Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 25 juin 2013

Par : SAUNIER Maxence

Titre: Modélisation et détermination de structures optimales en réassurance vie

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☒ 1 an ☐ 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. David Dubois

M. Corinne Lefumat

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI

M. Alexis BIENVENÜE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Entreprise :

Aon Benfield Paris

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Arnaud Chevalier

Invité :

Laurent Griveau, Pierre Valade

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

50 Avenue Tony Garnier
69366 Lyon Cedex 07

Institut de Science Financière
et d'Assurances

Modélisation et détermination de structures optimales en réassurance vie

Maxence SAUNIER

Mémoire d'actuariat
Juin 2013

Encadrement : Frédéric Planchet (ISFA) & Arnaud Chevalier (Aon Benfield)

Remerciements

Je tiens à remercier très sincèrement Arnaud Chevalier, pour son accompagnement de tous les jours, son engagement et son partage sans limite ; également Frédéric Planchet pour ses réponses toujours précises et efficaces, et son attrait pour la problématique.

J'adresse aussi mes remerciements à Bernard Paris et Laurent Griveau, Natixis Assurances, qui ont alimentés ces réflexions.

Au sein d'Aon Benfield, merci à Philippe Virolle pour m'avoir offert des conditions de travail optimales et toujours dans la bonne humeur, Benoit Butel pour ses relectures et commentaires, Joelle et toute l'équipe pour leurs encouragements chaleureux, Irfan & Bruce pour leurs conseils et Jean-François Walhin pour ses éclaircissements sur la méthode de de Finetti.

Un grand merci aux relecteurs à quelque étape de l'écriture, et aux membres du jury : David Dubois, Anne Eyraud-Loisel, Laurent Griveau, Corinne Lefumat, Frédéric Planchet & Pierre Valade, pour leur présence.

Enfin, pour tout le reste, à Aurélien & Arnaud encore une fois, à Diane, pour qui la réassurance n'a plus aucun secret et qui a réussi tout ce temps à me soutenir, à mon frère Julien et mes parents, pour la motivation et l'envie de bien faire.

Modélisation et détermination de structures optimales en réassurance vie

Maxence SAUNIER
Juin 2013

Résumé

L'actualité économique et réglementaire des entreprises d'assurance vie -épargne et prévoyance- intensifient la réflexion de l'arbitrage entre rentabilité et risque/capital. Dans ce contexte, la réassurance se révèle d'une utilité toute particulière en représentant une alternative (en sus de son rôle traditionnel) tant à l'accroissement de la prise de risque par l'augmentation des rendements qu'au financement des exigences en capital via les marchés financiers.

Nous cherchons, dans le cas d'un portefeuille de prévoyance, à observer les effets de la réassurance sur diverses mesures de risque et de rentabilité connues, et à en optimiser les niveaux pour des contraintes données.

Mots-clés

Réassurance vie, mesure de risque, solvabilité, exigence en capital, frontière efficiente

The modelling of Life Reinsurance and analysis for optimal structures

Maxence SAUNIER
June 2013

Abstract

More than ever life insurance companies (individual & group covers, savings) face real thinking of arbitrage between reward and risk/capital, due to economic turmoil and regulation. Reinsurance appears very useful as it represents an efficient alternative to increasing the risk (as a result of more reward), but also as an alternative to the funding (for solvency needs) from the capital markets.

We aim at observing, for an individual cover portfolio, the effects of the reinsurance on several risk measures and several reward measures, and thus being able to optimise the reinsurance levels under constraints.

Key words

Life Reinsurance, risk measure, solvency, capital requirement, efficient frontier

Table des matières

1 Introduction **9**

2 Une approche formelle de la réassurance sur le risque Décès Toutes Causes **10**

2.1 Formalisation 11

2.1.1 Caractéristiques du produit d'assurance 11

2.1.2 Les flux bruts (avant réassurance) 11

2.1.3 Les *best estimate liabilities* avant réassurance 12

2.1.4 La réassurance considérée 14

2.1.5 Les flux nets de réassurance 14

2.1.6 La prise en compte de la réassurance dans Solvabilité 1 & 2 18

2.1.7 Le bilan prudentiel au net de réassurance 21

2.1.8 Objectifs, contraintes et variables de décision : problématisation 24

2.1.9 Complexité de la résolution analytique 28

2.2 Résolution analytique 29

2.2.1 Théorie du portefeuille et analogie avec notre problématique 29

2.2.2 Optimisation convexe et résolution de de Finetti 37

3 La modélisation et l'analyse numérique **42**

3.1 Les outils d'analyse 42

3.2 Mise en œuvre de la modélisation 46

3.2.1 Les données 46

3.2.2 Le modèle sous LifeMetrica® 49

3.3 Les résultats 54

3.3.1 Les sorties avant réassurance 54

3.3.2 Variation des paramètres d'une quote-part 59

3.3.3 Equivalent commission / participation 67

3.3.4 Variation des paramètres d'un excédent de plein 69

3.3.5 Superposition des tranches et taux de cession 73
3.3.6 Mesures risque-rendement et frontières efficientes de la réassurance . . . 75
3.3.7 Etude des couvertures non proportionnelles 91
3.3.8 Alternatives à ces structures 94
3.4 Paramètres vs. périmètre 97

4 Conclusion **98**

5 Annexes **99**

Chapitre 1

Introduction

Le marché de la réassurance est traditionnellement dédié au transfert du risque. Ce transfert permet avant tout aux entreprises d'assurance de se protéger contre les risques de pointe, de fréquence et catastrophiques. Mais le contexte économique et réglementaire actuels nourrissent des réflexions beaucoup plus transverses.

En effet, les normes de solvabilité requièrent une meilleure connaissance et une meilleure maîtrise des risques, et des ressources en face de ses risques. Mesures de rentabilité, allocation et gestion du capital, exigences minimales en fonds propres, ORSA, IFRS 4 phase 2 ... autant de concepts qui refondent les stratégies et la gestion de compagnies d'assurance, vie et non-vie.

Le champs de notre étude se restreint à l'assurance de personne (prévoyance epargne), sachant que les mêmes raisonnements sont transposables à la non-vie. Dans le cadre d'un portefeuille de prévoyance, nous allons voir comment la réassurance permet de lier de façon optimale la gestion des risques aux exigences de solvabilité. L'objectif avant tout de ce travail n'est pas de déterminer une valeur optimale mais bien plutôt de proposer une méthodologie suffisamment large pour répondre à la diversité des mesures de risque et de rendement, reflétant la diversité des acteurs du marché.

Dans une première partie nous poserons les bases de la problématique, et de son traitement abondant dans la littérature scientifique. Nous noterons ainsi que ces optimisations présentent des limites (absence de généralisation des frontières efficientes à plusieurs mesures de risque et de normes), limites que nous nous proposons de dépasser au moyen de la simulation, dans la deuxième partie.

Chapitre 2

Une approche formelle de la réassurance sur le risque Décès Toutes Causes

L'objectif de ce chapitre est de proposer une formulation des flux d'un portefeuille de prévoyance décès toutes causes, avant et après réassurance. Puis, nous posons la problématique en définissant les programmes d'optimisation.

Dans nos recherches, nous avons d'abord abordé l'analyse en moyenne-variance suivant les principes proposés par le prix nobel (1956) Harry Markowitz, analyse reconnue et abordable car avec des contraintes en égalité. Nous remarquons que cette analyse, quand appliquée à la réassurance, n'est pas la plus adaptée. Nous nous tournons vers les travaux, plus anciens, de l'italien Bruno de Finetti, qui proposa dès 1940 (avant Markowitz donc) une approche moyenne-variance formulée pour les choix de réassurance proportionnelle, avec cette fois-ci des contraintes plus complexes en inégalités. Ses travaux ont été revisités par J.F.Walhin [7] et [5] et F. Pressacco [6], ce dernier donnant une introduction très précise aux fondements des méthodes de moyenne-variance en finance.

Pour ce qui nous intéresse, ces approches analytiques sont très poussées et apportent beaucoup à la réflexion mais sont généralement définies pour des risques non-vie dans le cas où la fonction objectif de risque à minimiser est figée. Nous essayons d'aller un peu plus loin en l'appliquant à des risques spécifiques aux assurances de personne, et en changeant le critère de risque.

2.1 Formalisation

2.1.1 Caractéristiques du produit d'assurance

Le produit Temporaire Décès étudié est d'un fonctionnement très simple : l'assuré paie une prime annuelle, et en contrepartie, l'assureur s'engagé à payer un capital défini à l'avance en cas de décès de l'assuré dans l'année. Le contrat est annuel, avec tacite reconduction. La prime peut être constante, ou revue annuellement par l'assureur selon une table de prime, le plus souvent segmentée a minima par âge.

Notons que le produit considéré est à tacite reconduction annuelle. L'engagement assureur et assuré est d'un an. Les provisions constituées sont donc des provisions pour sinistres connus et non encore réglés ou pour sinistres non connus (sinistres tardifs). Dans la suite de notre étude, nous ne prenons pas en compte ces provisions, et nous nous attachons uniquement à quantifier les flux financiers. Notons également que nous pourrions prendre en compte ces provisions, mais cela n'influerait pas de manière significative sur nos résultats : il serait possible de remplacer ce que l'on définit comme le montant de sinistre par le montant sinistre avec la variation de provisions. La notation resterait la même et les résultat similaires. Dans cette logique, notre démarche revient à rattacher tous les sinistres payés ou à payer à l'année de survenance. Autrement, pour chaque année de survenance, nous comptabilisons la sinistralité projetée à l'ultime.

Dans cette section sont posées les formules représentant le résultat avant réassurance, fonction du nombre d'assuré, des caractéristiques de chaque police, et des hypothèses de mortalité et de résiliations. En exposant des notations appropriées, "brut" signifie avant réassurance et "net" après réassurance, avec la structure implicitement considérée.

2.1.2 Les flux bruts (avant réassurance)

Notations :
- n : nombre de polices dans le portefeuille
- K_i : capital assuré pour chaque police
- T_{x_i} : date de sortie de la police, par cause de décès
- T_i : date de fin de contrat
- q_{x_i} : taux de mortalité en fonction de l'âge x_i de l'assuré
- w_{x_i} : taux de résiliation en fonction de l'âge de l'assuré
- $S(t)$: charge totale de sinistre pendant la période t
- $P(t)$: prime totale acquise pendant la période t
- $Res(t)$: résultat technique sur la période t
- BEL : "Best Estimate Liabilities", à savoir la valeur "au plus juste" des engagements de l'assureur (cf. définition infra p.13)
- $\delta(t)$: facteur d'actualisation à la fin de la période t

Nous considérons dans la suite que les projections (formelles) se font période par période, avec les calculs en fin d'année. Les primes sont considérées payées début d'année et les sinistres en fin d'année. C'est une hypothèse courante mais qui peut entraîner un biais car une telle écriture suppose que tous les assurés paient entièrement leur prime, peu importe la périodicité et l'occurrence du décès dans l'année.
Maintenant, établissons le compte de résultat à 1 an :
Le montant des primes sur la première année est égal à la somme des primes collectées en début d'année :

$$P(1) = \sum_{i=1}^{n} P_i(1)$$

Le montant des sinistres sur la première année de projection est la somme des capitaux sous risque payés suite aux décès parmi les n assurés. On peut exprimer la variable aléatoire $S(1)$ comme suit :

$$S(1) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot 1_{T_{x_i} \leq 1}$$

Le résultat avant réassurance sur la première année s'écrit donc :

$$Res(1) = P(1) - S(1)$$

soit

$$Res(1) = \sum_{i=1}^{n} P_i(1) - K_i \cdot 1_{T_{x_i} \leq 1}$$

Les résultats pour les dates t=2, 3, ... peuvent s'obtenir de la même manière.

2.1.3 Les *best estimate liabilities* avant réassurance

Dans le contexte de Solvabilité 2 (cf. [3]), le "best estimate" (en variable aléatoire) des engagements de la cédante s'exprime comme la valeur actuelle des flux financiers futurs :

$$BEL = VA(Sinistres futurs - Primes futures)$$

en supposant le facteur d'actualisation constant sur l'année :

$$BEL = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \cdot (S(t) - P(t))$$

De même en l'absence de frais,

$$BEL = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(t) \cdot \left(K_i \cdot 1_{t-1 < T_{x_i} \leq t} - P_i(t) \cdot 1_{T_{x_i} > t-1} \right)$$

Le montant "best estimate" Solvabilité 2 s'obtient en prenant l'espérance de BEL, représentant alors la valeur actuelle probable des engagements futurs.

$$E(BEL) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(t) \cdot (K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i})$$

Notons que ${}_{t-1}p_{x_i}$ représente le taux combiné de survie au décès et à la résiliation. $p_{x_i} = (1 - q_{x_i})(1 - w_{x_i})$ avec les notations ci-dessus.

En supposant que le passif est uniquement et entièrement constitué des engagements de ce produit Temporaire Décès Toutes Causes, c'est cette valeur qui figure au passif du bilan prudentiel.

Bilan en t=0	
Fair Value Actif	Fonds Propres initiaux
	Best Estimate Passif = $E(BEL)$

D'après la segmentation du calcul des SCR des spécifications techniques QIS5 (cf. [3]), le produit Temporaire Décès induit le calcul du SCR *mortality*. Pour cela, un choc de 15% d'augmentation des taux de mortalité est appliqué. Nous sommes conduits également à calculer le SCR *lapse* concernant les résiliations des contrats. Le choc envisage trois scénarios de résiliation : augmentation de 50% des taux, réduction de 50% des taux, et un scénario de rachat massif.

Le capital requis pour le risque *mortality/lapse* est la différence de la valeur nette du bilan ($= Actif - Passif$) avec et sans choc. Lorsque les autres composantes du bilan prudentiel sont constantes, le SCR s'écrit :

$$SCR_{mortality/lapse} = BestEstimate^{choc} - BestEstimate^{initial}$$

Cette écriture respecte bien le principe de positivité de la différence de NAV ("Net Asset Value") lorsque le scénario résulte en une réduction de la NAV (cf. [3] *SCR.1.6*). En reprenant la formule de $E(BEL)$ précédente, exprimons le $SCR_{mortality/lapse}$:

$$\begin{aligned} SCR_{mortality/lapse} &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(t) \cdot \left(K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i}^{choc} \cdot q_{x_i+t-1}^{choc} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}^{choc} \right) \\ &- \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(t) \cdot (K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}) \end{aligned}$$

Il est possible (mais en surchargeant inutilement les écritures) de développer cette expression en fonction des chocs respectifs de mortalité et de résiliation, et d'en déduire une formule dépendant directement de q_x, q_{x+1}, q_{x+2} , ...
Ce développement ne semble pas nécessaire ici : nous cherchons à déterminer la valeur après réassurance, portant sur les montants des paiements (K_i) et non sur les probabilités elles-mêmes.

2.1.4 La réassurance considérée

Dans une première approche, nous partons d'une structure de réassurance déjà existante et mise en place sur ce type de portefeuille : il s'agit de réassurance proportionnelle, en quote-part et en excédent de plein, avec ou sans participation aux bénéfices.

La quote-part est une réassurance proportionnelle où la cédante (l'assureur) cède une même proportion de primes et de sinistres au(x) réassureur(s). Le réassureur accepte tous les risques du portefeuille cédé par l'assureur quelle que soit le montant atteint par la somme assurée. Toutefois, il est possible d'ajouter un plein de souscription (noté "limite") correspondant à une somme Au-delà de laquelle la réassurance en quote-part ne joue plus. Pour ces assurés nous calculons la part de somme assurée située en dessous de cette limite, et cette même part de prime est cédée au(x) réassureur(s).

Un autre type de réassurance proportionnelle, la réassurance en Excédent de plein, permet de réassurer proportionnellement les sommes assurées au-delà d'un certain seuil appelé "plein". On détermine la part de la somme assurée située au-dessus de ce plein jusqu'au plafond : c'est cette proportion de primes et de sinistres qui sera cédée (pouvant en plus être modulée par facteur multiplicatif).

Ce sont des structures de réassurance dites *a priori*. En outre, peuvent venir s'ajouter au compte de résultat des commissions de réassurance (payée par le réassureur), des frais de réassurance payés par la cédante et des participations aux bénéfices payées par les réassureurs.
Ainsi, le compte de résultat du traité pour la cédante s'établit comme suit :

Débit	Crédit
Primes cédées	Sinistres cédés
Frais des réassureurs	Commissions
	Participations aux bénéfices

2.1.5 Les flux nets de réassurance

Nous utiliserons les notations suivantes :
- β : taux de cession de la quote-part
- β_i : taux de cession de la quote-part ajusté à la limite, par assuré i
- γ_i : taux de cession de l'excédent de plein, par assuré i
- Ret, Lim : rétention et plafond de l'Excédent de plein
- t_{PB}^{QP} et t_{PB}^{XP} : taux de participation aux bénéfices pour la quote-part et l'excédent de plein.

En exposant des notations appropriées, "brut" signifie avant réassurance et "net" après réassurance, avec la structure implicitement considérée. Alors, à taux de commission et participation nuls, le résultat de la cédante après réassurance en quote-part s'écrit pour la première année :

$$P^{net}(1) = (1-\beta)\cdot P(1)$$
$$S^{net}(1) = (1-\beta)\cdot S(1)$$

On ajoute maintenant un plein (noté Lim) sur le capital assuré individuel :

$$\beta_i = \beta \cdot \min(1; \frac{Lim}{K_i})$$

Le compte de résultat net de réassurance sur la première année devient :

$$P^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)P_i(1)$$

$$S^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)\cdot K_i \cdot 1_{T_{x_i}\leq 1}$$

Cela nous permet d'exprimer le résultat net de réassurance quote-part avec un plein de souscription ("Lim") :

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)\cdot\Big(P_i(1) - K_i\cdot 1_{T_{x_i}\leq 1}\Big)$$

Notons $Res_i = P_i(1) - K_i \cdot 1_{T_{x_i}\leq 1}$. Il correspond au résultat technique pour chaque police présente dans le portefeuille. Alors,

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)\cdot Res_i(1)$$

Ajoutons maintenant une participation aux bénéfices des réassureurs, avec t_{PB}^{QP} le taux de cette participation. Le résultat du traité de réassurance est égal à

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot Res_i(1)$$

Le résultat net de la cédante après participation aux bénéfices vaut, lorsque le résultat de réassurance est positif :

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)\cdot Res_i(1) + t_{PB}^{QP}\cdot\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot Res_i(1)$$

soit

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}\Big(1-(1-t_{PB}^{QP})\cdot\beta_i\Big)\cdot Res_i(1)$$

sous condition

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot Res_i(1) > 0$$

L'expression de ce résultat n'est pas aussi linéaire si l'on introduit les frais de l'assureur et les commissions de réassurance. En effet, le résultat du traité de réassurance devient

$$PrimesCedees - SinistresCedes - Commissions - FraisReassurance$$

où $Commissions$ est un pourcentage des primes cédées, et $FraisReassurance$ correspond aux frais du réassureur, qu'il ne redistribuera pas dans la participation aux bénéfices.

Déterminons à présent les flux financiers nets de réassurance en **Excédent de plein**. Etant dans un cadre proportionnel, la même part de primes que de sinistres est cédée. Est cédé dans l'Excédent de plein ce qui est au dessus de la rétention (Ret), jusqu'au plafond (Lim) de l'excédent. Le montant de sinistre cédé dans un traité en Excédent de plein est donc :

$$\min(\max(K_i - Ret; 0); Lim - Ret)$$

Le taux de cession de l'Excédent de plein vaut alors :

$$\gamma_i = \min\left(\max\left(1 - \frac{Ret}{K_i}; 0\right); \frac{Lim - Ret}{K_i}\right)$$

Pour un plafond fixé à $450K$, le taux de cession en fonction du capital assuré a l'allure suivante pour différents niveaux de plein :

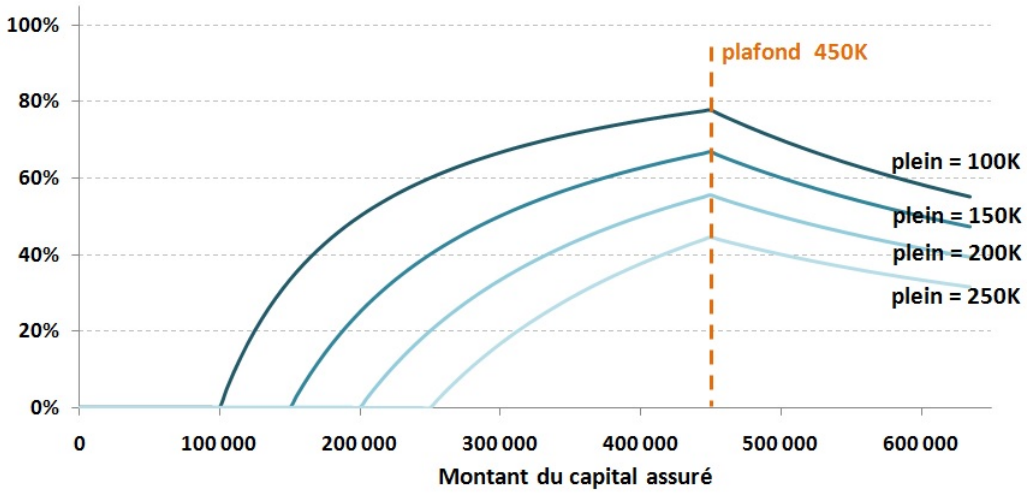


FIGURE 2.1 – Taux de cession d'un excédent de plein

En suivant les mêmes étapes que pour la quote-part, il est possible d'écrire, en conservant les notations, le résultat net de réassurance en Excédent de plein pour la première année, avec une éventuelle participation aux bénéfices :

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n} (1-\gamma_i) \cdot Res_i(1) + \left(t_{PB} \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot Res_i(1) \right)^+$$

où $Res_i(.)$ est toujours ici une variable aléatoire, définie plus haut.

Nous connaissons dorénavant l'expression des flux nets de réassurance pour chaque traité.

La structure de réassurance que nous allons étudier est formée d'une quote-part et de deux excédents de plein. La Quote-part possède une limite en capital assuré, qui est égale à la rétention du premier excédent de plein, et la rétention du deuxième excédent de plein correspond à la limite du premier.
La Quote-part et le premier Excédent de plein ont une clause de participation aux bénéfices avec report de pertes. En conservant les notations β, β_i, et en introduisant $\gamma_{1,i}$, $\gamma_{2,i}$, $Ret1$, $Lim1$ et $Lim2$, t_{PB}^{QP} et t_{PB}^{XP1}, comme les taux de cession, rétentions, limites et taux de participations aux bénéfices de chaque Excédent de plein, on obtient

- le résultat cédé à la Quote-Part

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot Res_i(1)$$

- la participation aux bénéfices de la Quote-Part

$$t_{PB}^{QP} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot Res_i(1) \right)^+$$

- le résultat cédé à l'Excédent de plein 1

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} \cdot Res_i(1)$$

- la participation aux bénéfices de l'Excédent de plein 1

$$t_{PB}^{XP1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} \cdot Res_i(1) \right)^+$$

- le résultat cédé à l'Excédent de plein 2

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{2,i} \cdot Res_i(1)$$

Le résultat au net de la structure de réassurance considérée vaut :

$$\begin{aligned} Res^{net}(1) &= \sum_{i=1}^{n} Res_i(1) \cdot (1 - \beta_i - \gamma_{1,i} - \gamma_{2,i}) \\ &+ t_{PB}^{QP} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot Res_i(1) \right)^+ \\ &+ t_{PB}^{XP1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} \cdot Res_i(1) \right)^+ \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta \cdot \min(1; \frac{Ret1}{K_i}) \\ \gamma_{1,i} &= \min\left(\max\left(1 - \frac{Ret1}{K_i}; 0\right); \frac{Lim1 - Ret1}{K_i} \right) \\ \gamma_{2,i} &= \min\left(\max\left(1 - \frac{Lim1}{K_i}; 0\right); \frac{Lim2 - Lim1}{K_i} \right) \end{aligned}$$

Afin de pouvoir quantifier les effets de la réassurance sur les flux financiers futurs dans une vision *best estimate* et par extension sous l'angle du capital, intéressons nous dans un premier temps à la prise en compte de la réassurance dans les référentiels Solvabilité 1 et Solvabilité 2.

2.1.6 La prise en compte de la réassurance dans Solvabilité 1 & 2

Le calcul de l'exigence en capital dans Solvabilité 1 pour le portefeuille considéré est mathématiquement simple : il dépend directement de l'exposition totale. A supposer que la date de fin des polices est d'au moins cinq années postérieures à la date de calcul, le montant de l'exigence est égal à $0,3\%$ de la somme des capitaux assurés, bruts ou nets de réassurance. Le capital assuré au net de réassurance est simplement la partie en rétention, qui n'est pas cédée à la réassurance. Notons toutefois que cette cession est limitée à 50%, comme cela est mentionné dans le code des assurances ([2] article R334-13).

Penchons nous maintenant sur le cas de l'exigence sous Solvabilité 2, dont on suppose connu les grands principes. Dans notre cas, nous étudierons les sous-modules SCR_{Life} et SCR_{def}. Le portefeuille considéré est un portefeuille de prévoyance, et l'introduction de la réassurance fait apparaître le risque de défaut. Nous considérons que la réassurance joue uniquement sur les passifs de la cédante, c'est à dire ses engagements à verser le capital garanti aux assurés en cas de décès. Il n'y a pas dans notre étude de transfert d'actifs via le traité de réassurance. Nous ne quantifions pas l'impact de la variation des Best Estimate due aux chocs de taux, variation qui affecte le sous-module *Interest Rate* du SCR_{Market}.
Dans un premier temps, construisons le bilan de la cédante au temps $t = 0$:

Bilan en $t = 0$	
	Fonds propres
Actifs	
	Passifs

Le bilan prudentiel simplifié, avant toute réassurance, est le suivant :

Bilan en $t = 0$	
	Capital libre
	$+ SCR$
Actifs	$+$ *Marge pour risque*
	Provisions Best Estimate

Le SCR est le capital requis pour assurer la survie de la compagnie à 1 an avec une probabilité de 99,5%, et la *Marge pour risque* est un capital servant à couvrir la constitution des SCR futurs.
Selon le principe de prudence de la norme de solvabilité, la prise en compte des traités de réassurance dans ce bilan prudentiel est très spécifique : il est stipulé que doit être pris en considération uniquement les flux relevant d'engagements contractualisés via des traités existants d'assurance et de réassurance. ([3] *TP.2.12 - The calculation of the best estimate should only include future cash-flows associated with existing insurance and reinsurance contracts*). Ainsi, si le traité est signé pour une seule année, le *best estimate* des recouvrements est égal au montant de ces recouvrements sur la première année seulement. Ce *best estimate* des recouvrements ("recoveries") constitue un actif pour la cédante. Le montant des primes cédées figure quant à lui au passif en réduction du résultat technique de l'année. Avec une couverture de réassurance sur une année, le bilan prudentiel devient :

Bilan en 0	
	Capital libre
	$+ SCR$
Actifs	$+$ *Marge pour risque*
	Provisions Best Estimate
Recouvrements Best Estimate	*Primes cédées*

D'autre part un point non encore tranché de la réassurance dans Solvabilité 2 est la prise en compte de la participation aux bénéfices de réassurance. C'est un flux en effet difficile à catégoriser, car il est conditionnel au résultat de la réassurance. D'un autre coté, le best estimate compte tous les flux futurs espérés en juste valeur, et donc en moyenne, si le résultat de la cédante puis du réassureur sont positifs, il y aura une participation aux bénéfices sur laquelle la cédante pourra compter. Dans notre étude, nous avons considéré du fait de l'asymétrie du paiement de la participation et de sa nature qu'elle ne sera pas projetée dans le "best estimate" de souscription. Cependant, et comme nous allons le voir juste après, elle constitue

une créance (en cas de résultat positif du réassureur) de la cédante sur le réassureur, et donc est soumise au risque de défaut de cette contrepartie.

Les spécifications techniques de la norme Solvabilité 2 introduisent la quantification d'un nouveau risque : le risque de contrepartie ([3] *SCR.6*). Sont concernées dans ce nouveau sous-module les créances de réassurances que la cédante peut espérer recevoir. Celles-ci sont en effet soumises à la condition que le réassureur puisse les payer, i.e. qu'il ne soit pas en situation de défaut de paiement. Le $SCR_{counterparty}$ regroupe plus généralement toutes les créances de souscription à risques : créances de réassurance mais aussi de produits titrisés. Nous nous concentrons sur le premier type.

Pour quantifier ce risque, les spécifications du QIS5 ([3]) requièrent d'allouer une probabilité de défaut intrinsèque pour chaque contrepartie créditeur de la cédante (la compagnie d'assurance). Le critère retenu pour cette probabilité de défaut est la notation de la contrepartie (les réassureurs) selon la grille Standard & Poor's. Le tableau suivant indique la correspondance "Rating / Probabilité de défaut" :

Rating	Probabilités de défaut
AAA	$0,002\%$
AA	$0,01\%$
A	$0,05\%$
BBB	$0,24\%$
BB	$1,20\%$
Non raté	$4,175\%$
CCC	$4,175\%$

TABLE 2.1 – Probabilités de défaut du QIS5

Nous pouvons retrouver la formule du calcul du$SCR_{counterparty}$ au paragraphe $SCR.6.13$ de [3], et les détails sur le modèle utilisé dans le consultation paper n^{o}28 ([4]).

Dans cette formule, on définit le LGD comme le *"loss given default"* qui correspond au montant de perte en cas de défaut de la contrepartie. Formellement, il apparaît dans le QIS5 comme :

$$LGD_j = (1 - RR) \cdot (Recoverables_j + RM_j - Collaterals_i)$$

où

- RR : taux de recouvrement de la créance en cas de défaut
- $Recoverables_j$: montant de la créance de réassurance du réassureur j
- $Collaterals_j$: montant des dépôts de garantie du réassureur j
- RM_j : *Risk Mitigating effect* dû au réassureur j

Lors d'un défaut, la perte réelle est constituée par le montant de la créance qui n'est pas payée (les *recoverables*), montant qui peut être tout ou partie compensé par le dépôt de garantie

de la contrepartie (les *collaterals*). Le troisième terme (*Risk Mitigating effect*) représente la récupération du risque par la cédante lorsqu'il y a défaut du (des) réassureur(s). Le *Risk Mitigating effect* représente donc le niveau de capital requis qui avait été cédé à la contrepartie (puisque le risque a bien été cédé via le traité de réassurance), et qui, du fait du défaut, retourne à la cédante. Si la prise en compte de ce risque semble très juste, sa détermination en pratique se révèle très laborieuse : il est nécessaire de calculer pour chaque contrepartie de la cédante son niveau de SCR, et les niveaux de SCR dans chaque scénario où l'on enlève chacune à leur tour les contreparties. Cela permet de déterminer le montant de SCR qui est cédé à chaque réassureur. Cet exercice très calculatoire donnera lieu à des simplifications par la suite.

2.1.7 Le bilan prudentiel au net de réassurance

Nous reprenons la formule de l'espérance du *best estimate* :

$$E(BE) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} (K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i})$$

Exprimons le montant espéré des recouvrements (noté $Rec()$ dans la suite) à faire apparaître dans le bilan Solvabilité 2, dans le cas où la structure de réassurance est une simple quote-part de taux de cession β. Ce montant est l'espérance des sinistres cédés à la réassurance, laquelle est supposée seulement existante sur la première année.

$$E(Rec(1)) = \beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot q_{x_i}$$

Le montant des primes cédées s'écrit quand à lui :

$$\beta \sum_{i=1}^{n} P_i(1)$$

En remplaçant dans le bilan en $t = 0$, on obtient :

Bilan en $t = 0$	
	Capital libre
	$+ SCR$
A_0	$+ RM$
	$E(BE)$
$\beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot q_{x_i}$	$\beta \sum_{i=1}^{n} P_i(1)$

Afin de déterminer le SCR des sous-modules *mortality*, *lapse* et CAT, on choque ce bilan prudentiel pour chacun des trois risques. En considérant q_x le taux combiné de mortalité et de résiliation, on obtient le bilan choqué pour la mortalité ("mortality"), la résiliation ("lapse") ou le risque catastrophe (on peut assimiler ce choc à la mortalité. Il est appliqué seulement sur la première année) :

Bilan en $t=0$	
	$Capital\ libre$
	$+\ SCR$
A_0	$+\ RM$
	$E(BE^{choc})$
$\beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot q_{x_i}^{choc}$	$\beta \sum_{i=1}^{n} P_i(1)$

Selon la formule standard, le $SCR^{net}_{mortality/lapse}$ au net de réassurance quote-part est la différence entre le *best estimate* choqué et non choqué :

$$SCR^{NET}_{mortality/lapse} = E(BE^{choc}) - \beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot q_{x_i}^{choc} - E(BE) + \beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot q_{x_i}$$

soit

$$SCR^{NET}_{mortality/lapse} = SCR_{mortality/lapse} - \beta \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot \left(q_{x_i}^{choc} - q_{x_i} \right)$$

Ce tout premier résultat sur l'expression du SCR des sous-modules *mortality* et *lapse* nous montre une utilité directe de la réassurance : elle réduit le capital requis au titre du risque de souscription $Life$. Cependant, comme nous l'avons rappelé plus haut, les spécifications techniques du QIS5 prévoient l'introduction du risque de contrepartie. Nous étudierons plus loin l'arbitrage entre risque de souscription et risque des créances de réassurance.

On change maintenant la forme de la réassurance : pour un excédent de plein de rétention $Ret1$ et de limite $Lim1$, le montant des recouvrements ("recoveries", i.e. remboursements des sinistres dûs par la réassurance) est égal à

$$E(Rec(1)) = \sum_{i=1}^{n} \min \left(Lim1 - Ret1; (K_i - Ret1)^+ \right) \cdot q_{x_i}$$

En utilisant les notations introduites plus haut,

$$E(Rec(1)) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} \cdot K_i \cdot q_{x_i}$$

Selon la même méthode que précédemment, au net de réassurance sous la formule standard, on a

$$SCR^{NET}_{mortality/lapse} = SCR_{mortality/lapse} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} \cdot K_i \cdot \left(q^{choc}_{x_i} - q_{x_i}\right)$$

En considérant alors la structure complète de réassurance mentionnée au début, soit une quote-part avec une limite en capital surmontée de deux excédents de plein, et en utilisant les notations β_i, $\gamma_{1,i}$ et $\gamma_{2,i}$ déjà introduites plus haut, on écrit finalement que :

$$SCR^{NET}_{mortality/lapse} = SCR_{mortality/lapse} - \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \gamma_{1,i} + \gamma_{2,i}) \cdot K_i \cdot \left(q^{choc}_{x_i} - q_{x_i}\right)$$

Nous tenons à rappeler que ne sont considérés ici seulement les $SCR_{mortality}$ et SCR_{lapse}, par souci de simplicité dans les écritures. Il s'agira plus loin de considérer le $SCR_{expense}$, le $SCR_{default}$ et même mesurer le rôle du passif (réassuré) dans le $SCR_{interest\,rate}$.

En dépassant un contexte strictement réglementaire, nous pouvons déterminer un montant *best estimate* net de réassurance, laquelle est contractuellement pluriannuelle. On note T^{reass} la durée des traités. Appliquons un traité en Quote-part sans limite, taux de cession β.

$$\begin{aligned} E(BE^{net}) &= (1-\beta) \cdot \sum_{t=1}^{T^{reass}} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} \cdot (K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}) \\ &+ \sum_{t=T^{reass}+1}^{\infty} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} \cdot (K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}) \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on note ici $CF_i(t) = K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}$.
Alors, en réécrivant plus simplement l'égalité ci-dessus avec $CF_i(t)$:

$$E(BE^{net}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \cdot \left(1 - \beta \cdot 1_{\{t \leq T^{reass}\}}\right) \sum_{i=1}^{n} CF_i(t)$$

En fixant une limite en capital assuré, cela devient

$$E(BE^{net}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \beta_i \cdot 1_{\{t \leq T^{reass}\}}\right) \cdot CF_i(t)$$

Puis, en rajoutant deux tranches en Excédent de plein, le *best estimate* net est égal à

$$E(BE^{net}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} \left(1 - (\beta_i - \gamma_{1,i} - \gamma_{2,i}) \cdot 1_{\{t \leq T^{reass}\}}\right) \cdot CF_i(t)$$

avec β_i, $\gamma_{1,i}$ et $\gamma_{2,i}$ définis plus haut. La valeur du *best estimate* au net de réassurance dépend directement du taux de cession de la Quote-part, de la rétention et de la limite de l'Excédent

de plein 1, et de la limite de l'Excédent de plein 2.

Toujours avec la notation $CF_i(t) = K_i \cdot {}_{t-1}p_{x_i} \cdot q_{x_i+t-1} - P_i(t) \cdot {}_{t-1}p_{x_i}$, le SCR pour le choc de mortalité/résiliation vaut :

$$SCR_{mortality/lapse} = \sum_{t=1}^{\infty} \delta(t) \sum_{i=1}^{n} \left(1 - (\beta_i - \gamma_{1,i} - \gamma_{2,i}) \cdot 1_{\{t \leq T^{reass}\}}\right) \cdot (CF_i^{choc}(t) - CF_i(t))$$

Nous avons ci-avant présenté les notations, décrit et explicité les concepts et les formalisations nous permettant de repérer les interventions de la réassurance (flux dans la compte de résultat, variation du capital dans le bilan S1 et S2). Grâce à cette introduction nous pouvons dorénavant nous poser la question de l'efficacité de la réassurance. Pour cela, il est nécessaire de définir dans un premier temps les critères nous permettant de juger des qualités d'une réassurance, puis d'expliquer les outils qui nous permettront de mesurer son efficacité, voire son efficience.

2.1.8 Objectifs, contraintes et variables de décision : problématisation

Nous sommes face à un problème d'optimisation stochastique. En effet, nous allons définir des programmes dont les contraintes et les objectifs sont donnés par des statistiques de variables aléatoires.

L'objectif de notre étude est de déterminer une structure de réassurance optimale selon des critères statistiques définis à l'avance. Les auteurs de la littérature sur le sujet (de Finetti, K.Borch, J.Ohlin, J.Lemaire) décomposent le problème de la réassurance en deux parties : la forme de la réassurance et les niveaux de cette forme ([9]). Borch puis Ohlin [10] ont prouvé que la structure Stop Loss est optimale pour la mesure variance, puis plus généralement pour toutes les mesures convexes continues non négatives. Lemaire [9] propose également une méthode pour comparer les formes entre elles au sens de la mesure de risque la plus pessimiste : l'*étendue*. Pour cela, il est nécessaire de fixer au moins une statistique pour laquelle les deux (ou plus) formes de réassurance sont équivalentes. Par exemple, Lemaire [9] définit deux transformations : Stop Loss et Quote Part, pour lesquelles il calcule les primes pures de réassurance (la mesure pour laquelle les formes sont équivalentes est la mesure *moyenne*). A partir de là, il montre que si les deux transformations donnent à la distribution de sinistre une étendue identique, la réassurance Stop Loss coûte moins cher que la réassurance en quote-part. Puisque *minimiser l'étendue pour une prime nette de réassurance donnée est un problème équivalent à celui qui consiste à minimiser la prime pour une réduction d'étendue donnée* [9], la réassurance la moins chère est optimale.

De façon complémentaire, la forme peut être fixée et il reste donc à en déterminer les niveaux (ou paramètres) qui satisfont le programme d'optimisation. Lampaert & Walhin [7] détaillent la méthode pour trouver les niveaux optimaux des taux de cession d'une structure proportionnelle qui permettent de minimiser la variance du portefeuille net de réassurance.

Nous verrons cette méthode dans la partie de *résolution analytique*. Toujours dans un cadre majoritairement non-vie, R.Verlaak et J.Beirlant [13] ont proposé une étude au cas par cas de la superposition des tranches et soulignent l'importance de l'ordre de ces tranches sur la proportion de risque retenue.

Dans cette littérature, nous pouvons mesurer la difficulté de juger une structure de réassurance sur toute sa distribution, et ce pour différentes formes à niveaux variables. La mesure de risque est primordiale car c'est elle qui influe sur la fonction d'utilité de l'agent qui choisit la réassurance. Nombre de ces ouvrages abordent l'optimisation sous le critère moyenne-variance ([13], [7]), ce qui s'inscrit dans la théorie de sélection de portefeuille et de l'utilité de Markowitz. Cependant, la validité de tels modèles basés sur les deux premiers moments, adaptés lorsque les variables de rendement sont supposées log-normales, est plus difficilement justifiable dans le cas de distributions asymétriques. (contre-exemple d'Ingersoll, 1987). Pour essayer de mieux la dépasser nous allons écrire cette optimisation avec les conditions propres à la réassurance vie, puis l'adapterons à d'autres mesures de risque.

Devant cette recherche à double entrée (forme et niveaux), nous avons dans un premier temps figé une forme déjà existante sur le marché pour ce portefeuille et choisissons d'en optimiser les paramètres. Ces paramètres (ou niveaux) constituent nos variables de décisions : taux de cession et plein de souscription de la Quote-Part, pleins et limites des Excédents de plein. Pour restreindre la recherche et rester fidèle aux pratiques de marché, les traités se superposent continument : le plein de souscription de la Quote-part constitue le plein (de rétention) du premier Excédent de plein, etc ... Un autre paramètre (étudié plus tard) joue un rôle crucial : la période de couverture du traité de réassurance (annuel ou pluriannuel). Annoncés comme les fonctions objectifs de notre étude,

- Moyenne
- Volatilité
- Quantiles de scénarios extrêmes
- exigences en capital (S1 & S2)

sont les différentes statistiques observées en fonction de chaque niveau de réassurance.

Définissons le premier programme d'optimisation comme suit :
Minimisation de la volatilité/variance du résultat net,
sous contrainte de coût de réassurance limité à un seuil
Nous pouvons définir le coût de la réassurance de deux manières : le montant des primes cédées (nous ne tenons pas compte de commissions et frais de réassurance dans cette formalisation), ou alors le montant moyen du résultat cédé aux réassureurs.
Le premier sera toujours positif et plus intuitif : il représente le coût direct pour se réassurer. Le deuxième peut prendre des valeurs négatives (si mortalité trop élevée), mais reflète l'équilibre primes-sinistres, et la réduction de coût indirecte que représentent commissions, et participations aux bénéfices.

Nous rappelons que sans participation aux bénéfices ($t_{PB} = 0$),

$$Res^{net}(1) = \sum_{i=1}^{n}(1 - \beta_i - \gamma_{1,i} - \gamma_{2,i}) \cdot \Big(P_i(1) - K_i \cdot 1_{T_{x_i} \leq 1}\Big)$$

(pas de frais, pas de commissions, pas de participation aux bénéfices pour simplifier les écritures).
Le programme général s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} min \quad & Var\, Res^{net}(1) \\ s.c. \quad & Co\widehat{u}t \leq Co\widehat{u}tMax \end{aligned}$$

Tout d'abord, remarquons que par la forme quadratique de la volatilité (ou variance), il y a lors de la cession en réassurance une perte pure de volatilité, en plus de celle cédée au(x) réassureur(s).
En effet,

$$Var(Res) - Var(Res^{net}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - (1 - \beta_i - \gamma_{1,i} - \gamma_{2,i})^2\right) \cdot K_i^2 \cdot q_{x_i}(1 - q_{x_i})$$

Or la variance du résultat cédé à la réassurance vaut

$$\sum_{i}^{n}(\beta_i + \gamma_{1,i} + \gamma_{2,i})^2 \cdot K_i^2 \cdot q_{x_i}(1 - q_{x_i})$$

Lorsque x parcourt $]0, 1[$, $1 - (1 - x)^2 - x^2 = 2x(1 - x) > 0$, ce qui justifie la perte pure de volatilité.

$$Var(Res) - Var(Res^{net}) \geq Var(Res - Res^{net})$$

Il est plus significatif en terme de cession de regarder la variance cédée du résultat plutôt que la variance du résultat cédé.

Reprenons notre programme d'optimisation. On contraint les coûts directs (primes cédées) à être inférieurs à un seuil.

$$\begin{aligned} Max \quad & Var(Res(1)) - Var(Res^{net}(1)) \\ s.c. \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + \gamma_{1,i} + \gamma_{2,i}) \cdot P_i(1) \leq Co\widehat{u}tMax \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, on considère les coûts de réassurance étant représentés par le résultat cédé à la réassurance. Le programme s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Max \quad & Var\left(Res(1)\right) - Var(Res^{net}(1)\big) \\ s.c. \quad & E\left(Res(1) - Res^{net}(1)\right) \leq Co\widehat{u}tMax \end{aligned}$$

ce qui formellement devient :

$$\begin{array}{rl} Max & \sum_{i=1}^{n} \left(1-(1-\beta_i-\gamma_{1,i}-\gamma_{2,i})^2\right) \cdot K_i^2 \cdot q_{x_i}(1-q_{x_i}) \\ s.c. & \sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\gamma_{1,i}+\gamma_{2,i}) \cdot (P_i(1)-K_i \cdot q_{x_i}) \leq CoutMax \end{array}$$

Définissons le deuxième programme d'optimisation comme suit :
Minimisation du capital requis sous Solvabilité 2 en formule standard,
sous contrainte de coût de la réassurance inférieur à un seuil
Soit SCR le capital requis au titre des quatre risques ($mortality$, $lapse$, CAT et $default$) que nous étudions ici pour le portefeuille "Temporaire Décès" considéré.

$$\begin{array}{rl} Min & SCR \\ s.c. & \widehat{Cout} \leq \widehat{CoutMax} \end{array}$$

Une première idée consisterait à minimiser chacun des SCR des sous-modules.

$$\begin{array}{rl} Min & SCR_{mortality} \\ s.c. & \widehat{Cout} \leq \widehat{CoutMax} \end{array}$$

qui en reprenant l'expression du $SCR^{NET}_{mortality/lapse}$ plus haut, revient à maximiser les cessions de réassurance :

$$\begin{array}{rl} Max & \sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\gamma_{1,i}+\gamma_{2,i}) \cdot K_i \cdot \left(q_{x_i}^{choc}-q_{x_i}\right) \\ s.c. & \widehat{Cout} \leq \widehat{CoutMax} \end{array}$$

et de même, pour les $SCR_{Expense}$, SCR_{CAT} et $SCR_{default}$. Un limite évidente à cette résolution est que les SCR de souscription ($mortality$, $lapse$, CAT et $Expense$) et $SCR_{default}$ évoluent en sens logiquement opposé : plus il y a de cession de réassurance, plus le risque de défaut est élevé. De plus, de part les coefficients de corrélation entre les sous-modules, chaque SCR n'a pas le même poids dans le SCR global.

Ainsi, plus naturellement on cherchera à minimiser un montant plus global, calculé comme suit :

$$SCR = \sqrt{SCR_{Life}^2 + SCR_{default}^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot SCR_{Life} \cdot SCR_{Default}}$$

en utilisant les coefficients de corrélation données ci-dessous, figurant dans les spécifications techniques du QIS5.

	Default	Life
Default	1	
Life	0,25	1

TABLE 2.2 – Coefficients de corrélation $SCR_{default}$ et SCR_{Life}, QIS5 [3]

et où SCR_{Life} est le capital requis pour les modules "Vie".
donc, on veut résoudre avec le SCR défini juste au-dessus

$$\begin{aligned} Min \quad & SCR \\ s.c. \quad & \widehat{Coût} \leq \widehat{CoûtMax} \end{aligned}$$

où $\widehat{Coût}$ et SCR dépendent directement des montants des recouvrements de la réassurance (SCR_{Life} dépend de $SCR_{mortality}$, SCR_{lapse} et SCR_{CAT}, lesquels dépendent directement des coefficients β_i, $\gamma_{1,i}$ et $\gamma_{2,i}$).

On entrevoit ici la complexité de la résolution, analytique tout du moins. On pourrait tout à fait définir une autre (ou d'autres) contrainte(s) : limiter le quantiles extrêmes de sinistres, attendre une volatilité de résultat cédée supérieure à un seuil, ...

2.1.9 Complexité de la résolution analytique

La première difficulté dans un programme d'optimisation est tout d'abord de réussir à le formaliser : définition des variables, des objectifs, et surtout des contraintes. Dans notre cas, les variables sont ciblées (la réassurance) mais les contraintes peuvent être multiples (volatilité, VaR, capital), avec un double objectif : réduction du risque vs. financement du capital. D'autre part, nous avons illustré ci-avant la problématique du mémoire par des exemples d'optimisation, qui permettent de rendre compte des enjeux de la réassurance. Cependant, pour rendre lisible et intelligible cette problématique, de nombreuses simplifications ont été faites : absence des frais directs de la cédante, des commissions de réassurance (pouvant même être spécifiées par type de produit "Décès"), de la participation aux bénéfices de la réassurance, des frais généraux des réassureurs, ...
Enfin, la complexité de la résolution est très sensible et dépend du nombre de paramètres de contrôle (variables de la réassurance), et de la forme de la fonction à optimiser (variance du résultat sans/avec PB, avec une ou plusieurs tranches de réassurance). En effet, optimiser une variance (ou volatilité) d'un résultat ne dépendant que d'un taux de cession de quote-part, lequel représente l'unique contrainte du programme, est aisé. Rajouter une limite en capital assuré, et/ou une participation aux bénéfices, rend la méthode analytique bien plus lourde. Illustrons ceci par un bref exemple.

En reprenant la dernière formalisation du premier programme d'optimisation (cf. ...) avec seulement une quote part de taux β sans limite en capital et sans participation aux bénéfices, on peut écrire le programme de maximisation de la variance cédée sous cette forme :

$$\begin{aligned} Max \quad & (1-(1-\beta)^2) \cdot A \\ s.c. \quad & \beta \cdot B \leq \widehat{CoûtMax} \\ s.c. \quad & 0 \leq \beta \leq 1 \end{aligned}$$

La fonction $f(\beta) = 1-(1-\beta)^2$ est strictement croissante en β. L'optimum en β est logiquement trouvé en $\beta_{optim} = \beta_{max} = \frac{\widehat{CoûtMax}}{B}$ et vaut $(1-(1-\beta_{optim})^2) \cdot A$.

Ajoutons simplement une participation aux bénéfices sur la réassurance : la variance conservée s'écrit

$$Var\left(Res^{net}(1)\right) = Var\left((1-\beta)\cdot Res(1) + t_{PB}\cdot\beta\cdot(Res(1))^{+}\right)$$

Dès lors, la solution optimale dépend très fortement de la distribution de $Res(1)$: le coefficient de corrélation linéaire entre $Res(1)$ et $Res(1)^{+}$ est proche de 1 lorsque l'étendue de la distribution se situe dans un domaine positif, au contraire diminue lorsque les valeurs négatives sont de plus en plus fréquentes. Il est donc nécessaire de passer par la simulation pour déterminer la distribution de $(Res(1))^{+}$.
Le problème gagne en complexité, tant au niveau de sa formulation que de sa résolution, si l'on ajoute des limites ou d'autres structures de réassurance, notamment en raison des effets de frictions des frais généraux et des frais des réassureurs. De plus, nous nous sommes placés que sur une seule année de projection : l'étude analytique en valeur actualisée devient difficile à manipuler. Regardons dans un premier temps les résultats d'analyse en moyenne-variance.

2.2 Résolution analytique

2.2.1 Théorie du portefeuille et analogie avec notre problématique

Notre étude vise à déterminer des conditions de réassurance satisfaisant des critères d'appétence ou d'aversion pour le risque. Ainsi notre agent économique (la cédante) a pour but de maximiser sa fonction de rentabilité espérée et/ou d'en minimiser le risque associé. Volatilité, Value-at-Risk, minimum et étendue de la distribution, et SCR sont autant d'indicateurs permettant de quantifier ce risque.
Commençons par une approche simple : le risque sera identifié par la mesure "volatilité" et la structure de réassurance est de type proportionnelle. Le taux de cession pour la police i est identifié par la notation a_i.
Dans ces conditions de moyenne-variance, il est assez immédiat de faire un lien avec la théorie du portefeuille et la sélection d'actif par rendement/risque, c'est à dire le modèle de Markowitz. Par analogie à ce modèle, nous assimilons chaque ligne de police à un actif risqué. Cela revient à déterminer un arbitrage optimal entre les polices du portefeuille qui ont chacune une rentabilité attendue et une volatilité donnée : $Res_i = P_i - S_i$ où S_i est une variable aléatoire. Cela présuppose que nous étudierons le modèle de Markowitz sans actif sans risque, car nous ne pouvons trouver d'équivalent parmi les assurés du portefeuille. Nous supposons par la suite la formulation du programme d'optimisation de Markowitz connue. L'adaptation de ce programme passe principalement par l'adaptation des contraintes. Plus particulièrement, la condition de la somme des poids égale à 1 n'est plus valable. En effet, nous ne définissons plus des poids mais des taux de cession pour les polices. La condition sur les a_i (taux de cession) peut devenir une condition sur le taux de cession moyen au global du portefeuille. L'autre condition de rentabilité objectif sera transformée en condition de résultat cédé objectif.

Nous prenons les notations suivantes : A le vecteur des taux de rétention, E le vecteur des

résultat moyen par police et Ω le vecteur de variance des résultats par police.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a_1 \\ \vdots \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} E(Res_1) \\ \vdots \\ E(Res_n) \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} Var(Res_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Var(Res_n) \end{pmatrix}$$

La volatilité nette de réassurance est $A'\Omega A$, le résultat moyen brut vaut $E'U$, et le net vaut $E'A$. On écrit alors notre programme "Analogie Markowitz" :

$$\begin{array}{ll} min & A'\Omega A \\ s.c. & (U - A)'E = E_{obj} \\ s.c. & \text{Condition sur A} \end{array}$$

Détaillons l'utilité de la deuxième condition et la difficulté à en trouver une. Dans la résolution du programme de Markowitz, c'est la présence de la deuxième condition qui permet d'exprimer la volatilité en fonction de la rentabilité objectif et de la forme quadratique de cette rentabilité objectif. Cette équation nous donne une hyperbole. Sans la troisième condition, on obtient une expression linéaire en volatilité et rentabilité attendue.

Voyons la résolution en l'absence de cette condition n^{o}2 :

$$\begin{array}{ll} min & A'\Omega A \\ s.c. & (U - A)'E = E_{obj} \end{array}$$

Le lagrangien a pour expression

$$\mathscr{L} = A'\Omega A - \lambda \cdot ((U - A)'E - E_{obj})$$

La première condition du lagrangien $\mathscr{L}$ nous donne l'égalité

$$2A'\Omega + \lambda E' = 0$$

soit

$$A = -\frac{\lambda}{2}\Omega^{-1}E$$

(Ω est diagonale et ses coefficients sont strictement positifs donc elle est inversible).
En remplaçant dans la seule condition pour l'instant,

$$E_{obj} = E'(U + \frac{\lambda}{2}\Omega^{-1}E)$$

De là, on obtient λ

$$\lambda = 2 \cdot \frac{E_{obj} - E'U}{E'\Omega^{-1}E}$$

Ainsi, on peut déterminer l'équation de la frontière efficiente

$$A'\Omega A = A'(-\frac{\lambda}{2}E)$$

soit

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{4}E'\Omega^{-1}E$$

et donc

$$\sigma^2 = \left(\frac{E_{obj} - E'U}{E'\Omega^{-1}E}\right)^2 \cdot E'\Omega^{-1}E$$

d'où

$$\sigma = \frac{E'U - E_{obj}}{\sqrt{E'\Omega^{-1}E}}$$

$E'U - E_{obj}$ représente le résultat après cession à la réassurance. E_{obj} est donc borné entre 0 et $E'U$. Cette équation de courbe nous indique que la frontière efficiente pour ce système à une contrainte est une droite.

Nous ajoutons maintenant une contrainte sur le vecteur A, en imposant une limite aux taux de cession moyen, limite que l'on notera α :

$$\begin{aligned} min \quad & A'\Omega A \\ s.c. \quad & (U - A)'E = E_{obj} \\ s.c. \quad & U'A = n \cdot (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Cette fois-ci, le lagrangien $\mathscr{L}$ s'écrit

$$\mathscr{L} = A'\Omega A + \lambda \cdot (E_{obj} - (U - A)'E) + \mu \cdot (n(1 - \alpha) - U'A)$$

Les conditions du premier ordre nous donne

$$2A'\Omega + \lambda E' - \mu U' = 0$$

soit

$$\Omega A = \frac{1}{2} \cdot (\mu U - \lambda E)$$

Le portefeuille efficient est donc

$$A = \frac{1}{2} \cdot \Omega^{-1}(\mu U - \lambda E)$$

En remplaçant A dans les deux autres conditions du premier ordre, on obtient le système :

$$\begin{cases} E_{obj} & = E' \left(U - \frac{1}{2} \cdot \Omega^{-1}(\mu U - \lambda E) \right) \\ n \cdot (1 - \alpha) & = U' \left(\frac{1}{2} \cdot \Omega^{-1}(\mu U - \lambda E) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'\Omega^{-1}E \cdot \mu - E'\Omega^{-1}E \cdot \lambda & = 2 \cdot (U'E - E_{obj}) \\ U'\Omega^{-1}U \cdot \mu - U'\Omega^{-1}E \cdot \lambda & = 2 \cdot n \cdot (1 - \alpha) \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned} a &= U'\Omega^{-1}E \\ b &= E'\Omega^{-1}E \\ c &= U'\Omega^{-1}U \\ d &= bc - a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b \cdot \lambda - a \cdot \mu & = 2 \cdot (E_{obj} - U'E) \\ -a \cdot \lambda + c \cdot \mu & = 2 \cdot n \cdot (1 - \alpha) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c \cdot 2 \cdot (E_{obj} - U'E) + a \cdot 2 \cdot n \cdot (1 - \alpha)}{d} \\ \mu &= \frac{b \cdot 2 \cdot n \cdot (1 - \alpha) + a \cdot 2 \cdot (E_{obj} - U'E)}{d} \end{aligned}$$

Finalement, en reprenant la première condition nous donnant ΩA

$$A'\Omega A = \frac{1}{2} \cdot (\mu \cdot U'A - \lambda \cdot E'A)$$

soit en développant

$$A'\Omega A = \frac{b}{d}(n(1 - \alpha))^2 + \frac{c}{d}(U'E - E_{obj})^2 - 2 \cdot \frac{a}{d} n(1 - \alpha)(U'E - E_{obj})$$

Ceci correspond à l'équation d'une hyperbole. Nous pouvons tracer la surface en fonction de alpha et Ep.
Le but est maintenant de déterminer le couple [Ep , α] optimal. Pour cela, on détermine le portefeuille optimal : il correspond au point M pour lequel la droite OM (où O est l'origine (0,0)) est tangente à la frontière efficiente.

On note σ la racine carrée de $A'\Omega A$: c'est la volatilité nette de réassurance.

Au point E_M, on a :

$$\sigma_M^2 = \frac{b}{d}(n(1-\alpha_M))^2 + \frac{c}{d}(U'E - E_M)^2 - 2\cdot\frac{a}{d}n(1-\alpha_M)(U'E - E_M)$$

La pente de la tangente en M vaut :

$$\frac{\partial E_M}{\partial \sigma_M} = \frac{\partial E_M}{\partial \sigma_M^2}\frac{\partial \sigma_M^2}{\partial \sigma_M} = \frac{2\sigma_M}{-2\frac{c}{d}(U'E - E_M) + 2\frac{a}{d}n(1-\alpha_M)}$$

Lorsque $\sigma = 0$, le résultat cédé vaut $U'E$ (cession totale du risque donc cession totale de la rentabilité), donc la droite d'équation $y = E_M + \frac{\partial E_M}{\partial \sigma_M}\cdot(\sigma - \sigma_M)$ vérifie en $\sigma = 0$

$$E_M - U'E = \sigma_M\frac{\partial E_M}{\partial \sigma_M} = \frac{2\sigma_M^2}{-2\frac{c}{d}(U'E - E_M) + 2\frac{a}{d}n(1-\alpha_M)}$$

alors, en développant σ_M^2, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\frac{2c}{d}(U'E-E_M)^2-\frac{2a}{d}n(1-\alpha_M)(U'E-E_M) = \frac{2b}{d}(n(1-\alpha_M))^2+\frac{2c}{d}(U'E-E_M)^2-\frac{4a}{d}n(1-\alpha_M)(U'E-E_M)$$

soit en simplifiant

$$U'E - E_M = \frac{b}{a}n(1-\alpha_M)$$

Le résultat cédé optimal vaut donc $E_M = U'E - \frac{b}{a}n(1-\alpha_M)$.

Avant d'aller plus loin, résumons nos développements :
Nous avons vu que sans condition sur le taux de cession moyen en nombre de polices, le risque après réassurance est linéairement lié à la rentabilité après réassurance. (La volatilité nette s'exprime comme une fonction linéaire de la rentabilité nette).
Cependant, en utilisant ce programme, nous n'avons pas de variable de contrôle sur la matrice A. En rajoutant la contrainte sur le taux moyen de cession, on retrouve ce contrôle.
Mais nous pouvons rapidement remarquer qu'une difficulté subsiste : le contrôle est maintenant déterminé par deux variables, le résultat cédé et le taux de cession moyen. Mais ces variables ne sont pas tout à fait indépendante, car si le taux de cession moyen est nul, tous les taux de cession sont nuls, et donc le résultat cédé est nécessairement nul. Il en est de même lors de la cession totale. Nous nous bornerons à l'étude des cas où α est strictement positif et strictement inférieur à 1. Dans ce domaine délimité, l'étude revient à trouver le meilleur arbitrage entre les polices permettant de céder un minimum de rentabilité, un maximum de risque, tout en respectant le taux de cession moyen.

La question qui subsiste est donc : pour un taux de cession moyen donné, la valeur de rentabilité espérée cédée est-elle atteignable ?

Existe-t-il une matrice A donc les valeurs sont comprises entre 0 et 1 (bornes d'un taux de cession) qui nous donne un point M optimal ?

Pour illustrer ces résultats analytiques et les limites qui en découlent, nous avons procédé au calcul avec les deux polices décrites ci-dessous :

n	2			
	K	qx	P	E
Assuré 1	100 000	0,04	10 000	6 000
Assuré 2	25 000	0,01	1 000	750

Omega -1	2,60E-09	-	a	1,37E-04
	-	1,62E-07	b	1,85E-01
U'O E	1,37E-04		c	1,64E-07
E' O E	1,85E-01		d	1,16E-08
U' O U	1,64E-07		U'E	6 750

FIGURE 2.2 – Paramètres de la frontière efficiente dans le modèle analogie Markowitz

A partir de cet exemple, nous allons dérouler les étapes suivantes :

- Tracer la frontière efficiente : E_{obj} fonction de σ, pour des valeurs de α
- A partir des calculs de λ et μ, nous obtenons la matrice A, pour chaque combinaison de E_{obj} et α
- Nous isolons les combinaisons respectant $a_i \in [0; 1]$
- Nous déterminons les points optimaux E_m fonction de α
- Nous isolons les points optimaux pour lesquels il existe une matrice A viable

Les données nous permettent d'effectuer les calculs matriciels nécessaires, et nous pouvons tracer la rentabilité nette en fonction du risque σ, et ce pour une valeur de α donnée.

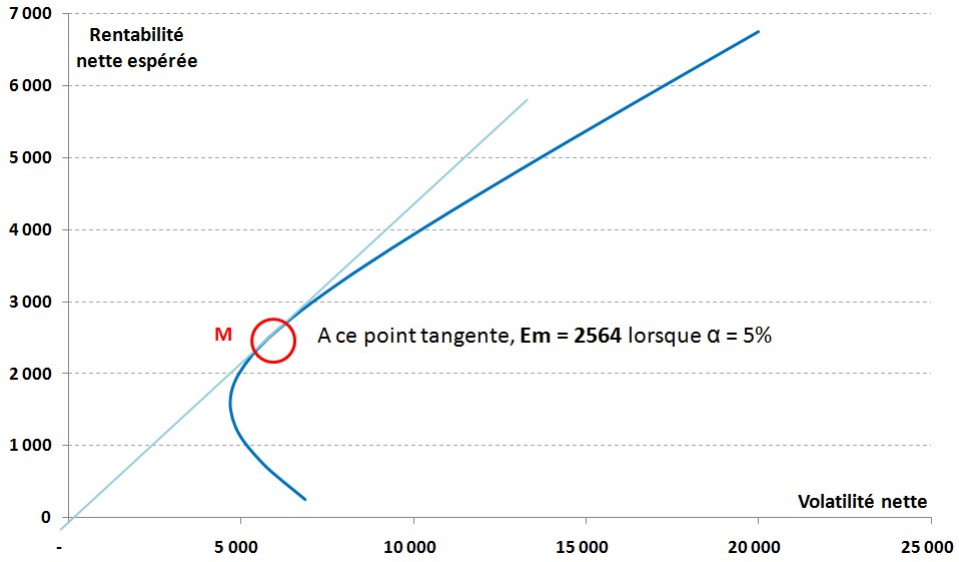


FIGURE 2.3 – Frontière efficiente et point tangente optimal

Comme mentionné plus haut, une difficulté pour valider cette méthode est l'indépendance de E_{obj} et α. Attardons-nous un peu plus spécifiquement sur celle-ci.
Nous pouvons dans un premier temps observer le déplacement de la frontière efficiente quand α varie.

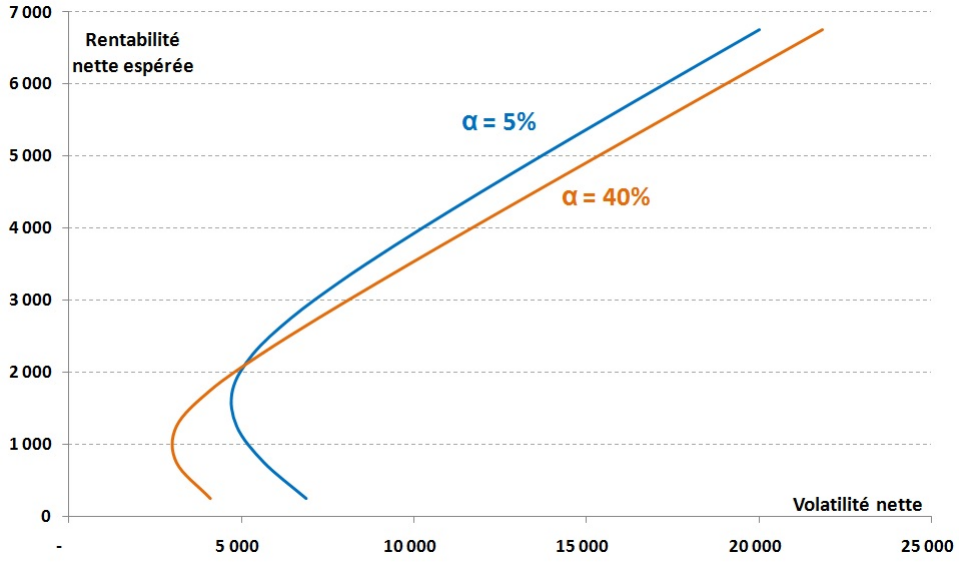


FIGURE 2.4 – Décalage de la frontière efficient en de la contrainte sur A

Dans un deuxième temps, il possible d'obtenir les vecteurs A pour chaque couple de paramètres objectifs $[E_{obj}\ ;\alpha]$. Nous reportons seulement les couples donc les taux de cession sont positifs

et inférieurs à 100%.

Alpha \ E_obj	100	200	300	400	500	600
1%	[1,62% ; 0,38%]					
2%	[1,33% ; 2,67%]	[3,24% ; 0,76%]				
3%	[1,05% ; 4,95%]	[2,95% ; 3,05%]	[4,86% ; 1,14%]			
4%	[0,76% ; 7,24%]	[2,67% ; 5,33%]	[4,57% ; 3,43%]	[6,48% ; 1,52%]		
5%	[0,48% ; 9,52%]	[2,38% ; 7,62%]	[4,29% ; 5,71%]	[6,19% ; 3,81%]	[8,1% ; 1,9%]	[10% ; 0%]
6%	[0,19% ; 11,81%]	[2,1% ; 9,9%]	[4% ; 8%]	[5,9% ; 6,1%]	[7,81% ; 4,19%]	[9,71% ; 2,29%]
7%		[1,81% ; 12,19%]	[3,71% ; 10,29%]	[5,62% ; 8,38%]	[7,52% ; 6,48%]	[9,43% ; 4,57%]
8%		[1,52% ; 14,48%]	[3,43% ; 12,57%]	[5,33% ; 10,67%]	[7,24% ; 8,76%]	[9,14% ; 6,86%]
9%		[1,24% ; 16,76%]	[3,14% ; 14,86%]	[5,05% ; 12,95%]	[6,95% ; 11,05%]	[8,86% ; 9,14%]
10%		[0,95% ; 19,05%]	[2,86% ; 17,14%]	[4,76% ; 15,24%]	[6,67% ; 13,33%]	[8,57% ; 11,43%]
11%		[0,67% ; 21,33%]	[2,57% ; 19,43%]	[4,48% ; 17,52%]	[6,38% ; 15,62%]	[8,29% ; 13,71%]
12%		[0,38% ; 23,62%]	[2,29% ; 21,71%]	[4,19% ; 19,81%]	[6,1% ; 17,9%]	[8% ; 16%]
13%		[0,1% ; 25,9%]	[2% ; 24%]	[3,9% ; 22,1%]	[5,81% ; 20,19%]	[7,71% ; 18,29%]
14%			[1,71% ; 26,29%]	[3,62% ; 24,38%]	[5,52% ; 22,48%]	[7,43% ; 20,57%]
15%			[1,43% ; 28,57%]	[3,33% ; 26,67%]	[5,24% ; 24,76%]	[7,14% ; 22,86%]

FIGURE 2.5 – Table des combinaisons admissibles de taux de cession

Ce tableau nous montre bien que la frontière efficiente n'est plus valable partout car dépend du couple $[E_{obj}\,;\alpha]$ choisi. Par exemple, la frontière efficiente ne sera composée que d'un point si α vaut 1%, car une seule valeur de E_{obj} (le résutlat cédé cible) nous permet d'obtenir des taux de cessions corrects. Et donc, pour cet unique E_{obj} (100 quand $\alpha = 1\%$), on obtient une unique valeur viable de σ^2, la valeur de la variance correspondante.

Nous en déduisons également que le point de rentabilité optimale E_M, dont l'expression développée plus haut et dépendante de α, n'existe pas toujours.

Finalement, tout ceci a permis de montrer que cette première adaptation des conditions est difficile car non propre et totale. Une solution alternative et déjà abordée dans la littérature nécessite de se tourner vers l'optimisation non linéaire, et des méthodes type de de Finetti.

Inspirons nous des travaux de de Finetti (reprit et étendu par JF Wahlin et F.Glineur [5]) pour trouver un niveau de cession en proportionnel pour lequel la variance du résultat est minimale, pour un niveau de résultat espéré donné. L'expression générale du programme d'optimisation est la suivante :

$$\begin{aligned} \min \quad & Var(R_{1an}^{net}) \\ s.c. \quad & R > 0 \\ s.c. \quad & E(R_{1an}^{net}) = res_{obj} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} \min\left(1; \frac{R}{SI_i}\right)^2 Var(S_i) \\ s.c. & R > 0 \\ s.c. & \sum_{i=1}^{n} \min\left(1; \frac{R}{SI_i}\right)(P_i - E(S_i)) = res_{obj} \end{array}$$

A priori, ce programme d'optimisation n'admet qu'une solution déterminée entièrement par la contrainte sur le résultat moyen. Cette solution, dans le domaine des valeurs admissibles, doit être trouvée numériquement. Voyons un moment ce qu'il se passe lorsque l'on augmente le nombre de paramètres variables, et permettons un taux de cession "individuel", en résolvant donc dans un premier temps le programme sur les $(a_i)_i$:

$$\begin{array}{ll} \min & Var(R_{1an}^{net}) = \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)^2 Var(S_i) \\ s.c. & \forall i, a_i \leq 1 \\ s.c. & \forall i, a_i \geq 0 \\ s.c. & \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)(P_i - E(S_i)) = res_{obj} \end{array}$$

2.2.2 Optimisation convexe et résolution de de Finetti

Rappels d'optimisation convexe

Nous détaillons ici les conditions d'optimalité pour de l'optimisation non-linéaire convexe. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} & \min f(x) \\ s.c. & \\ & g_j(x) \leq c_j, j = 1, ..., m \\ & h_k(x) = d_k, k = 1, ..., p \end{array}$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ sont les inconnues. On définit alors $\mathscr{L}$ le lagrangien

$$\mathscr{L}(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (g_j(x) - c_j) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (h_k(x) - d_k)$$

où les μ_j et λ_k sont les facteurs de Lagrange pour les deux contraintes respectives. Les conditions du premier ordre connues sous le nom des conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont nécessaires pour l'optimalité du vecteur x

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{L} & = & 0 \ \forall i \\ \mu_j \geq 0, g_j(x) \leq c_j \, and \, \mu_j(g_j(x) - c_j) & = & 0 \ \forall j \\ h_k(x) & = & d_k \ \forall k \end{array}$$

Ce résultat ne donne cependant pas de condition suffisante pour s'assurer de l'optimalité d'un vecteur donné. Nous introduisons la notion d'optimisation convexe en ajoutant la condition de convexité sur la fonction objectif f et sur les fonctions de contraintes g et h ci-dessus. $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ pour tout α dans $[0,1]$

Résolution La convexité de la fonction objectif et des fonctions de contraintes est admise, car ce sont des sommes de fonction connues convexes.

Nous écrivons le Lagrangien du programme comme suit :

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \sum_{i=1}^{n}\left((1-a_i)^2 Var(S_i) + x_i(a_i-1) - y_i a_i\right) \\ &+ \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(P_i - E(S_i)) - \sum_{i=1}^{n}(P_i - E(S_i)) + res_{obj}\right)\end{aligned}$$

Dans ce cas, les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) permettent de trouver une unique solution optimale (convexité), et imposent que :

$$\begin{aligned} -2Var(S_i)(1-a_i) + x_i - y_i + \lambda(P_i - E(S_i)) &= 0 \qquad \forall i = 1...n \\ a_i &\leq 1 \qquad \forall i = 1...n \\ a_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1...n \\ x_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1...n \\ y_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1...n \\ x_i(1-a_i) &= 0 \qquad \forall i = 1...n \\ y_i a_i &= 0 \qquad \forall i = 1...n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i(P_i - E(S_i)) &= \sum_{i=1}^{n}(P_i - E(S_i)) - res_{obj} \end{aligned}$$

1) on suppose tous les $x_i > 0$. Alors (6) implique que $a_i = 1$, et donc par (7) $y_i = 0$.
Dans (1), cela donne : $x_i = -\lambda(P_i - E(S_i))$.
La condition (4) impose finalement

$$\lambda(P_i - E(S_i)) \leq 0$$

2) on suppose tous les $y_i > 0$. Alors (7) implique que $a_i = 0$, et donc par (6) $x_i = 0$.
Dans (1), cela donne : $-2Var(S_i) - y_i + \lambda(P_i - E(S_i)) = 0$.
La condition (5) impose finalement $-2Var(S_i) + \lambda(P_i - E(S_i)) \geq 0$
soit

$$\frac{\lambda(P_i - E(S_i))}{2Var(S_i)} \geq 1$$

3) La dernière combinaison possible est $x_i = 0$ et $y_i = 0$.
Alors, $-2Var(S_i)(1 - a_i) + \lambda(P_i - E(S_i)) = 0$ soit :

$$a_i = 1 - \frac{\lambda(P_i - E(S_i))}{2Var(S_i)}$$

Ceci est acceptable au vu des inégalités (2) et (3) lorsque :

$$0 \leq \frac{\lambda(P_i - E(S_i))}{2Var(S_i)} \leq 1$$

Il est possible de résumer ces 3 cas en un seul et exprimer la valeur de a_i : en notant

$$\phi_i = \frac{P_i - E(S_i)}{2Var(S_i)}$$

on a

$$a_i = 1 - \min\left(1; \max(0; \lambda\phi_i)\right)$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & a_i & \leq 1 \\ 0 \leq & 1 - a_i & \leq 1 \\ P_i - E(S_i) - (P_i - E(S_i))^+ \leq & (1 - a_i)(P_i - E(S_i)) & \leq (P_i - E(S_i))^+ \end{array}$$

Puisque $res_{obj} = \sum_{i=1}^{n}(1 - a_i)(P_i - E(S_i))$, on obtient l'intervalle pour la valeur objectif du résultat, dépendant uniquement des données (primes et sinistres probables) :

$$0 \leq res_{obj} \leq \sum_{i=1}^{n}(P_i - E(S_i))^+$$

Reste à déterminer λ. On remplace l'expression trouvée des a_i pour chacun des cas, dans la condition (8) (objectif de résultat) :

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(1; \max(0; \lambda\phi_i)\right)(P_i - E(S_i)) = res_{obj}$$

Le a_i obtenu représente le taux optimal de cession de chaque police, lorsque λ satisfait la contrainte sur le résultat objectif. L'utilisation de ces taux dans le calcul de la variance (ou volatilité) nous donne une frontière efficiente lorsque l'on trace la volatilité fonction du résultat objectif. Nous tracerons cette frontière avec les données de notre portefeuille. Maintenant, essayons de trouver des rétentions optimales. Nous supposons que le portefeuille est segmenté en m sous-portefeuilles. Pour le segment j, la rétention vaut R_j. Pour chaque assuré, le taux

de cession vaut $a_{ij} = max(0, 1 - \frac{R_j}{SI_i})$ Il n'y a plus que m variables de décision. Le lagrangien définit plus haut devient :

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} \left((1-a_{ij})^2 Var(S_i) \right) + x_j(a_{ij} - 1) - y_j a_{ij} \right) \\ &+ \lambda \left(\sum_j \sum_{i=1}^{n_j} a_{ij}(P_i - E(S_i)) - \sum_{i=1}^{n} (P_i - E(S_i)) + res_{obj} \right)\end{aligned}$$

La condition n°1 des équations KKT pour les m variables s'écrit alors :

$$-2\sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i)(1-a_{ij}) + x_j - y_j + \lambda \sum_{i=1}^{n_j} (P_i - E(S_i)) = 0 \qquad \forall j = 1...m$$

Nous pouvons réécrire la cas oú $x_j = 0$ et $y_j = 0$ et remplacer l'expression de a_{ij} ce qui donne l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n_j} 2 \cdot \min(1, \frac{R_j}{SI_i}) Var(S_i) - \lambda(P_i - E(S_i)) = 0$$

Les autres conditions permettent d'obtenir l'écriture pour le tableau de plein optimaux (λ facteur lagrangien) :

$$R_j = \lambda \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (P_i - E(S_i))}{2 \sum_{i=1}^{n_j} \frac{Var(S_i)}{SI_i}}$$

Remarquons que si l'on cherche à trouver un unique niveau de rétention optimal, la condition sur la moyenne impose λ et donc impose l'unique valeur optimale de R. Ceci permet de se poser la question d'un découpage en tranche du portefeuille par montant des sommes assurées (découpage vertical) ou le découpage en sous-portefeuilles (découpage horizontal). Ce dernier est surtout possible pour des risques que l'on trouve en non-vie ; il ne sera pas traité ici. Par contre, nous pouvons dorénavant observer que superposer des excédents de plein qui ont des conditions identiques revient à la même chose que d'en utiliser un seul. La problématique importante est donc l'optimisation de ces conditions pour différentes tranches. Cependant, la formalisation de ces contraintes et leur résolution ne sont pas aisées. Pour passer outre cette contrainte analytique, il est nécessaire de passer à l'analyse numérique. Nous verrons entre autres les effets de la superposition de tranches d'excédent de plein à conditions différenciées.

Utilisons deux variables de décision en mélangeant un taux de cession en quote part et un taux de cession en excédent de plein, comme il est décrit dans la partie *formalisation*. Pour l'assuré i, le taux de rétention s'écrit $1 - a_i = (1-\alpha) \cdot \min(1, \frac{R}{SI_i})$. Dans ce cas, nous pouvons trouver les résultats suivants :

– il existe plusieurs couples $(\alpha; R)$ qui donnent le même résultat objectif (résultat moyen) comme le montre la surface ci-dessous représentant le résultat net moyen

$$Res^{net}(\alpha, R) = \sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)\cdot \min(1, \frac{R}{SI_i})\cdot(P_i - E(S_i))$$

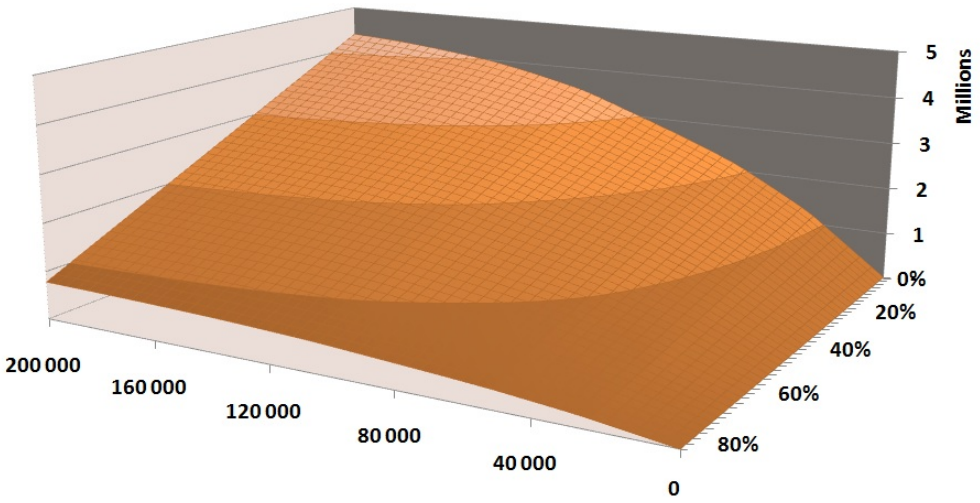


FIGURE 2.6 – Moyenne du résultat fonction de R et α

– on peut obtenir avec deux couples $(\alpha; R)$ différents donnant le même résultat moyen une volatilité nette différente
– pour un même résultat moyen, la volatilité nette est plus sensible à un abaissement de la rétention de l'excédent de plein qu'à une augmentation du taux de cession de la quote-part.

Le dernier point peut s'expliquer par le fait que la cession dans l'excédent de plein se fait à 100%, Au-delà du seuil. Lorsque ce seuil est abaissé, un nombre plus important de polices entre dans cette cession à 100% contrairement à la cession en quote-part limitée au taux α.

C'est le moment où nous allons valider ces affirmations par la résolution numérique.

Chapitre 3

La modélisation et l'analyse numérique

Dans une première section, nous allons détailler les outils statistiques et probabilistes qui nous permettent d'observer les effets de la réassurance. Nous verrons ensuite les moyens techniques mis en place pour pouvoir modéliser notre portefeuille avec la réassurance, et enfin nous analyserons les sorties du modèle. Implicitement, les axes représentant des quantités autres que des pourcentages ont pour unité l'euro.

3.1 Les outils d'analyse

En formulant les programmes d'optimisation, on a déjà introduit certains outils permettant de quantifier l'apport d'une structure de réassurance. Certains indicateurs sont connus et faciles à reporter. D'autres nécessitent une introduction théorique et une explication de leur mise en œuvre technologique.

Moyenne, volatilité et quantiles

Ces statistiques seront observées à partir de nos distributions pour chaque structure de réassurance. Ayant toute la distribution de nos variables aléatoires, nous pourrons aussi calculer l'"Expected Shortfall", ou bien Tail Value at Risk. C'est la moyenne des quantiles qui sont supérieurs au quantile correspondant à une probabilité donnée : $TVaR_p(X) = E(X|X > VaR_p(X))$. Dans notre contexte de distributions asymétriques, cette TVaR paraît plus adaptée pour mesurer l'épaisseur des queues de distribution.

Loss ratio et Combined ratio

Le "loss ratio" ou "ratio S/P" est le rapport entre les sinistres et les primes. Un ratio de plus de 100% signifie que le montant des sinistres est supérieur à celui des primes. Ce ratio est très utile pour l'étude d'un compte de résultat par année puisqu'il permet de juger de l'évolution de la sinistralité par rapport à la situation du portefeuille, dans une même unité : un euro de prime. C'est une variable très utile pour juger rapidement du bon calibrage d'hypothèses sur des comptes de résultat historique. Cependant, ce ratio est limité puisqu'il ne prend en

compte que les sinistres et les primes. On fait apparaître les frais dans un autre ratio appelé "Combined Ratio" ou "ratio combiné", dans lequel le montant des frais à payer est rajouté au montant de sinistre. Dans le cadre d'une étude sur la réassurance, ce ratio observé *a posteriori* est très intéressant, notamment pour observer l'effet des commissions et des participations aux bénéfices. Ce ratio s'écrit de la manière suivant avant réassurance :

$$CombinedRatio = \frac{Sinistres + Frais}{Primes}$$

En ajoutant la réassurance, il devient :

$$CombinedRatio^{net} = \frac{Sinistres^{net} + Frais^{net}}{Primes^{net}}$$

où ici $Frais^{net} = Frais - Commissions - PB$.
Cette statistique prend tout son sens lorsqu'il y a paiement ou non d'une participation de réassurance ou non suivant les scénarios de mortalité, et est très représentative de la performance financière d'une structure de réassurance.

Horizon de projection et Value In Force

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la durée de couverture (ou du moins les hypothèses faites sur celle-ci) revêt un rôle crucial dans les projections. On peut en effet parler de traité de réassurance annuel, pluri-annuel ou générationnel. Dans le cas d'un traité annuel, les conditions seront revues chaque années avec les réassureurs, qu'il s'agisse du périmètre du portefeuille, de la structure ou des niveaux de la structure, des pourcentages de commissions ou des conditions de participation aux bénéfices. Les conditions d'un traité pluri-annuel sont elles revues tous les 2 ou 3 ans, avec des clauses particulières concernant les affaires nouvelles ("new business"). Nous rappelons que dans l'étude qui nous intéresse, nous ne modélisons pas ces affaires nouvelles. Enfin, il est possible de couvrir le portefeuille par une réassurance qui suit la génération jusqu'à extinction (décès, résiliation ou fin du contrat) de tous les assurés.

La prise en compte des spécificités temporelles des traités influe donc sur les flux futurs, qu'il est possible d'observer via la valeur actuelle des flux financiers futurs. On se concentrera sur les flux de la variable aléatoire "*Résultat*", donc la valeur des flux actualisé est communément appelé Value-In-Force (ou VIF) est qui est une composante de l'Embedded Value. De manière plus formelle,

$$VIF(0,t) = \sum_{i=1}^{t} v^i \cdot Res(i)$$

où t représente l'horizon de calcul de la VIF, v le facteur d'actualisation et $Res(i)$ la variable aléatoire "*Résultat*" de l'année i. Le "0" signifie que ce montant est reporté à la date du calcul.

Nous verrons dans la suite que nous pouvons déterminer espérance et variance de cette variable, pour juger de l'efficacité d'une réassurance pluri-annuelle.

La dominance stochastique

Comme nous l'avons évoqué au début de cette section, les indicateurs classiques seront calculés et nous permettront de classer les structures de réassurance. On peut considérer le classement des structures de réassurance analogue au classement d'allocations dans des actifs financiers, et donc rapprocher nos méthodes d'optimisation d'espérance-variance-quantile de celles de la théorie du portefeuille. Notamment, nous étudierons les rapports de dominance stochastique entre les distributions obtenues à la suite de nos simulations.

Dans un premier temps, introduisons et définissons la dominance stochastique. La dominance stochastique se base sur la théorie de l'utilité, dans le cas d'agents averses au risque. On rappelle que la courbe d'utilité de tels agents est croissante et concave. La dominance stochastique permet de créer une relation d'ordre entre des distributions. Cette relation possède plusieurs degrés, desquels on ne retiendra dans notre cas que le premier et le second. Nous allons les définir ci-après.

Notons X et Y deux distributions. Pour un agent rationnel et averse au risque, on dira que X domine stochastiquement Y au premier ordre si et seulement si

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad P(X > u) \geq P(Y > u)$$

Cela signifie que l'agent préférera X à Y si pour toute valeur u, il a plus de chance d'avoir plus que u avec X qu'avec Y. Ce premier principe assez simple permet donc de situer rapidement la performance d'une structure de réassurance par rapport au brut de réassurance, et également par rapport aux autres structures, et ce en traçant les fonctions de répartition. En effet, la formulation mathématiques s'écrit aussi

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad F_X(u) \leq F_Y(u)$$

En générant deux lois normales de moyennes différentes mais de même volatilité, nous obtenons :

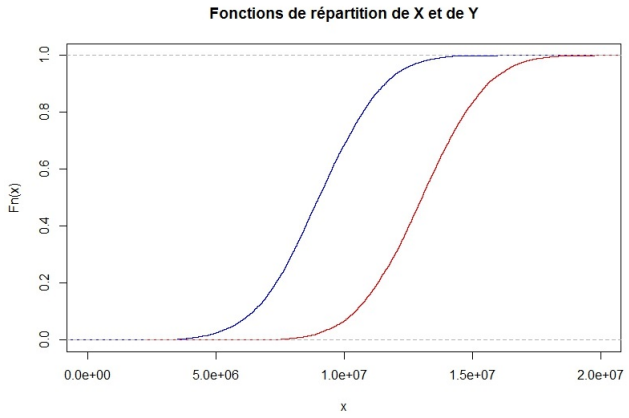


FIGURE 3.1 – Fonctions de répartition de lois normales à volatilités égales

La courbe rouge représente donc la distribution de X, qui domine stochastiquement au premier ordre, Y, en courbe bleue.

Cependant, il n'est pas toujours possible de déterminer cette dominance stochastique du premier ordre, comme dans le cas représenté sur le graphique suivant :

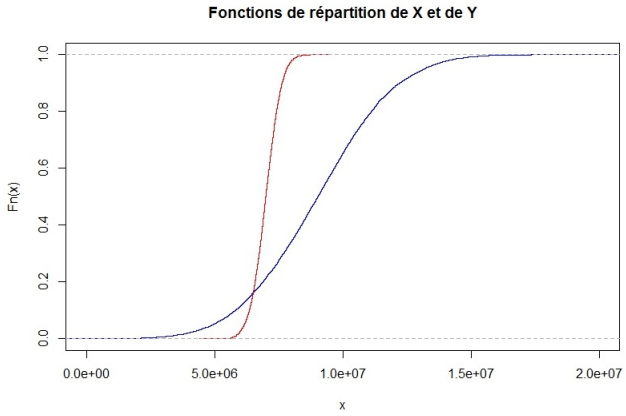


FIGURE 3.2 – Fonctions de répartitions avec point de concours

En effet, l'inégalité du premier ordre n'est pas vérifiée sur tous les quantiles. La théorie de la dominance stochastique introduit alors un deuxième ordre, définit comme suit : X domine stochastiquement Y au second ordre si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{x} F_X(u)du \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(u)du$$

Reprenons le graphique ci-dessus : pour des valeurs de x entre 0 et 6.0e6, il est évident que l'aire sous la courbe rouge est bien inférieure à celle sous la courbe bleue. On parle alors de dominance stochastique au second ordre si l'aire sous la courbe rouge reste inférieure quand on se déplace vers la droite des abscisses. On peut raisonnablement conjecturer dans le cas du graphique ci-dessus que Y (bleu) dominera stochastiquement au second ordre X (rouge).

La dominance stochastique se révèle être un outil puissant de comparaison de deux distributions, car elle tient compte de tous les points de la distribution. C'est aussi sa principale faiblesse car cela la rend difficile à mettre en œuvre.
Pour revenir à notre étude, nous appliquerons cette méthode aux distributions du résultat technique avant et après réassurance. Il sera possible d'identifier des structures pour lesquelles on observera une dominance stochastique du premier ordre, lesquelles nous pourrons classer dans les "meilleures" montages satisfaisant la contrainte de maximisation du résultat, puis affiner le classement en utilisant le second ordre.

Exigence S1, "Solvency Capital Requirement" S2 et Rentabilité

Nous utilisons comme mesure du capital les montants de fonds propres requis a minima dans Solvabilité 1 puis Solvabilité 2 ; les méthodes de calculs ont déjà été introduites dans la partie *formalisation*. Nous observerons donc les effets de la réassurance sur le montant des sommes assurées (pour S1) et plus largement sur tous les flux *best estimate* impactant le SCR dans la logique Solvabilité 2.

De plus, nous définissons notre indicateur de rentabilité (RORAC (*Return On Risk Adjusted Capital*), par le ratio du résultat moyen après réassurance par le capital requis (dans S1 ou S2, cela sera précisé). Par là nous supposons que l'allocation des fonds propres nécessaire à la tenue du portefeuille est minimale dans le respect des exigences de solvabilité. Ce $RORAC$ permet de déterminer la performance d'un portefeuille en regard du capital qui lui sont alloués, et donne une estimation très parlante du "véritable" coût d'une réassurance. Par exemple, une très simple quote part à 10% entraîne la cession de résultat (en montant) de 10% mais, à certaines conditions, le capital peut lui être aussi réduit de 10% (il y a cession de 10% du portefeuille donc des sommes assurées, et dans S1, ce calcul est assez direct). Dans cet exemple, la rentabilité au sens du $RORAC$ reste inchangée avant et après réassurance.

3.2 Mise en œuvre de la modélisation

Nous avons dans une première partie présenté l'aspect théorique de la problématique de l'optimisation de la réassurance pour un portefeuille d'assurance "Temporaire Décès". Abordons maintenant les solutions techniques et pratiques, permettant d'apporter des réponses aux questions soulevées précédemment.

3.2.1 Les données

Il est nécessaire, avant toute considération d'optimisation, de pouvoir projeter nos résultats au brut de réassurance. Pour cela, nous devons disposer de trois éléments fondamentaux : le portefeuille ligne à ligne des polices assurées par la cédante et les hypothèses de projection utilisées par cette cédante, et un outil de projection des flux.

Nous disposons du portefeuille d'un grand assureur français, qui compte plus de 500 000 lignes, réparties en 6 produits principaux (ils représentaient 98% des primes). Afin de respecter confidentialité, flexibilité et rapidité, nous avons retravaillé et généralisé ce portefeuille et les tarifs. La modélisation a été réalisée sur un *model point* de 24 666 assurés. La prime globale perçue la première année par la cédante s'élève à environ 12 millions d'euros.

Voici ci-dessous la distribution cumulée, en pourcentage de la population (24 667 assurés), des capitaux assurés de notre portefeuille :

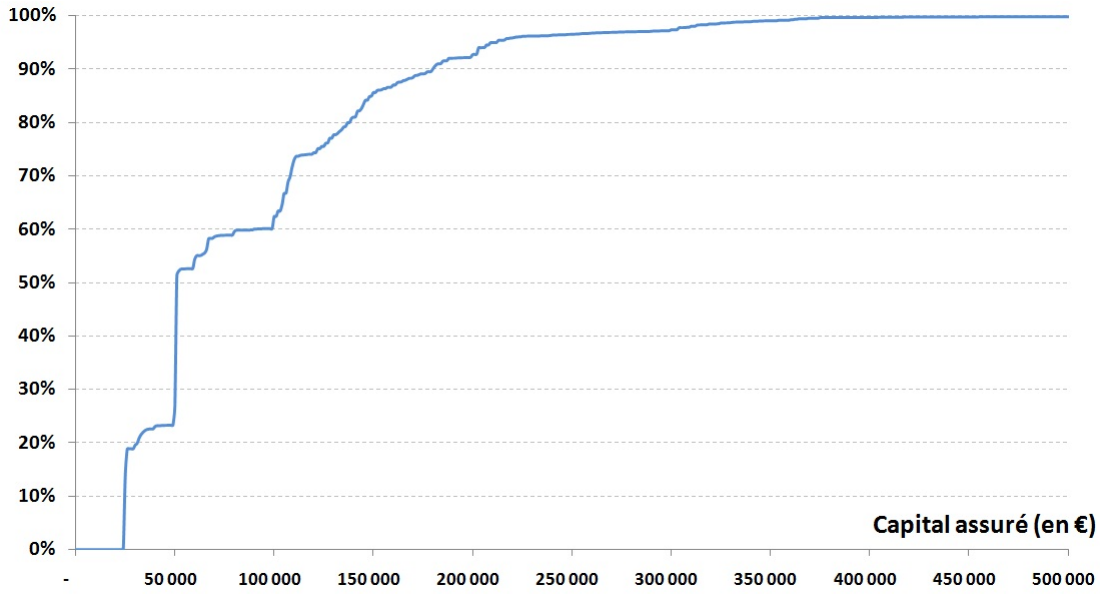


FIGURE 3.3 – Distribution cumulée des capitaux assurés

Nous pouvons remarquer que 99% des capitaux sont inférieurs à 500K euros, avec seulement 52 assurés possédant un capital compris entre $500K$ et $2M$. Cette distribution des capitaux assurés fait également figurer des sauts importants pour les valeurs 25K, 55K, 120K. Pour le premier, c'est un saut de 20%, le deuxième de 30% et le dernier de 15%. Au-delà, la croissance se fait de manière plus régulière. Il est important pour l'analyse qui suivra de garder en mémoire ces cassures dans la distribution : la position du plein (ou priorité) d'un excédent de plein (ou de sinistre) sera pleinement affectée par sa position par rapport à celles-ci. Par exemple, à 50K, un excédent porte sur près de 73% de la population alors qu'il ne concerne plus que 46% des assurés du portefeuille si on le monte à 60K.

C'est pour cela que nous reporterons dans nos sorties Excel la proportion de la population couverte (i.e. dont le capital assuré est Au-delà de la priorité) pour chaque montant de priorité (ou plein) Aussi, la bande de capital [60K,180K] contient 45% des assurés, pour des montants de primes importants (car les sommes assurées le sont). Cet intervalle sera donc sensible à la réassurance proportionnelle en terme de cession de primes.

Nous représentons également la répartition des assurés (en nombre) par âge à la date de projection.

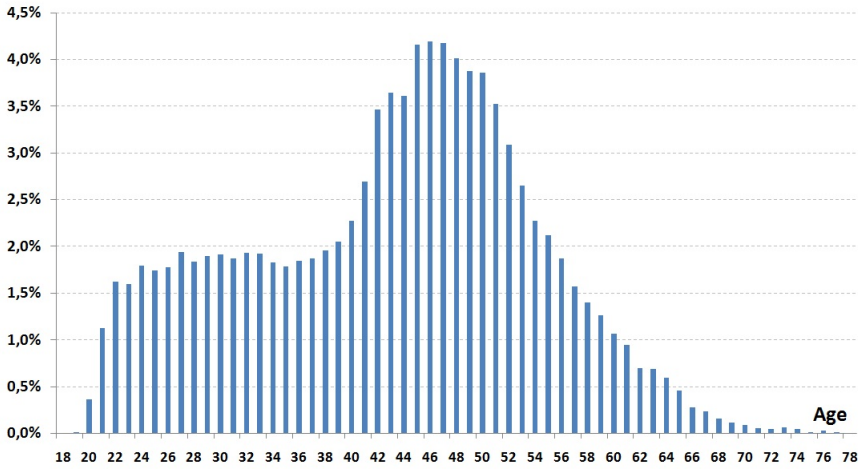


FIGURE 3.4 – Répartition des assurés par âge

En terme d'exposition, nous pouvons croiser âge et somme assurée en sommant l'exposition par âge.

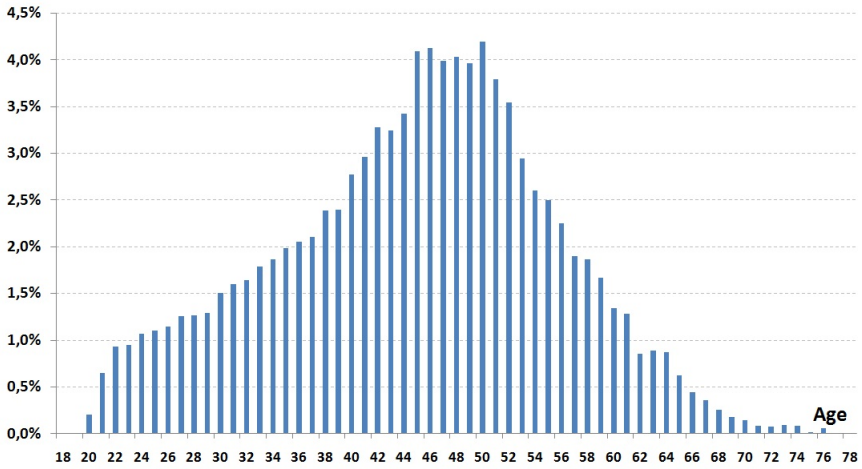


FIGURE 3.5 – Répartition des capitaux assurés par âge

Nous obtenons alors une figure de même tendance pour les âges supérieurs à 45 ans , avec cependant une exposition plus forte en capital qu'en nombre pour la tranche d'âge [30-40] ans. Une observation inverse se fait pour les âges avant 30 ans.

Quand aux frais généraux, nous supposerons qu'ils représentent 5,24% des primes acquises.

3.2.2 Le modèle sous LifeMetrica®

Les hypothèses de projection

Cette partie est fondamentale pour la projection des flux bruts de réassurance. Nous nous attacherons cependant à la garder courte et générale puisque le but du mémoire n'est pas de préciser la justesse des hypothèses de projection, mais plutôt de déterminer et d'observer à partir d'un jeu d'hypothèses (les plus générales possibles ici) les effets de la réassurance.
Nous utilisons comme table sous-jacente la table de mortalité TH-TH 00 02, à laquelle nous appliquons un abattement. Cet abattement est calibré sur les comptes historiques de la cédante. Nous pourrons dans la suite nous intéresser à la sensibilité des résultats à la mortalité. Nous n'intégrons pas encore de sur-mortalité "catastrophe", que nous étudierons sous forme de scénarios de stress et sur lesquels nous appliquerons différentes structures de réassurance.

Pour les résiliations, un taux de 10% a été choisi par la cédante pour ses projections. On pourrait affiner ces hypothèses en utilisant une répartition du taux de résiliations par âge, ou par ancienneté dans le portefeuille. Nos hypothèses suivent la même segmentation que celle choisie par la cédante.

Le modèle

LifeMetrica® est un logiciel développé et édité par Aon Benfield® permettant de modéliser les produits d'assurance sur la vie (risques de mortalité, longévité, incapacité, invalidité, catastrophe). Dans la même lignée que Prophet® ou Moses®, il permet, via un jeu d'hypothèses, de projeter les flux financiers futurs des produits modélisés. Il permet également (via Remetrica®) de modéliser des actifs et de projeter les flux correspondants.

Ce qui confère à cet outil originalité et puissance, c'est sa capacité à insérer et modéliser les programmes de réassurance. De plus, l'interface très maniable avec Excel facilite les étapes de reporting et d'analyse.
C'est sous ce logiciel que les modèles de ce mémoire ont été implémentés.

Dans cet environnement de travail nous insérons les composants permettant de modéliser tête par tête un produit "Temporaire Décès" :

- *Data Reader*
  Ce composant permet de lire une base de données Access avec des colonnes prédéfinies (Date de naissance, capital, ...) et d'importer ces données au format LifeMetrica
- *Assurance Calculator*
  Ce composant reçoit les données du *Data Reader* et procède au tirages aléatoires (décès, résiliation) et aux enregistrements comptables, à partir des hypothèses indiquées : table de mortalité, table de rachat, taux de frais, taux de revalorisation des capitaux, table des taux de prime, ... Les tirages se font ligne à ligne.
- *LifeCat*
  C'est un générateur de scénario CAT avec en entrée une probabilité de survenance, des taux d'attaque et des taux de mortalité pour les affectés

– *Proportional reinsurance*
  On insère ce composant si l'on veut modéliser une structure de réassurance proportionnelle. C'est dans ce composant que l'on indique taux de cession, plein, limite, commissions, taux de participation aux bénéfices.
– *Non Proportional reinsurance*
  On insère ce composant si l'on veut modéliser une structure de réassurance non proportionnelle par tête. C'est dans ce composant que l'on indique priorité, portée, commissions et prix de la tranche.
– *Life Consolidator*
  Ce composant est relié au "Calculator" et aux composants de réassurance. Il consolide tous les flux bruts et nets de réassurance (primes, sinistres, montants des commissions et des participations aux bénéfices, ...)

Il est alors possible de construire le modèle LifeMetrica® comme suit :

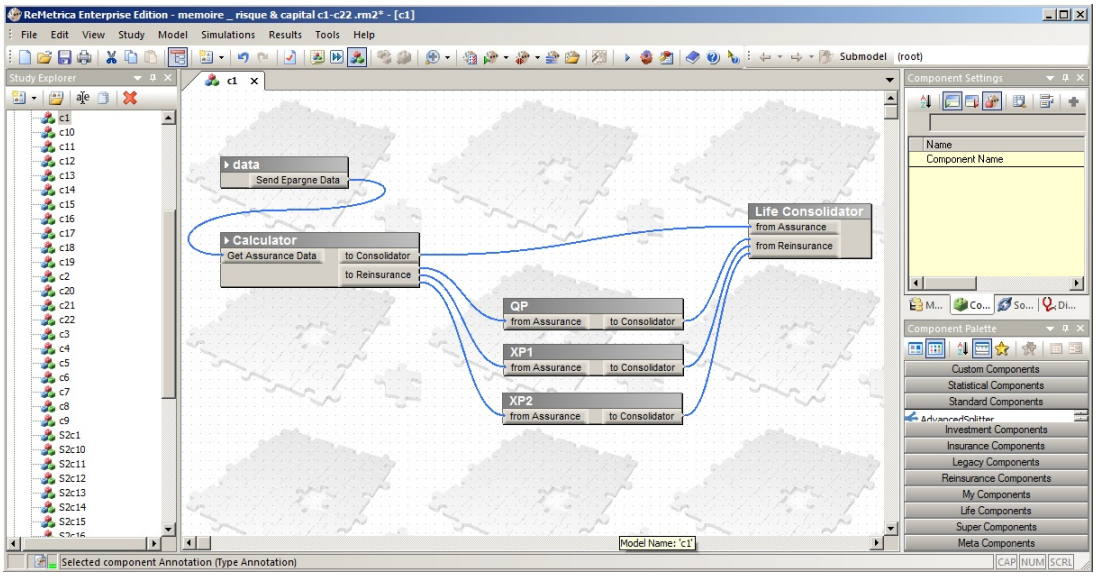


FIGURE 3.6 – Interface utilisateur du logiciel LifeMetrica®

On peut également insérer des composants pouvant modéliser un environnement économique (*Scenario*, *Yield*, ...). Tous ces composants sont reliés à partir de leurs "sockets" (les prises) par des liens, qui représentent la transmission des messages logiciels.

Le composant *Proportional reinsurance* permet de modéliser un traité de réassurance proportionnelle. Il possède un équivalent en non proportionnel. On ajoute autant de fois le composant qu'il y a de tranches de réassurance : dans notre cas, 3 composants sont nécessaires. Le premier est paramétré pour la Quote Part : taux de cession variable, rétention à 0, limite variable et durée variable ; le second représente le premier excédent de plein (rétention, limite

et durée variables) et enfin le troisième composant pour le second excédent de plein (rétention et durée variables). Les résultats des calculs sont agrégés et reportés dans le dernier composant *Life Consolidator* à partir duquel nous observons les variables qui nous intéressent.

Il faut maintenant lancer les simulations de ce modèle. Il important de dire que nous modélisons de manière stochastique (et non déterministe) pour étudier parfaitement les effets de la réassurance sur les statistiques résultant de la projection : étendue, volatilité, quantiles, ... Le composant *Assurance* est muni d'un générateur aléatoire (lois uniforme) déterminant l'issue, pour chaque ligne du portefeuille, par année (également appelée "interval") de projection. Il est également important de mentionner que nous supposons une répartition uniforme des décès dans l'année : ainsi, pour chaque issue "décès" ou "résiliation", il y a tirage aléatoire de la date de survenance, et en fonction nous calculons la prime et le sinistre à partir de la date de sortie, date de fin contractuelle, et périodicité des primes. Par exemple, le sinistre ne compte pas si la date tirée aléatoirement est postérieure (dans la même année) à la date de fin de la police. De la même manière, pour un assuré dont la date de résiliation se situe en deuxième moitié d'année et dont la prime est semestrielle, la moitié de la prime annuelle sera comptabilisée.

Assurons-nous maintenant de la convergence de nos sorties et du bon choix du nombre de simulations. Nous traçons ci-dessous pour le résultat de chaque tirage (points jaunes) ainsi que la moyenne (bleu), le quantile 0.5% (orange) et le pire résultat (rouge pointillé), pour la variable aléatoire "Résultat brut".

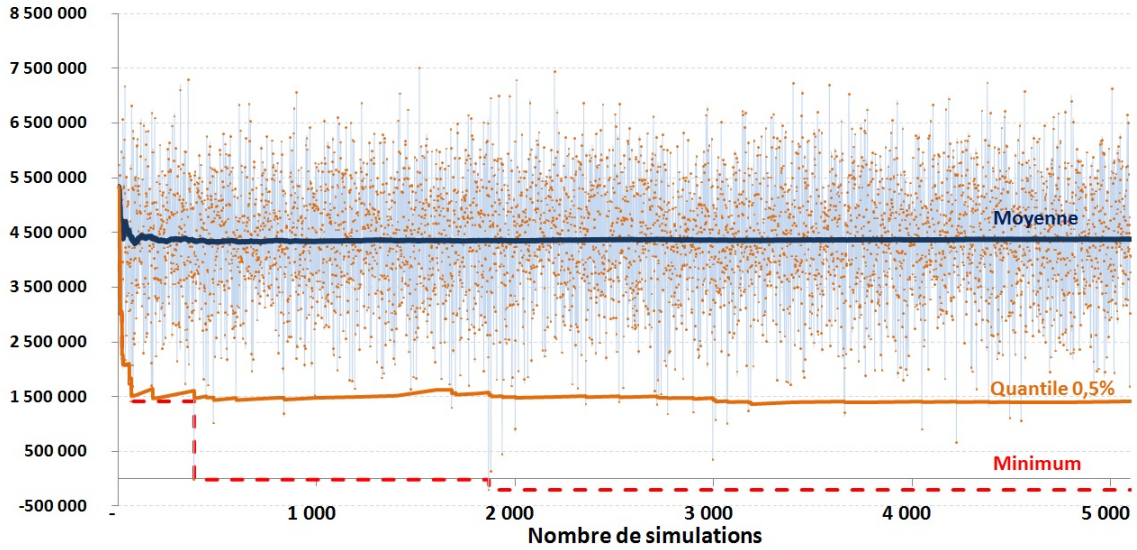


FIGURE 3.7 – Convergence des statistiques en fonction du nombre de simulations

Nous constatons que la moyenne est très rapidement stabilisée. En ce qui concerne les quantiles extrêmes, la valeur est stable après 3000 simulations. Enfin, le minimum de la distribution est

atteint à la simulation n^{o}1867 et ne sera pas dépassé après.

Vérifions également la convergence de la volatilité des résultats.

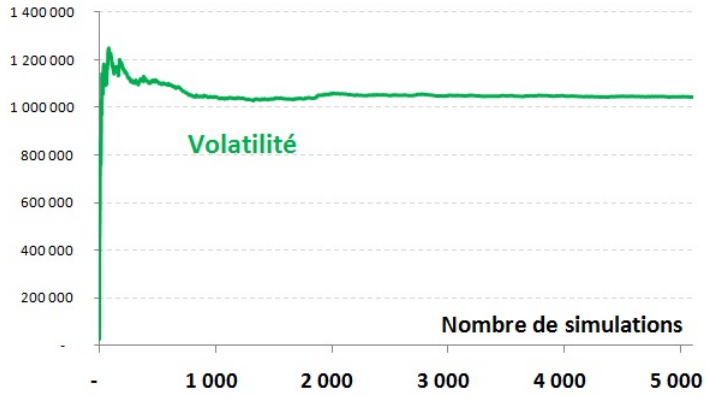


FIGURE 3.8 – Convergence de la volatilité observée en fonction du nombre de simulations

Le report des sorties

Une fois que le modèle a tourné avec le nombre de simulations souhaité, et que les sorties choisies sont stockées dans un fichier de résultat, il suffit d'ouvrir un fichier Excel dans l'étude LifeMetrica®, dans lequel des fonctions de lecture des sorties sont implémentées. On écrira dans la barre de formule d'une cellule *=RM2.Mean(Model Name ; Component Name ; Output Name ; Interval)* pour reporter la moyenne de la sortie sur l'intervalle voulu.

Les principales fonctions utilisées tout au long de notre étude sont listées et expliquées ci-après :

- *RM2.SampleValue* permet d'obtenir chaque réalisation de la variable aléatoire de sortie pour chaque intervalle, ce pour chaque simulation
- *RM2.StandardDeviation* calcule la volatilité de la variable aléatoire de sortie, par intervalle, sur le nombre de simulations effectuées
- *RM2.Probability* reporte la probabilité d'un évènement pour la variable aléatoire de sortie ($>$,$<$,$=$, ...)
- *RM2.Percentile* représente la fonction quantile de la variable aléatoire de sortie.

Le risque Catastrophe

Le risque Catastrophe sur un portefeuille "Temporaire Décès" peut être de deux sortes : un évènement singulier engendrant le décès de plusieurs assurés. Il est caractérisé par le fait que les décès soient dus au même fait générateur. Ce risque est ponctuel et limité dans le temps (généralement 72h à partir du fait générateur). Il résulte en général d'un accident et fait donc jouer les polices "Décès Accidentel" (crash d'avion, risque conflagration, rupture de barrage, tsunami).

L'autre catégorie de risque catastrophe regroupe les pandémies. Elles se définissent comme une diffusion d'un virus au sein d'une population : on parle de taux de contagion et de population affectée. Le second effet est que la mortalité de la population affectée est bien supérieure à celle de la population saine. Une pandémie (et les scénarios pandémie) sont donc décrit par deux paramètres : un taux d'affection et un taux de sur-mortalité lorsqu'il y a infection. Les pandémies historiques permettant de calibrer les modèles sont la grippe espagnole (1918), la grippe asiatique (1957) et la grippe de Hong Kong (1968). On peut également mentionner le SRAS en asie, ainsi que les infections dues au H5N1, H1N1 et encore plus actuel le foyer d'infection situé en Arabie Saoudite. A l'heure de la mondialisation, on ne peut être que plus sensible encore aux propagations mondiales de virus endémiques.

Pour quantifier ce risque, un nombre important de modèles existe. Le calibrage d'un tel modèle est difficile car il dépend de la concentration du portefeuille par zone géographique, de la distance des assurés par rapport au foyer de la pandémie, du taux de médication, de la nature de l'infection, ... Dans notre étude, nous nous limiterons à 4 scénarios de type pandémie. Le premier sera le choc présent dans les *Technical Specifications* du QIS5. Pour une probabilité d'occurrence à 200 ans, une augmentation (absolue) de $0,15\%$ des taux mortalité sera appliquée. Le deuxième et le troisième scénario seront tirés de la publication de l'INVS de 2005. Ces scénarios donnent un taux d'attaque moyen et un taux de surmortalité pour les affectés. Le deuxième scénario sera le scénario optimiste, le troisième le scénario pessimiste.

	Taux d'affection		Taux de mortalité	
Tranche d'age	Scénario 2	Scénario 2 bis	Scénario 2	Scénario 2 bis
[0 - 19]	24%	56%	0,908%	0,910%
[20 - 64]	13%	30%	0,962%	0,963%
[65 +]	9%	21%	1,678%	1,700%

FIGURE 3.9 – Taux d'affection et mortalité pour scénario pandémie INVS

Enfin, le quatrième modèle a été développé par Aon Benfield. Il suppose que trois grandes pandémies surviennent par siècle : sont utilisées les trois grandes pandémie citées plus haut (espagnole, asiatique et Hong Kong) et l'historique "Sentinelle" qui publie le nombre de décès dus au grippes. Cet ensemble de points nous permet de calibrer les paramètres d'une distribution bien choisie. Nous utilisons alors les tirages aléatoires de cette loi pour obtenir, par période de retour, un nombre de décès, et donc une sinistralité due au décès de la grippe.

Nous verrons dans la partie "Résultats" la charge de sinistre due pour chacun de ces scénarios, la charge restant due après intervention de la structure de réassurance déjà en place, et verrons comment il est possible de calibrer un excédent de sinistre "pandémie" à partir de nos sorties.

Nous avons décrit les modèles qui nous permettent de projeter les flux, nos choix d'hypothèses, les mesures qui nous permettront de quantifier le risque, la performance ou la rentabilité d'un portefeuille, et les calculs menant aux fonds propres requis. Détaillons à présent la méthode que nous suivrons dans cette partie pour observer nos résultats.

3.3 Les résultats

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques de notre étude. Nous rappelons que pour chaque structure de réassurance modélisée, nous utilisons deux modèles construit dans LifeMetrica comme présenté sur la figure plus haut : l'un tourne sur 1 an avec 5100 simulations, et l'autre sur 30 ans avec 500 simulations. Le deuxième contient autant de sous-modèles que de chocs indiqués dans le QIS5 pour le sous-module SCR_{Life}. A partir des flux moyens de *best estimate* choqués et non choqués, nous calculons les variations de NAV (Net Asset Value) et donc le SCR_{Life}. Pour ce deuxième modèle, seule la moyenne nous intéresse ce qui justifie le nombre réduit de simulations.

D'un point de vue pratique, les résultats seront sortis sous Excel, lequel est en parfait interface avec LifeMetrica. Les graphiques seront donc issus de Excel, exceptés ceux représentant des densités ou des fonctions de distribution cumulées, lesquelles sont très bien gérées par l'application graphique attachée à LifeMetrica.

Procédons à la présentation de nos résultats avant toute intervention de la réassurance.

3.3.1 Les sorties avant réassurance

Tout d'abord nous présentons l'allure de nos résultats dans Excel. Sur la figure ci-dessous nous observons la moyenne des variables aléatoires suivantes : nombre d'assurés en début de période (BOP = "beginning of period"), nombre de décès, nombre de rachat (=résiliations), nombre de sorties à terme, nombre de sorties lorsque l'âge de l'assuré est supérieur à l'âge limite de la garantie Décès Toutes Causes, nous observons également le montant des prestations dues aux décès (pour chaque sinistre, on ajoute le capital assuré correspondant à l'assuré concerné). Nous enregistrons également les primes perçues dans l'année. On en déduit le résultat technique de la période. Le tableau ci-dessous est un extrait de nos fichiers excel de sortie, et les projections sont faites jusqu'à 30 ans.

		1	2	3	4	5
central->Calculator	Nombre Assurés BOP	24 666	22 255	20 078	18 106	16 325
central->Calculator	Nombre Deces	61	60	57	54	53
central->Calculator	Nombre Rachat	2 345	2 114	1 909	1 721	1 547
central->Calculator	Nombre Terme	-	-	-	-	-
central->Calculator	Nombre Sorties > Age Limite	5	3	7	5	12
central->Calculator	Nombre Assurés EOP	22 255	20 078	18 106	16 325	14 713
central->Calculator	Primes	11 547 746	11 602 379	11 211 898	10 821 044	10 449 897
central->Calculator	Frais Cedante	616 650	619 567	598 715	577 844	558 024
central->Calculator	Prestations Deces	6 550 833	6 552 810	6 300 164	6 106 413	6 021 563
central->Calculator	Cash In	11 547 746	11 602 379	11 211 898	10 821 044	10 449 897
central->Calculator	Cash Out	7 167 483	7 172 378	6 898 879	6 684 257	6 579 587
central->Calculator	Resultat Technique Periode	4 380 264	4 430 002	4 313 019	4 136 787	3 870 310

FIGURE 3.10 – Tableau des sorties sous Excel

Nous pouvons notamment observer la décroissance du nombre moyen d'assurés dans le portefeuille par année, illustrée par le graphique ci-dessous. Cela nous permet de constater qu'en 8 ans, sans insérer les nouvelles affaires (supposons le portefeuille fermé), il reste seulement la moitié des assurés.

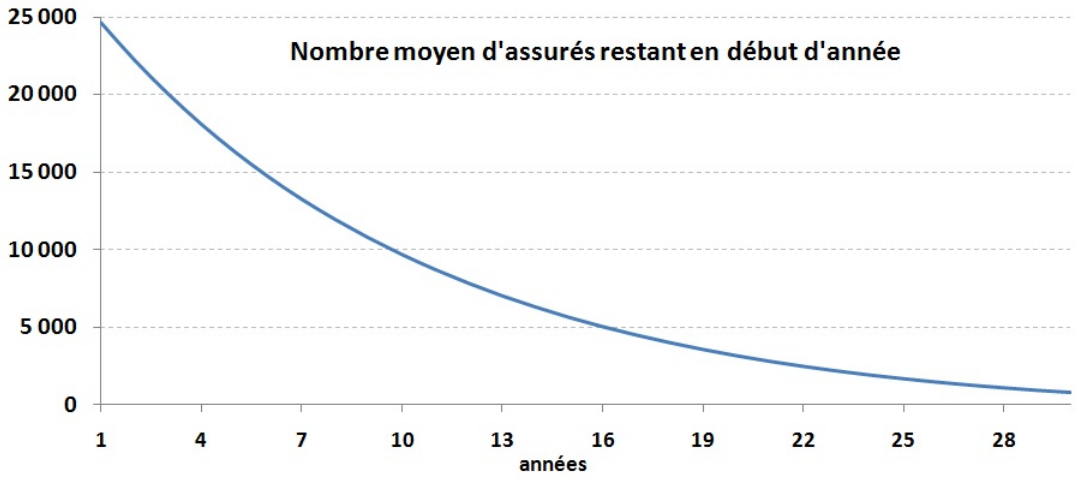


FIGURE 3.11 – Moyenne du nombre d'assurés en début d'année

Nous traçons le résultat moyen avant réassurance par année pour avoir une idée plus précise de l'écoulement des bénéfices techniques dans le temps, sans affaires nouvelles :

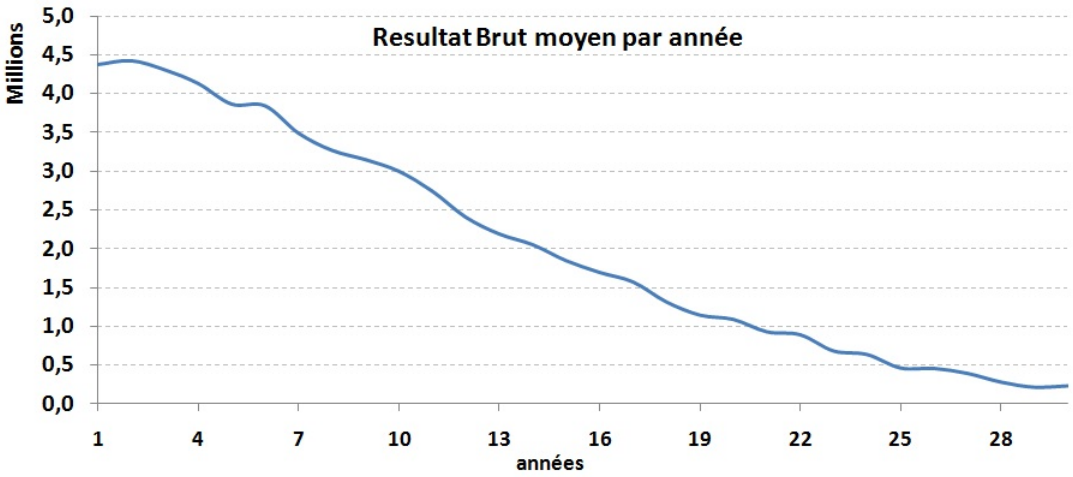


FIGURE 3.12 – Ecoulement du résultat brut par année

Pour la première année, avant toute réassurance, nous avons (en millions d'euros) :

Moyenne du Résultat technique :	$4,38$ M
Volatilité du résultat technique :	$1,04$ M
Coefficient de variation :	$23,8\%$
Pire scénario (sur 5100 simulations) :	$-0,2$ M
Meilleur scénario (idem) :	$7,5$ M

Nous pouvons résumer ces informations en traçant la fonction de distribution cumulée de la variable aléatoire "Résultat technique" sur la première année :

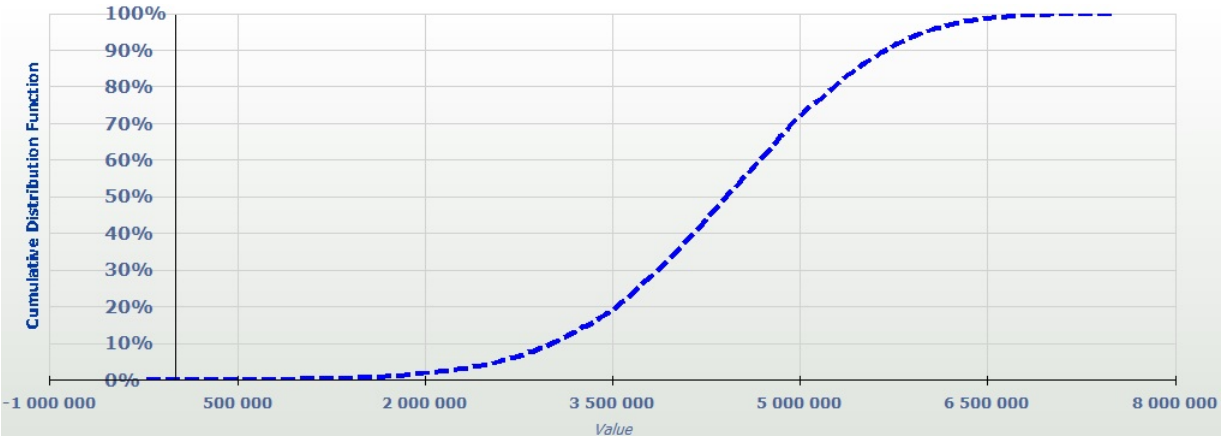


FIGURE 3.13 – Fonction de répartition du résultat brut

On remarque que cette distribution est asymétrique : la répartition des tirages en deçà de la médiane est très différente que celle pour les tirages au-delà de cette médiane. On peut observer que la fonction de distribution possède une queue de distribution sur les mauvais scénarios alors que les favorables sont plafonnés. Ceci est dû à l'allure de la distribution du nombre de sinistres qui est elle aussi asymétrique.

En ce qui concerne le calcul de l'exigence de marge en Solvabilité 1, nous nous reportons aux recommandations de l'article R931-10-7 de code la Sécurité Sociale. Nous considérerons que l'exigence brute est égale à 0,3% de la somme sous risque globale sur le portefeuille. Celle-ci est égale à 2 194 643 012 euros.
On obtient alors le montant de l'exigence S1 : $6,6$M euros.

Dans le référentiel Solvabilité 2, nous appliquons les chocs correspondants à chaque risque présent sur notre portefeuille Temporaire Décès : *mortality*, *Lapse up & down*, *Expense* et *Cat*. Le *best estimate* du passif avant réassurance et avant choc, en prenant en compte les primes futures, vaut -45M. Dans le bilan, les chocs du SCR_{Life} n'ont d'effet que sur le BEL, donc l'écart de NAV est égal à l'écart de BEL pour ces chocs.
On résume alors nos calculs, faits au brut de réassurance, dans le tableau ci-dessous, indiquant un SCR_{Life} de $21,2$M :

	Brut
SCR Life	**21 176 466**
SCR Mortality	12 501 244
SCR Longevity	-
SCR Disability	-
SCR Lapse	14 908 377
SCR Expense	713 754
SCR Revision	-
SCR CAT	3 153 600

FIGURE 3.14 – Montant des SCR pour les sous-modules $Life$

L'agrégation au niveau du SCR_{Life} se fait en utilisant la matrice de corrélation donnée dans les spécifications techniques du QIS5.

Le SCR_{Life} est logiquement composé en majorité par le SCR_{Lapse} et le $SCR_{Mortality}$. Pour le choc de mortalité primes (et frais) sont presques identiques : l'augmentation de BEL est entraînée par l'augmentation significative de la sinistralité (les taux de mortalité sont augmentés de 15% de leur valeur). Par contre, le choc de rachat impacte les écoulements de primes et de sinistres. On peut par exemple observer ci-dessous les décalages pour les scénarios "up" (+50% sur les taux de rachat) et "down" (taux divisé par deux) par rapport à l'écoulement des primes (sur 30 ans) dans le scénario central.

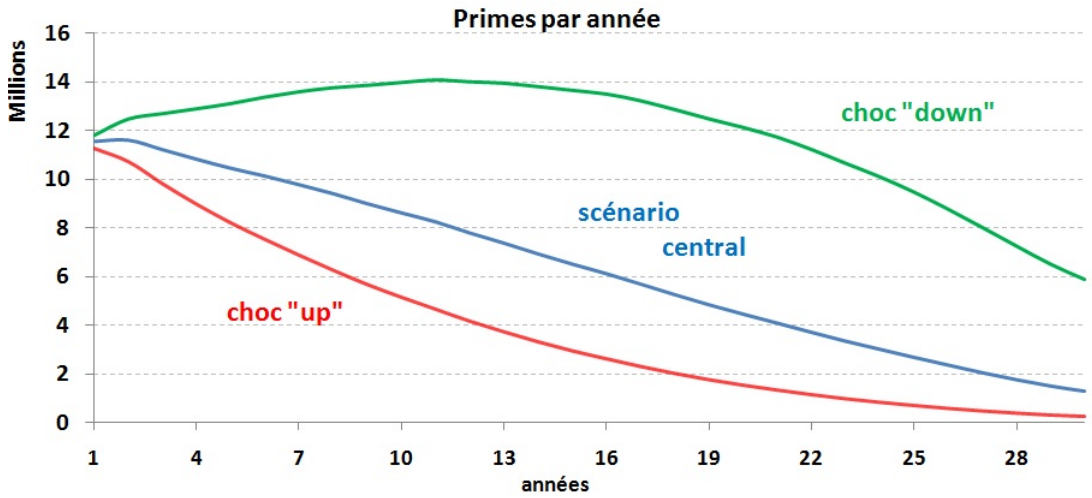


FIGURE 3.15 – Primes par année pour les choc *up* et *down* du sous-module *Lapse*

Dans le cas de l'abaissement du taux de résiliation à 5% (= 50% · 10%), l'augmentation des tarifs par l'âge est plus forte que l'érosion du portefeuille par les résiliations (et décès) pendant un certain nombre d'années (10 ici), et dans ce cas on observe que le montant total de primes croît sur les 10 premières années. Au-delà, le nombre d'assurés devient trop faible, ce qui explique la courbe en cloche (courbe verte).

A partir de là, détaillons notre démarche : Nous nous plaçons sous des hypothèses de projection centrales. Une première phase d'observation va nous permettre de juger des effets et des sensibilités en fonction des paramètres de cette quote-part, puis de manière identique pour un excédent de plein. Par la suite, nous pourrons comparer ces structures et leurs combinaisons à partir de critères communs.

3.3.2 Variation des paramètres d'une quote-part

Nous étudions ici l'influence des niveaux d'une quote-part sur les statistiques du résultat technique. La limite de cette quote-part est pour l'instant fixée à 10M pour être certain d'englober la totalité des assurés dans cette quote-part.

Les réassureurs récupèrent la même proportion de primes, de sinistres et de frais (via la commission). Sans autre spécificité, le résultat technique (en variable aléatoire) dépend au premier degré du taux de cession. On peut rappeler ici l'expression analytique du résultat net de quote-part de taux de cession $alpha$, commission t_{com}, sans limite et sans participation aux bénéfices, avec les notations évidentes (P les primes brutes, S les sinistres bruts et F les frais bruts).

$$Res^{net} = (1 - \alpha(1 - t_{com})) \cdot P - (1 - \alpha) \cdot S - F$$

En terme de moyenne, on en déduit que le résultat net (conservé) est une fonction affine décroissante du taux de cession de la quote-part. On s'attend également à une linéarité en terme de volatilité nette (ou cédée). En effet, l'opérateur variance induit une dépendance quadratique sur le taux de cession, donc au premier degré pour la volatilité (on prend la racine carrée de la variance).

Après ces deux observations très immédiates, allons plus loin en essayant de répondre à ces trois questions :

- moyenne et volatilité nettes décroissent-elles à la même vitesse ?
- retrouve-t-on cette linéarité sur toutes les statistiques de notre distribution ?
- l'impact sur le capital est-il lui aussi linéairement dépendant du taux de cession ?

Pour répondre à la première question, nous allons étudier l'évolution du coefficient de variation en fonction du taux de cession de la quote-part (toutes choses étant égales par ailleurs). Tout d'abord, rappelons que le coefficient de variation est le rapport entre la volatilité et la moyenne. Avant réassurance, comme nous l'avons calculé plus haut, le coefficient de variation est égal à $23,8\%$.

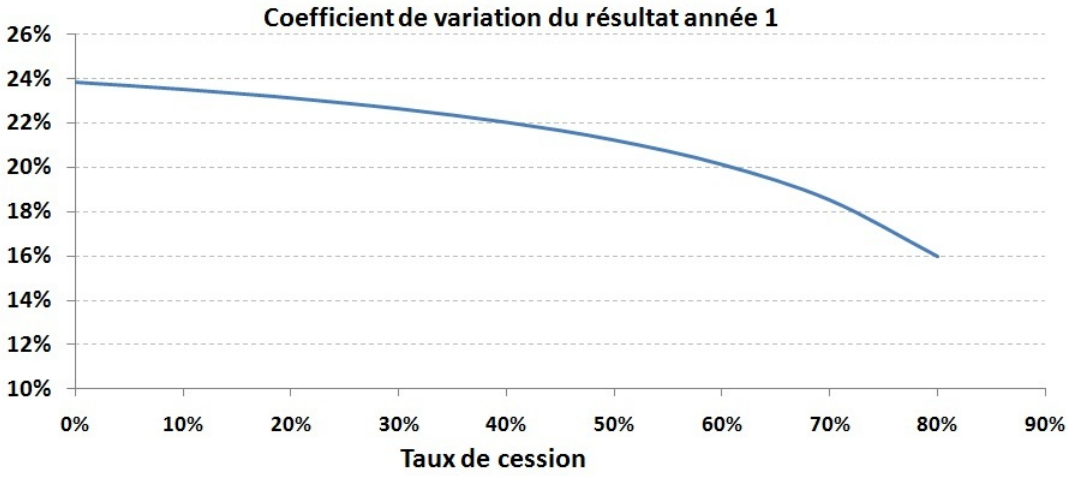


FIGURE 3.16 – Coefficient de variation du résultat net de quote-part année 1

Notons que nous nous arrêtons volontairement à 80% pour le taux de cession de la quote-part car c'est un niveau au-dessus duquel les conditions "commerciales" de la structure ont très peu de chance de rester identiques : nous arrivons à une limite de modèle.

En terme de coefficient de variation fonction du taux de cession de la quote-part, nous ne retrouvons pas la linéarité évoquée sur la moyenne et la volatilité nettes, mais au contraire une décroissance concave. Lorsque le taux de cession augmente, la décroissance de la courbe implique que la volatilité conservée diminue plus vite que la moyenne conservée.

Expliquons ce que l'on entend par "plus vite" : nous pouvons calculer que pour 1% de taux de cession, il y a

- 38 355 euros (λ_1) de cession en moyenne
- 10 420 euros (λ_2) de cession en volatilité

Ceci est vrai partout car la moyenne et la volatilité sont linéaires (décroissantes) du taux de cession.

Alors, en notant μ_0 et σ_0 la moyenne et la volatilité avant réassurance en quote-part (dont les valeurs sont données plus haut), on obtient que le coefficient de variation pour un taux de cession α a pour expression

$$\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)_{\alpha} = \frac{\sigma_0 - 100 \cdot \alpha \cdot \lambda_2}{\mu_0 - 100 \cdot \alpha \cdot \lambda_1}$$

L'allure graphique de cette fonction dépend uniquement de la comparaison des ratios $\frac{\lambda_2}{\sigma_0}$ et $\frac{\lambda_1}{\mu_0}$, lesquels valent respectivement $0,999\%$ et $0,877\%$ ici. Ces deux ratios représentent en fait le pourcentage de cession réel de la statistique (volatilité ou moyenne) observée. Ainsi, on en déduit que la cession en volatilité est totale ($\approx 1\%$) alors que celle en moyenne est partielle ($\frac{\lambda_1}{\mu_0} < 1\%$)). De fait, la cession totale en volatilité est presque tout le temps vérifiée (pour la quote-part sans participation aux bénéfices) tandis que les frais généraux et les commissions de réassurance induisent un frottement sur la moyenne (et non sur la volatilité). En supposant

fixe le taux de frais de gestion, nous pouvons alors dire que l'allure de la courbe représentant le coefficient de variation après réassurance en quote-part est entièrement déterminée par le taux de commission de réassurance. De plus, la concavité implique que l'écart de vitesse grandit avec le taux de cession. Pour rappel, nous avons pris l'hypothèse dans notre exemple que le taux de commission de la quote-part est pour l'instant fixé à 10%.

Vérifions ceci en utilisant la formule de la variable aléatoire "résultat net" donnée plus haut dans ce paragraphe. En prenant la racine carrée de la variance, nous obtenons $\sigma(Res_{net}) = (1-\alpha)\cdot\sigma_S$, en passant d'autre part à la moyenne, on obtient l'expression du coefficient de variation (avec notations évidentes et après simplifications) :

$$\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)_{\alpha}^{net} = \frac{\sigma_S}{\left(1+\frac{\alpha t_{com}-t_{f.gen}}{1-\alpha}\right)\cdot\mu_P-\mu_S}$$

Ceci est l'équation de la fonction représentée sur le graphique ci-dessus.
Il est immédiat que, lorsque $t_{com} = t_{f.gen}$, c'est une constante, et cette constante dépend de la distribution des sinistres et de la moyenne des primes l'année 1. Lorsque $t_{com} = 0$, on obtient la fonction inverse avec un point de rupture pour un taux de cession $\alpha = 1 - \frac{t_{f.gen}\cdot\mu_P}{\mu_P-\mu_S}$. C'est en effet la valeur de α pour laquelle le dénominateur s'annule. Dans le domaine $t_{com} < t_{f.gen}$, on observe toujours une allure de fonction inverse.
Au-delà, lorsque le taux de commission dépasse le taux de frais généraux, la fonction devient décroissante : c'est ce domaine qui nous intéresse. Dans celui-ci, on peut distinguer trois sous-domaines :

⋆ $t_{com} < 1 - \frac{\mu_S}{\mu_P}$: décroissance concave (domaine 1)

⋆ $t_{com} = 1 - \frac{\mu_S}{\mu_P}$: décroissance affine (domaine 2)

⋆ $t_{com} > 1 - \frac{\mu_S}{\mu_P}$: décroissance convexe (domaine 3)

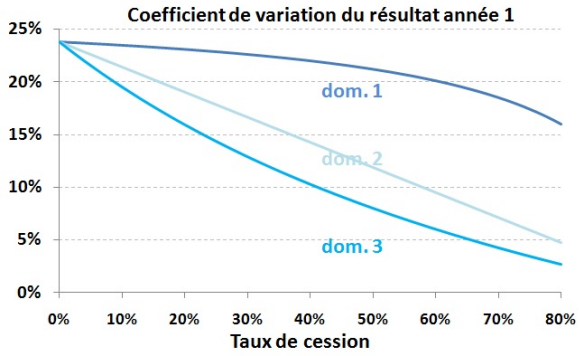


FIGURE 3.17 – Coeff. variation du résultat net, par domaine de taux de commission

Revenons à la réalité de notre portefeuille : nous pouvons calculer $1 - \frac{\mu_S}{\mu_P} = 43,21\%$. Une analyse intéressante est de dire que le coefficient de variation est plus sensible au variations du taux de cession pour des faibles valeurs de ce taux de cession (début de la courbe) lorsque le taux de commission est supérieur à $43,21\%$ (courbe convexe). A l'inverse, lorsque le taux de commission est compris entre $5,34\%$ et $43,21\%$, il faut un taux de cession important pour accroître la sensibilité du coefficient de variation. L'analyse par le taux de commission permet

d'étudier un premier arbitrage : vaut-il mieux, au vu du critère volatilité/moyenne, céder plus avec un taux de commission faible ou céder moins avec un taux de commission élevé, pour le même montant de résultat cédé ?

Sur notre graphe, l'arbitrage se traduit par cet exemple grossier : pour un coefficient de variation à 20%, il faut une quote part avec

- taux de cession 8,5% et taux de commission 80%
- taux de cession 60% et taux de commission 10%

sachant que la deuxième est bien plus consommatrice de résultat en moyenne. D'autre part, un taux de 80% de commission est purement théorique car aucun réassureur n'accepterait de financer une telle commission. Cela montre donc l'intérêt de regarder d'autres paramètres, comme la participation aux bénéfices que nous étudierons par la suite, et surtout qu'il faudra introduire un critère d'acceptabilité.

Avant cela, répondons à la deuxième question posée en regardant les effets de la quote-part sur l'ensemble de la distribution du résultat net. Nous rappelons que le taux de commission est fixé à 10% et qu'il n'y a pas de participation aux bénéfices. Représentons les fonctions de probabilités cumulées pour différents taux de cession.

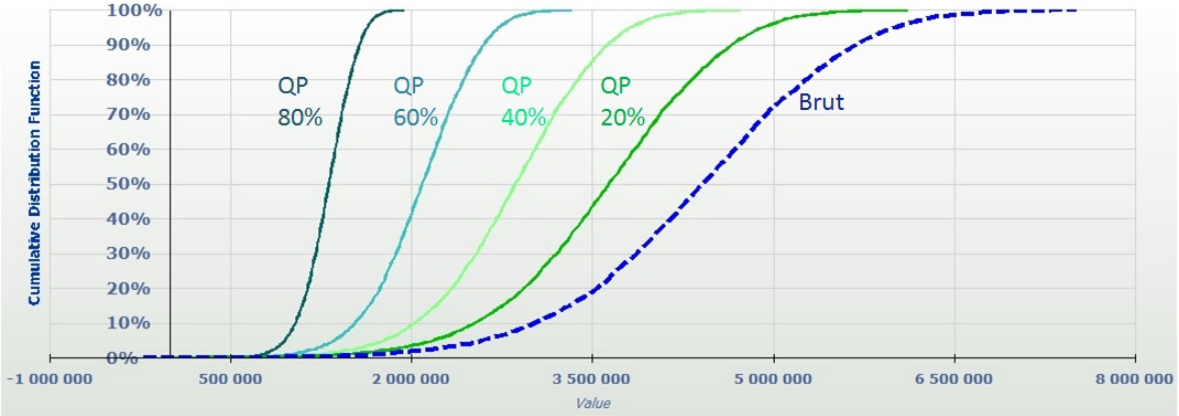


FIGURE 3.18 – Fonctions de répartitions du résultat net de quote-part

A probabilité fixée, le quantile décroît linéairement en fonction du taux de cession. Il suffit pour cela de tracer une ligne horizontale correspondant à la probabilité choisie, et alors les points d'intersection de cette droite avec chaque courbe de distribution sont séparés par la même distance. Par contre, cette distance décroît avec la probabilité choisie. En effet, lorsque l'on translate cette ligne horizontale vers le bas (vers la probabilité 0%), les points d'intersection se rapprochent, et leur ordre est inversé lorsque la ligne horizontale est confondue avec l'axe des abscisses.

Tout cela signifie que pour la majorité des quantiles, le résultat après réassurance diminue lorsque le taux de cession augmente (les courbes se décalent vers la gauche) et est inférieur au résultat avant réassurance (brut),

mais que dans les scénarios de mauvais résultat (forte sinistralité ou forte résiliation), la réassurance joue pleinement son rôle puisque les écarts dus à la cession diminuent, et que pour le pire scénario, le résultat après réassurance est meilleur que le résultat avant réassurance, comme l'indique ce tableau.

Quote Part	Résultat Min
0%	- 204 558
5%	- 167 467
10%	- 130 376
15%	- 93 286
20%	- 56 195
30%	17 987
40%	92 169
50%	166 351
60%	240 533
70%	314 714
80%	388 896

FIGURE 3.19 – Minimum du résultat par taux de cession en quote-part

Abordons enfin la troisième question concernant les effets sur le capital. Pour cela, nous calculons l'exigence sous Solvabilité 1 et sous Solvabilité 2, pour chaque quote-part. Nous verrons qu'une attention particulière doit être portée sur la durée du traité.

Pour l'exigence en S1, le résultat est immédiat : le capital décroît linéairement lorsque le taux de cession augmente. En effet, il faut prendre $0,3\%$ de l'exposition totale restant à charge de l'assureur. Or pour chaque assuré, la part restant à charge pour l'assureur vaut $1-\alpha$, donc la linéarité est directe.

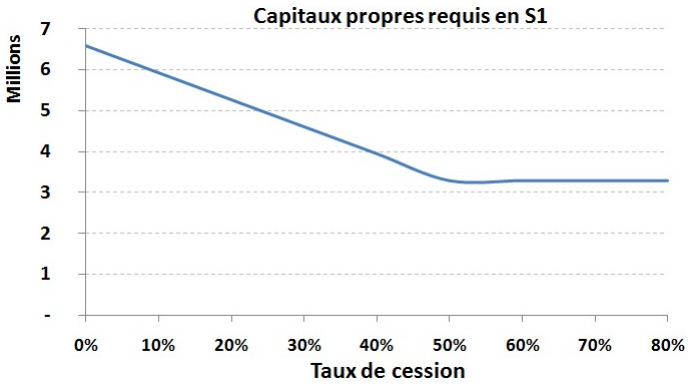


FIGURE 3.20 – Exigence S1 en quote part

Mais attention, ceci est vrai jusqu'à 50% de cession. On entend par là que l'assureur garde a minima la moitié de la somme assurée brute. Lorsque le taux de cession de la quote-part augmente, nous pouvons donc observer un seuil Au-delà duquel il n'y a plus de gain en capital requis par la norme Solvabilité 1. Comme nous sommes en quote-part, le seuil intervient à partir du paramètre 50%, ce qui ne sera pas forcément vrai pour un excédent de plein.

Nous parlerons de la sensibilité des résultats "S2" à la durée du traité après ce paragraphe, et pour simplifier supposons pour l'instant que nous ne prenons en compte la réassurance que sur la première année. Les flux futurs ($\geq 2^{eme}$ année) sont donc pris au brut de réassurance. En revanche, sur la première année, il est immédiat de dire que la quote-part permet une cession proportionnelle des flux de primes et de sinistres donc du *best estimate liabilities*, et donc du SCR_{Life}.

Arrêtons nous plus longuement sur le $SCR_{counterparty}$ en expliquant les détails de notre calcul en pratique.

Pour ce sous-module, il est nécessaire d'avoir l'information de placement du traité (nombre de réassureurs, parts, ratings, clause de nantissement, ...). Dans cette partie de l'étude, nous considérons le placement suivant :

4	Parts
AA	35%
A	25%
A	20%
BBB	20%

FIGURE 3.21 – Ratings et parts

Comme nous avons pu le voir dans la définition du $SCR_{counterparty}$, il nous faut le montant *recoverables* et du *risk mitigating effect*. Pour notre calcul, nous supposons qu'il n'y a pas de nantissement (ou dépôt). Le montant des *recoverables* est donné en sortie de notre projection : nous choisissons de comprendre le montant des recouvrements pour les sinistres, le montant des commissions et des participations aux bénéfices de réassurance. Ce choix peut-être discuté : nous avons fait le choix de considérer que tous les comptes de réassurance sont soldés au 31 décembre et le paiement de la prime par la cédante au 1^{er} janvier, donc si le défaut survient dans l'année, les paiements intervenants en fin d'année (sinistres, commissions et participations aux bénéfices) ne seront pas effectués. Remarquons que par souci de simplification, nous considérons que la prime payée par la cédante en début d'année est la prime exacte. Cette hypothèse d'absence de régularisation des primes en fin d'année est justifiée par la projection des primes brutes exactes. Ensuite, il suffit d'affecter à chaque réassureur le montant de son *recoverable* en fonction de sa part dans le traité.

A travers le *risk mitigating effect*, S2 vise à quantifier le montant de capital que la cédante doit de nouveau mettre en face des engagements qu'elle récupère suite au défaut du (ou des) réassureur(s). Pour cela, nous calculons pour chaque structure, la différence entre le SCR_{Life} avant et après la réassurance considérée. Cela nous donne le montant de capital à réfinancer suite aux défauts de tous les réassureurs. Il suffit alors d'en prendre la part associée dans le traité pour calculer le *risk mitigating effect* $_i$ du réassureur i. Ceci est une simplification qui se justifie par sa logique, les montants en jeu, et surtout par sa mise en place réalisable, contrairement au calcul théorique préconisé les spécifications techniques du QIS5.

Maintenant que ces concepts sont plus clairs, voyons ce qu'il se passe lorsque l'on allonge la durée du traité. Dans les faits, nous prenons les flux nets sur plusieurs années et non plus seulement ceux de la première année. Par exemple, si la durée du traité est de 2 ans, on prendra dans le *best estimate* les primes : nettes sur les deux premières années puis brutes pour les 28 autres. Il en est de même pour les sinistres. On prendra les frais bruts sur les trente ans, mais les commissions seulement sur les 2 premières années. Pour alimenter le calcul du $SCR_{counterparty}$, nous avons fait le choix de prendre la valeur actualisée (sur la durée du traité) des recouvrements, commissions et participations aux bénéfices dans la formule du *Loss Given Default (LGD)*.

Observons graphiquement l'évolution du SCR_{Life} et du $SCR_{counterparty}$ en fonction de la

durée du traité, avec (pour bien voir) une quote part à 80%.

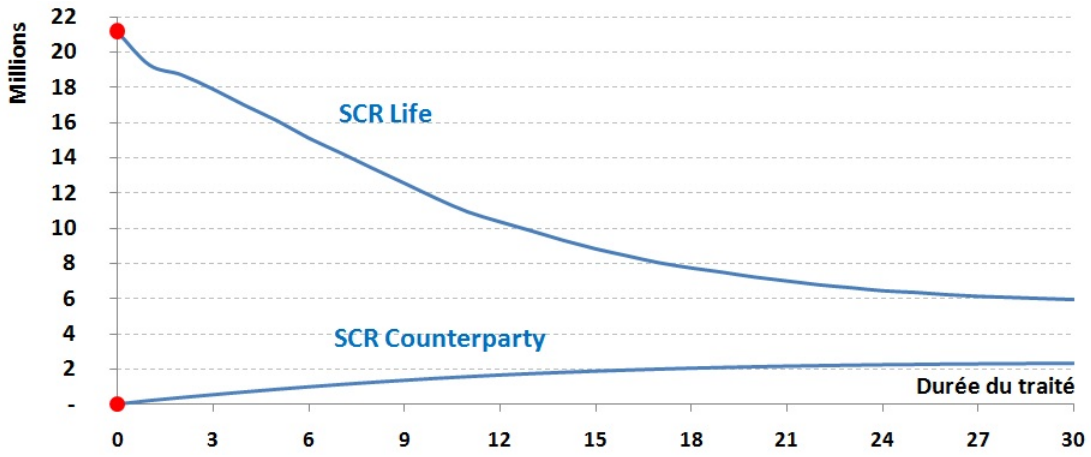


FIGURE 3.22 – SCR en fonction de la durée du traité quote-part

Les deux points rouges représentent l'état avant réassurance (durée 0), et la courbe bleue SCR_{Life} représente la décroissance de l'exigence en capital dans Solvabilité 2 quand la durée du traité augmente. L'allure des courbes est entièrement liée au profil d'amortissement du résultat technique du portefeuille fermé, dans le temps. Il est clair que le SCR_{Life} atteint un seuil minimal à $6M$: Au-delà de 20 ans de projection, les flux de résultat (au brut) sont suffisamment faibles pour que leur cession en réassurance ne soit pas significative. Par contre, la réduction du SCR_{Life} est presque linéaire pour des durées comprises entre 1 et 10 ans. Dans cet intervalle, le rallongement d'une année de la durée de couverture entraîne une économie entre $800K$ et $950K$ de SCR_{Life}, soit, avec nos hypothèses d'écoulement du résultat :

$$1 \text{ an de couverture (entre 1 et 10 ans)} = [3,5\%; 4,5\%] \text{ d'économie en } SCR_{Life}$$

Il est clair qu'il y a un intérêt à augmenter la durée du traité, d'autant que la prise en compte du risque de défaut dans le QIS5 est beaucoup moins pénalisante que le risque de souscription.

Pour aller plus loin, regardons comment se réalise la cession suivant les sous-modules. Nous nous plaçons dans le cas de la cession maximale avec la durée du traité fixée à 30 ans. Le tableau ci-contre indique les pourcentages de cession pour chacun des quatre sous-modules que nous avons calculé pour notre portefeuille.

QP 80%	% Cession
SCR Life	71,9%
SCR Mortality	79,7%
SCR Lapse	69,0%
SCR Expense	0,0%
SCR CAT	79,6%

Le $SCR_{mortality}$ et le SCR_{CAT} sont cédés à 80%. Le $SCR_{expense}$ ne comprend que les frais "bruts" de réassurance donc ne change pas en fonction de la réassurance. Seul le SCR_{lapse} n'est

pas cédé au taux de cession de la quote-part. Pour expliquer ceci, écrivons la formule simplifiée du *best estimate liabilities (BEL)* (les frais sont exprimés en pourcentage t_f des primes brutes et VA représente l'opérateur *valeur actualisée*) :

$$BEL^{net} = (1-\alpha)\cdot VA(S) - (1-\alpha)\cdot VA(P) + (t_f - \alpha t_{com})\cdot VA(P)$$

Le SCR_{choc} pour les sous-modules mortality, lapse et CAT s'écrit :

$$\begin{aligned} SCR^{net}_{choc} &= (1-\alpha)(VA(S_{choc}) - VA(S)) - (1-\alpha)(VA(P_{choc}) - VA(P)) \\ &\quad +(t_f - \alpha t_{com})(VA(P_{choc}) - VA(P)) \end{aligned}$$

Cette écriture confirme nos premières suggestions : les chocs de mortalité et de CAT n'impacte que très peu les primes ($P_{choc} \approx P$), donc

$$\begin{aligned} SCR^{net}_{choc} &\approx (1-\alpha)\cdot(VA(S_{choc}) - VA(S)) \\ &\approx (1-\alpha)\cdot SCR_{choc} \end{aligned}$$

La proportionnalité au taux de cession de la quote-part est justifiée.
Dans le cas du SCR_{lapse}, les chocs sur les taux de rachats ont un effet significatif sur les sinistres et sur les primes et alors on obtient $SCR^{net}_{choc} = (1-\alpha)\cdot SCR_{choc}$ si et seulement si

$$(t_f - \alpha t_{com})\cdot(VA(P_{choc}) - VA(P)) = (1-\alpha)\cdot t_f \cdot (VA(P_{choc}) - VA(P))$$

soit

$$(t_f - \alpha t_{com}) = (1-\alpha)\cdot t_f \quad \text{i.e.} \quad t_{com} = t_f$$

En-deçà de t_f, le pourcentage de cession en SCR_{lapse} est supérieur à α, et inversement lorsque $t_{com} > t_f$. Nous noterons que pour une quote-part à 80% avec taux de commission à 10%, nous arrivons à une cession globale en BSCR (composé du SCR_{Life} et $SCR_{counterparty}$) de seulement $67,6\%$.

Pour résumer cette première partie d'observation sur la quote-part, nous pouvons conclure que si le taux de cession augmente

- le résultat cédé en moyenne augmente
- le pire scénario s'améliore (et devient même positif)
- l'écart inter-quantiles $VaR_p(Res^{net}) - VaR_p(Res^{brut})$ s'agrandit lorsque p augmente.

Nous avons également pu voir que nos sorties sont sensibles au taux de commissionnement du traité. Lorsque ce taux augmente,

- la courbe du coefficient de variation en fonction du taux de cession gagne en convexité et donc les effets sur la volatilité sont intéressants
- la cession du sous-module SCR_{lapse} diminue et le $SCR_{counterparty}$ croît.

Ceci fait apparaître la possibilité d'arbitrages sur la structure suivant des critères de coût, de valeur extrême et capital que l'on va étudier par la suite. Il est également important de noter que beaucoup de résultats sont immédiats et faciles à formaliser grâce à l'unicité du taux de cession pour toutes les polices. Profitons de cette opportunité pour approfondir l'analyse, en remplaçant la commission (a priori) par une participation aux bénéfices (a posteriori).

3.3.3 Equivalent commission / participation

Nous commençons par re-formaliser l'expression du résultat après réassurance en quote-part, sans commission, avec une participation aux bénéfices caractérisée par le taux t_{PB} et les frais du réassureurs notés F_{reass}.

$$Res^{net} = (1-\alpha)\cdot P - (1-\alpha)\cdot S - F + t_{PB}\cdot(\alpha P - \alpha S - F_{reass})^{+}$$

La variable formulée ci-dessus est représentée par la fonction de distribution cumulée en pointillés, pour $t_{PB} = 50\%$. En vert est représentée celle de la variable aléatoire "résultat net" lorsque la quote-part est à commission fixe de 20%. Ces paramètres sont choisis de telle sorte que les résultats après réassurance en moyenne soient les mêmes.

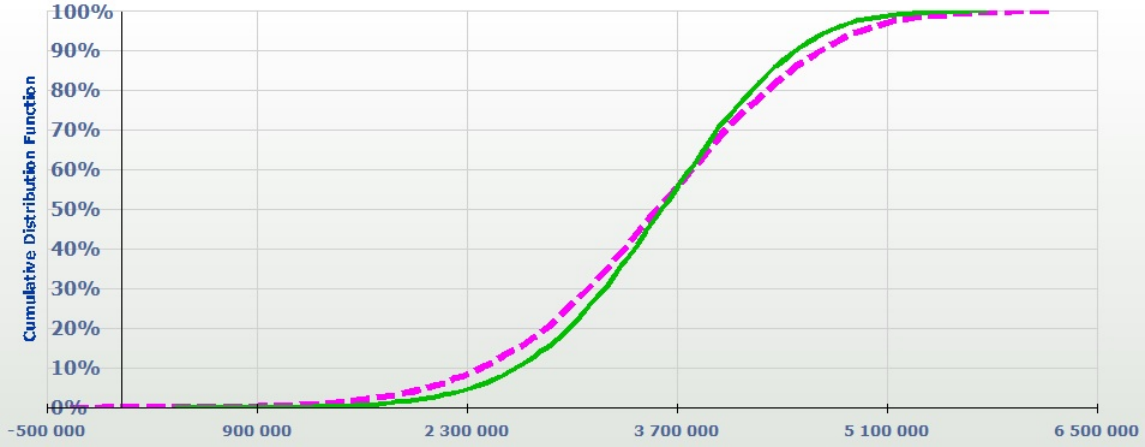
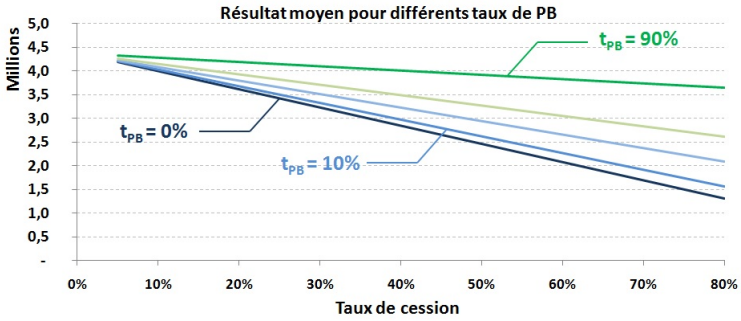


FIGURE 3.23 – Fonctions de répartition du résultat net de quote-part avec commission et avec participation

Puisque la commission est assise seulement sur les primes, le résultat avec commission ne capte pas les effets de volatilité sur l'année. Par contre, le montant de la commission est fixe quelque soient les flux de sinistres sur cette même année. La participation aux bénéfices fait tout l'inverse : elle dépend pleinement de la sinistralité cédée (et donc brute). Lorsque la sinistralité est faible, la participation est élevée et améliore donc les scénarios de bons résultats, mais elle ne reverse rien en cas de forte sinistralité : ceci confère plus de volatilité au résultat net et "déplace" fortement les quantiles extrêmes. Cette récupération de volatilité se retrouve lorsque l'on écrit la variance de la variable aléatoire Res^{net} définie juste avant.

Nous voyons donc qu'il est possible de jouer conjointement sur ces deux paramètres pour satisfaire différents niveaux d'appétit au risque et au rendement. Pour bien comprendre les effets de la participation aux bénéfices sur le résultat après réassurance, observons sur le graphique ci-dessous la sensibilité de la moyenne suivant le taux t_{PB} :



Il apparaît sans surprise que le résultat après cession en quote-part et après participation aux bénéfices garde sa linéarité en fonction du taux de cession : le taux de la participation influe sur la pente de cette droite.

Le taux de cette participation détermine également la part de volatilité en retour, nous pouvons donc observer son effet sur le coefficient de variation :

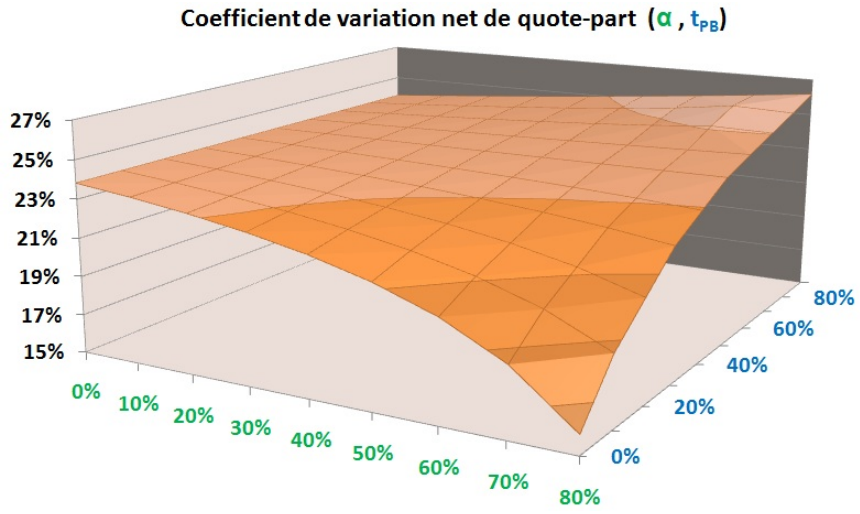


FIGURE 3.24 – Surface du coefficient de variation en fonction du taux de cession et du taux de participation

Nous avons expliqué plus haut la concavité de la courbe pour le cas $t_{PB} = 0$, que l'on peut retrouver au premier plan de la surface ci-dessus. Nous pouvons aussi remarquer que le coefficient de variation est constant pour t_{PB} aux alentours de 50%, quel que soit le taux de cession. Au-delà, le coefficient est croissant convexe. Nous notons alors l'asymétrie de cette surface par rapport au taux de la participation aux bénéfices (t_{PB}) : le coefficient de variation est plus sensible à la baisse de volatilité quand $t_{PB} < 50\%$ (dans la partie concave, gain jusqu'à

8 points du coefficient de variation) que à la hausse lorsque $t_{PB} > 50\%$ (dans la partie convexe, hausse maximum de 4 points).

Cette conclusion est à mettre en rapport avec les objectifs de la structuration de la réassurance : si l'objectif premier est l'économie de volatilité, il est évident qu'il ne sera pas conseillé de mettre une clause de participation. Par contre, si l'objectif est de maximiser le résultat moyen, mettre en place une telle clause permet de satisfaire cet objectif et surtout a un effet moindre sur la hausse de volatilité au regard du gain en moyenne.

En sus de ces considérations quantitatives, modifier la commission est contractuellement et commercialement possible mais semble moins évidente à orienter vers des niveaux excessifs car au travers de cette clause, il n'y a pas de partage du sort. Le terme de "niveaux excessifs" peut sembler vague, approfondissement et exemple sont apportés dans la section 3.3.8 *alternatives aux structures traditionnelles*. A l'inverse, une participation aux bénéfices, par construction, implique que cédante et réassureur(s) suivent le même sort au regard de la sinistralité de l'année : le réassureur est mieux protégé face à une incertitude sur le portefeuille ou face à un évènement cat de marché.

L'étude des indicateurs sur la quote-part est intéressante car formalisation et compréhension sont simples à partir du taux de cession α, qui reste le même pour toutes les polices.

Concernant une structure en excédent de plein, nous n'allons pas retrouver la simplicité évoquée précédemment. De fait, l'écriture du taux de cession fait qu'il capte tous les effets de la distribution des capitaux du portefeuille, induisant des effets non-linéaires très forts, et c'est ce que nous allons voir maintenant.

3.3.4 Variation des paramètres d'un excédent de plein

De la même manière que pour une structure en quote-part, nous allons détailler et essayer d'expliquer les évolutions de nos indicateurs lorsque l'on fait varier la rétention de l'excédent de plein.

Nous utiliserons les paramètres suivant pour cette structure :

- plein (ou rétention) : variable entre $20K$ et $1M$, par pas de $20K$ puis $50K$
- limite : $10M$
- taux de commission : 10% des primes cédées
- sans participation aux bénéfices pour l'instant.

Rappelons que pour chaque plein, un nouveau taux de cession est calculé par assuré, et c'est ce taux qui détermine la part de primes et de sinistres cédés de cet assuré.

Nous traçons ci-dessous les courbes représentant moyenne et volatilité du résultat net d'excédent de plein, pour les pleins inférieurs à $400K$ (domaine de changements significatifs) :

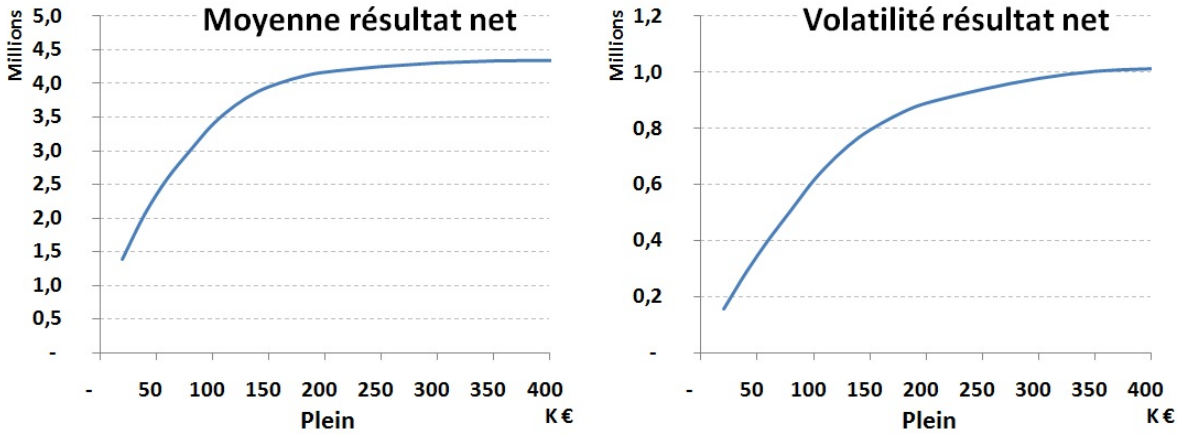


FIGURE 3.25 – Moyenne et volatilité du résultat net d'excédent de plein

Lorsque le plein augmente, les taux de cession individuels décroissent jusqu'à 0 et donc le résultat net augmente et tend vers le résultat brut. Comme nous nous y attendions, nous ne retrouvons pas la linéarité observée pour la quote-part, puisque la cession est plus grande suivant la position du plein sur la courbe de distribution des capitaux assurés. De la même manière que pour l'autre structure, nous allons regarder les effets du niveau de plein sur le coefficient de variation (rapport de la volatilité sur la moyenne).

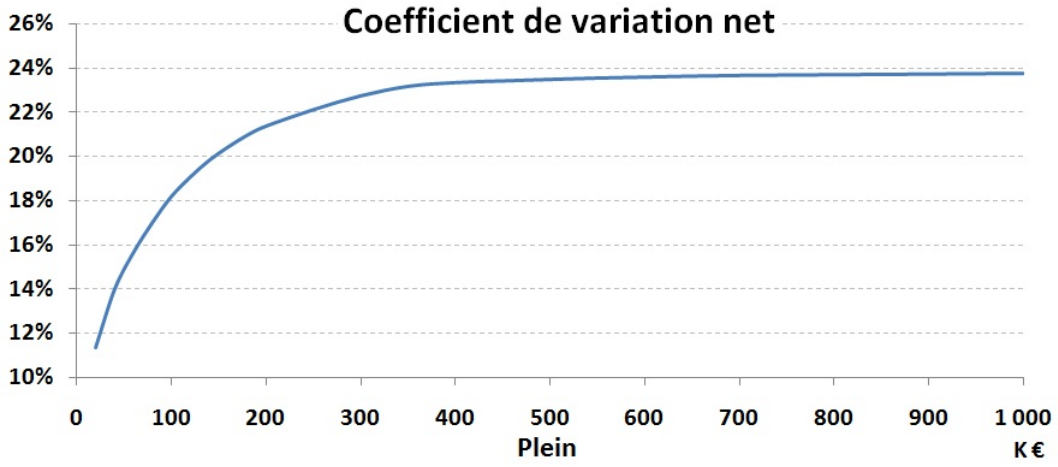


FIGURE 3.26 – Coefficient de variations net d'excédent de plein

Ici aussi, nous n'obtenons pas une droite horizontale partout suivant les différents niveaux du plein : dans le domaine $[20K, 400K]$ où la cession est significative, l'accroissement en volatilité est supérieur à celui en moyenne. Par exemple, si nous nous plaçons au début de la courbe, pour $20K$ supplémentaires de plein, la volatilité nette augmente de 83% là oú la moyenne n'augmente de 48%. Cette justification est vraie partout sur la courbe (volatilité augmente

plus vite que moyenne) mais pas dans la même mesure partout. D'autre part, et comme nous l'avons expliqué dans le cas d'une quote-part, le taux de commission joue aussi un rôle dans la concavité de la courbe du coefficient de variation pour un excédent de plein quand le plein augmente, puisque le commissionnement n'influe pas (ou peu) sur la volatilité (il est assis sur les primes). Pour résumer cela, écrivons la formule du coefficient de variation avec les notations évidentes qui conviennent, et en notant R le niveau de plein de la structure :

$$\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)_R = \frac{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)S_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)P_i - \sum_{i=1}^{n}(1-\gamma_i)E(S_i) - F + t_{com}\cdot\sum_{i=1}^{n}\gamma_i P_i}$$

oú chaque γ_i est une fonction de R. Nous pourrions remarquer et tracer le coefficient de variation lorsque l'on modifie le taux de commission, et observerions des effets similaires de convexité ou concavité que ceux décrits dans la partie précédente, pour les domaines $t_{com} < 5,34\%$ et $t_{com} > 5,34\%$ (taux des frais généraux). Par exemple, si $t_{com} = 0$, le coefficient vaut 41%, et alors il est décroissant convexe du niveau de plein. Là aussi, la commission permet de diluer la volatilité dans un résultat plus important.

Attardons nous plutôt sur les sensibilités des quantiles en queue de distribution, pour les variables aléatoires $\left(Res^{net}(R)\right)_R$.

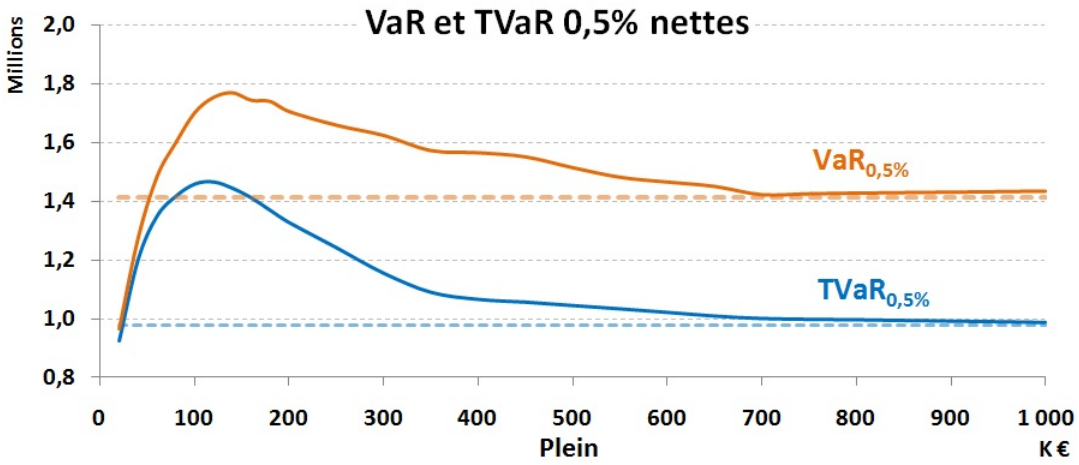


FIGURE 3.27 – VaR et TVaR nettes d'excédent de plein

Sur ce graphique figurent les quantiles à $0,5\%$ ($VaR_{0,5\%}$) et la moyenne des quantiles inférieurs à $0,5\%$ ($TVaR_{0,5\%}$) du résultat après réassurance en excédent de plein. Dans les conditions de cet excédent présentées en début de paragraphe, nous voyons que pour des pleins très bas (entre $20K$ et $60K$), VaR et TVaR après réassurance sont plus basses qu'au brut de réassurance, mais augmentent avec le plein, pour atteindre un maximum pour un plein à $120K$. Au-delà, VaR et TVaR sont décroissantes et convergent vers leurs valeurs respectives avant réassurance. Il est immédiat que si le plein est à 0, la cession est totale et donc VaR et TVaR

nettes sont nulles. De la même manière que VaR et TVaR tendent vers leurs valeurs au brut quand le plein est élevé ($> 400K$). Entre ces deux extrêmes, nos deux mesures de risque sont supérieures à leurs valeurs au brut, ce qui confère à l'excédent de plein une originalité par rapport à la quote-part : pour cette dernière, tout est directement proportionnel et donc à probabilité identique, les quantiles décroissent linéairement lorsque le taux de cession augmente. Ce qui n'est pas le cas pour l'excédent de plein comme nous le voyons sur la figure ci-avant. Ces mesures seront très intéressantes à comparer pour différentes structures, dans des diagrammes risque-rendement que nous verrons dans les prochaines sections.

En terme de capital, les exigences en S1 et en S2 évoluent selon la même courbe que résultat moyen et volatilité : les exigences dépendent elles aussi directement de la répartition des capitaux assurés. Pour rappel, les fonds propres requis étaient des fonctions affines du taux de cession pour une quote-part. Pour confirmer cette différence, nous pouvons tracer le capital S2 requis suivant les niveaux de plein, pour le risque de souscription et le risque de contrepartie, pour un traité pris par génération (30 ans ici).

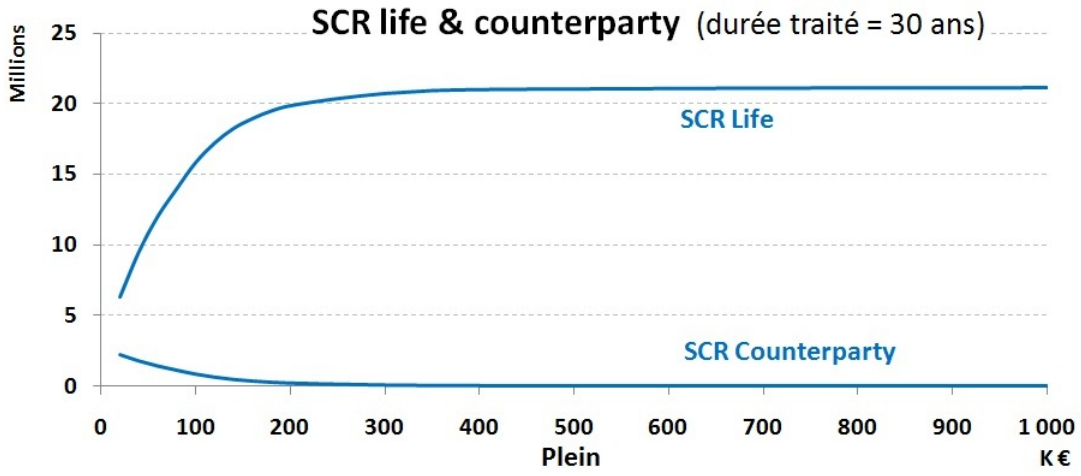


FIGURE 3.28 – SCR_{Life} et $SCR_{Counterparty}$ nets d'excédent de plein pour une durée du traité de 30 ans

Enfin, nous ne détaillerons pas formellement les effets d'une clause de participation aux bénéfices sur l'excédent de plein car le fonctionnement et les effets sont similaires à ce que nous avons vu dans la partie précédente. Mais donnons néanmoins un aperçu de la volatilité nette en fonction du plein lorsque le taux de participation est fixé à 90%, et du coefficient de variation net pour un taux de participation fixé à 40% et 90%.

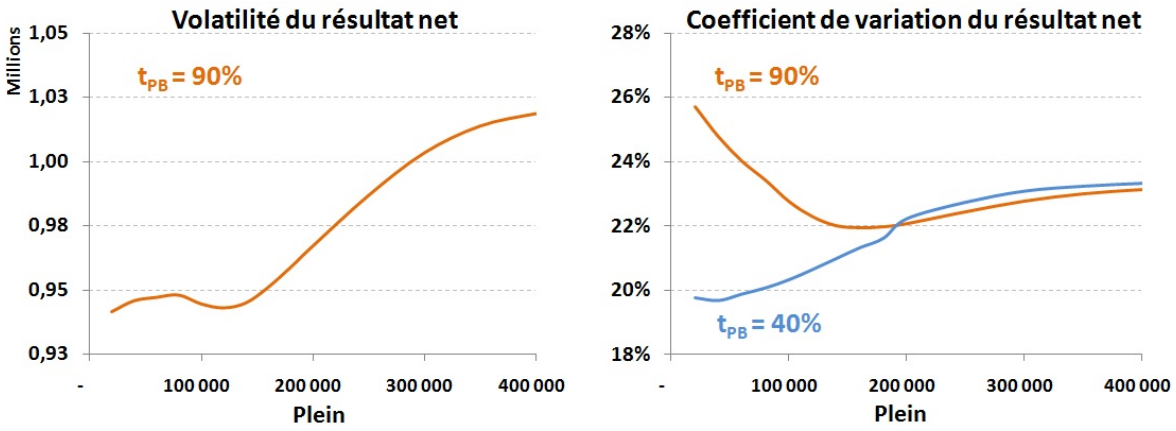


FIGURE 3.29 – Volatilité et coeff. variations nets avec une participation de 90%

Il est important de remarquer qu'il existe un plein compris entre 100K et 150K qui minimise la volatilité du résultat net (à gauche). Ce niveau de plein minimise également le coefficient de variation du résultat net (à droite) pour un taux de participation à 90% : quand le plein est inférieur à cette région $100K$, la participation retourne plus de volatilité que de moyenne ; à l'inverse, quand le plein est supérieur à $150K$, la cession en volatilité domine celle en moyenne.

Avant d'aller plus loin dans la recherche d'optima, étudions la possibilité de superposer plusieurs tranches de réassurance.

3.3.5 Superposition des tranches et taux de cession

Dans les étapes de formalisation de la problématique, nous avons donné les écritures suivantes pour les taux de cession respectivement de la quote-part avec un plein de souscription ($Ret1$) et de deux excédents de plein consécutifs ($Ret2 = Lim1$) :

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \alpha \cdot \min(1; \frac{Ret1}{K_i}) \\
\gamma_{1,i} &= \min\left(\max\left(1 - \frac{Ret1}{K_i}; 0\right); \frac{Lim1 - Ret1}{K_i}\right) \\
\gamma_{2,i} &= \min\left(\max\left(1 - \frac{Lim1}{K_i}; 0\right); \frac{Lim2 - Lim1}{K_i}\right)
\end{aligned}$$

Discutons et précisons ces écritures. Formalisé comme ceci, cela veut dire que le premier excédent de plein (taux $\gamma_{1,i}$) est appliqué au net du deuxième ($\gamma_{2,i}$), et la quote-part (β_i) est appliquée au net du premier excédent de plein (et donc du deuxième). Plus clairement, l'application de la superposition des tranches se fait, par ordre, de haut en bas. Cela signifie par exemple que la quote-part s'applique à toutes les polices dans la limite du plein de souscription ($Ret1$). Cet ordre paraît logique, mais n'est pas automatique. Nous pourrions appliquer les

tranches dans l'autre sens : la quote-part engloberait toutes les polices et la cession au taux α aurait pour assiette 100% des primes et sinistres. Viendrait ensuite le premier excédent dont le taux de cession s'exprimerait bien en fonction de la rétention et de la somme assurée mais serait retranché le taux α, qui est la part déjà cédée dans la quote-part en dessous. On itère ce procédé pour la tranche supérieure. Illustrons ceci dans le cas d'un sinistre total pour un montant précisé à chaque étape. Alors la sinistralité cédée vaut

- αK_i pour la quote-part
- $Lim1 - Ret1$ si l'on suppose $(1-\alpha)K_i > Lim1$ pour le premier excédent, net de quote-part
- $\big((1-\alpha)K_i - (Lim1 - Ret1)\big) - Ret2$ le sinistre restant à charge dans le deuxième excédent, si bien sûr $(1-\alpha)K_i - (Lim1 - Ret1) > Ret2$

En sommant la sinistralité cédée à cette structure de réassurance, on obtient $K_i - Ret2$, soit seulement la cession à l'excédent de plein n^{o}2. Nous trouvons finalement que cette configuration à 3 tranches est équivalente à une structure à une seule tranche d'excédent, ce qui n'est pas très judicieux. A l'inverse, dans le cas de notre formalisation des taux de cession (au début du paragraphe), la sinistralité totale en rétention après structure à plusieurs tranches est égale à $(1-\alpha)\min(Ret1, K_i)$. Le niveau de rétention est donc bien mieux maîtrisé et reflète l'utilité de la pluralité des tranches (au moins deux, quote-part et premier excédent de plein).

Maintenant, dans un deuxième point, nous montrons que l'ordre choisi des structures (*netting* de haut en bas) implique que deux excédents ayant des conditions identiques revient à considérer un seul excédent avec rétention du premier et limite du second. En effet, si

- $K_i < Ret1$, $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} = 0$
- $Ret1 < K_i < Lim1$, $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} = \gamma_{1,i} = 1 - \frac{Ret1}{K_i}$
- $Lim1 = Ret2 < K_i < Lim2$, $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} = \frac{Lim1-Ret1}{K_i} + \frac{K_i - Lim1}{K_i} = 1 - \frac{Lim1}{K_i}$
- $Lim2 < K_i$, $\gamma_{1,i} + \gamma_{2,i} = \frac{Lim2-Ret1}{K_i}$

Si l'on se cantonne donc au taux de cession, deux excédents consécutifs sont parfaitement équivalent à un seul. Reste alors le taux de commission. Le montant des commissions reversées par les excédents est égale à

$$t_{com.1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma_{1,i} P_i + t_{com.2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma_{2,i} P_i$$

et alors dans le cas où $t_{com.1} = t_{com.2}$, on obtient le montant de commission pour un seul excédent de plein. Pour la participation aux bénéfices, c'est moins évident puisque l'opérateur $(.)^+ = max(., 0)$ n'est pas additif pour des quantités non toujours positives, mais on retrouve au moins ce résultat en moyenne et dans tous les scénarios oú le résultat cédé à la structure est positif.

Pour résumer notre étude jusqu'ici, nous avons étudié indépendamment chaque structure, et les effets des paramètres qui les composent (rétention ou taux de cession, commission et participation). Maintenant, nous sommes en mesure de comparer ces structures au regard de critères communs, et aussi de complexifier la structure en superposant quote-part et excédent de plein.

3.3.6 Mesures risque-rendement et frontières efficientes de la réassurance

Pour pouvoir comparer deux structures de réassurance dépendant de paramètres différents, il est nécessaire de trouver un dénominateur commun au deux. Le plus simple et le premier qui vient à l'esprit est la moyenne du résultat après réassurance, en les ordonnant de manière croissante pour déterminer quelle structure (et les paramètres associés) est spécifiquement consommatrice de résultat. Cependant, cette analyse est très limitée puisque, a priori, la réassurance a un coût : nous disposerions uniquement de l'information "quelle structure est la moins chère en moyenne", le point intéressant étant de connaÃ®tre le niveau de protection associé à ce coût. Cela revient à faire une analyse risque-rendement de manière assez similaire à l'analyse financière. Dans la pratique, nous allons ainsi représenter dans des diagrammes les points de coordonnées $(\rho_{rdt}\left(Res^{net}\right);\rho_{risk}\left(Res^{net}\right))$ avec ρ_{rdt} mesure de rendement et ρ_{risk} mesure de risque.

Frontière efficiente en critère moyenne-variance

Dans un premier temps, nous utilisons comme mesure de risque la volatilité, et comme mesure de rendement la moyenne sur la première année. Dans cette configuration de mesure, nous avons déterminé de manière calculatoire une frontière efficiente selon la méthode de *de Finetti*. En pratique, nous fixons la contrainte de résultat en moyenne, à partir de laquelle nous calculons par un solveur la variable lagrangienne λ définie dans la partie de *résolution analytique*. En trouvant λ, on détermine les taux de cession individuels optimaux et donc la volatilité globale après réassurance satisfaisant le programme de minimisation de la volatilité. Nous appliquons ce procédé à notre portefeuille pour plusieurs valeurs de résultats objectifs, par pas de 100K et traçons la frontière efficiente. De là, nous ajoutons nos points de coordonnés (volatilité nette, moyenne nette) issus de la quote-part pour différents taux de cession et différents taux de participation aux bénéfices (0%, 10%, 30%, 50% et 90%). Nous ajoutons de même les points issus de l'excédent de plein, pour différents niveaux de plein et différents taux de participation aux bénéfices (0%, 40% et 90%).

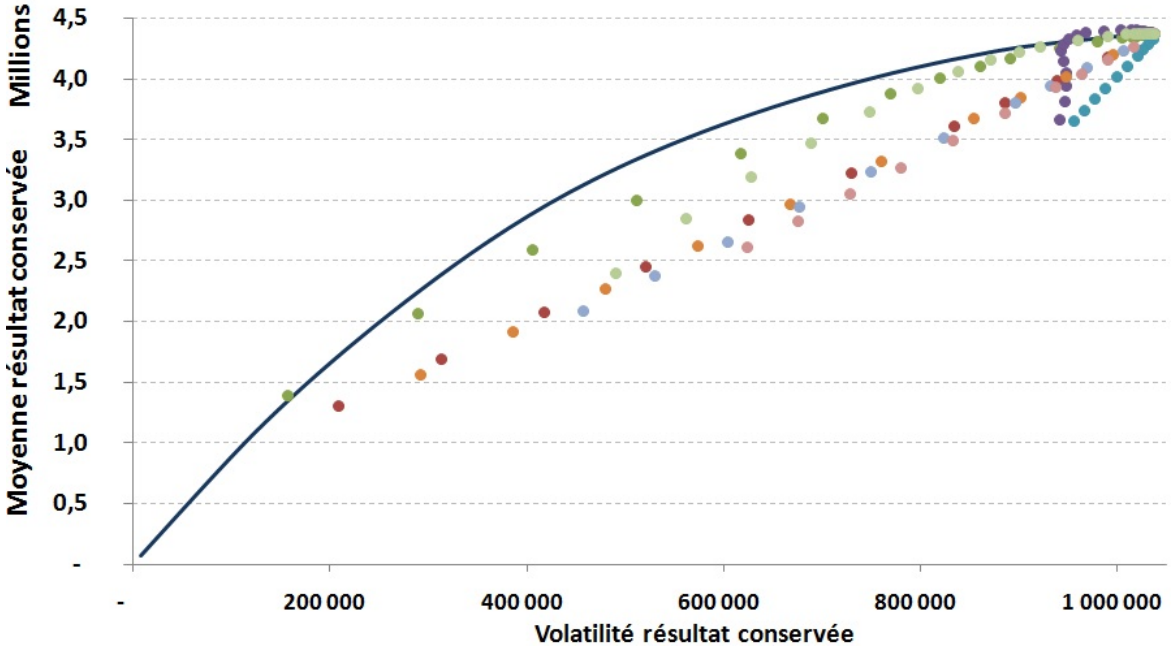


FIGURE 3.30 – Diagramme risque-rendement avec frontière efficiente et points modélisés

Pour faciliter la lecture, nous n'inscrivons pas les combinaisons sur le diagramme. On pourra retrouver en annexe ce diagramme en deux parties, avec les points concernant la quote-part d'un coté et excédent de plein de l'autre. La courbe représente la frontière efficiente selon la méthode de minimisation de la variance (de Finetti). Nous rappelons qu'elle est tracée pour un résultat en moyenne ne comprenant pas de commission. Ce diagramme permet de répondre à deux questions sur la position de nos points relativement à la frontière efficiente :

- Cette frontière peut-elle servir d'échelle de comparaison et d'optimum "réel" à atteindre ? C'est la question de la pertinence de notre modèle et de nos sorties.
- Pouvons-nous faire mieux que la frontière efficiente ? Nous abordons dans cette question le réalisme du programme d'optimisation formulé, et testons la sensibilité de nos résultats aux paramètres annexes des structures : commission et participation. L'usage de ces clauses nous permet-il d'aller Au-delà de l'optimum ?

L'allure générale du diagramme peut nous rassurer quand à la cohérence des sorties du modèle : premièrement, les points sont placés du bon coté de la frontière, et deuxièmement nous reconnaissons facilement les types de réassurance pour chaque couleur de point. Lorsque les points semblent (sont dans les faits) alignés, ils sont issus de quote-part, les autres d'excédent de plein.

Par une première observation, nous voyons que la structure qui se rapproche le plus de la frontière efficiente est un excédent de plein sans participation aux bénéfices (points verts foncés, oú chaque point représente un plein différent). Nous voyons également que seules les structures sans participation aux bénéfices permettent d'obtenir des niveaux très bas de vola-

tilité conservée, lesquels se reflètent sur les niveaux de rendement (moyenne). Dès lors qu'est modélisé une clause de participation, les points sont pour la plupart déplacés vers le haut en terme de moyenne et également vers la droite en terme de volatilité, ce qui est en accord avec les explications des sections précédentes. Nous pouvons remarquer cependant deux faits :

- quand le taux de participation augmente (du vert au violet pour l'XP, du rouge au bleu clair pour la QP), la pente est plus forte ce qui traduit que l'augmentation de volatilité est plus importante que le gain en moyenne
- la participation aux bénéfices réduit le spectre des couples (σ, μ) pour les mêmes variations de plein ou de taux de cession : l'intervalle de volatilité conservée parcourue par l'ensemble des points représentés violet est bien plus faible que celui pour l'ensemble des points représentés en vert.

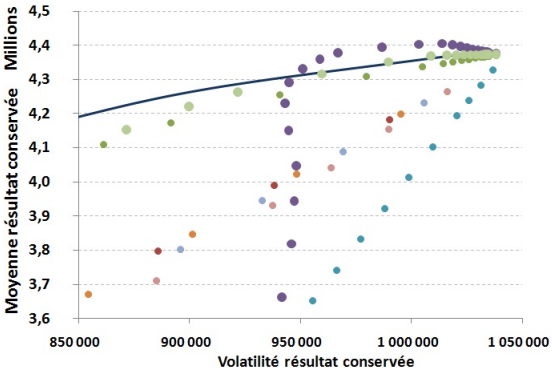
De plus, ce diagramme permet de mener directement une comparaison quantitative. Sur la figure 3.30, fixons la moyenne du résultat à $3M$: nous obtenons 4 points (hors de la frontière efficiente), ayant chacun des volatilités différentes, que nous décrivons dans ce tableau :

	Structure 1	Structure 2	Structure 3	Structure 4
Volatilité	511 055	666 925	676 811	728 207
Type	Excédent	Quote part	Quote part	Quote part
Taux de cession	-	40%	50%	60%
Plein	80 000	-	-	-
Participation	0%	10%	30%	50%

FIGURE 3.31 – Quatre structures à conditions différentes et moyenne à $3M$

La volatilité observée sur la frontière efficiente pour ce résultat objectif a pour valeur 444 000.

Dans le diagramme, les points sont tracés pour un taux de commission de 10%. Pour cette raison, et contrairement à la frontière efficiente, les points issus de la modélisation ne passent pas par l'origine. C'est l'objectif soulevé par la deuxième question, qui est de quantifier l'influence des paramètres annexes comme nous l'avons fait indépendamment pour chaque structure en fonction des paramètres principaux.



Un zoom sur la zone concentrée en haut à droite permet justement de répondre à la seconde interrogation. L'observation est très claire : il existe bien des combinaisons permettant de dépasser la frontière efficiente, et ce sont les points représentés en violet correspondant à un excédent de plein avec un taux de participation aux bénéfices à 90%.

Dans les faits, lorsque le plein est dans l'intervalle $[160K, 1M]$, le résultat reste supérieur à $4,3M$ (jusqu'à -2% du brut de réassurance) alors que la volatilité est réduite jusqu'à 10% de sa valeur au brut de réassurance. Par contre, à conditions identiques, lorsque le plein descend en dessous de $160K$, c'est l'effet inverse : la volatilité nette ne varie plus, c'est par contre la moyenne du résultat net qui chute. Le dépassement de la frontière efficiente n'est donc que temporaire. Cela montre que si l'excédent de plein paraît être plus proche de la frontière efficiente, l'arbitrage entre les niveaux de la structure et les conditions annexes est primordial pour en garantir l'efficience.

Changement de mesure de rendement, et quantiles

Pour permettre une analyse plus décisionnelle, nous regardons la cession du risque par rapport au coût de la réassurance. Nous définissons le coût de la réassurance comme la moyenne du résultat cédé, après recouvrements, commissions et participations. De plus, si le risque est représenté par la volatilité, nous regarderons l'écart $\sigma(Res^{brut}) - \sigma(Res^{net})$ car nous avons montré qu'il y a une perte de volatilité par le mécanisme de transfert de risque ($\sigma(Res^{brut}) - \sigma(Res^{net}) > \sigma(Res^{brut} - Res^{net})$, cf. *formalisation* pour la preuve). Représentons les mêmes points avec cette fois les nouvelles mesures qui viennent d'être présentées :

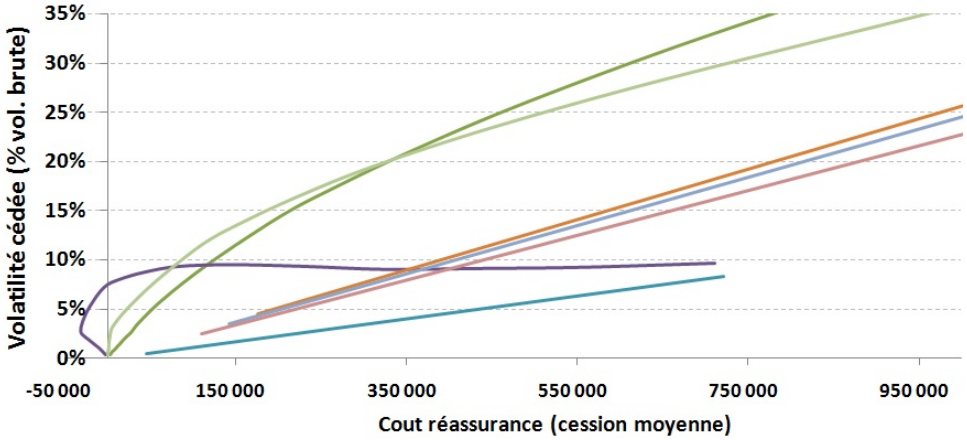


FIGURE 3.32 – Diagramme coût-risque et abaques par type de structure proportionnelle

Nous avons d'une part confirmation des observations faites plus haut dans cette page. Il apparaît également plus clairement que la courbe représentée en violet prend des valeurs négatives sur l'axe des abscisses : il est possible de céder de la volatilité tout en ne cédant pas (voire en gagnant un peu) de résultat en moyenne, et ce grâce à la participation aux bénéfices fixée à 90%.

Maintenant, allons plus loin que le concept de volatilité pour mesurer le risque : que se passe-t-il quand on regarde les quantiles extrêmes et les exigences en capital par les normes réglementaires actuelle et à venir ? Le graphique suivant nous permet de résumer les effets des structures de réassurance jusqu'ici modélisée dans notre étude dans les scénarios extrêmes de mortalité, sur le résultat technique après réassurance :

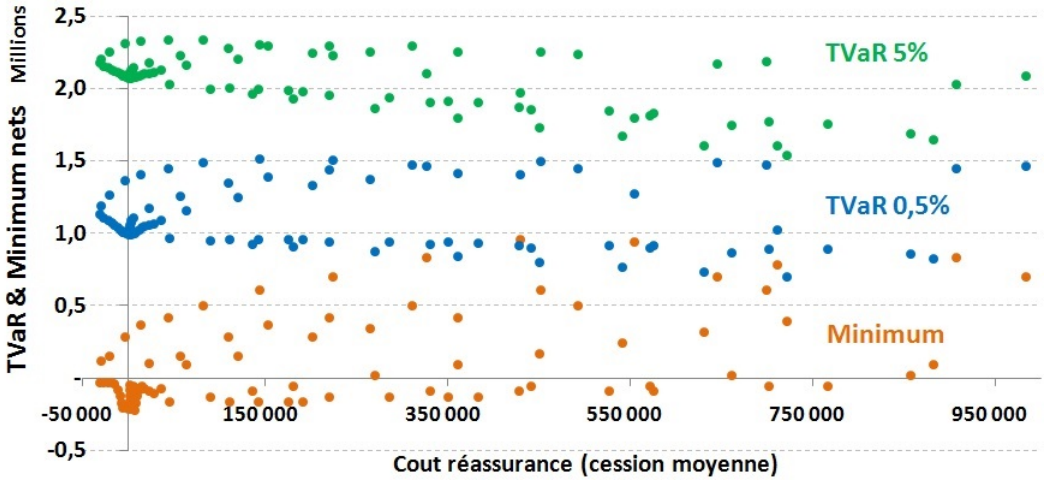


FIGURE 3.33 – Diagramme coût-risque avec mesures de risque extrêmes

Les coûts de la réassurance restent identiques, par contre, nous observons un redressement de la tendance décroissante quand la probabilité diminue.En effet, quand la cession en moyenne augmente,

- $TVaR_{5\%}$ globalement décroît, et les points sont concentrés dans le même faisceau
- pour la $TVaR_{0,5\%}$, les points sont plus dispersés : nous pouvons reconnaître les droites décroissantes associées aux quote-parts, tandis que la $TVaR_{0,5\%}$ augmente puis se stabilise pour les points associés aux excédents (en bleu, ce sont les points dans la partie supérieure du faisceau)
- pour toutes les structures, le minimum est amélioré ($> -204K$), avec dans le haut du faisceau orange les structures en excédent de plein.

Encore une fois, il apparaît que la structure en excédent de plein surpasse la quote-part. Cependant, une attention particulière doit être portée au taux de participation car il détermine fortement l'amélioration en queue de distributon, le coût de la réassurance, volatilité associée.

Comparaison des effets sur le capital par référentiel, structure et durée

Abordons la question du capital. Pour mesurer l'effet de la réassurance, nous calculons, en fonction du coût, l'économie de capital requis en S1 puis en S2. Sous Solvabilité 1, la durée du traité n'influe pas sur le montant du capital.

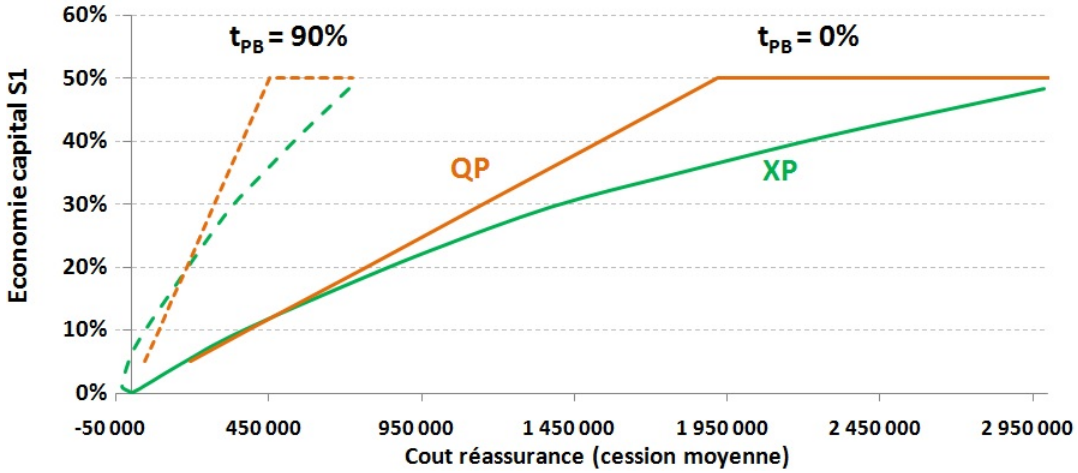


FIGURE 3.34 – Exigence S1 en fonction du résultat cédé en moyenne

Pour ce critère, l'économie de capital est plus forte et plus rapide dans la configuration d'une quote-part avec un plafond à 50% du capital avant réassurance, tandis que la distribution des capitaux assurés du portefeuille limite la cession pour l'excédent de plein. Quand une clause de participation est ajoutée (90% en exemple ici), la cession en moyenne de résultat est logiquement réduite, mais cette clause n'a aucun impact sur le capital S1.

Contrairement à l'exigence S1, le BSCR (SCR_{Life} et $SCR_{counterparty}$ pour notre étude) est très sensible à la durée du traité, comme nous avons pu le voir dans la partie consacrée à la quote-part. La forme proportionnelle des structures que nous traitons pour l'instant nous permet de les projeter de manière pluriannuelle. Nous regardons naturellement les impacts en S2 pour des durées de traité de 1, 3 et 30 ans. Bien sûr, il est important de prendre la mesure de coût qui correspond à cette considération pluriannuelle : pour chaque durée, sera mis en face le coût (cession en moyenne) sur la VIF (Value-In-Force), calculée comme la valeur actuelle des flux futurs de résultat. Nous utiliserons une échelle identique sur les trois diagrammes pour bien comprendre l'enjeu de la durée du traité.

Ci-dessous, la cession maximale ne dépasse pas 10% du SCR brut si le traité est considéré sur 1 an ; cette cession maximale passe à 15% sur 3 ans ; elle est supérieur à 65% quand le traité est par génération (jusqu'à extinction du portefeuille, i.e. 30 ans).

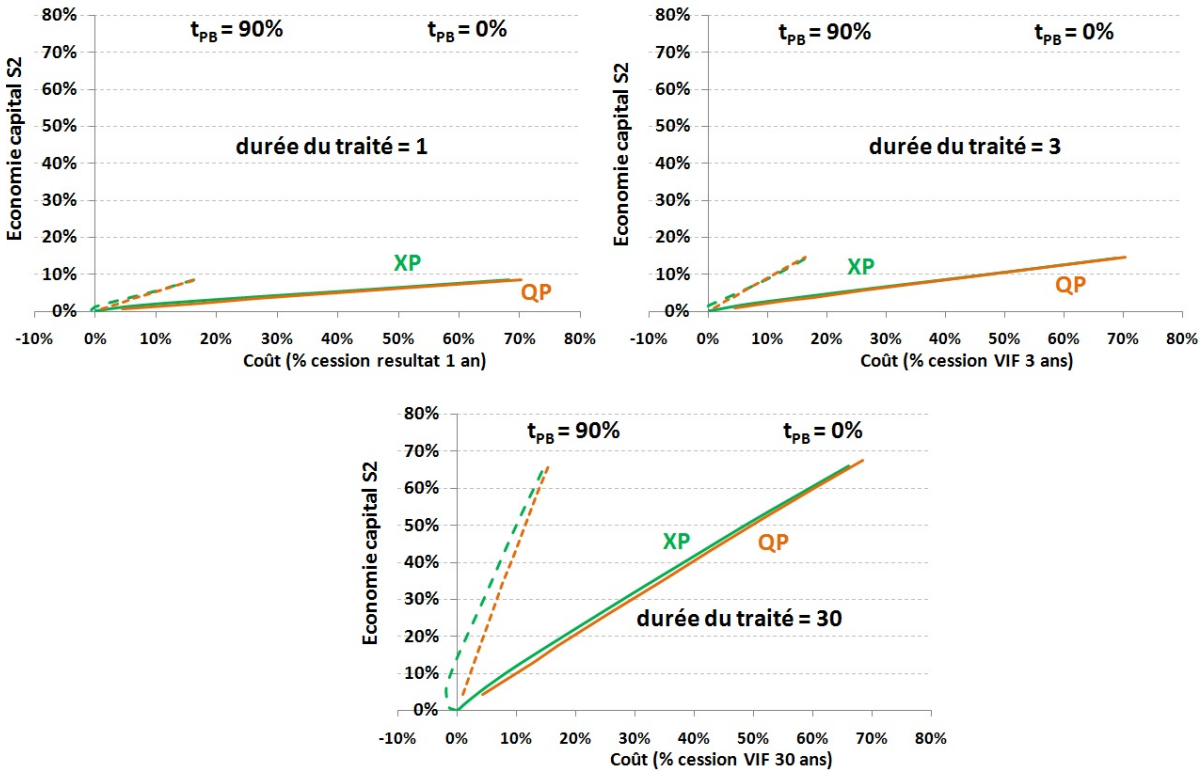


FIGURE 3.35 – Diagramme coût-capital S2 pour trois durées de traité

Les graphiques précédents représentant les économies en exigence S1 et S2 nous permettent de faire deux commentaires. Le premier est que l'impact sur le besoin capital pour une quote-part et un excédent diffère suivant le référentiel de norme : en S1, et pour une coût de réassurance supérieur à $500K$, la quote-part permet une économie plus importante que l'excédent. Ceci ne se vérifie pas dans le référentiel S2, pour lequel l'écart entre ces deux structures est minime. Le deuxième commentaire consiste à dire que S2 prend en compte la variable "durée du traité" : l'économie de besoin en capital augmente avec cette durée, et dépasse l'exigence en capital S1 pour des durées supérieures à 15 ans. Dans un deuxième temps, nous observons que l'ajout d'une clause de participation affecte uniquement le montant du capital requis en S2 : le montant des participations, avec celui des commissions, s'ajoute aux recouvrements dans le calcul du $SCR_{counterparty}$. Cependant, le traitement du risque de contrepartie, via les probabilités de défaut, rend l'augmentation en besoin en capital pour ce module peu significative.

Nous pouvons donc conclure que la recherche d'optimum en norme S2 porte principalement sur la durée du traité tandis qu'elle s'appuie uniquement sur la forme et ses niveaux dans l'univers S1.

En croisant les diverses observations faites jusqu'ici, nous pouvons déduire que l'excédent de plein est une structure qui permet de céder plus de risque tout en gardant un résultat en moyenne élevé, surtout s'il est doté d'une participaton aux bénéfices. Cependant, si celle-ci devient trop importante, il n'y a plus de cession de volatilité. L'excédent de plein est aussi plus intéressant pour les extrêmes des distributions car pour un coût au plus égal, voire inférieur, les quantiles, TVaR et minima sont meilleurs que pour une quote-part. Enfin, la cession en terme de capital dans notre cas est équivalente à une quote-part sous Solvabilité 2, moins efficiente qu'une quote-part quand les niveaux de l'excédent de plein sont bas (i.e. coût plus important).

Introduction des combinaisons de structures

Nous avons à présent la possibilité de superposer des tranches pour utiliser au mieux les qualités de chacune. Pour cela, il faut dans un premier temps savoir quelles structures (ou formes cf. *formalisation* et littérature sur le sujet) superposer et ensuite les intervalles dans lesquels vont varier les niveaux de chacune des structures. Nous considérons assez naturellement (cf. toute la première partie) une forme combinée en quote-part avec un plein de souscription surmontée d'un excédent de plein, les deux avec un taux de participation à 70% puis 90%. Le taux de cession de la quote-part varie entre 5% et 50% et le plein de l'excédent entre $60K$ et $200K$. Cette réassurance est celle dont la surface du résultat net est tracée à la fin de l'optimisation de de Finetti à la section 2.2.2, avec trois affirmations suggérant l'existence de plusieurs couples donnant la même moyenne mais des volatilités différentes et ayant une plus forte sensibilité à l'excédent de plein qu'à la quote-part. Nous complétons cette première analyse avec les deux surface ci-dessous pour ces mêmes combinaisons : coefficient de variations et TVaR, nets de réassurance.

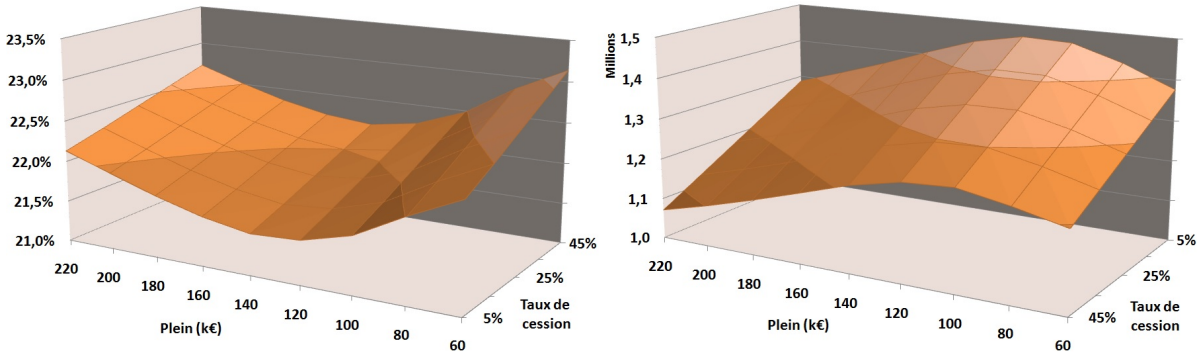


FIGURE 3.36 – Surface du coefficient de variations (gauche) et de la $\text{TVaR}_{0,5\%}$ (droite) en fonction du plein et du taux de cession, pour une structure QP+XP

Il existe d'ores et déjà un couple (α, R) qui minimise le coefficient de variation et maximise la Tail Value-at-Risk : pour un α donné, le plein optimal qui satisfait ces deux conditions se situe dans l'intervalle $[100K, 160K]$. Dans un deuxième temps, nous remplaçons la première tranche

en quote-part par une tranche en excédent de plein, de telle sorte que les deux excédents de plein sont continus. Le plein du premier excédent prend ses valeurs entre $60K$ et $200K$, le deuxième est fixé tel que $plein2 = plein1 + x$, où x représente ici ce que l'on appelle la portée du premier excédent. Celui-ci est donc "à portée constante". Nous traitons le cas $x = 100K$ puis $x = 200K$. Par ailleurs, nous avons vu que lorsque le plein est bas (cas de la première tranche de cette structure), la volatilité cédée est très sensible à une augmentation de la participation aux bénéfices. Pour cette raison, le taux de participation sur la première tranche est choisi faible voire nul. Par contre, lorsque le plein est plus élevé, une participation aux bénéfices permet de retourner du résultat tout en cédant de la volatilité. (cf. Figure 3.32 *Diagramme coût-risque et abaques par type de structure proportionnelle*). Ci-dessous figurent les abaques coût-volatilité cédée pour : un excédent de plein seul, une quote-part seule, et les points correspondants aux combinaisons de quote-part et d'excédent détaillées juste avant.

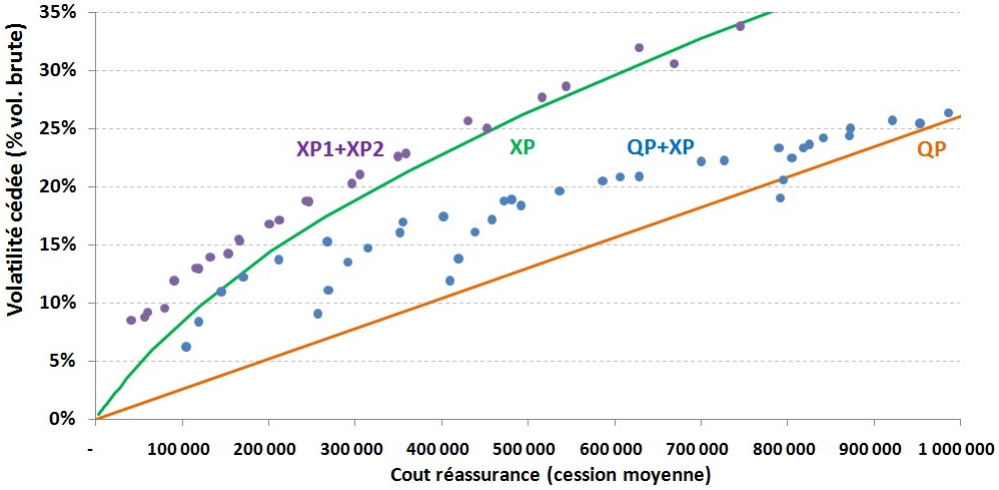


FIGURE 3.37 – Diagramme coût-volatilité cédée, par combinaisons

La structure combinée avec deux excédents de plein est supérieure à toutes les autres quand le coût de réassurance reste inférieur à $1M$. En effet, si la volatilité cédée est légèrement supérieure à celle d'un excédent de plein seul sans participation, c'est surtout sur la réduction de cession en moyenne qu'elle est efficace. Quand à la combinaison quote-part/excédent de plein, les abaques se rapprochent de la courbe moyenne-variance d'un simple excédent quand le taux de cession est faible, puis quand il devient significatif, les abaques se regroupent autour de la ligne de quote-part. Nous retrouvons une hierarchie similaire si utilisons la $TVaR_{0,5\%}$, avec des écarts toutefois bien plus marqués :

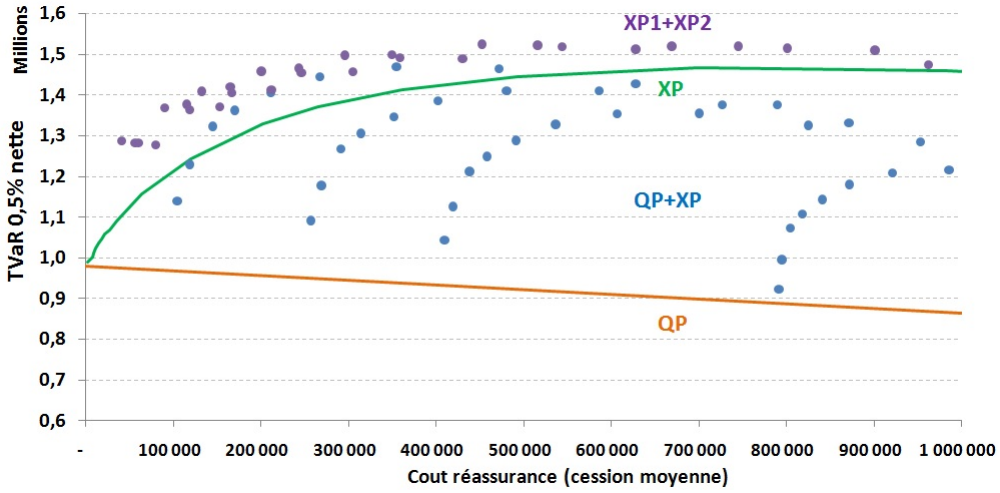


FIGURE 3.38 – Diagramme coût-TVaR nette, par combinaisons

Les structures en $XP1 + XP2$ et quelques unes en $QP + XP$ se logent dans le cadran haut-gauche, au dessus de l'abaque d'excédent seul : à coût égal, la moyenne des scénarios extrêmes Au-delà de 200 ans peut être maximisée pour certains niveaux optimaux des deux excédents, i.e les pires scénarios de résultat peuvent être améliorés. Ceci préfigure l'existence de frontière(s) efficiente(s) lorsque TVaR est la mesure de risque de la fonction d'utilité de la cédante.

Réunion de tous les modèles

A présent, nous pouvons justifier d'un peu plus de 230 modèles différents, soit un peu plus de 230 combinaisons de structures et de paramètres, pour chacune desquelles nous disposons :

- de toute la distribution de sinistres, de primes et de résultat sur la première année (5100 simulations)
- de 500 scénarios de projections sur 30 années pour le calcul de VIF
- des capitaux nets de réassurance pour le calcul de l'exigence S1
- des *best estimate* pour chaque choc afin de calculer les SCR sous S2

Nous saisissons donc l'opportunité de représenter dans le même diagramme ces 235 points pour les quatre mesures suivantes sur le résultat net de réassurance à 1 an : écart (Δ) entre brut et net du coefficient de variations, TVaR 5%, TVaR 0,5% et Minimum.

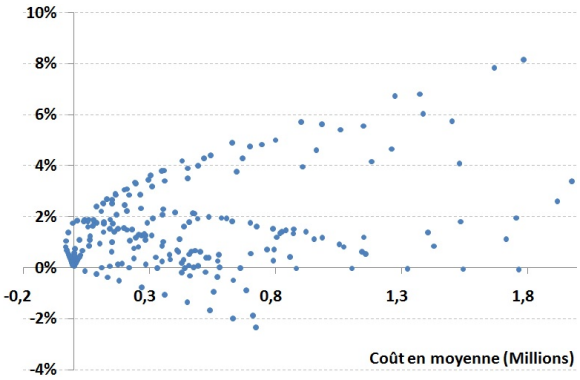


FIGURE 3.39 – Δ (brut-net) coeff. variations

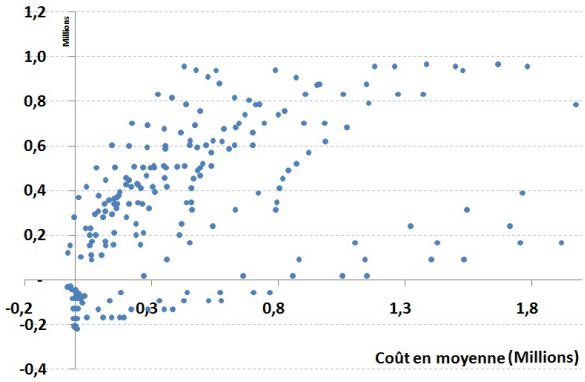


FIGURE 3.40 – Minimum

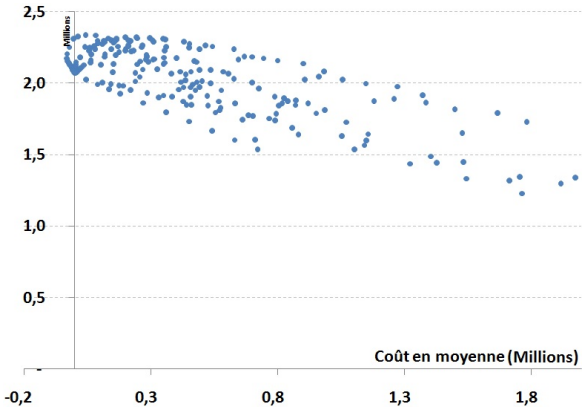


FIGURE 3.41 – TVaR 5%

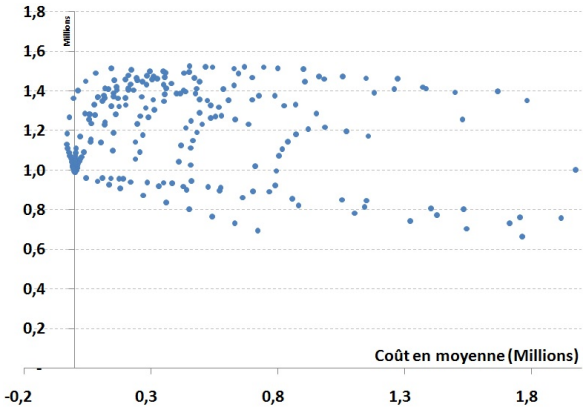


FIGURE 3.42 – TVaR 0,5%

Dans chacun des cadrans est représenté l'ensemble des points pour une mesure de risque en fonction du coût de la réassurance, comme nous l'avons défini au sens de résultat final moyen cédé.

Une vue d'ensemble révèle que dans chaque diagramme, les points sont situés dans un faisceau, le plus visible étant en figure 3.41. En analysant les coordonnées, les points en bordure de ces faisceaux correspondent aux structures non combinées et sans participation aux bénéfices (QP et XP seuls). Tous les autres points se retrouvent à l'intérieur de ces contours et sont des combinaisons de quote-part d'excédent de plein et/ou possèdent une clause de participation aux bénéfices.

Nous remarquons dans le premier cadran Fig 3.39 qu'il existe des structures pour lesquelles l'écart en coefficient de variations est négatif : cela signifie que pour ces paramétrages, le coût (moyenne) augmente plus vite que la volatilité n'est cédée. Pour toutes les autres, et nous l'avons détaillé dans la section 3.3.2 sur les variations des paramètres de quote-part qui fonctionne aussi pour l'excédent de plein, c'est le rendement assuré par le taux de commission qui influe sur la croissance et la concavité de nos abaques. Le taux de participation affecte le rendement mais aussi la volatilité, c'est donc lui qui pour des niveaux de réassurance élevés (on se déplace sur vers la droite de l'axe horizontal sur la Fig 3.39) ramène les points vers une cession nulle en coefficient de variation. Dans les figures 3.40 et 3.42, les abaques apparaissent plus nettement : en queue de distribution, les scénarios de primes sont bas et ceux de sinistres hauts, donc les participations aux bénéfices sont le plus souvent nulles. Ceci explique que pour une même niveau de TVaR, nous trouvons un alignement de points, correspondants à des coûts de réassurance différents.

D'autre part, quelques points font figurer un coût négatif, du fait de l'asymétrie de la participation aux bénéfices lorsque le taux de participation et le niveau de plein sont élevés. Plus en détail, ces points sont identifiés comme appartenant aux abaques d'excédent de plein. Lorsque le plein est haut, les réassureurs sont engagés sur une infime partie du portefeuille, pour les assurés aux plus hauts capitaux. Il y a de fait une très faible mutualisation, ce qui explique que le résultat de réassurance (donc le coût) prend ses valeurs autour de 0. S'ajoute à cela la participation aux bénéfices qui vient retourner les scénarios de résultat positif à la cédante. Ainsi, pour un taux de participation à 90%, quand le résultat est par chance positif, il n'en reste environ que 10% aux réassureurs, tandis qu'ils assument à 100% les scénarios de perte. Nous comprenons aisément que la moyenne de ces flux peut être négative, bien sûr sous les conditions précitées en début de paragraphe.

Décalage et courbure de la frontière efficiente en fonction du référentiel de rentabilité et de la mesure de risque

A présent, nous sommes en mesure de mener une analyse quantitative, analogue à la sélection de portefeuille d'actifs optimaux en finance, et de croiser de façon plus ou moins complexe tous les indicateurs de performance de la réassurance.

Pour cela, nous utilisons l'indicateur de rentabilité défini en section 3.1. Pour chaque structure, ce sont en fait deux indicateurs que nous suivons :

$$\frac{\textit{Résultat moyen net}}{\textit{Exigence S1 nette}} \quad \text{et} \quad \frac{\textit{Résultat moyen net}}{\textit{Exigence S2 nette}}$$

Maintenant que la rentabilité nette de réassurance est définie, il reste à identifier le risque net de réassurance correspondant. A cet effet, nous quantifions le risque simultanément à l'aide de trois mesures : la volatilité, la $\text{TVaR}_{0,5\%}$ et le minimum de la distribution.

Nous obtenons alors sur les figures 3.43 à 3.48 six nuages de points, où chaque structure de réassurance est identifiée en abscisse par son risque au sens des mesures nommées ci-avant, et en ordonnée par la rentabilité au sens de chaque norme.

Avant de commenter ces diagrammes, revenons sur la nuance entre rentabilité et résultat. En utilisant cet indicateur, nous posons la question de l'efficience du capital et non de la maximisation du résultat. En effet, si deux indicateurs de rentabilité sont égaux, cela ne veut pas dire qu'ils ont le même résultat en montant, car sinon ils auraient nécessairement le même capital. Par contre, cela veut dire que l'investissement d'un euro supplémentaire en capital assure le même résultat en montant dans les deux cas.

Ainsi, si pour un même montant de résultat, nous observons deux rentabilités différentes, cela signifie pour la structure qui a la rentabilité la plus faible que :

- il serait possible de réduire le capital en conservant le même résultat
- il serait possible d'augmenter le résultat en conservant le même capital.

Nous rappelons que la notion de capital est à prendre au sens de l'exigence en capital, comme si la cédante, pour conduire l'activité de ce portefeuille, lui allouait le capital minimal requis et rien de plus. Ce choix est discutable mais permet d'uniformiser l'approche et la quantification.

Le choix de la rentabilité est aussi motivé par le fait que nos diagrammes regroupent à présent 3 indicateurs et plus seulement 2 : résultat moyen après réassurance, exigence en capital après réassurance et risque après réassurance. L'analyse à deux indicateurs est commentée p.85-86. Enfin, une dernière remarque sur le niveau de rentabilité suivant chaque norme : nous voyons que la rentabilité est très élevée en S1 , et ceci est dû au faible montant de capital requis en S1 suite à nos calculs, a priori justes. Par contre une rentabilité de 20% en S2 pourrait être constaté sur le marché. Il est donc important de regarder avant tout la position relative des points.

Solva.1

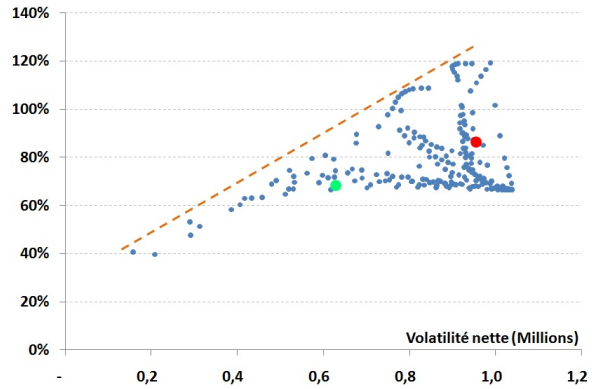


FIGURE 3.43 – Diagramme volatilité conservée - Rentabilité du capital immobilisé en S1

Solva.2

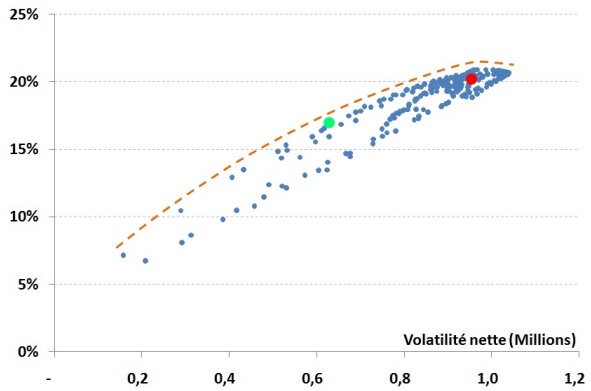


FIGURE 3.44 – Diagramme volatilité conservée - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an

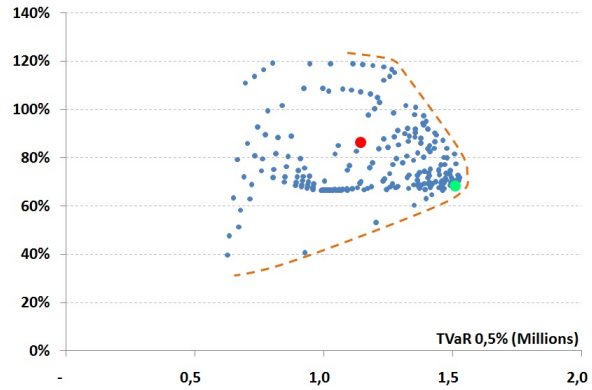


FIGURE 3.45 – Diagramme TVaR $0,5\%$ - Rentabilité du capital immobilisé en S1

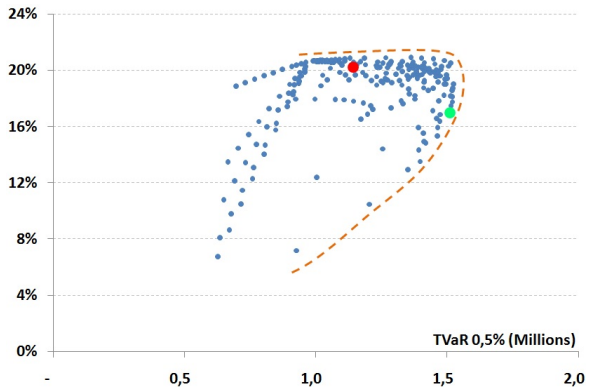


FIGURE 3.46 – Diagramme TVaR $0,5\%$ - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an

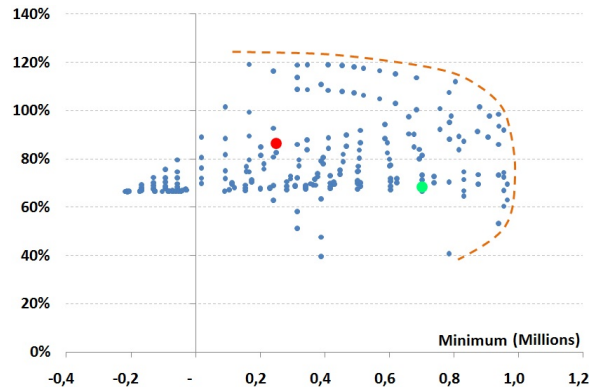


FIGURE 3.47 – Diagramme Minimum- Rentabilité du capital immobilisé en S1

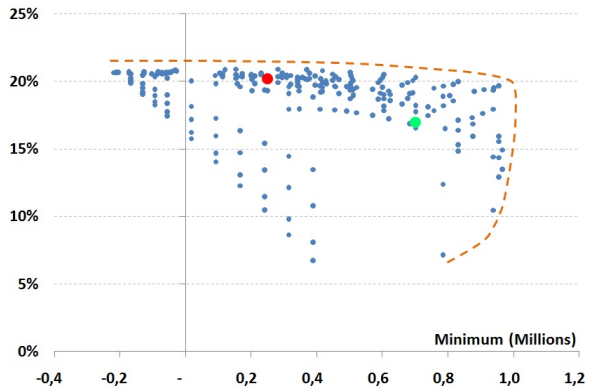


FIGURE 3.48 – Diagramme Minimum - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an

Chacun des six nuages de points fait apparaître des contours assez marqués : c'est la preuve de l'existence de frontières efficientes. Elles sont situées en bordure du nuage de points, et dirigées dans le sens qui maximise la rentabilité (vers le haut) et minimise le risque (vers la gauche pour la volatilité nette, vers la droite pour TVaR0, 5% et Minimum). Chacune des frontières, tracée en pointillés orange, est bien sûr valide dans le domaine "raisonnable" de taux de cession, de plein, de commission et participation choisi : ne figure pas de quote-part avec un taux de cession à 100% ou de structure avec un taux de commission de plus de 100%. Ces structures bénéficient d'un traitement spécial que nous abordons par la suite dans la section 3.3.8.

Il est important de noter que chaque frontière efficiente existe et est valable pour un couple mesure de risque et norme spécifique. La courbure (et l'orientation) de ces frontière change quand on utilise une mesure de risque différente, dans le même référentiel de solvabilité ; elle change également quand à mesure de risque identique, le référentiel change.

Cette validité "locale" des frontières efficiente pose une première interrogation quand aux positions relatives des points : en clair, la hiérarchie des structures change-t-elle si l'on change la mesure de risque et/ou le référentiel d'exigence ? Pour aider à répondre à cette question, nous faisons figurer sur tous les diagrammes deux points (rouge et vert) correspondant à deux structures différentes.

Le point vert est choisi optimal au sens de la norme S2 et de la volatilité nette : dans la figure 3.44, il n'y a pas de point ayant la même volatilité nette et une rentabilité supérieure. Le point rouge est choisi arbitrairement, nous constatons qu'il est plus risqué. Regardons leurs parcours au gré des changements de mesure et de norme en partant du cadran tout en haut à droite :

- passage en norme S1 (fig 3.43) : pour le point vert, la volatilité nette reste inchangée mais la rentabilité l'éloigne de la frontière efficiente. Idem pour le point rouge. La position relative des points reste la même.
- passage en TVaR 0, 5% (fig 3.46) : le point vert se situe toujours sur le contour du nuage de point, mais n'est pas sur la partie efficiente de la frontière : il existe des points ayant meilleure rentabilité ($> 16\%$) pour la même TVaR ($1,5M$). Le point rouge est proche de la frontière efficiente, et cette fois, la hiérarchie est inversée : le point rouge est plus optimal que le point vert.
- passage en Minimum (fig 3.48) : le point rouge conserve sa position mais le point vert se détache de la frontière : il n'est plus du tout efficient.
- passage en Minimum et norme S1 (fig 3.47) : mêmes commentaires que précédemment si ce n'est que le point rouge n'est pas non plus optimal.
- passage en TVaR 0, 5% et norme S1 (fig 3.45) : le point rouge est éloigné de la frontière efficiente et à mêmes rentabilité, d'autre points maximisent la TVaR. Le point vert reste sur la frontière et nous pouvons dire qu'il est le dernier point sur la frontière à être efficient (point de cassure de la "presque" hyperbole). Quoi qu'il en soit, il reste plus efficient au sens de la rentabilité en norme S1 et de la TVaR 0, 5% que le point rouge.

L'énumération des transitions et des effets sur la position d'un point, par rapport à la frontière efficiente et par rapport aux autres points, montre la difficulté évidente à trouver une

efficience "globale". Un tel questionnement transforme un problème à deux dimensions en un problème à n dimensions, où n compte autant de combinaisons que de mesures de risque et de normes. Dans ce cadre, la solution consistant à utiliser la dominance stochastique semble pertinent : cette méthode consiste à prendre en compte tous les points de la distribution. Au second ordre, la dominance stochastique nécessite le calcul de l'aire des fonctions de distribution tandis que le premier ordre est assez immédiat. Outre la lourdeur du calcul des quantiles et des aires des fonctions de répartition, c'est le principe de comparaison qui rend difficile sa mise en œuvre. La comparaison (au premier ou second ordre) doit se faire quantile par quantile, pour deux distributions en simultané, car c'est justement la force de cette méthode de reposer sur tous les quantiles. La transitivité des relations de premier et second ordre peut permettre d'en réduire le nombre, n'en reste pas moins que le nombre de choix de 2 structures parmi n explose quand n augmente. Et ce sans parler de dominance stochastique partielle à l'ordre 2. Des algorithmes d'accélération de la sélection de portefeuille sont sans doute possibles ou déjà existants, mais ce n'est pas le sujet ici.

Nous pouvons aller plus loin en ajoutant la dimension "durée du traité" et en remplaçant à cet effet la variable aléatoire *résultat net* par la variable aléatoire *VIF du résultat net*. Et il faudrait également définir non plus un RORAC annuel mais un RORAC pluriannuel, basé sur le capital requis au temps $t = 0$ et sur la projection de ce capital requis (nous pouvons faire référence aux hypothèses de proportionnalité des SCR futurs aux *best estimate liabilities* , i.e. $SCR(t) = k \cdot BEL(t)$).

L'analyse conduite précédemment concerne des structures de type proportionnel. Naturellement, il convient maintenant de les confronter à des structures en excédent de sinistre. Nous allons d'abord définir les différentes catégories d'excédent de sinistre, puis comparer en terme de prix deux excédents, de sinistre et de plein par tête - il est important de pouvoir comparer ce qui est comparable, d'où l'importance de la catégorisation avant les calculs. A l'issue de cette comparaison, nous pourrons étudier la position des structures proportionnelles en terme d'impact risque-rendement.

3.3.7 Etude des couvertures non proportionnelles

Nous avons jusqu'à présent étudié des structures à forme proportionnelle. Naturellement vient la question de la comparaison avec une forme non proportionnelle. Dans cette catégorie, nous discernons trois structures représentatives : l'excédent de sinistre par tête, l'excédent de sinistre *aggregate* et l'excédent de sinistre catastrophe. Le dernier est utilisé pour des protections contre des évènements catastrophes (sinistres concentrés dans le temps et rattachés de la même cause) : nous ne le traiterons pas ici. Les deux autres structures non proportionnelles permettent de se protéger contre une surmortalité survenant dans l'année : l'une est une structure par tête, ce qui signifie que la priorité s'applique pour chaque assuré, tandis que pour l'*aggregate*, la priorité du traité est appliqué au montant de total de sinistre (montant agrégé).

Non proportionnel par tête

Il est assez immédiat que le montant de sinistres à charge de réassurance pour un excédent de sinistre par tête est équivalent à celle d'un excédent de plein ayant les mêmes niveaux. Ceci est vrai dans notre cas par le simple fait qu'un sinistre est nécessairement total : le montant du sinistre pour un assuré est égal au montant de la somme assurée. Si ce n'est pas vérifié, avec par exemple un pourcentage de dommage (non vie) ou un sinistre dépendant du temps (rentes d'incapacité-invalidité), alors nous ne pourrons pas utiliser ce résultat. Dans le cadre de notre étude donc, il est aisé de comparer ces deux excédents. Pour cela, est c'est là tout l'enjeu et la difficulté face au proportionnel, il est nécessaire pour le non proportionnel d'introduire une mesure de prix. Une mesure classique du prix d'un excédent de sinistre est la moyenne des recouvrements à laquelle s'ajoute un chargement à la volatilité de ces recouvrements. Là encore, le choix du chargement est primordial pour définir le prix de la couverture, même si toutefois moyenne et volatilité des recouvrements donnent une première estimation de l'exposition de la tranche d'excédent de sinistre. Nous comparons prime cédée par un excédent de plein et prime cédée par un excédent de sinistre pour deux chargements arbitraires (10% et 30%) :

Plein / Priorité	Recouvrements		Primes cédées XP	Prime XS fonction λ	
	Moyenne	Volatilité		10%	30%
80 000	2 737 815	633 539	4 566 272	2 801 169	2 927 877
100 000	2 055 480	556 401	3 377 080	2 111 120	2 222 401
120 000	1 531 004	491 019	2 477 931	1 580 106	1 678 310
140 000	1 131 706	435 663	1 805 217	1 175 272	1 262 405
160 000	858 774	389 240	1 356 016	897 698	975 546
180 000	649 843	349 649	1 016 470	684 807	754 737
200 000	508 085	316 659	788 712	539 751	603 082
250 000	303 607	249 111	470 210	328 518	378 340
300 000	161 649	199 854	250 717	181 634	221 605
350 000	80 092	169 423	128 363	97 034	130 919
400 000	52 849	149 857	89 314	67 834	97 806

FIGURE 3.49 – Primes d'excédent de sinistre par tête

Nous observons un écart en terme de primes cédées : de façon logique, l'excédent de plein cède un montant plus important car il est calculé sur les primes brutes transmises par la cédante et reflète donc le loss ratio brut constaté. Nous remarquons cependant trois zones : pour les pleins faibles et jusqu'à $140K$, l'excédent de plein cède bien plus de prime que l'excédent de sinistre. Entre $140K$ et $200K$ les primes cédées sont bien plus proches, et Au-delà de $200K$, elles sont globalement équivalentes, suivant le taux de chargement choisi. Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque le plein est bas, l'excédent de plein cède du résultat en moyenne. Pour cette raison, l'excédent de sinistre semble meilleur en terme de prix, même si le choix du chargement est arbitraire. D'autre part, notre mesure de tarification peut être mise en question : une tarification dépendant du capital à mettre en place par la réassureur pour couvrir ce risque peut être utilisée. Nous voyons ici qu'il apparaît encore plus complexe de construire une frontière efficiente à laquelle nous pourrions comparer l'efficacité de la structure non proportionnelle par tête : quelque soit la mesure choisie, le prix n'est pas linéaire en fonction du niveau de la priorité (=plein), et n'est par définition pas proportionnel à la prime de chaque assuré. Un programme de minimisation à la de Finetti s'écrirait avec une contrainte objectif comme suit : $\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (1-t_{XS}) - E(\min(S_i, R)) = res_{obj}$ qui se transforme en $\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot (1-t_{XS}) - q_{x_i} \cdot \min(K_i, R) = res_{obj}$. Dès lors que le prix est fixé (taux de prime d'excédent de sinistre t_{XS}), la contrainte sur le résultat objectif impose le niveau de priorité R. Il n'y a donc que deux niveaux de liberté : le taux de prime et le niveau de priorité.

Pour résumer, dans le prix figure l'incertitude du réassureur sur le portefeuille, le montant des primes estimées, les hypothèses de mortalité, l'historique, et la structure sous-jacente à cette tranche ... une incertitude qui n'a pas lieu d'être en proportionnel puisqu'il y a un réel partage du sort entre cédante et réassureur. Ce partage du sort peut être alimenté par des conditions plus souples sur un excédent de plein que sur un excédent de sinistre : la mise en place d'une clause de participation aux bénéfices sur l'excédent de plein permet de retourner le surplus de résultat à la cédante ou bien via une augmentation de commission initiale céder plus de volatilité. Avec les chiffres figurant ci-dessus, il faut une participation de $89,5\%$ pour que le résultat cédé par l'excédent de plein soit équivalent à celui cédé par l'excédent de sinistre avec chargement 30%. De plus, il est encore difficile de trouver et/ou mettre en place des structures

non proportionnelles par tête de manière pluriannuelle : le prix peut fluctuer d'une année sur l'autre en fonction de l'historique de sinistres, de l'allure des affaires nouvelles, et dans un environnement *best estimate* pour l'évaluation du capital, la comptabilisation de la structure ne peut se faire que sur la première année : l'impact sur les exigences en capital est très limité.

Non proportionnel au cumul des sinistres

Parlons maintenant de la structure *aggregate*. Au sein de cette catégorie, nous créons deux sous-types d'*aggregate* : le premier possède une priorité (au cumul des sinistres) plutôt basse, ce qui peut le rendre travaillant. Ce sous-type permet de protéger le portefeuille contre une dérive de la mortalité, mais non nécessairement liée à un évènement catastrophique. Cette couverture ressemble en fait pour beaucoup à une structure en Stop-Loss, et est dans ce cas très spécifique en terme de structuration, de tarification et de placement. Pour ces raisons, nous nous concentrons plutôt sur la deuxième sous-catégorie *aggregate* à priorité bien plus haute : l'excédent de sinistre "pandémie". Ce n'est, par définition, pas une couverture catastrophe par évènement, il faut donc définir un indice de suivi de la sur-mortalité. C'est la comparaison de cet indice à la valeur de déclenchement (appelée *trigger*) qui active la couverture contre le risque pandémique. Ce risque consiste à particulièrement exposer le portefeuille à une forte fréquence de sinistres sur une période donnée (plusieurs mois), et donc la couverture en excédent de sinistre total permet de protéger la cédante contre une hausse prolongée des taux de mortalité sur son portefeuille. En effet, l'amplitude (risques de pointes) peuvent être protégés par des structures par tête, mais la fréquence expose toujours les montants en rétention. En ce qui concerne la tarification, elle appartient à chaque réassureur, puisque le risque sous jacent est d'une occurrence très faible (3 pandémie historique par siècle en moyenne). Les fournisseurs de modèles catastrophes connus ont également présenté des modèles spécifiquement sur la pandémie et permettent d'aiguiller le prix de telles couvertures.

Au regard des indicateurs qui nous intéressent dans cette étude, cette couverture permet principalement de neutraliser le scénario CAT défini dans le QIS5 par le choc $q_x + 0,15\%$ (effet capital) et bien sûr de limiter la forte sinistralité en cas de pandémie (effet quantile). Le coût total (primes cédées - sinistres cédés) pour cette couverture est égale en moyenne au prix négocié avec les réassureurs, car par définition c'est un risque extrême qui n'affecte pas la moyenne. Nous observons un déplacement diagonal du point dans un diagramme coût-charge.

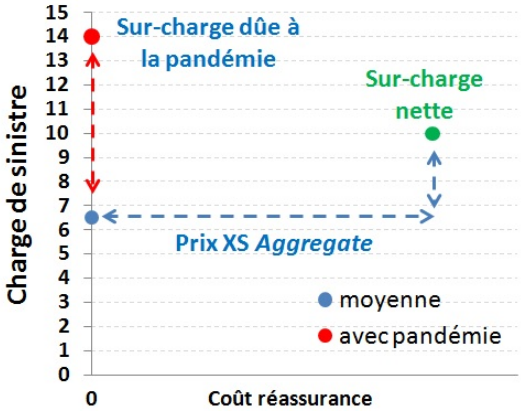


FIGURE 3.50 – Diagramme risque-rendement XS *aggregate*

3.3.8 Alternatives à ces structures

Nous avons étudié jusqu'ici l'impact sur les mesures de risque de structures "traditionnelles". Nous pouvons remarquer que nous avons volontairement limité les niveaux de taux de cession ou de plein pour ces structures. En effet, si les niveaux sont trop extrêmes, il y a peu de chances que les conditions du traité restent celles d'un traité traditionnel. Un exemple des plus parlant est le cas d'une quote-part à 100%. Sommes-nous toujours sous couvert d'une réassurance classique ou bien cela change-t-il les conditions de reconnaissance du traité (pour les parties et le régulateur) ? C'est cette question de reconnaissance qui est primordiale, et la moins évidente car la structuration est le plus souvent *sui generis*. Le terme "alternatif" englobe aussi le fait que les contreparties dans ces transactions ne sont pas nécessairement les contreparties habituelles d'un traité de réassurance, et que les marchés financiers peuvent constituer une alternative aux réassureurs. Finalement, il y a autant de réassurances "alternatives" que de cédantes et de contreparties.

Reprenons l'exemple de la quote-part à 100% : si elle est pluriannuelle, une telle quote-part pourrait être assimilée à un transfert de portefeuille : la totalité des primes est reversée au réassureur comme la totalité des sinistres. La différence va se jouer sur les conditions annexes : commission et participation aux bénéfices. Etudions les flux financiers liés à la mise en place d'une telle quote-part si on la suppose existante jusqu'à extinction du portefeuille : la cédante n'a plus à charge que ses frais généraux (assis sur les primes brutes). Le montant du capital S1 est limité à 50% tandis que dans un environnement *best estimate* (S2), seul le $SCR_{counterparty}$ (et le $SCR_{expense}$ dans une moindre mesure) doit être constitué pour le risque de contrepartie que représente cette quote-part à 100%. En toute théorie, nous obtenons les résultats suivants :

- VIF nette : $-7M$ (frais bruts)
- Volatilité nulle
- ΔSCR_{Life} : $20M$
- VIF des recouvrements et commissions : $141M$
- ces deux composantes donnent un $SCR_{counterparty}$: $4,5M$

Mais comme c'est justement mentionné juste avant, cette structuration est très théorique. En effet, ceci ressemble directement à une vente, et dans ce cas les conditions changent radicalement. De là, deux alternatives sont possibles : une vente sèche, ou une monétisation de l'Embedded Value. Dans les deux cas, le calcul de la valeur du portefeuille est nécessaire et c'est cette valeur qui servira de base à la discussion du "prix" pour le transfert du risque, prix qui était inexistant dans le cas de notre quote-part théorique à 100% juste avant.

Le cas d'une vente sèche est assez simple : un prix est négocié entre vendeur et acquéreur et l'assureur qui cède le portefeuille se détache complètement de ses engagements. Dans le cadre de notre étude, une vente sèche a pour effet de créer seulement un flux au temps du calcul $t = 0$; il n'y aucun flux financier futur, et aucun capital à mettre en face. Dans le diagramme risque rendement, le point correspond à une vente sèche est facile à placer : il a pour coordonnées le point 0 en terme de risque. Pour le rendement, cela dépend entièrement des conditions de la vente : si le prix de vente est égal à l'Embedded Value du portefeuille Temporaire Deces Toutes Causes considéré, alors le rendement espéré est nul. Un décalage

peut avoir lieu en fonction des coûts de frottements de la transaction.

Monétisation de la *Value In Force*

Les structurations de monétisation d'Embedded Value sont plus diverses, mais non moins actuelles : trois transactions de ce type ont été réalisé depuis fin 2012, en Espagne (Santander, VidaCaixa & BBVA). Nous en détaillerons un cas d'école extrêmement simplifié. Pour cela, la monétisation n'aura lieu qu'entre la cédante et un unique réassureur. Nous avons vu précédemment que la commission de réassurance est une clause puissante au regard de considération risque-rendement : elle retourne du résultat sans la volatilité associée. Cependant, nous pourrions dire qu'il y a une limite presque naturelle au recours à celle-ci dans un contexte de réassurance traditionnelle, et pour des commissions élevées, la frontière avec des opérations de financement devient ténue. C'est donc un problème de reconnaissance comme réassurance qui se pose (voir l'article [1] du codes des assurances, *réassurance finite*), mais cela ne fait pas l'objet de l'étude. Utilisons pleinement le pouvoir de cette clause de commissionnement pour décrire le mécanisme : une commission initiale est versée dans le cadre d'une quote-part (à 100%), qui correspond à un pourcentage de l'Embedded Value du portefeuille. Sur les années qui suivent, cette commission fixe est remboursée par tout ou partie du résultat technique annuel du portefeuille fermé. Une fois remboursée, la cédante garde la production de résultat jusqu'à extinction. Nous voyons déjà que les conditions sont bien différentes de celles des structures plus haut : la durée du remboursement dépend entièrement du comportement du portefeuille et est très sensible à la mortalité et aux rachats/résiliations (on suppose les tarifs bruts figés). Regardons si nos outils d'analyse restent valables dans un cas extrêment simplifié de monétisation : commission en pourcentage de la VIF bute à $t = 0$ puis recupération du bloc après remboursement de la com avancée (via un mécanisme de participation), et hypothèse sur le taux de frais prélevés par réassureur sur la commission restant due compris entre 0% et 10%. L'échéancier de flux et de capital à rembourser pour une monétisation (commission 50% de la VIF et frais réassurance 4%) est le suivant :

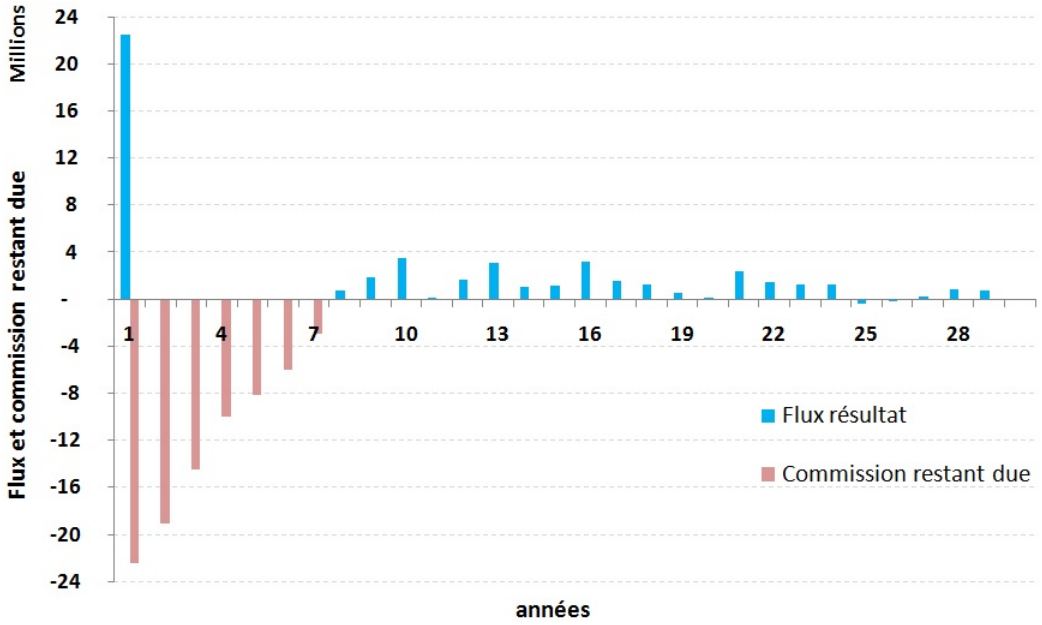


FIGURE 3.51 – Flux de résultat annuel net de monétisation, et commission restant due en début de période, pour la simulation n°6

L'intérêt majeur pour la cédante est de rendre liquides les bénéfices futurs : elle dispose à la date de départ du traité du montant en espèces de la commission, et permet de faire face à un besoin de trésorerie immédiat.

Il est aussi important de considérer cette structure dans le cadre de l'exigence en capital : si ce traité est assimilé à une vente par acceptation du régulateur, l'exigence en capital est nulle au mois sur la période de remboursement de la commission d'avance (période 1-8 ans sur le graphique ci-dessus). Au-delà (après 8 ans dans l'exemple), ce n'est plus si immédiat avec le retour du résultat par la participation, et dépend de la rédaction des clauses spécifiques de résiliation et de sortie du traité pour chacune des parties. De plus, le capital à mettre en face des affaires nouvelles n'est pas nul : la monétisation que nous traitons est par génération car elle porte sur le portefeuille fermé.

L'échéancier ci-dessus souligne le risque pris par le réassureur : il accorde un prêt avec des annuités qui ne sont pas constantes, qui dépendent des taux de mortalité et des taux de résiliations. Dans le cas de forte résiliation, la commission est remboursée sur une plus longue période car les bénéfices futurs sont grevés des primes des polices sorties. Une panoplie de stress-testing sur la mortalité et les résiliations et/ou une quantification stochastique à partir de ces paramètres prend alors tout son sens pour constater l'impact sur le durée de remboursement de la commission.

Nous pourrons délivrer ultérieurement les résultats de ces stress-testing.

3.4 Paramètres vs. périmètre

Nous avons étudié la construction des frontières efficientes pour différentes structures sur un portefeuille fermé et unique : il s'agit d'une optimisation des paramètres de la réassurance.

Une seconde optimisation, plus large, consiste à considérer le périmètre de la réassurance comme une variable de décision. De la même manière que l'on peut se poser la question, pour un seul portefeuille, d'une réassurance par tête ou aggregée, une réflexion naturelle vient à poser la réassurance comme un outil au global du bilan, par une vision macro des portefeuilles et ainsi bénéficier :

- d'une meilleure connaissance par le réassureur de la cédante
- et par là d'une plus grande compétitivité sur les conditions et prix
- de mécanismes de couverture naturelle pour les risques transférés par la cédante (cession de mortalité conjointement à des risques de longevité ou d'incapacité/invalidité)
- de la possibilité de mettre en place des mécanismes de compensation entre les portefeuilles cédés.

Cependant, il est impératif de prendre certaines précautions puisque qu'en élargissant le périmètre de la réassurance, celle-ci capte nécessairement les spécificités des nouveaux risques introduits et donc accroit la complexité de l'analyse.

Par exemple, les flux liés à un portefeuille incapacité/invalidité nécessitent une projection par année de survenance et par année comptable : un sinistre incapacité-invalidité peut par définition courir sur plusieurs années. Il convient alors, avant même de projeter la réassurance, de repérer et rattacher dans les déroulés de sinistres ceux appartenant au même exercice de survenance. La recherche d'optimisation doit coincider avec la structure de réassurance, à savoir par survenance ou par exercice comptable.

De plus, une réassurance comprenant des portefeuilles de rentes et/ou d'épargne intègre une problématique liée aux actifs non négligeable. Pour une compagnie d'assurance vie représentative du marché français, le SCR de marche représente plus de 75% du BSCR, ainsi, toute réassurance, pour être efficiente au sens de Solvabilité 2, doit transférer une partie significative du SCR de marché de la cédante.

Chapitre 4

Conclusion

Notre démarche s'est inscrite dans une approche risque-rendement par analogie et croisement des analyses de Markowitz et de Finetti. Nous avons considéré différentes structures de réassurance au regard de plusieurs mesures de risques dans différents environnements réglementaires. Il s'agissait de pouvoir déterminer la réassurance optimale pour la cédante, tant au niveau de la structure que des paramètres, la question de l'optimisation nécessitant de résoudre préalablement celle des critères d'optimalité et des objectifs poursuivis ainsi que de leur hiérarchisation respective.

Le recours à la modélisation sous le progiciel actuariel Lifemetrica® nous a permis, dans le cas étudié, de tracer les frontières efficientes pour le critère moyenne-variance, mais également pour d'autres mesures de risque. Notre analyse nous a conduit à déterminer les structures de réassurance optimales non seulement au regard de plusieurs mesures de risque dans un même environnement réglementaire, mais aussi pour deux environnements réglementaires différents.

Une fois effectuée la modélisation, et résolue la question de l'optimalité, peut être abordée la question de la durée et surtout du périmètre des traités de réassurance. En effet, la combinaison de risques de nature différente au sein d'un même montage de réassurance permet de modifier les optimums locaux pour tendre vers une optimalité globale. Ainsi, la réassurance, outil traditionnel de gestion de risques, peut arbitrer les besoins en capital des différentes branches d'activité, devenant par là même un véritable outil stratégique.

Chapitre 5

Annexes

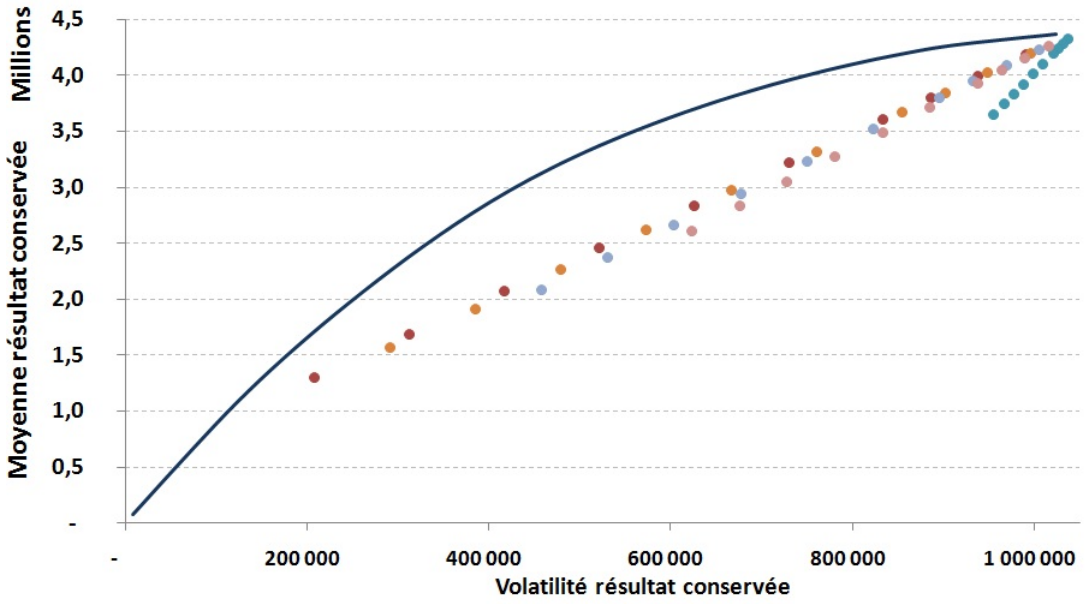


FIGURE 5.1 – Diagramme risque rendement pour la quote-part

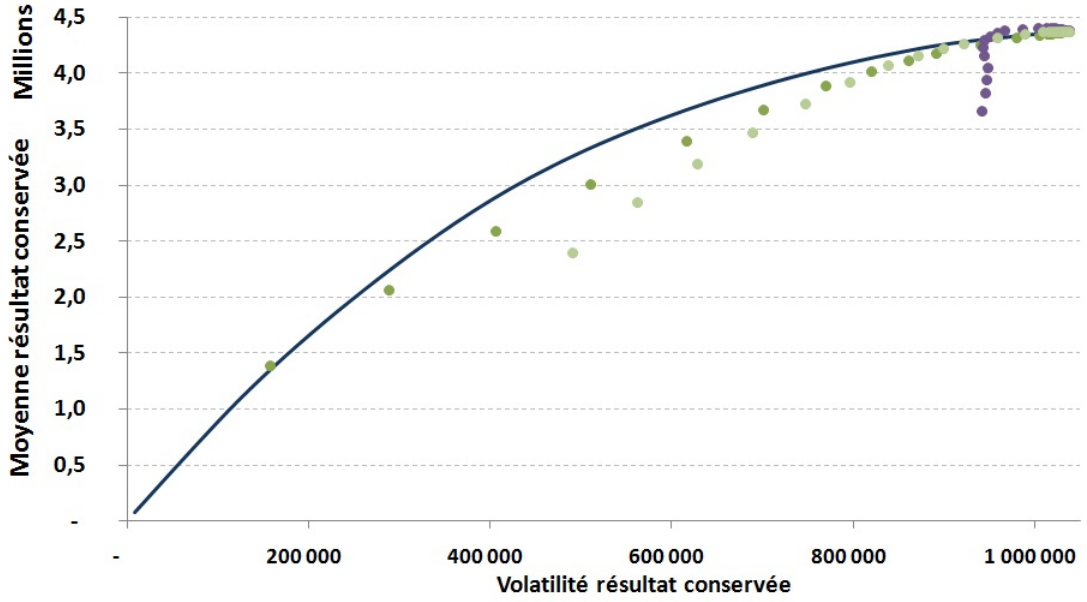


FIGURE 5.2 – Diagramme risque rendement pour l'excédent de plein

[13] [9] [11] [10] [3] [8] [12] [5]

Table des figures

2.1 Taux de cession d'un excédent de plein 16
2.2 Paramètres de la frontière efficiente dans le modèle analogie Markowitz 34
2.3 Frontière efficiente et point tangente optimal 35
2.4 Décalage de la frontière efficient en de la contrainte sur A 35
2.5 Table des combinaisons admissibles de taux de cession 36
2.6 Moyenne du résultat fonction de R et α 41

3.1 Fonctions de répartition de lois normales à volatilités égales 44
3.2 Fonctions de répartitions avec point de concours 45
3.3 Distribution cumulée des capitaux assurés 47
3.4 Répartition des assurés par âge 48
3.5 Répartition des capitaux assurés par âge 48
3.6 Interface utilisateur du logiciel LifeMetrica® 50
3.7 Convergence des statistiques en fonction du nombre de simulations 51
3.8 Convergence de la volatilité observée en fonction du nombre de simulations . . 52
3.9 Taux d'affection et mortalité pour scénario pandémie INVS 53
3.10 Tableau des sorties sous Excel 55
3.11 Moyenne du nombre d'assurés en début d'année 55
3.12 Ecoulement du résultat brut par année 56
3.13 Fonction de répartition du résultat brut 56
3.14 Montant des SCR pour les sous-modules $Life$ 57
3.15 Primes par année pour les choc *up* et *down* du sous-module *Lapse* 58
3.16 Coefficient de variation du résultat net de quote-part année 1 60
3.17 Coeff. variation du résultat net, par domaine de taux de commission 61
3.18 Fonctions de répartitions du résultat net de quote-part 62
3.19 Minimum du résultat par taux de cession en quote-part 63
3.20 Exigence S1 en quote part 63
3.21 Ratings et parts 64
3.22 SCR en fonction de la durée du traité quote-part 65
3.23 Fonctions de répartition du résultat net de quote-part avec commission et avec participation 67
3.24 Surface du coefficient de variation en fonction du taux de cession et du taux de participation 68

3.25 Moyenne et volatilité du résultat net d'excédent de plein 70
3.26 Coefficient de variations net d'excédent de plein 70
3.27 VaR et TVaR nettes d'excédent de plein 71
3.28 SCR_{Life} et $SCR_{Counterparty}$ nets d'excédent de plein pour une durée du traité de 30 ans 72
3.29 Volatilité et coeff. variations nets avec une participation de 90% 73
3.30 Diagramme risque-rendement avec frontière efficiente et points modélisés 76
3.31 Quatre structures à conditions différentes et moyenne à $3M$ 77
3.32 Diagramme coût-risque et abaques par type de structure proportionnelle 78
3.33 Diagramme coût-risque avec mesures de risque extrêmes 79
3.34 Exigence S1 en fonction du résultat cédé en moyenne 80
3.35 Diagramme coût-capital S2 pour trois durées de traité 81
3.36 Surface du coefficient de variations (gauche) et de la $\text{TVaR}_{0,5\%}$ (droite) en fonction du plein et du taux de cession, pour une structure QP+XP 82
3.37 Diagramme coût-volatilité cédée, par combinaisons 83
3.38 Diagramme coût-TVaR nette, par combinaisons 84
3.39 Δ (brut-net) coeff. variations 85
3.40 Minimum 85
3.41 TVaR 5% 85
3.42 TVaR $0,5\%$ 85
3.43 Diagramme volatilité conservée - Rentabilité du capital immobilisé en S1 88
3.44 Diagramme volatilité conservée - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an 88
3.45 Diagramme TVaR $0,5\%$ - Rentabilité du capital immobilisé en S1 88
3.46 Diagramme TVaR $0,5\%$ - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an 88
3.47 Diagramme Minimum- Rentabilité du capital immobilisé en S1 88
3.48 Diagramme Minimum - Rentabilité du capital immobilisé en S2 pour un traité 1 an 88
3.49 Primes d'excédent de sinistre par tête 92
3.50 Diagramme risque-rendement XS *aggregate* 93
3.51 Flux de résultat annuel net de monétisation, et commission restant due en début de période, pour la simulation n^{o}6 96

5.1 Diagramme risque rendement pour la quote-part 100
5.2 Diagramme risque rendement pour l'excédent de plein 100

Liste des tableaux

2.1 Probabilités de défaut du QIS5 20
2.2 Coefficients de corrélation $SCR_{default}$ et SCR_{Life}, QIS5 [3] 27

Bibliographie

[1] Code des Assurances. *Article L310-1-1*, Version consolidée 27 mai 2013.

[2] Code des Assurances. *ArticleR334-13, Exigence minimale de marge de solvabilité*, Version consolidée 27 mai 2013.

[3] EIOPA. *QIS5 Technical Specifications*. European Commission, 2010.

[4] EIOPA. *Consultation Paper n°51*, 26 mars 2009.

[5] F.Glineur and J.F.Walhin. de Finetti's retention problem for proportionnal reinsurance revisited. *Unpublished manuscrit*, 2004.

[6] F.Pressacco and P.Serafini. On the optimality of proportional reinsurance. *Decisions in Economics and Finance, 30*, pages 19–49, 2007.

[7] I.Lampaert and J.F.Walhin. On the optimality of proportional reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005.

[8] Claude Lefevre. Cours de théorie de la ruine.

[9] Jean Lemaire. Sur la détermination d'un contrat optimal de réassurance.

[10] Jan Ohlin. On a class of measures of dispersion with application to an optimal reinsurance.

[11] Frédéric Planchet, Quentin Guibert, and Marc Juillard. Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *Bulletin Français d'Actuariat*, pages 5–34, Décembre 2010.

[12] Guillaume Plantin. Financement optimal de la solvabilité d'un assureur. *Bulletin Français d'Actuariat*, pages 1–14, 1999.

[13] Robert Verlaak and Jan Beirlant. Optimal reinsurance programs. 2002.