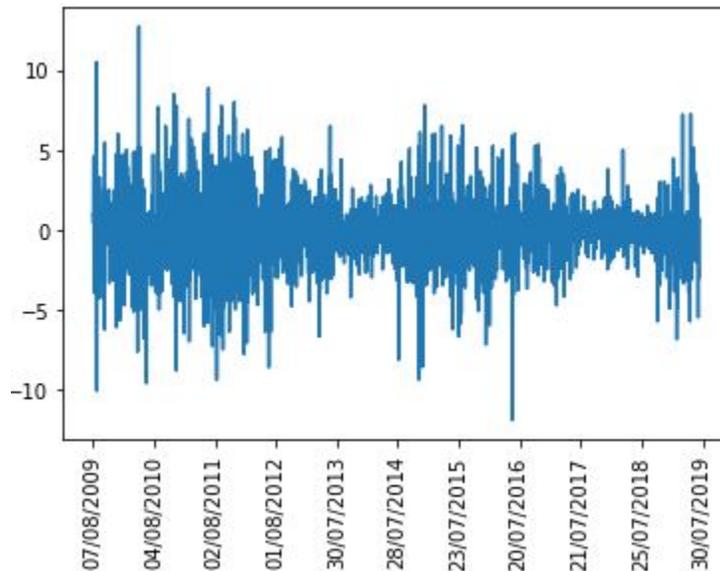


FIGURE 14 – Résidu du modèle ARMA

L'observation du graphique ainsi que le résultat du test de Ljung-Box s'accordent sur la présence d'hétéroscédasticité dans le modèle.

Comme pour l'autocorrélation, les paramètres du GARCH ainsi que les coefficients sont estimés par critères BIC et maximum de vraisemblance. La nuance étant que l'outil permet l'estimation des coefficients sous l'hypothèse que le résidu standardisé suit une loi prédéfinie. Afin de rester le plus général possible, la loi utilisée est une Skew-Student<sup>5</sup>. En effet, en fonction de ses paramètres, plusieurs lois sont identifiables.

Degré de liberté	Skewness	Loi
Elevé	$\simeq 0$	Normale
Elevé	$\neq 0$	Skew-Normale
Faible	$\simeq 0$	Student
Faible	$\neq 0$	Skew-Student

5. La Skew-Student est une loi de Student asymétrique

Zero Mean - GARCH Model Results

```

=====
Dep. Variable:          y          R-squared:          0.000
Mean Model:           Zero Mean  Adj. R-squared:    0.000
Vol Model:           GARCH      Log-Likelihood:    6966.36
Distribution:        Standardized Skew Student's t  AIC:              -13920.7
Method:             Maximum Likelihood  BIC:              -13885.5
                                     No. Observations: 2598
Date:               Mon, Aug 19 2019  Df Residuals:     2592
Time:               11:09:01         Df Model:         6
                                     Volatility Model
=====

```

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	7.6737e-06	6.575e-09	1167.020	0.000	[7.661e-06, 7.687e-06]
alpha[1]	0.0500	2.152e-02	2.323	2.015e-02	[7.823e-03, 9.218e-02]
alpha[2]	0.0500	1.772e-02	2.822	4.775e-03	[1.527e-02, 8.473e-02]
beta[1]	0.8800	1.117e-02	78.751	0.000	[ 0.858, 0.902]

Distribution

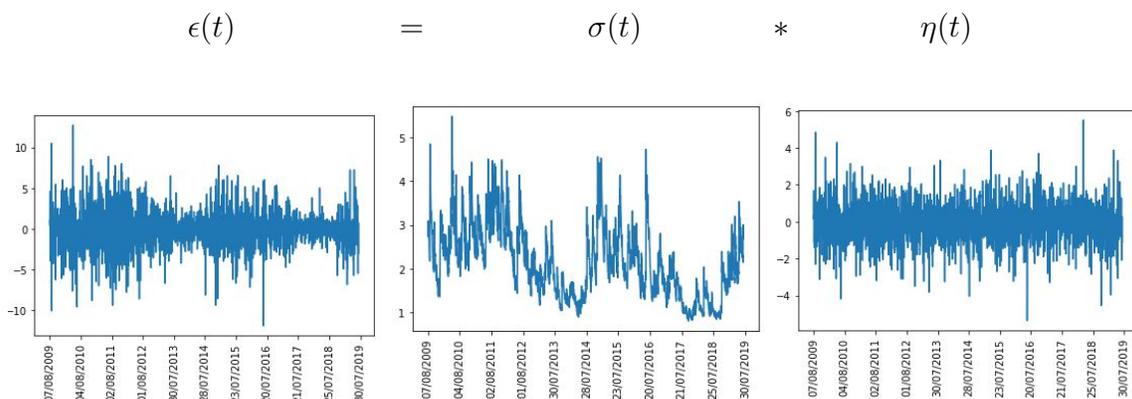
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	5.8082	1.608	3.612	3.043e-04	[ 2.656, 8.960]
lambda	0.0000	2.145e-02	0.000	1.000	[-4.204e-02, 4.204e-02]

FIGURE 15 – Résultat de l'estimation des paramètres du GARCH sur la série inflation européenne 10 ans

Les paramètres de la loi Skew-Student (5,8,0) permettent, en se référant au tableau précédent, à une loi de Student de paramètre 5.8. Le modèle estimé est donc un GARCH (2,1) de coefficients ((0.05, 0.05), 0.88).

Remarque : On aurait pu s'appuyer sur une loi à noyau mais la Skew-Student s'est avérée suffisante et évite le risque d'overfitter les résidus.

Le modèle GARCH ainsi calibré donne :



- **Loi du résidu standardisé**

Pour vérifier que la loi sélectionnée par la calibration est bien une Student, une série de tests est appliquée aux résidus standardisés.

Plusieurs lois sont testées pour fitter le résidu standardisé. Un test de Kolmogorov Smirnov ainsi qu'une étude des QQ-plots permettent de sélectionner la meilleure loi. Dans le cas présent, la loi de Student est sélectionnée.

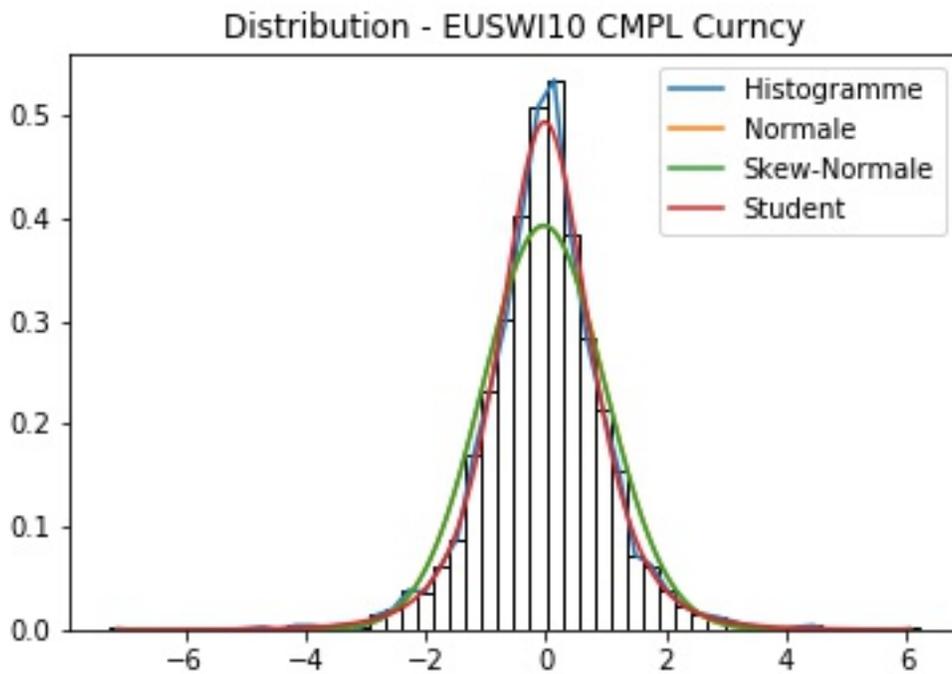
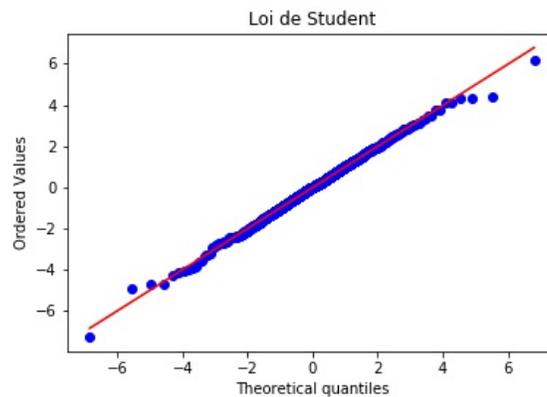
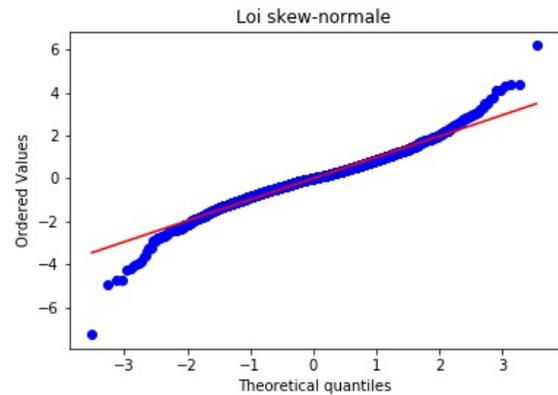
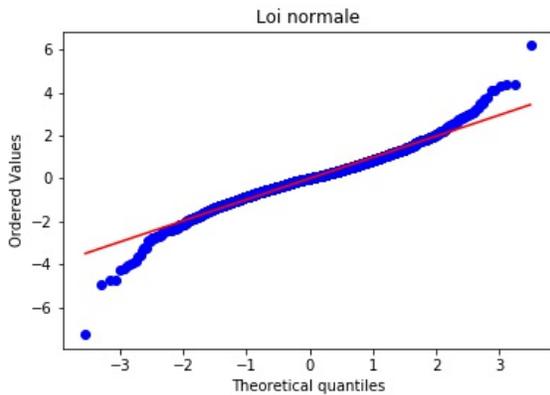


FIGURE 17 – Distribution des résidus standardisés

La sélection des lois testées découle de l'estimation des paramètres du GARCH. Ainsi, les lois de Student et gaussienne ont été choisies pour leur simplicité. Ce panel limité de loi s'explique par des résultats concluants de la loi de Student.



Les paramètres des lois sont calibrés en minimisant l'erreur entre l'échantillon empirique et la loi théorique. Il est intéressant de noter que l'hypothèse précédente sur l'estimation des paramètres du GARCH par optimisation quadratique successive menait à une loi de Student à 5,8 degrés de liberté tandis que la calibration par MSE (minimisation de l'erreur quadratique) donne une Student à 4,4 degrés de liberté. Dans le cadre de notre étude, il a été convenu de choisir 4,4 degrés de liberté pour des raisons de prudence. L'autre hypothèse n'impliquant pas des résultats spécialement différents. Le résultat du test de Kolmogorov-Smirnov confirme que les résidus standardisés suivent une loi de Student à 4,4 degrés de liberté ( $0.366 > 0.05$ ).

```
KstestResult(statistic=0.01804007978800981, pvalue=0.3663580630083322)
```

## SERIE DE TAUX NOMINAUX 10 ANS

Comme pour la série de taux inflation européenne 10 ans, la série de taux nominaux 10 ans notée EUSA10 subit les mêmes tests.

- **Stationnarité**

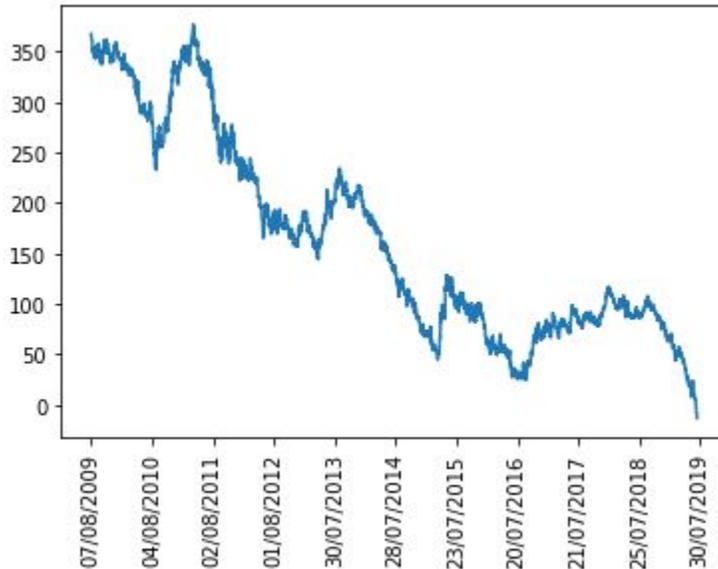


FIGURE 18 – Courbe de taux nominaux EUSA sur 2599 points

Les résultats des tests de Dickey-Fuller augmenté pour la série de taux nominaux (à gauche) et la série de taux différenciée (à droite) sont présentés ci-contre.

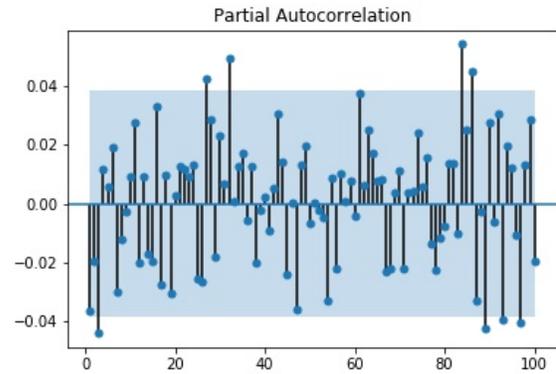
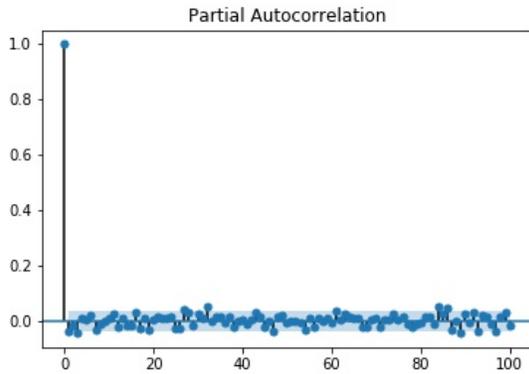
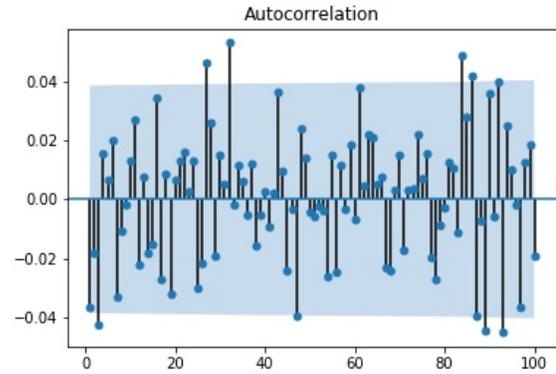
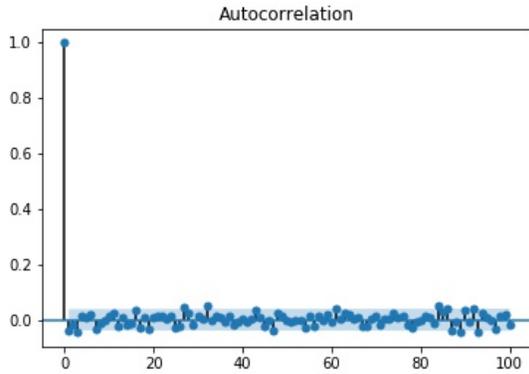
ADF Statistic : -1.411327  
p-valeur : 0.576834  
Valeurs critiques:  
1% : -3.432872  
5% : -2.862654  
10% : -2.567363

ADF Statistic : -31.467514  
p-valeur : 0.000000  
Valeurs critiques:  
1% : -3.432872  
5% : -2.862654  
10% : -2.567363

On peut donc conclure de ces tests qu'une différenciation suffit à rendre la série stationnaire.

- **Autocorrélation**

Contrairement au taux swap inflation européenne les taux nominaux ne sont pas auto-corrélés comme le montre les ACF et PACF ainsi que le test de Ljung-Box rejeté.



En effet, même si les graphiques montrent la présence d'un ARMA, il a été choisi de se baser sur un critère quantitatif. Or, le test de Ljung-Box conclut à l'absence d'ARMA.

- **Hétéroscédasticité**

Du fait de l'absence d'autocorrélation, le test d'hétéroscédasticité s'effectue directement sur la série différenciée. Une étude visuelle des résidus permet d'intuire l'hétéroscédasticité de la série. L'application du test de Ljung-Box sur les résidus au carré permet de confirmer la présence d'une variance non constante du résidu.

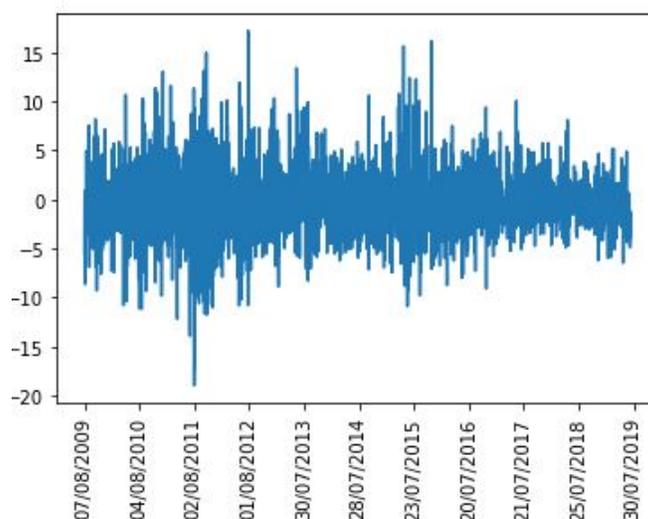


FIGURE 19 – Série différenciée 1 fois

Zero Mean - GARCH Model Results

```

=====
Dep. Variable:                y      R-squared:                0.000
Mean Model:                   Zero Mean  Adj. R-squared:          0.000
Vol Model:                    GARCH     Log-Likelihood:         5119.82
Distribution:                 Standardized Skew Student's t  AIC:                    -10225.6
Method:                       Maximum Likelihood        BIC:                    -10184.6
                               No. Observations:       2598
Date:                         Mon, Aug 19 2019      Df Residuals:           2591
Time:                         11:09:35          Df Model:                7
                               Volatility Model
=====

```

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	1.0393e-05	2.050e-07	50.688	0.000	[9.991e-06, 1.080e-05]
alpha[1]	0.0552	2.144e-02	2.573	1.008e-02	[1.314e-02, 9.717e-02]
alpha[2]	2.9818e-07	2.795e-02	1.067e-05	1.000	[-5.478e-02, 5.478e-02]
alpha[3]	2.9880e-07	2.175e-02	1.374e-05	1.000	[-4.263e-02, 4.263e-02]
beta[1]	0.9387	1.350e-02	69.521	0.000	[ 0.912, 0.965]

Distribution

```

=====

```

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	7.9260	1.145	6.921	4.495e-12	[ 5.681, 10.171]
lambda	0.0903	2.762e-02	3.270	1.074e-03	[3.619e-02, 0.144]

```

=====

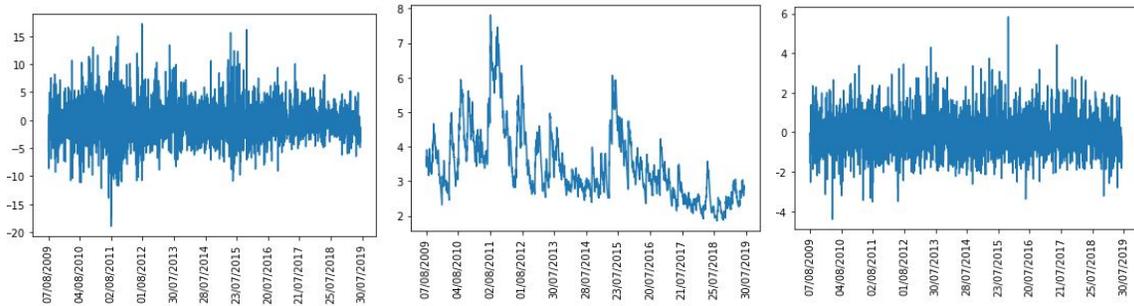
```

FIGURE 20 – Résultat de l'estimation des paramètres du GARCH sur la série taux nominaux

Tout comme la série inflation, les résidus standardisés suivent une loi de Student puisque les paramètres de la Skew-Student sont (7.92, 0). Le modèle d'hétéroscédasticité considéré pour cette série est un GARCH (3,1).

Le modèle GARCH ainsi calibré donne :

$$\epsilon(t) = \sigma(t) * \eta(t)$$



- Loi du résidu standardisé

Afin de confirmer l’hypothèse du GARCH, les résidus standardisés de la série de taux nominaux sont comparés aux lois Normale, Skew-Normale, Student. Comme le montre le graphique suivant ainsi que les QQ-plots, le choix s’oriente à nouveau vers une loi de Student, confirmant ainsi l’estimation du GARCH.

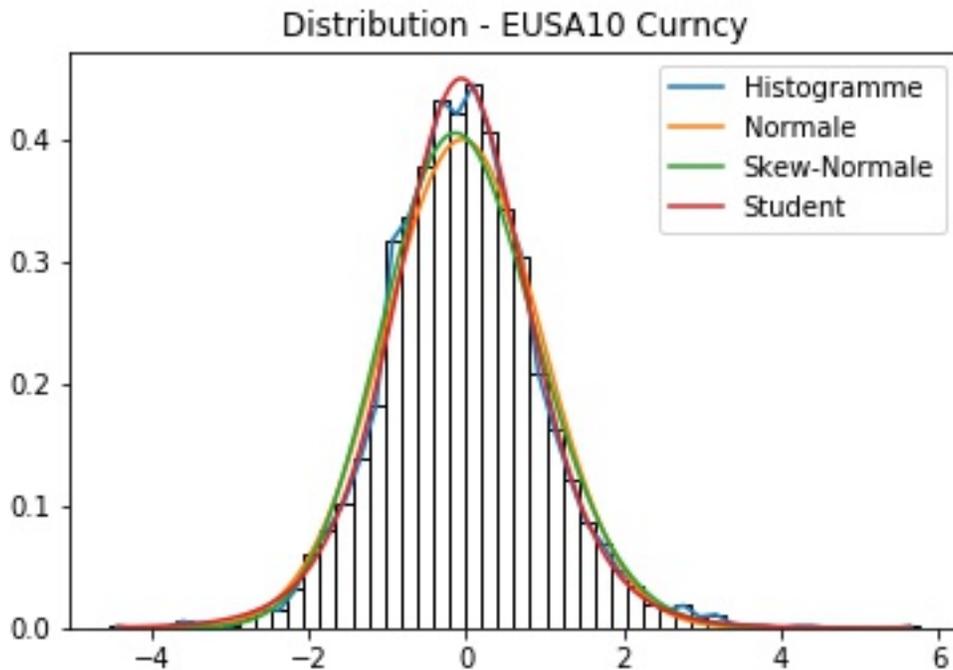
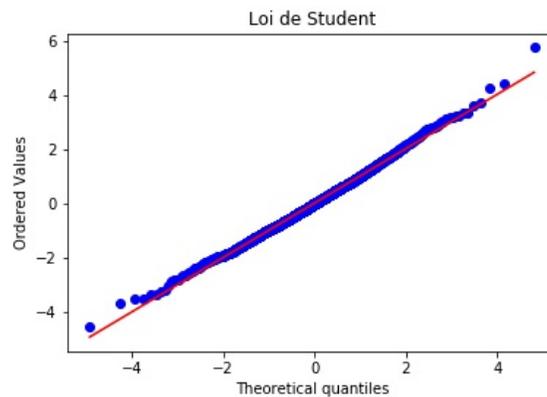
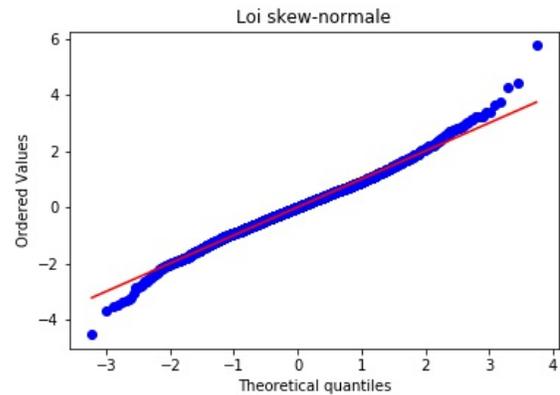
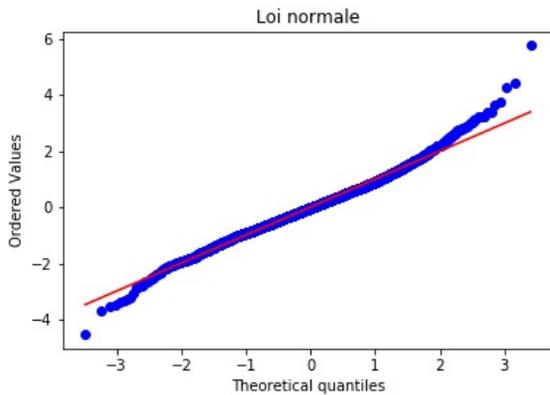


FIGURE 22 – Distribution des résidus standardisés



La loi sélectionnée pour la série de taux nominaux 10 ans est une Student à 7,7 degrés de liberté. Elle est préférée à l'estimation du GARCH de 7,9 degré de liberté car plus conservatrice.

```
KstestResult(statistic=0.009968317952826627, pvalue=0.9585328858172207)
```

## CORRELATION ENTRE LES DEUX SERIES DE TAUX

Un premier test de la corrélation linéaire (corrélacion de Pearson) sur les résidus standardisés est effectué pour la comparer aux résultats de la méthode en production. Puis une série de copules est testée. Parmi elles on retrouve la copule gaussienne, la copule de Student, la copule de Clayton, la copule de Gumbel, la copule de Frank et la copule de Joe.

Pour se faire, la fonction BiCopSelect du logiciel R a permis de sélectionner la copule de Student de paramètres (0.32, 9.37).

Afin de confirmer les résultats de la sélection, on représente sous forme de nuage de points les éléments de la série de résidus historique ainsi que les résidus générés. Ce graphique est

communément appelé scatter-plot. Il permet de mettre en évidence un schéma de corrélation et donc de choisir une copule associée.

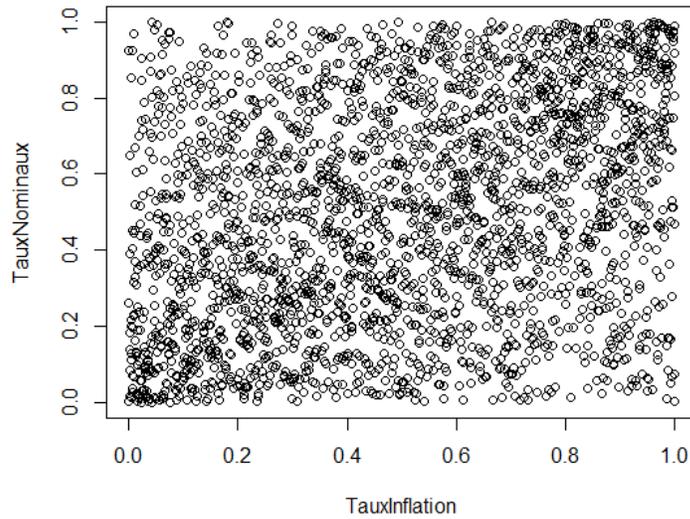


FIGURE 23 – Scatter-plot des résidus standardisés EUSA 10 et EUSWI 10

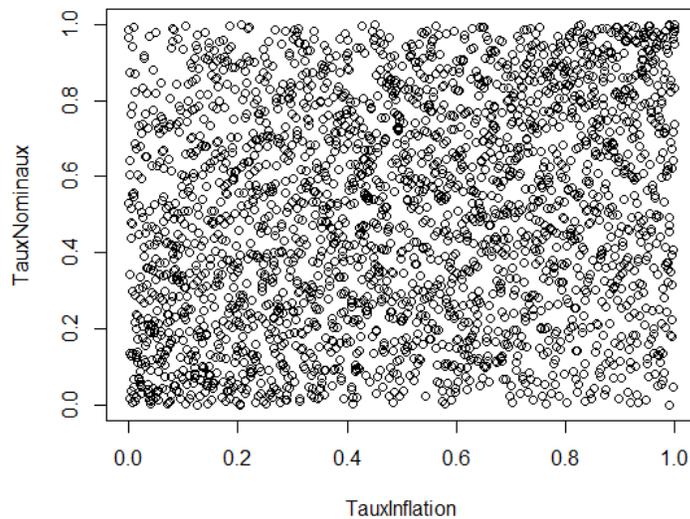


FIGURE 24 – Scatter-plot des résidus générés EUSA 10 et EUSWI 10

Le scatter-plot des résidus standardisés est proche d'une copule indépendante néanmoins elle a été mise de côté car elle ne respecte pas la corrélation linéaire qui existe entre les deux séries de résidus. La copule de Student permet de conserver cette corrélation linéaire comme le montre le tableau ci-dessous.

	Corrélation
Résidus standardisés empiriques	0.30
Résidus standardisés copule de Student	0.23
Résidus standardisés indépendamment générés	0.00

## RECAPITULATIF DE L'ETUDE DES SERIES

Finalement, on peut synthétiser l'étude des deux séries EUSWI10 et EUSA10 dans le tableau suivant. Plus de détails seront donnés dans les parties suivantes.

	<b>EUSWI10</b>	<b>EUSA10</b>
<b>Stationnarité</b>	Oui après une différenciation	Oui après une différenciation
<b>Autocorrélation</b>	Oui	Non
<b>Hétéroscédasticité</b>	Oui	Oui
<b>Loi du résidu</b>	Student	Student

## PROJECTION DES SERIES

Une fois que tout le modèle est calibré il suffit de générer un taux spot pendant un an, soit dans ce cas 260 points successifs, afin de récupérer un choc de taux.

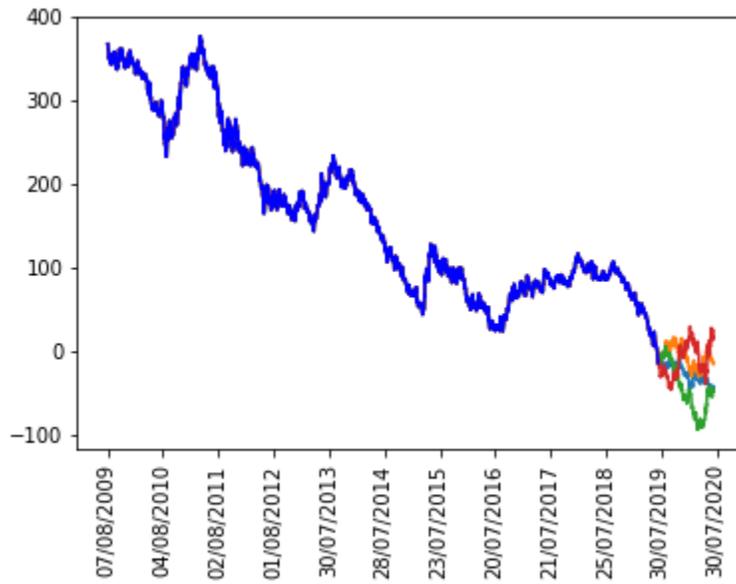


FIGURE 25 – Exemple de 4 projections du taux nominal EUSA 10

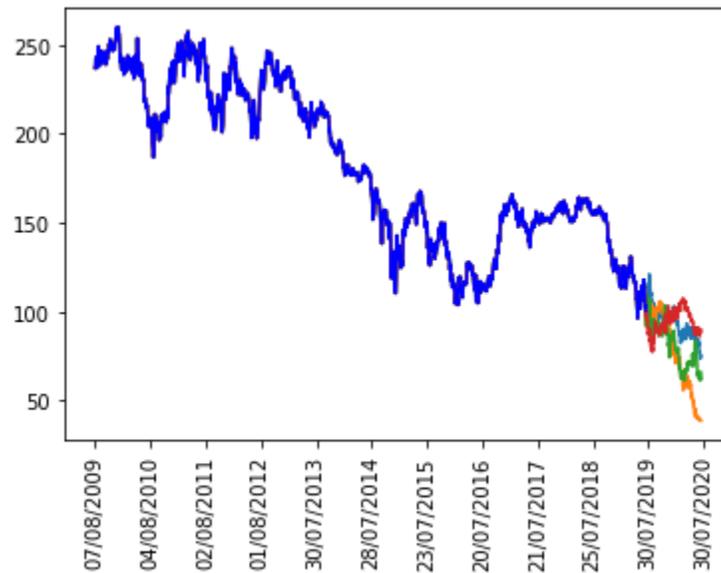


FIGURE 26 – Exemple de 4 projections du taux swap inflation EUSWI 10

### 4.3.2 Résultats généraux

Les séries suivantes ont toutes été analysées par le programme afin de fitter le meilleur modèle à chaque série sur un historique de 10 ans (2600 points) et 15 ans (3900 points).

Les résultats sont exprimés ci-dessous :

Historique 10 ans					
Tickers	ARMA	Coefficients	GARCH	Coefficients	Paramètre Student
FRSWI 5	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.09,0.05),(0.85)]	3.973
FRSWI 10	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	4.691
FRSWI 15	(2,0)	[(-0.04,0.06),(0)]	(1,2)	[(0.185),(0.362,0.434)]	5.024
EUSWI 5	(1,0)	[(0.077),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	3.063
EUSWI 10	(0,2)	[(0),(0.072,0.066)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	4.481
EUSWI 15	(0,2)	[(0),(0.037,0.062)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	5.573
EUSA 5	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.033,0.033,0.033),(0.88)]	5.98
EUSA 10	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.055,0.0,0.0),(0.94)]	7.7
EUSA 15	(0,0)	[(0),(0)]	(1,2)	[(0.069),(0.635,0.288)]	7.598

Historique 15 ans					
Tickers	ARMA	Coefficients	GARCH	Coefficients	Paramètre Student
FRSWI 5	(0,2)	[(0),(-0.025,0.058)]	(3,2)	[(0.232,0,0),(0.38,0.39)]	4.298
FRSWI 10	(0,2)	[(0),(-0.011,0.061)]	(1,2)	[(0.1),(0.44,0.44)]	4.705
FRSWI 15	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.124,0.096),(0.377,0.377)]	4.429
EUSWI 5	(1,0)	[(0.077),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	3.063
EUSWI 10	(0,2)	[(0),(0.072,0.066)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	4.481
EUSWI 15	(0,2)	[(0),(0.037,0.062)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	5.573
EUSA 5	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.033,0.033,0.033),(0.88)]	6.773
EUSA 10	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.4
EUSA 15	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.047,0.047),(0.89)]	8.826

Les impacts de ces différentes modélisations sur la métrique du Risque Global de Taux seront développés dans la dernière partie de ce mémoire.

## 5 Modélisation en courbe des chocs de taux

### 5.1 Avantages du modèle en courbe

Il a été montré dans la section précédente qu'une modélisation des chocs de taux nominaux et inflation par une translation de la courbe suffisait à expliquer respectivement 98.7% et 94% de la variance des courbes nominaux et inflation pour un historique de 10 ans.

Néanmoins, on a étudié la possibilité de compléter le modèle en ajoutant les risques de pentification et de courbure à la translation.

L'utilisation d'une modélisation des taux swap nominaux et inflation en courbe permet de résoudre certaines difficultés de la méthodologie en translation. En effet, l'hypothèse sur le choix d'une maturité n'est plus d'actualité puisque toutes les maturités sont utilisées dans le cas des courbes. A noter qu'il reste une hypothèse minoritaire quant au choix entre inflation française et européenne, les deux étant corrélées à plus de 95%<sup>6</sup>.

La formule du calcul du besoin en fonds propres se voit modifiée pour intégrer les chocs par maturité et devient :

$$\Delta V_i = \sum_{t=1}^M AmGap_t^{Nom} \cdot sensi_t^{Nom} \cdot \Delta r_{t,i}^{Nom} + \sum_{t=1}^M AmGap_t^{Rel} \cdot sensi_t^{Rel} \cdot \Delta r_{t,i}^{Rel}$$

Avec :

- $AmGap_t^{Nom}$  (resp.  $AmGap_t^{Rel}$ ) représente l'amortissement de gap indexé taux fixe (resp. taux réel) pour une maturité t.
- $sensi_t^{Nom}$  (resp.  $sensi_t^{Rel}$ ) représente la sensibilité aux taux fixes (resp. taux réels) pour une maturité t.
- $\Delta r_{t,i}^{Nom}$  (resp.  $\Delta r_{t,i}^{Rel}$ ) représente le  $i^{me}$  choc de taux nominal (resp. réel) de maturité t.

Le recours à une méthode d'interpolation est nécessaire puisque certaines maturités du taux swap inflation française ne sont pas cotées. Cela implique de choisir une méthode d'interpolation. Il sera étudié l'interpolation Nelson Siegel Svensson et l'interpolation polynomiale.

Afin de trouver une modélisation fiable et pérenne des chocs, plusieurs méthodologies ont été envisagées :

1. Méthode naïve : Elle consiste à interpoler les maturités manquantes de la courbe inflation avant de projeter les 60 séries (30 pour les taux nominaux et 30 pour les taux inflation). Cette méthode est la plus consommatrice de ressources.
2. Méthode semi-naïve : Cette seconde approche réduit légèrement le calcul puisqu'elle étudie 45 séries (30 pour les taux nominaux et 15 pour les taux inflation), les projète puis interpole par l'une ou l'autre des méthodes précédemment citées les séries manquantes afin de pouvoir calculer le RGT.
3. Méthode à paramètres : Elle vise à réduire le nombre de facteurs de risque au minimum puisqu'elle consiste à projeter les coefficients d'interpolation des courbes plutôt que chaque plot de maturité.

---

6. chiffres datant de décembre 2018, étude interne.

Notons que la métrique du RGT utilise des chocs de taux réels plutôt que des taux inflation. Ainsi, tous les modèles ont été testés avec une transformation par la formule de Fisher avant et après la projection des séries. Les résultats étant très proches aucune distinction ne sera faite dans la suite de ce mémoire.

**Définition** Soit  $i$  le taux nominal,  $r$  le taux réel et  $\pi$  le taux inflation.  
La relation de Fisher s'écrit :

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + \pi}$$

## 5.2 Modèles d'interpolation

### 5.2.1 Modèle de taux de Nelson Siegel Svensson (NSS)

Le premier modèle d'interpolation est celui de Nelson Siegel Svensson.

Nelson et Siegel ont dévoilé leur modèle d'interpolation dans un article paru en 1987 et intitulé *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Ils y définissent le taux à terme instantané de la manière suivante :

**Définition**

$$f_{NS}(\tau) = \frac{1}{\tau} + \int_0^\tau f(u) du \quad (1)$$

avec  $\tau$  le plot de maturité.

Le taux spot, noté  $y$ , peut être défini à partir du taux à terme instantané par :

$$y(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(u) du$$

Ainsi le taux spot du modèle de Nelson Siegel de 1987 s'écrit,

$$y_{NS}(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\lambda}{\tau} \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)\right) + \beta_3 \frac{\lambda}{\tau - e^{-\frac{\tau}{\lambda}}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)\right) \quad (2)$$

avec  $\tau$  le plot de maturité,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda$  des coefficients avec  $\lambda > 0$ .

En 1994, Svensson complète le modèle en ajoutant deux paramètres supplémentaires donnant les taux instantané et spot suivant :

**Définition**

$$f_{NSS}(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) + \beta_3 \frac{\tau}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) + \beta_4 \frac{\tau}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right) \quad (3)$$

$$y_{NSS}(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right] + \beta_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_1}\right) \right] + \beta_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right)}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda_2}\right) \right] \quad (4)$$

Les différents coefficients peuvent être interprétés comme suit :

- Le paramètre  $\beta_1$  est le paramètre de niveau. Il doit être strictement positif et correspond à la valeur asymptotique de la courbe lorsque la maturité  $\tau$  tend vers l'infini.
- Le paramètre  $\beta_2$  est le paramètre de pente. Son influence dans le calcul est d'autant plus importante que la maturité est proche de 0. En effet,

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} = 1 \\ \lim_{\tau \rightarrow \text{inf}} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} = 0 \end{cases}$$

- Les paramètres  $\beta_3$  et  $\lambda_1$  fonctionnent par paire et sont respectivement le premier paramètre de courbure et la position de la première courbure. Ils dictent la position et l'amplitude de la première courbure. Il est à noter que l'importance de ces facteurs est nulle en 0 et  $+\infty$ .

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right] = 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow \text{inf}} \left[ \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right] = 0 \end{cases}$$

- Les paramètres  $\beta_2$  et  $\lambda_2$  ont des rôles similaires aux précédents. Ils décrivent la seconde courbure du modèle.

Ainsi, les coefficients doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1 > 0 \\ \beta_1 + \beta_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

Dès lors, il est nécessaire de calibrer ces six variables. Pour ce faire, il est d'usage d'estimer dans un premier temps  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  puis de les fixer pour calibrer le reste des coefficients.

Concrètement l'estimation des paramètres s'articule autour de 2 étapes.

#### 1 - Estimation des $\lambda$

Pour chaque  $\lambda_1 \in [0, 90]$  et  $\lambda_2 \in [0, 30]$ , on estime les valeurs des  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  et  $\beta_4$  par méthode des moindres carrés ordinaires. L'équation à résoudre s'écrit dès lors :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_1}{\lambda_1})}{\frac{\tau_1}{1}} & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_1}{\lambda_1})}{\frac{\tau_1}{1}} - \exp(-\frac{\tau_1}{\lambda_1}) & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_1}{\lambda_2})}{\frac{\tau_1}{2}} - \exp(-\frac{\tau_1}{\lambda_2}) \\ 1 & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_2}{\lambda_1})}{\frac{\tau_2}{1}} & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_2}{\lambda_1})}{\frac{\tau_2}{1}} - \exp(-\frac{\tau_2}{\lambda_1}) & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_2}{\lambda_2})}{\frac{\tau_2}{2}} - \exp(-\frac{\tau_2}{\lambda_2}) \\ 1 & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_3}{\lambda_1})}{\frac{\tau_3}{1}} & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_3}{\lambda_1})}{\frac{\tau_3}{1}} - \exp(-\frac{\tau_3}{\lambda_1}) & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_3}{\lambda_2})}{\frac{\tau_3}{2}} - \exp(-\frac{\tau_3}{\lambda_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_{30}}{\lambda_1})}{\frac{\tau_{30}}{1}} & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_{30}}{\lambda_1})}{\frac{\tau_{30}}{1}} - \exp(-\frac{\tau_{30}}{\lambda_1}) & \frac{1-\exp(-\frac{\tau_{30}}{\lambda_2})}{\frac{\tau_{30}}{2}} - \exp(-\frac{\tau_{30}}{\lambda_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \dots \\ \epsilon_{30} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Une fois l'estimation des coefficients faite pour chaque date, il suffit de choisir le couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  ayant l'erreur la plus faible.

## 2 - Estimation des $\beta$

Une fois les  $\lambda$  fixés, tous les  $\beta$  sont estimés de la même manière que dans le point 1.

### 5.2.2 Interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale consiste à estimer un polynôme de degré  $d$  minimisant l'erreur quadratique.

Soient  $y_i = b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \dots + b_dx_i^d + \epsilon_i$  le modèle complet et  $\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_i + \hat{b}_2x_i^2 + \dots + \hat{b}_dx_i^d$  le modèle estimé.

Soit  $(\hat{\epsilon}_i)_{i \in [1, n]}$  la série des résidus estimés définie comme :

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 &= \min_{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_d} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \\
\iff \min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 &= \min_{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_d} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_i - \hat{b}_2 x_i^2 - \dots - \hat{b}_d x_i^d)^2 \\
\iff \min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 &= \forall j \in [0, d], \frac{\partial(\sum \hat{\epsilon}_i^2)}{\partial \hat{b}_j} = 0 \\
\iff \min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 &= \forall j \in [0, d], \sum \frac{\partial \hat{\epsilon}_i^2}{\partial \hat{b}_j} = 0 \\
\iff \min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 &= \forall j \in [0, d], \sum_{i=1}^n x_i^j (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_i - \hat{b}_2 x_i^2 - \dots - \hat{b}_d x_i^d) = 0 \\
\iff X^T(Y - X\hat{B}) &= 0 \text{ en prenant}
\end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^d \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^d \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \dots \\ \hat{b}_d \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

## 5.3 Corrélation

### 5.3.1 Rappel sur les copules

**Définition** Une copule est une fonction de répartition dont les marges sont uniformes sur  $[0, 1]$ .

C'est-à-dire, si  $(U_1, \dots, U_d) \sim U(0, 1)^d$ , alors la fonction  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  est une copule si :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$$

**Théorème de SKLAR** Soient  $C$  une copule,  $F_1, \dots, F_d$  des fonctions de répartition univariées, alors

$$F(u_1, \dots, u_d) = C(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d))$$

est une fonction de répartition multivariée de dimension  $d$  dont les marginales sont les fonctions  $F_1, \dots, F_d$ .

On obtient, dès lors, la fonction de densité en dérivant l'expression précédente,

$$\begin{aligned}
f(u_1, \dots, u_d) &= \frac{\partial^d F(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \\
&= \frac{\partial^d C(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d))}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \\
&= c(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d)) \cdot F_1'(u_1) \cdot \dots \cdot F_d'(u_d) \\
&= c(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d)) \cdot f_1(u_1) \cdot \dots \cdot f_d(u_d)
\end{aligned}$$

On définit la densité conditionnelle comme :

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d | u_i) = c(F_1(u_1), \dots, F_d(u_d)) \cdot f_1(u_1) \cdot \dots \cdot f_{i-1}(u_{i-1}) \cdot f_{i+1}(u_{i+1}) \cdot \dots \cdot f_d(u_d)$$

Afin de rendre la construction de la copule plus simple, un exemple à 3 variables sera utilisé. Ci-contre l'expression correspondante.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) f_{2|1}(x_2|x_1) f_1(x_1)$$

Avec,

$$\begin{aligned}
f_{2|1}(x_2|x_1) &= c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_2(x_2) \\
f_{3|12}(x_3|x_1, x_2) &= c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) f_{3|2}(x_3|x_2) \\
f_{3|2}(x_3|x_2) &= c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) f_3(x_3)
\end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1) \quad (\text{marginales}) \\
&= c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \quad (\text{pairs non conditionnelles}) \\
&= c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \quad (\text{pair conditionnelle})
\end{aligned}$$

### 5.3.2 Vine Copulas

La Vine Copulas est un type de copule multidimensionnelle qui permet d'appliquer une structure de dépendance différentes pour chaque couple de variables. On peut représenter cette copule comme ci-dessous.

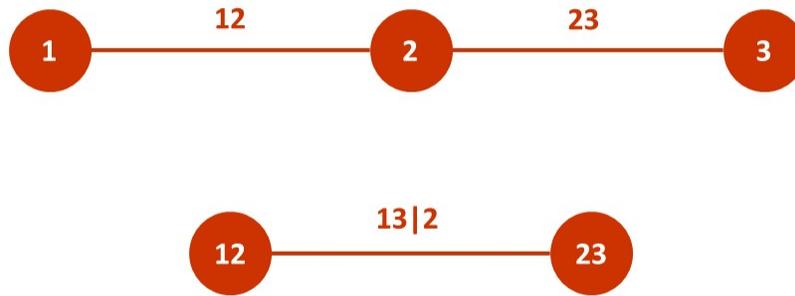


FIGURE 27 – Exemple d’une D-Vine avec 3 variables

On remarque, dès lors, que la corrélation n’est pas unique puisque l’ordre influence la structure de corrélation. En effet, deux autres versions du même set de variables sont possibles.



FIGURE 28 – Autres exemples de D-Vine à 3 variables

La famille des Vine Copulas regroupe trois types de structures différentes.

### La Drawable vine (D-Vine)

C'est celle qui a été représentée dans les schémas précédents. Elle suppose un ordre des variables *a priori*.

$$f_{1234} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot c_{34} \cdot c_{13|2} \cdot c_{24|3} \cdot c_{14|23}$$

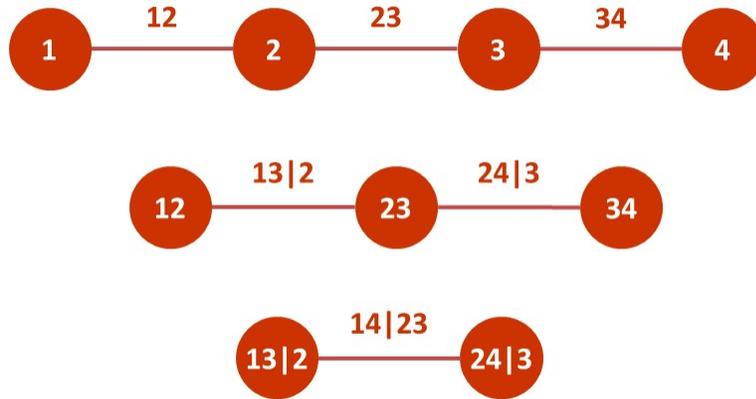


FIGURE 29 – D-Vine à 4 variables

### La Canonical vine (C-Vine)

Dans cette version, toutes les branches sont connectées à un unique nœud.

$$f_{1234} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot c_{12} \cdot c_{13} \cdot c_{14} \cdot c_{23|1} \cdot c_{24|1} \cdot c_{34|12}$$

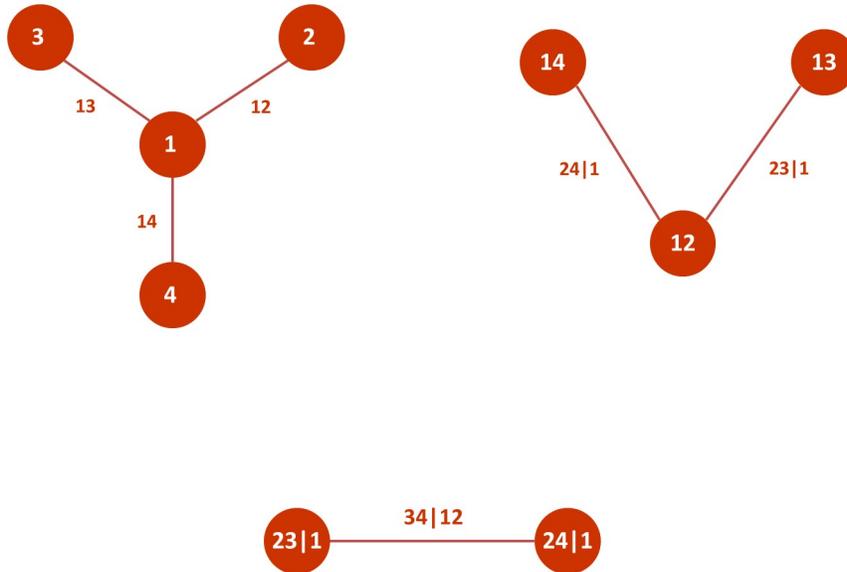


FIGURE 30 – C-Vine à 4 variables

### La R-Vine

Elle correspond à la structure la plus libre puisque la seule règle qui s'applique à cette structure est une condition de "proximité". C'est-à-dire qu'un lien à une étape entraîne un nœud à l'étape d'après.

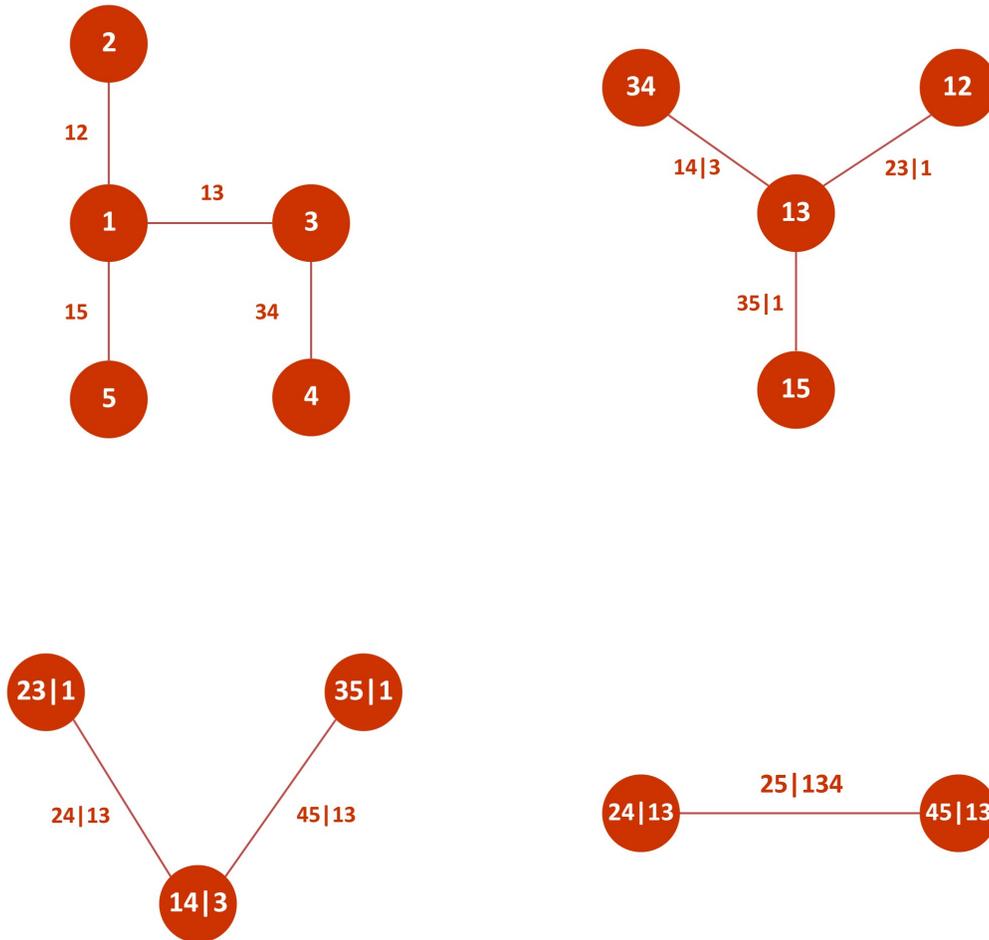


FIGURE 31 – R-Vine à 5 variables

### 5.3.3 Calibration des Vine copulas

La calibration d'une Vine sur un jeu de données s'effectue suivant trois étapes.

#### 1<sup>ère</sup> Etape : Le choix de la structure de dépendance

La première étape de calibration consiste à choisir quel type de Vine sera utilisé.

- La D-Vine offre plusieurs avantages. C'est la plus simple d'utilisation. Elle permet une représentation visuelle instinctive de la corrélation. Néanmoins elle oblige l'utilisateur à faire un choix sur l'ordre des variables comme cela a été évoqué plus tôt.
- La C-Vine est une version plus complexe que la précédente qui impose néanmoins une condition entre chaque arbre.
- La R-Vine est la structure la plus complexe. Elle n'est régie que par une seule règle : une branche devient un nœud dans l'arbre suivant. C'est celle qui sera utilisée dans la partie pratique car l'objectif était d'automatiser un maximum le processus.

#### 2<sup>ème</sup> Etape : Sélection de la copule

Une fois le choix de la structure fait, l'étape suivante consiste à sélectionner parmi un lot de copules celle qui approchera le mieux la structure de corrélation des variables. Pour ce faire il existe plusieurs modèles de sélection, il a été choisi d'utiliser un critère AIC.

#### 3<sup>ème</sup> Etape : Estimation des paramètres des copules

Les copules ainsi sélectionnées peuvent ensuite être estimées en utilisant un maximum de vraisemblance.

## 5.4 Méthode semi-naïve

### 5.4.1 Méthodologie

#### 1<sup>ère</sup> Etape : Import des séries depuis Bloomberg

Dans la méthode en translation il avait été choisi d'utiliser des swaps inflation française de maturité 10 ans pour calibrer le choc correspondant. Cette méthode permet de s'affranchir du choix de la maturité en prenant en compte toutes les séries de swaps inflation disponibles sur Bloomberg. Il en va de même avec les séries de taux swap contre Euribor 6 mois.

Ainsi, les séries utilisées sont :

- EUSA de maturité 1 à 30 ans.

- FRSWI de maturité 1 à 10, 12, 15, 20, 25, 30 ans.

## 2<sup>ème</sup> Etape : Calibration du modèle ARMA-GARCH

Comme pour la première méthode, un modèle ARMA-GARCH est calibré sur les 45 séries de taux afin d'en déduire les paramètres et de pouvoir projeter les courbes dans les étapes suivantes.

## 3<sup>ème</sup> Etape : Calibration de la Vine Copulas

Contrairement à la copule bi-variée de la méthode en translation, l'utilisation d'une copule multivariée est obligatoire dans ce cas. Le choix s'est porté sur les Vine Copulas car elles permettent l'implémentation de plusieurs types de dépendance. Ne souhaitant pas imposer de copule particulière au modèle il a été convenu d'utiliser ce type de copule.

## 4<sup>ème</sup> Etape : Projection des séries

Tout comme le modèle en translation, la méthode semi-naïve utilise la méthode Monte Carlo. A partir des courbes spots sont simulées plusieurs trajectoires possibles en utilisant les modèles ARMA-GARCH précédemment calibrés ainsi que les aléas générés par la copule.

## 5<sup>ème</sup> Etape : Interpolation

Afin de pouvoir impacter tous les plots de temps dans le modèle interne il faut avoir un choc pour chaque tenor. Or, certaines séries de taux inflation française comme FRSWI11, FRSWI24 ou FRSWI28 n'existent pas. Il faut donc interpoler les projections. Deux modèles d'interpolation sont utilisés : le modèle Nelson Siegel Svensson et l'interpolation polynomiale de degré 3.

Dans le cadre de cette étude, le choix du degré s'est porté sur un polynôme de degré 3 car il prend en compte les tendances des courbes et minimise l'impact des valeurs aberrantes. Ci-dessous les représentations graphiques des polynômes d'interpolation de degré 0 à 5 sur une courbe de taux nominaux projetée.

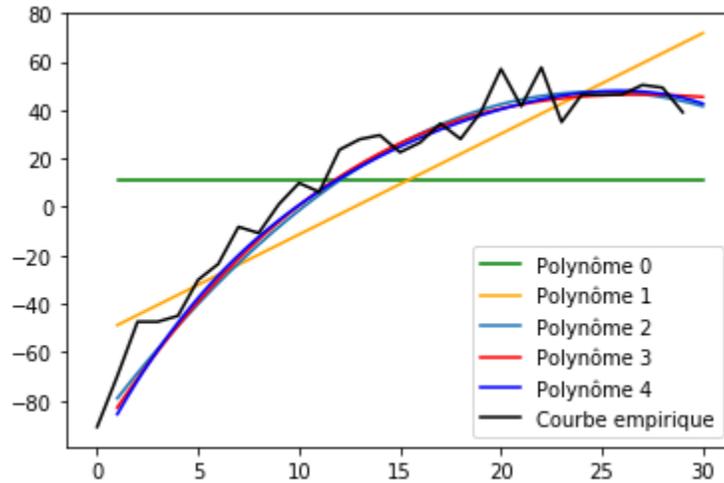


FIGURE 32 – Interpolations polynômiales d’une courbe de taux nominaux projetée

#### 5.4.2 Résultats

Les courbes de taux données en input s’étendent de 10/08/2009 à 07/08/2019 . Les tableaux ci-dessous regroupent les résultats de l’analyse des séries temporelles.

On retrouve par exemple les résultats de la série de taux swap contre nominaux 10 ans (EUSA10) avec l’absence d’ARMA correspondant aux (0,0) et [(0),(0)] des colonnes ARMA et Coefficients ARMA. Les paramètres et coefficients du GARCH sont décrits dans les deux colonnes suivantes, respectivement (3,1) et [(0.017,0.017,0.017),(0.93)]. Enfin, la dernière colonne correspond au paramètre de la loi de Student suivie par les résidus standardisés, ici 7.465.

Tickers	ARMA	Coefficients ARMA	GARCH	Coefficients GARCH	Paramètre Student
EUSA 1	(1,1)	[(0.993),(-0.982)]	(4,2)	[(0.05,0.05,0.05,0.05),(0.39,0.39)]	3.138
EUSA 2	(0,1)	[(0),(0.049)]	(4,2)	[(0.05,0.05,0.05,0.05),(0.39,0.39)]	4.269
EUSA 3	(1,0)	[(0.004),(0)]	(3,2)	[(0.1,0.064,0.061),(0.362,0.404)]	4.565
EUSA 4	(0,0)	[(0),(0)]	(4,2)	[(0.0255,0.025,0.025,0.025),(0.44,0.44)]	5.966
EUSA 5	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.019,0.019,0.019),(0.921)]	6.17
EUSA 6	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	6.559
EUSA 7	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.031
EUSA 8	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.367
EUSA 9	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.494
EUSA 10	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.465
EUSA 11	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.052,0,0),(0.942)]	7.846
EUSA 12	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.733
EUSA 13	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.777
EUSA 14	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.065,0.016,0.016),(0.884)]	6.978
EUSA 15	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.372
EUSA 16	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.054,0,0),(0.936)]	8.478
EUSA 17	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.514
EUSA 18	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.017,0.017,0.017),(0.93)]	7.532
EUSA 19	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.114,0),(0.609,0.244)]	7.252
EUSA 20	(0,0)	[(0),(0)]	(3,2)	[(0.033,0.033,0.033),(0.44,0.44)]	7.336
EUSA 21	(0,0)	[(0),(0)]	(0,0)	[(0),(0)]	4.073
EUSA 22	(0,0)	[(0),(0)]	(3,2)	[(0.062,0.059,0),(0.088,0.777)]	7.462
EUSA 23	(0,0)	[(0),(0)]	(0,0)	[(0),(0)]	3.919
EUSA 24	(0,0)	[(0),(0)]	(3,2)	[(0.061,0.032,0.032),(0.427,0.427)]	7.023
EUSA 25	(0,0)	[(0),(0)]	(3,2)	[(0.033,0.033,0.033),(0.44,0.44)]	6.914
EUSA 26	(0,0)	[(0),(0)]	(1,1)	[(0.06),(0.935)]	6.959
EUSA 27	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.069,0.049),(0.431,0.431)]	6.861
EUSA 28	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	6.824
EUSA 29	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.068,0.051),(0.431,0.434)]	6.657
EUSA 30	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	6.909

Tickers	ARMA	Coefficients ARMA	GARCH	Coefficients GARCH	Paramètre Student
FRSWI 1	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.1,0.1),(0.7)]	2.361
FRSWI 2	(0,0)	[(0),(0)]	(1,2)	[(0.098),(0.431,0.431)]	3.188
FRSWI 3	(0,0)	[(0),(0)]	(0,0)	[(0),(0)]	2.642
FRSWI 4	(0,0)	[(0),(0)]	(0,0)	[(0),(0)]	3.096
FRSWI 5	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	3.953
FRSWI 6	(0,0)	[(0),(0)]	(0,0)	[(0),(0)]	3.089
FRSWI 7	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.1,0.1),(0.39,0.39)]	5.086
FRSWI 8	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	5.434
FRSWI 9	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.133,0),(0.498,0.369)]	5.79
FRSWI 10	(0,0)	[(0),(0)]	(2,2)	[(0.05,0.05),(0.44,0.44)]	4.784
FRSWI 12	(0,0)	[(0),(0)]	(1,2)	[(0.1),(0.44,0.44)]	4.892
FRSWI 20	(0,0)	[(0),(0)]	(3,1)	[(0.061,0,0),(0.939)]	5.708
FRSWI 25	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	6.086
FRSWI 30	(0,0)	[(0),(0)]	(2,1)	[(0.05,0.05),(0.88)]	4.787

On peut remarquer à la lecture de ces tableaux que les séries suivent les mêmes structures puisqu'elles sont très corrélées. La série FRSWI 15 donnant des résultats aberrants il a été convenu de la retirer de l'étude. L'interpolation ne la prendra donc pas en compte.

A titre d'exemple, 10 projections des séries EUSA11, EUSA28, FRSWI12 et FRSWI12 sont présentées ci-contre.

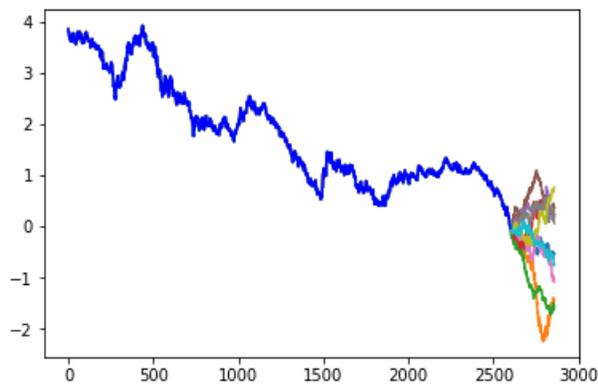


FIGURE 33 – Exemples de projections de la courbe EUSA 11

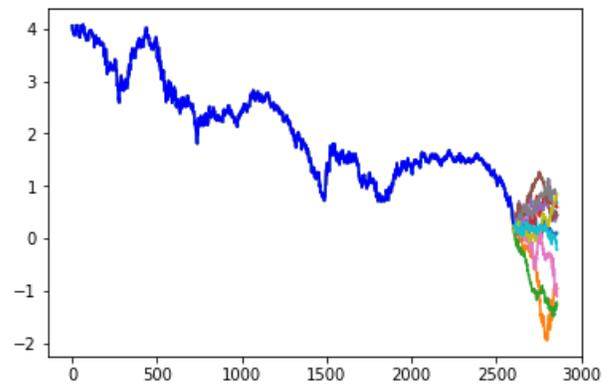


FIGURE 34 – Exemples de projections de la courbe EUSA 28

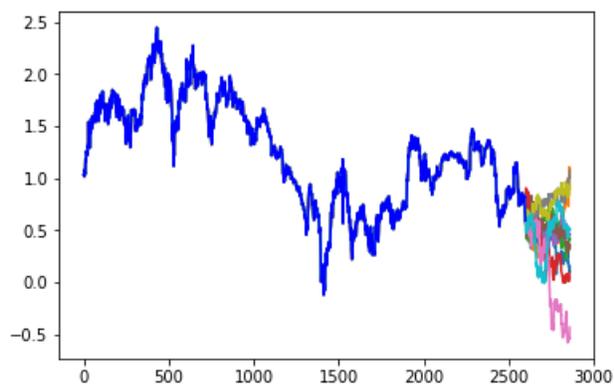


FIGURE 35 – Exemples de projections de la courbe FRSWI 2

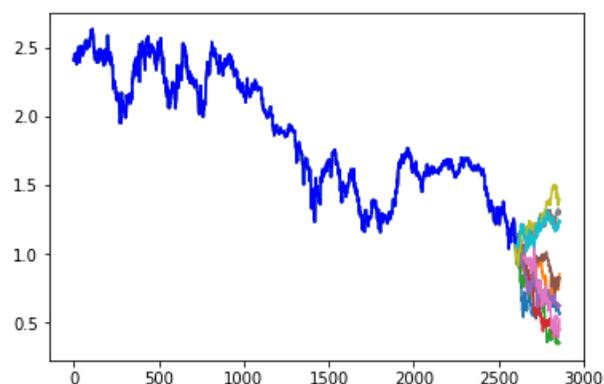


FIGURE 36 – Exemples de projections de la courbe FRSWI 12

Une Vine Copula est utilisée pour quantifier la dépendance des 45 séries de taux modélisées. Les résultats de calibration de la Vine comportant 44 arbres de dépendance, seul le premier arbre est présenté.

Pour une question de lisibilité, les séries seront identifiées via un numéro dont la correspondance est établie ci-dessous. Pour rappel, le ticker EUSA N correspond à la série de taux swap contre Euribor 6 mois pour une maturité de N années. et FRSWI N à la série de taux swap contre inflation française pour un maturité de N années.

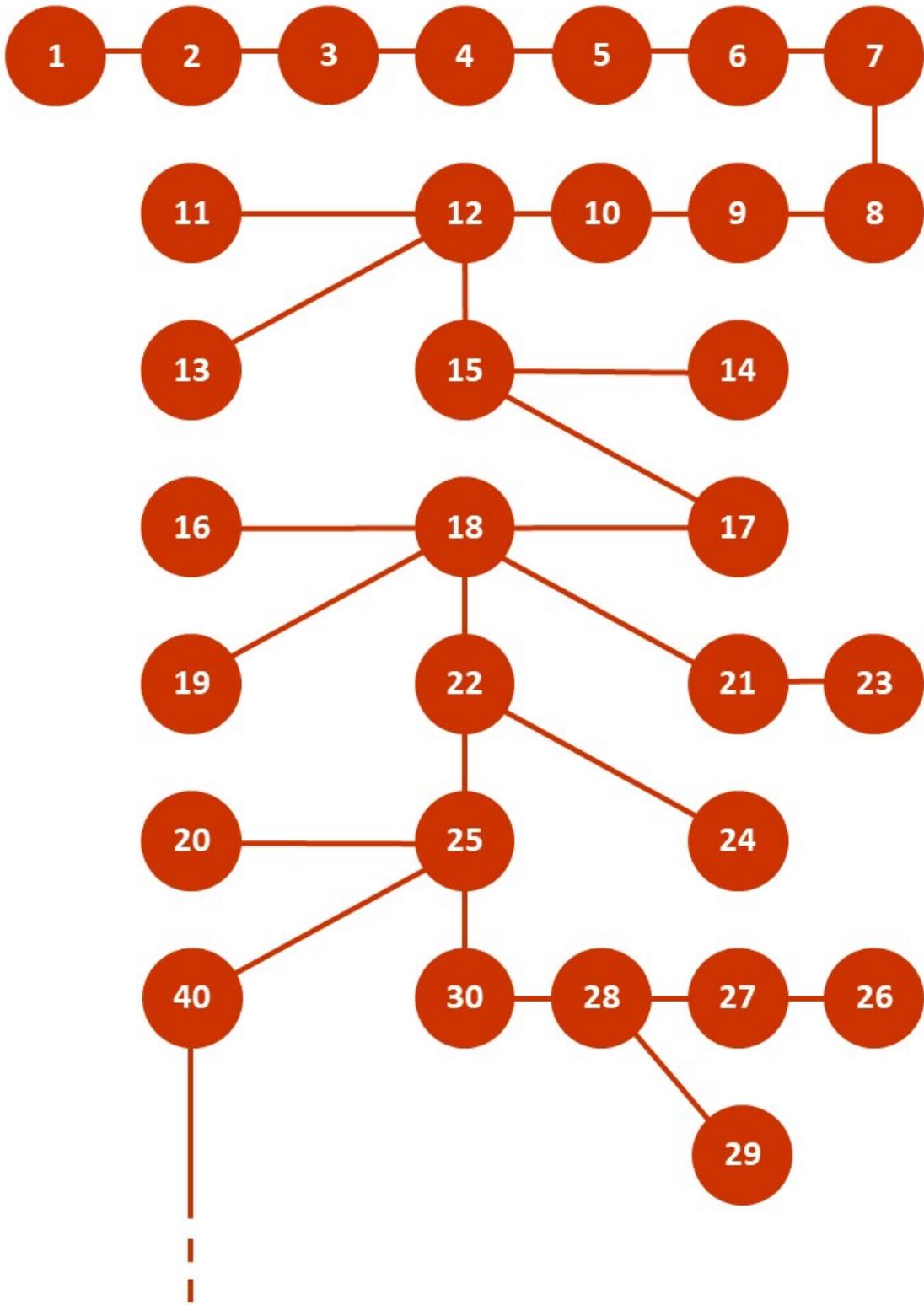
1 <-> EUSA1	16 <-> EUSA16	31 <-> FRSWI1
2 <-> EUSA2	17 <-> EUSA17	32 <-> FRSWI2
3 <-> EUSA3	18 <-> EUSA18	33 <-> FRSWI3
4 <-> EUSA4	19 <-> EUSA19	34 <-> FRSWI4
5 <-> EUSA5	20 <-> EUSA20	35 <-> FRSWI5
6 <-> EUSA6	21 <-> EUSA21	36 <-> FRSWI6
7 <-> EUSA7	22 <-> EUSA22	37 <-> FRSWI7
8 <-> EUSA8	23 <-> EUSA23	38 <-> FRSWI8
9 <-> EUSA9	24 <-> EUSA24	39 <-> FRSWI9
10 <-> EUSA10	25 <-> EUSA25	40 <-> FRSWI10
11 <-> EUSA11	26 <-> EUSA26	41 <-> FRSWI12
12 <-> EUSA12	27 <-> EUSA27	42 <-> FRSWI15
13 <-> EUSA13	28 <-> EUSA28	43 <-> FRSWI20
14 <-> EUSA14	29 <-> EUSA29	44 <-> FRSWI25
15 <-> EUSA15	30 <-> EUSA30	45 <-> FRSWI30

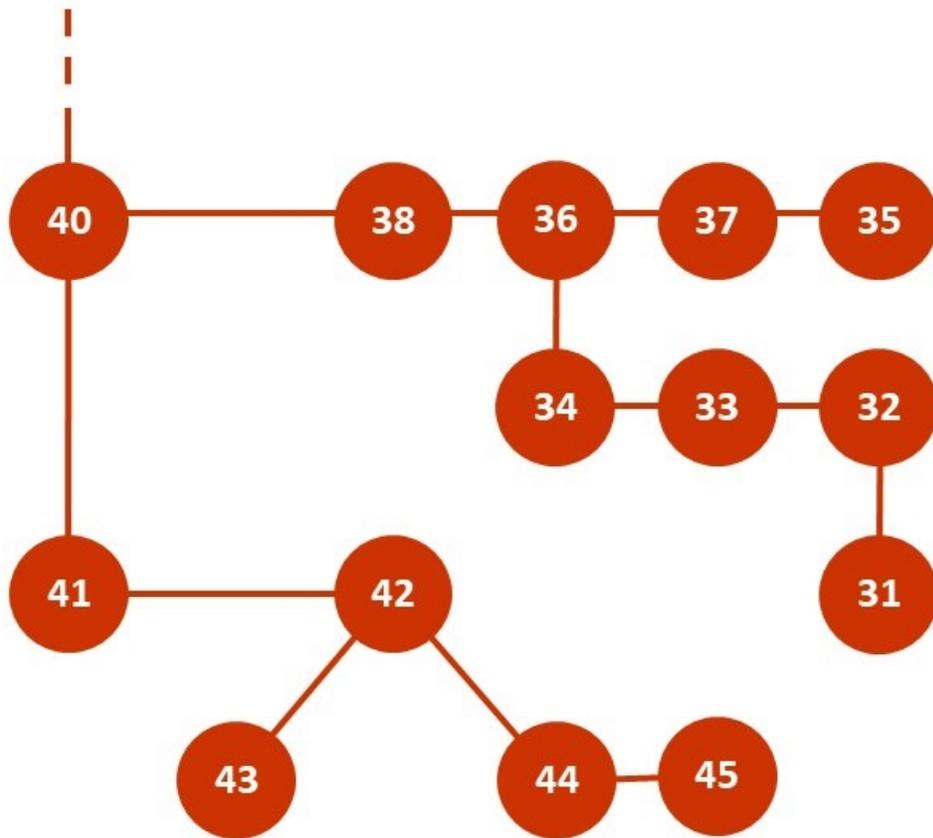
L'utilisation de Vine Copula s'est basée sur la polyvalence de ce type de structure de dépendance. Elle permet de sélectionner la meilleure copula parmi un large éventail. Les

différentes copules sélectionnées par le modèle sont regroupées dans le tableau suivant et une représentation graphique permet d'illustrer les liaisons entre les variables.

Couple de variables	Loi	Paramètre 1	Paramètre 2
2,1	Student	0.8	3.3
27,26	Student	1	8
28,29	Student	1	2
28,27	Student	1	2
3,2	Student	0.9	2.93
4,3	Student	0.94	3.95
5,4	Student	0.97	2.98
6,5	Student	0.98	3.09
7,6	Student	0.98	2.83
8,7	Student	0.99	2.38
9,8	Student	0.99	2.03
10,9	Student	0.99	2
12,10	Student	0.98	2.03
12,11	Student	0.99	2.17
12,13	Student	0.98	2
30,28	Student	0.99	2
22,24	Student	0.99	2
21,23	Student	1	2
18,21	Frank	29.71	
25,30	Student	0.99	2
15,12	Student	0.99	2.76
15,14	Student	0.98	2
17,15	Student	0.99	2
18,16	Student	0.98	2
18,17	Student	1	2
18,19	Student	0.99	2
22,18	Student	0.99	3.01
25,22	Student	0.99	2
25,20	Student	0.98	2
32,31	Student	0.59	3.14
33,32	Student	0.68	2.78
34,33	Student	0.82	2
36,34	Student	0.82	2
40,25	Student	0.3	15.24
37,35	Student	0.84	2.41
36,37	Student	0.8	3.97

Couple de variables	Loi	Paramètre 1	Paramètre 2
38,36	Student	0.82	3.43
40,38	Student	0.86	2.24
40,39	Student	0.8	2.7
41,40	Student	0.87	2
42,43	Student	0.75	3.8
42,41	Student	0.85	3.07
44,42	Student	0.8	3.1
45,44	Student	0.83	2.28





L'impact des deux types d'interpolation sera développé dans la section 6 de ce mémoire.

### 5.4.3 Limites

Le modèle Nelson-Siegel-Svensson est un bon moyen d'interpoler des courbes de taux. Néanmoins, cette méthode se prête moins bien aux courbes inflation. De plus, la forme particulière des courbes de taux sur les premiers plots de temps est mal captée par un modèle NSS avec lambda figés. En effet, la calibration des lambda s'effectuant sur l'intégralité de la série, elle n'offre pas un fit optimal sur les courbes les plus récentes. Une solution très gourmande en ressource pourrait être la calibration des lambda sur toutes les courbes et donc la projection de ceux-ci en plus des betas. En outre, le modèle interne requiert un impact mensuel pour la première année et l'extrapolation à partir de ce modèle donne des résultats aberrants. Il a donc fallu figer le choc constant sur la première année. Cette approximation est justifiable par le fait que les plots les plus sensibles sont ceux situés aux maturités les plus longues, néanmoins une interpolation polynomiale offre de meilleurs résultats sur ce point comme nous le verrons dans la suite du mémoire.

## 5.5 Méthode naïve

### 5.5.1 Méthodologie

Cette méthode s'articule de la même manière que la précédente à ceci près que la phase d'interpolation intervient en préambule de l'étude. C'est-à-dire que les séries de taux manquantes sont générées sur l'historique plutôt que sur la projection. Ainsi, la calibration s'effectue sur l'intégralité des maturités.

### 5.5.2 Limite

La limite de cette méthode est sa mise en pratique. En effet, la puissance de calcul disponible ne permet pas de mener les estimations des paramètres et surtout la génération des aléas à terme.

## 5.6 Méthode à paramètres

### 5.6.1 Méthodologie

Tout comme la méthode naïve l'interpolation est faite en première étape. Puis, contrairement aux deux autres, les séries étudiées sont les séries des coefficients d'interpolation qui sont projetés sur 260 points. La reconstruction des courbes projetées intervient juste avant le calcul du RGT en utilisant les coefficients projetés préalablement.

### 5.6.2 Limite

Cette méthode non plus n'aboutit pas à des résultats cohérents. Contrairement à la précédente, des résultats sont obtenus mais ils sont très volatiles et surtout aberrants. Après vérification, cette divergence provient du non respect des contraintes par les paramètres projetés pour le modèle Nelson-Siegel-Svensson et une grande sensibilité au paramètre de plus haut degré du polynôme d'interpolation. Ainsi, il a été préféré de ne pas poursuivre cette méthode pour des raisons de calendrier et de ressources.

## 6 Impact sur le Risque Global de Taux

### 6.1 Méthode de calcul des chocs règlementaires

Le Comité de Bâle explicite, au travers de l'IRRBB, les différents chocs de taux à appliquer pour le calcul du risque de taux dans le cadre de la méthode standard. Cette méthode étant basée sur l'étude de plusieurs banques censées être représentatives du risque sur le marché, elle ne capte pas nécessairement la spécificité du Fonds d'Epargne. C'est pourquoi la direction a choisi un modèle interne. Néanmoins, il sera utilisé dans la suite à titre de comparaison.

Pour rappel, l'IRRBB mesure les 6 scénarios suivants :

- i) Déplacement parallèle vers le haut
- ii) Déplacement parallèle vers le bas
- iii) Pentification de la courbe (taux courts en baisse, taux longs en hausse)
- iv) Aplatissement de la courbe (taux courts en hausse, taux logns en baisse)
- v) Hausse des taux courts
- vi) Baisse des taux courts

La calibration de l'ampleur des chocs se base sur le tableau ci-contre donné par le Comité de Bâle. L'ampleur des chocs est exprimée en points de base.

Tableau 1. Ampleur des chocs de taux d'intérêt  $\bar{R}_{shocktype,c}$

	ARS	AUD	BRL	CAD	CHF	CNY	EUR	GBP	HKD	IDR	INR
Parallèle	400	300	400	200	100	250	200	250	200	400	400
Taux courts	500	450	500	300	150	300	250	300	250	500	500
Taux longs	300	200	300	150	100	150	100	150	100	350	300

	JPY	KRW	MXN	RUB	SAR	SEK	SGD	TRY	USD	ZAR
Parallèle	100	300	400	400	200	200	150	400	200	400
Taux courts	100	400	500	500	300	300	200	500	300	500
Taux longs	100	200	300	300	150	150	100	300	150	300

Dès lors, l'IRRBB donne les formules de calcul des différents chocs de la manière suivante :

- i) "Choc parallèle pour la monnaie  $c$  : déplacement parallèle (*parallel*) constant, vers le haut ou le bas, pour toutes les tranches temporelles."

$$\Delta R_{parallel,c}(t_k) = \pm \bar{R}_{parallel,c}$$

- ii) "Choc sur taux courts pour la monnaie  $c$  : hausse ou baisse la plus forte au point médian de la tranche de durée la plus courte (*short*). Ce choc, par le biais du facteur scalaire  $S_{short}(t_k) = \exp\left(\frac{-t_k}{x}\right)$  où  $x = 4$ , tend vers zéro à la durée du point le plus long

de la structure par échéance."

$$\Delta R_{short,c}(t_k) = \pm \bar{R}_{short,c} \cdot S_{short}(t_k) = \pm \bar{R}_{short,c} \cdot \exp\left(\frac{-t_k}{x}\right)$$

- iii) "*Choc sur taux longs pour la monnaie c* (seulement pour les chocs rotatifs) : Le choc est ici le plus fort au point médian pour la plus longue durée (*long*), et sa relation avec le facteur scalaire de taux court est :  $S_{long}(t_k) = 1 - S_{short}(t_k)$ ."

$$\Delta R_{long,c}(t_k) = \pm \bar{R}_{long,c} \cdot S_{long}(t_k) = \pm \bar{R}_{long,c} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-t_k}{x}\right)\right)$$

- iv) "*Chocs de rotation pour la monnaie c* : il s'agit d'appliquer des rotations à la structure des échéances (*pentification – steepener – et aplatissement – flattener –*, par exemple) des taux d'intérêt, de sorte que les taux longs et courts subissent un choc ; la modification des taux d'intérêt au point médian de chaque durée est obtenue en appliquant les formules suivantes à ces chocs :"

$$\Delta R_{steepener,c}(t_k) = -0.65 \cdot |\Delta R_{short,c}(t_k)| + 0.9 \cdot |\Delta R_{long,c}(t_k)|$$

$$\Delta R_{flattener,c}(t_k) = 0.8 \cdot |\Delta R_{short,c}(t_k)| - 0.6 \cdot |\Delta R_{long,c}(t_k)|$$

Le besoin en fonds propres le plus élevé parmi tous ceux calculés à partir des scénarios précédents est considéré comme le montant à mettre en provision, soit le Risque Global de Taux.

## 6.2 Analyse des RGT

Une fois tous les modèles paramétrés, les chocs générés ont été intégrés aux différents modèles internes et notamment aux GAPS de taux. Afin de pouvoir présenter les résultats et de conserver une certaine confidentialité souhaitée par la direction du Fonds d'Epargne, tous les résultats seront exprimés en valeur relative au RGT 2018 en production. C'est-à-dire qu'une valeur de x% correspond à un RGT de x% du RGT de 2018.

A noter que dans le cas du Fonds d'Epargne le risque de taux se décompose en risque de taux nominal et risque de taux inflation. C'est pourquoi dans le cadre de la méthode standard, les chocs sont appliqués séparément sur les deux types de risque et le besoin en fonds propre le plus élevé est considéré comme le RGT en méthode standard.

	<b>Taux Nominaux</b>	<b>Taux Inflation</b>
<b>Choc parallèle vers le haut</b>	0%	41%
<b>Choc parallèle vers le bas</b>	124%	0%
<b>Pentification de la courbe (taux courts en baisse, taux longs en hausse)</b>	0%	22%
<b>Aplatissement de la courbe (taux courts en hausse, taux longs en baisse)</b>	37%	0%
<b>Hausse des taux courts</b>	6%	0%
<b>Baisse des taux courts</b>	0%	9%

Ce tableau fait état d'un choc en méthode standard de 24% supérieur au RGT actuellement en production. On pouvait s'attendre à cette divergence au vu des caractéristiques très particulières du Fonds d'Épargne. Comparons ces résultats aux différentes méthodes développées dans ce mémoire et notamment avec la nouvelle implémentation du modèle en translation dont les métriques de risques sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Historique Séries	5 ans (1300 pts)	10 ans (2600 pts)	15 ans (3900 pts)
<b>FRSWI 5 EUSA 5</b>	45%	58%	54%
<b>FRSWI 10 EUSA 10</b>	61%	83%	73%
<b>FRSWI 15 EUSA 15</b>	70%	95%	84%
<b>EUSWI 5 EUSA 5</b>	46%	63%	54%
<b>EUSWI 10 EUSA 10</b>	61%	84%	71%
<b>EUSWI 15 EUSA 15</b>	69%	95%	86%

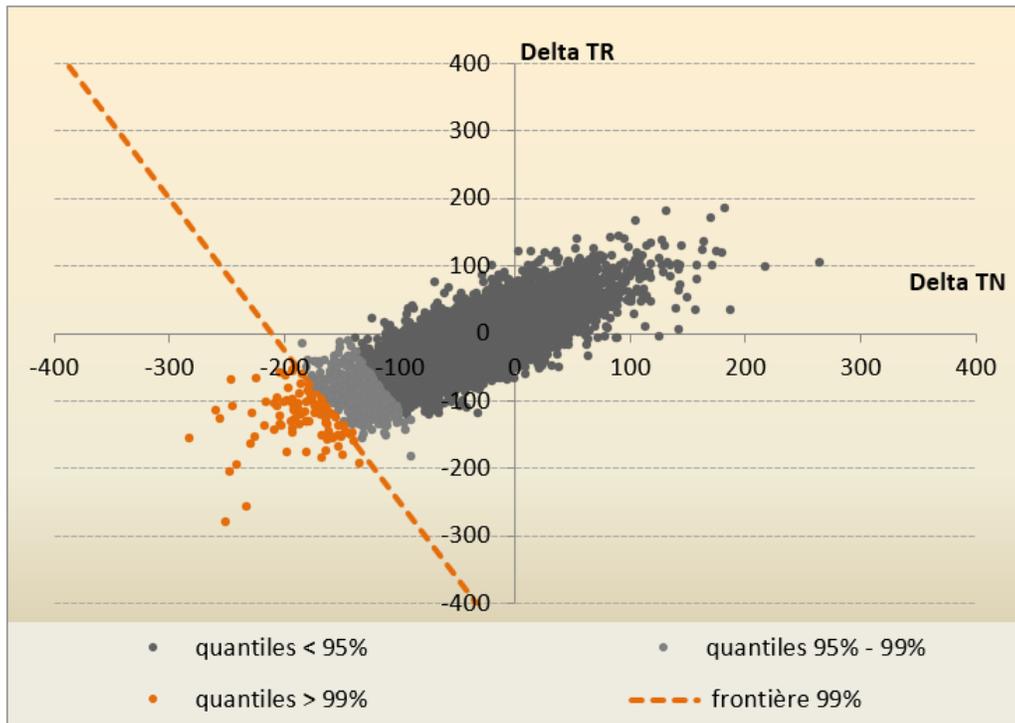
On remarque en premier lieu que toutes les métriques RGT résultant du modèle interne en translation donnent des résultats en deçà du RGT actuellement en production. Cela vient d'une calibration sur un historique plus court et d'une modélisation mise à jour respectant les hypothèses d'implémentation.

La deuxième remarque vient de la proximité des résultats provenant des séries inflation française et européenne. Cette constatation est en phase avec la forte corrélation existante entre les deux séries de taux. Pour rappel, elle excède les 95%. Cela confirme que le choix de l'une ou l'autre n'a que peu d'impact sur le résultat final.

Il apparaît, à la lecture de ce tableau, que le choix s'oriente vers l'association taux swap inflation française 10 ans et taux nominaux 10 ans sur un historique de 10 ans. Ce choix s'appuie sur plusieurs critères :

- Une liquidité plus importante des séries de taux 10 ans.
- L'adéquation de la durée de 10 ans du bilan du Fonds d'Épargne.
- L'approche conservatrice consistant à prendre une profondeur d'historique de 10 ans.

A titre informatif, la distribution des chocs amenant au calcul du RGT est présentée ci-dessous. Elle permet d'identifier le facteur de risque majoritaire pour le bilan du Fonds d'Épargne : **l'impact des taux nominaux**. Ceci confirme les résultats des chocs de la méthode standard.



Ainsi, pour l'étude des courbes, le choix des séries s'est naturellement orienté vers les séries de taux swap inflation et nominaux 10 ans sur un historique de 10 ans. Etudions maintenant les résultats provenant de ces modèles incluant les effets de translation et de courbure.

Comme expliqué plus tôt dans le mémoire, les méthodes naïves et à paramètres n'ont pas permis d'aboutir à des résultats cohérents. Ainsi aucun résultat ne sera présenté dans la suite.

Finalement on peut remarquer une grosse disparité entre les deux interpolations de la méthode semi-naïve. Cela est majoritairement dû au fait que le modèle NSS s'adapte difficilement aux courbes de taux inflation. En effet, lorsqu'on décompose le RGT entre risque de taux nominaux et taux inflation dans les deux cas on remarque une forte disparité dans l'interpolation, toute chose égale par ailleurs.

	<b>NSS</b>	<b>Polynome de degré 3</b>
<b>RGT</b>	302%	116%

Ce tableau met en lumière l'hypothèse du choix des séries puisque précédemment il a été montré que le RGT découlant des séries FRSWI15 et EUSA15 était plus important que les autres. Couplé à une plus grande sensibilité du bilan aux maturités longues il apparaît qu'une calibration du modèle sur les séries de taux 10 ans tende à minimiser le risque de taux réel.

Finalement deux choix s'offrent au Fonds d'Epargne pour calibrer les chocs de taux. Le premier découlant de la méthode actuelle ayant des résultats, quoique plus faibles, en accord avec les espérances. Un changement des inputs du modèle pouvant être envisagé. La seconde possibilité, utilisant un modèle par interpolation polynomiale, donne des résultats plus conservateurs et apparaît donc comme méthode à privilégier dans le cas d'une couverture de risque. Une étude de l'appétence au risque du Fonds d'Epargne pourrait néanmoins nuancer ce propos et permettre une calibration plus en phase avec les attentes de la direction.

## 7 Conclusion

Avec le renforcement du contrôle de l'ACPR sur le Fonds d'Epargne ainsi que la persistance des taux bas sur le marché le risque de taux devient un sujet primordial pour la direction. C'est dans cette démarche d'optimisation et d'amélioration des processus que ce mémoire prend place. Il s'efforce de détailler un des aspects du calcul du risque global de taux : la calibration des chocs de taux.

Un des enjeux de la modélisation est de pouvoir prendre en compte la particularité du bilan du Fonds d'Epargne. En effet, l'importante exposition à l'inflation et aux taux nominaux ainsi que la taille du bilan font du risque de taux un élément majeur.

L'étude s'est efforcée d'être la plus générale possible en prenant en considération les conclusions des précédents travaux entrepris en interne. La mise à jour du modèle en translation et le développement d'une méthode de choc en courbe permettent de quantifier l'impact d'une telle approximation sur les provisions du Fonds d'Epargne.

Le choix d'une modélisation des chocs de taux uniquement en translation peut apparaître comme un bon proxy de la méthode en courbe à condition d'adapter les inputs pour obtenir un résultat plus conservateur. Les séries FRSWI30 et EUSA30 donnant par exemple des résultats proches du modèle en courbe (123% du RGT actuel). Le Fonds d'Epargne obtiendrait ainsi un modèle interne en ligne avec les recommandations du Comité de Bâle.

Plusieurs limites se sont faites sentir durant cette étude. Entre autres, la difficulté d'obtenir des résultats cohérents et stable par la méthode à paramètres. Une alternative possible pourrait s'articuler autour d'un modèle ACP ou factoriel.

De plus, il convient de nuancer l'impact des chocs dans le calcul global du RGT. En effet, celui-ci s'appuie sur des hypothèses ayant des répercussions potentiellement plus grandes que les chocs de taux. On peut par exemple signaler que l'utilisation des chocs nouvellement calibrés couplée à la VAN peut aboutir à des résultats différents. En outre, un backtesting des modèles décrit dans ce mémoire sur les RGT des années précédentes pourrait permettre de conclure d'une relative stabilité des résultats.

## Glossaire

**ACP** : Autorité de Contrôle Prudentiel.

**ACPR** : Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution.

**ARMA-GARCH** : Modèle de séries temporelles. Une définition est développée dans la partie 3.2.1 de ce mémoire.

**CDC** : Caisse des Dépôts et des Consignations.

**EONIA** : Taux interbancaire au jour le jour.

**EVE** : Economic Value of Equity. C'est la valeur économique des fonds propres.

**FASB** : Financial Accounting Standards Board. C'est le Comité des normes comptables et financières.

**Méthode des GAPS** : Modèle interne pour le calcul des Besoin en Fonds propres.

**IASB** : International Accounting Standards Board.

**IRRBB** : Interest Rate Risk in the Banking Book.

**LA** : Livret A.

**LCR** : Liquidity Coverage Ratio.

**LDD** : Livret Développement Durable.

**LEP** : Livret d'Épargne Populaire.

**NII** : Net Interest Income. C'est le revenu d'intérêts net.

**NSFR** : Net Funding Stable Ratio.

**Prêts "Habitat Ville"** : Catégorie de prêts consacrée aux prêts sociaux.

**RGT** : Risque Global de Taux. C'est la métrique utilisée par le Fonds d'Épargne pour calculer son besoin en fonds propres.

**$\Delta$ VAN** : Valeur Actuelle Nette stressée - Valeur Actuelle Nette.

**VAN** : Valeur Actuelle Nette.

## Références

- [1] ACPR,  
<https://acpr.banque-france.fr/controler/control-prudentiel-des-assurances/demarche-de-control/types-de-controles>
- [2] Caisse des Dépôts : Rapport annuel Fonds d'Épargne 2018,  
[https://www.caissedesdepots.fr/sites/default/files/medias/ra2018/cdc\\_fe\\_a4\\_fr\\_e-acc.pdf](https://www.caissedesdepots.fr/sites/default/files/medias/ra2018/cdc_fe_a4_fr_e-acc.pdf)
- [3] Comité de Bâle : Risque de taux d'intérêt dans le portefeuille bancaire,  
[https://www.bis.org/bcbs/publ/d368\\_fr.pdf](https://www.bis.org/bcbs/publ/d368_fr.pdf)
- [4] Gilli, Große et Schumann : Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model  
<https://comisef.eu/files/wps031.pdf>
- [5] HAL : Utilisation de copules paramétriques en présence de données observationnelles : cadre théorique et modélisations,  
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01542594/document>
- [6] JDN : Livret A 2019 : plafond, taux et calcul d'intérêt,  
<https://www.journaldunet.fr/patrimoine/guide-des-finances-personnelles/1141373-livret-a-2019-plafond-taux-et-calcul-d-interet/>
- [7] Nicole Krämer et Ulf Schepsmeier : Introduction to vine copulas  
<http://www.plantbreeding.wzw.tum.de/fileadmin/w00bdb/www/kraemer/Vines.pdf>
- [8] Lagrange et Meunier : Intégration de l'inflation dans l'évaluation du risque de provisionnement pour un assure non-vie sous Solvabilité 2.  
<https://www.institutdesactuaires.com>
- [9] Ooreka : Caisse des Dépôts et des consignations,  
<https://banque.ooreka.fr/astuce/voir/479999/caisse-des-depots-et-consignations>
- [10] Sia Partners : De Bâle 1 à « Bâle 4 » : chronique d'une saga réglementaire,  
<http://finance.sia-partners.com/20170808/de-bale-1-bale-4-chronique-dune-saga-reglementaire-0>