

**Mémoire présenté le 23/06/2015
en vue de l'obtention du titre d'Actuaire de l'Institut des Actuaires**
par
Mr RAPHAEL PERIN

suite à son stage effectué dans le cadre de la **filière Actuariat ESSEC-ISUP**

Valorisation de produits dérivés structures :

Modélisation du smile de volatilité,

Modélisation de la structure des taux d'intérêt

& Etudes complémentaires

Confidentialité NON OUI (durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

Membres présents du jury de la filière :

-
-
-

Entreprise :

Directeur du mémoire en entreprise :

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

-
-
-
-

Invité :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

MEMOIRE D'ACTUARIAT



VALORISATION DE PRODUITS DERIVES STRUCTURES :

MODELISATION DU SMILE DE VOLATILITE,

**MODELISATION DE LA STRUCTURE DES TAUX
D'INTERET,**

& ETUDES COMPLEMENTAIRES

par Raphael PERIN

Table des matières

Résumé	8
Abstract.....	10
Synthèse.....	12
Introduction	17
1. Présentation du portefeuille et Audit de la méthode de valorisation actuelle	19
1.1. Description de l'environnement	19
1.1.1. Contexte réglementaire.....	19
1.1.2 Contexte SI	29
1.2 Analyse du portefeuille et de la méthode actuelle de valorisation	34
1.2.1 Description du portefeuille de produits structurés.....	34
1.2.2 Mesures de risques liées au portefeuille (grecques)	38
1.3 Modèle d'évaluation actuel & Limites.....	40
1.3.1 Modèle de Black-Scholes.....	40
1.3.2 Etude de l'impact des écarts de valorisation sur l'EAD	56
2. Modélisation du smile de volatilité.....	66
2.1 Présentation des différents modèles de volatilité	66
2.1.1 Modèles de variance conditionnelle (GARCH).....	66
2.1.2 Modèles à volatilité locale.....	70
2.1.3 Modèles à volatilité stochastique.....	80
2.2 Comparaison des modèles présentés	97
3. Modélisation des courbes de taux	99
3.1 Modèles d'équilibre	99
3.1.1 Modèle de Vasicek	99
3.1.2 Modèle de CIR	101
3.1.3 Modèle de Hull-White	103
3.2 Modèle d'arbitrage (HJM).....	107
3.3 Comparaison entre les modèles.....	110
4. Etudes complémentaires & Valorisation de produits structurés.....	111
4.1 Etude de la valorisation des produits de change Helvetique	111
4.1.1 Présentation des produits Helvetique	111
4.1.2 Modèles de change	113

4.1.3 Valorisation dans Excel et Numerix	118
4.2 Etude sur les Spread Options CMS	123
4.2.1 Etude des produits de taux CMS	123
4.2.3 Valorisation des Spread Options Excel (modèle de Bachelier).....	127
4.2.4 Valorisation des Spread Options Numerix	129
4.3 Etude sur l'inflation	131
4.3.1 Etude économétrique de la saisonnalité de l'inflation.....	131
4.3.2 Ajustement de convexité	136
4.3.3 Modèle statistique de prévision d'inflation	138
4.3.4 Valorisation de swap inflation (Numerix)	143
4.4 Etude sur l'effet bi-courbe	145
Conclusion	151
Bibliographie	153
Annexe A : Définitions (Finance de Marché).....	158
Annexe B : Définitions (Econométrie)	162
Annexe C : Méthodes Numériques	164
Annexe D : Rappels de Mathématiques Stochastiques	167
Annexe E : Code VBA Excel - Modele Heston.....	173

Table des figures

Figure 1 : Schéma des choix possibles de comptabilisation des produits dérivés (source : cairn.info)	21
Figure 2 : Schéma des principales innovations de Bale III (source : kpmg.com)	24
Figure 3 : Matrice de taux de défaut cumulé, calculée par une banque sur la base des notations S&P	27
Figure 4 : Schéma de classification et de valorisation d'un deal dans Tradix.....	30
Figure 5 : Schéma de fonctionnement pour modéliser un produit dérivé structuré dans Numerix.....	34
Figure 6 : Evolution des fixings EURIBOR 6M entre le 13/02/2011 et le 13/02/2015	46
Figure 7 : Statistiques usuelles des rendements de l'EURIBOR 6M sur la période étudiée	48
Figure 8 : Comparaison entre la distribution de l'échantillon et une distribution gaussienne	48
Figure 9 : QQ-plot des rendements de l'échantillon	49
Figure 10 : Clusters de volatilité observés sur les rendements de l'échantillon.....	50
Figure 11 : Volatilité historique annualisé des rendements de l'EURIBOR 6M sur la période étudiée	51
Figure 12 : Surface de volatilité swaption EUR en fonction des échéances et maturités au 17/02/2015	52
Figure 13 : Smiles de volatilité de change USD/CHF pour les maturités 3M et 10Y au 17/02/2015.....	53
Figure 14 : Synthèse des écarts (nets) constatés par contrepartie.....	54
Figure 15 : Synthèse des écarts (en valeur absolue) constatés par type de produits	54
Figure 16 : Rendements continus de l'USD/CHF entre le 23/02/2010 et le 22/02/2015.....	67
Figure 17 : Résultats de la modélisation GARCH(1,1) des rendements de l'USD/CHF.....	68
Figure 18 : Modélisation GARCH(1,1) de la volatilité conditionnelle des rendements USD/CHF	69
Figure 19 : Modélisation GARCH(1,1) de la volatilité conditionnelle des rendements EURIBOR 6M.....	69

Figure 20 : Calibration du modèle CEV et comparaison des smiles avec le marché et le modèle de BS	78
Figure 21 : Comparaison entre le niveau S du sous-jacent et le niveau σ de la volatilité pour l'EURIBOR 6M	79
Figure 22 : Comparaison de l'efficacité des différentes méthodes numériques de calibration.....	92
Figure 23 : Calibration du modèle SABR dans Numerix pour USD/JPY au 05/03/2015.....	92
Figure 24 : Comparaison des smiles de volatilité SABR vs Marché.....	93
Figure 25 : Exemple de simulation des modèles de Vasicek et CIR sur 10 ans.....	102
Figure 26 : Simulation de courbes de taux obtenues avec Vasicek et CIR	103
Figure 27 : Modélisation de l'EURIBOR 6M avec le modèle de Ho & Lee $R(1,T)$ vs courbe forward spot $R(0,1,T)$	109
Figure 28 : Illustration du pay-off d'un Butterfly	117
Figure 29 : Illustration du pay-off d'un Risk-Reversal	117
Figure 30 : Illustration de l'interprétation du Butterfly (convexité) et du Risk-Reversal (pente).....	118
Figure 31 : Résultat de valorisation d'un Call CMS Spread dans Numerix	130
Figure 32 : Evolution de l'IPCF entre janvier 1996 et décembre 2014 (données mensuelles).....	132
Figure 33 : Moyennes mensuelles pour l'IPCF sur la période étudiée.....	132
Figure 34 : Auto-corrélogramme des rendements de l'IPCF sur la période étudiée ..	134
Figure 35 : Résultats du test de Dickey-Fuller augmenté.....	136
Figure 36 : Statistiques usuelles et test de Jarque-Bera sur l'échantillon étudié	138
Figure 37 : Comparaison entre la distribution de l'échantillon et une distribution gaussienne	139
Figure 38 : Résultats d'une modélisation ARMA(4,1) des rendements de l'IPCF avec les retards 6, 12 et 24.....	141
Figure 39 : Résultats des tests d'hétérosécédasticité sur le modèle ARMA(4,1).....	143
Figure 40 : Comparaison des courbes EONIA et EUR 3M, EUR 6M et EUR 12M..	145

Table des tableaux

Tableau 1 : Montant du RC global pour A calculé au 31/12/2014.....	59
Tableau 2 : Montant du PFE global pour A calculé au 31/12/2014	63
Tableau 3 : SF, Corrélations et Volatilités à utiliser dans le calcul de l'EAD (Comité de Bale)	63
Tableau 4 : Montant de l'EAD globale pour A calculé au 31/12/2014.....	63
Tableau 5 : Synthèse de l'impact des écarts de valorisation sur l'EAD.....	64
Tableau 6 : Impact des écarts de valorisation sur le RC par société.....	65
Tableau 7 : Volatilités obtenues par le modèle de Dupire dans Numerix	74
Tableau 8 : Formulaire de pricing d'une option européenne selon le modèle de Heston dans Excel	85
Tableau 9 : Calibration du modèle de Heston dans Numerix à partir de prix d'options.....	86
Tableau 10 : Comparaison de prix d'un Digital sur USD/JPY pour différents strikes et modèles de volatilité.....	98
Tableau 11 : Calibration du modèle HW1 à partir de prix de swaptions dans Numerix.....	105
Tableau 12 : Calibration du modèle HW2 à partir de prix swaptions dans Numerix.	106
Tableau 13 : Résultats de valorisation dans Numerix d'un Cap avec différents modèles de taux	110
Tableau 14 : Données utilisées pour le pricing dans Excel	120
Tableau 15 : Résultats du pricing Helvetique dans Excel	120
Tableau 16 : Calibration du modèle SABR dans Numerix sur USD/CHF au 28/02/2015.....	121
Tableau 17 : Comparaison des valorisations obtenues pour un produit Helvetique...	121
Tableau 18 : Application de l'ajustement CMS à la courbe forward Swap 10Y	127
Tableau 19 : Résultat de la valorisation du CMS Spread Option dans Excel	129
Tableau 20 : Résultat de la valorisation du CMS Spread Option dans Numerix	130
Tableau 21 : Saisonnalité de l'inflation évaluée au 17/02/2015.....	137
Tableau 22 : Ajustements de convexité à appliquer sur les forwards inflation (au 17/02/2015)	138

Tableau 23 : Résultats de valorisation d'un swap structuré inflation dans Excel	144
Tableau 24 : Impact estimé de la valorisation bi-courbe.....	147
Tableau 25 : Impact de la valorisation bi-courbe sur un swap A	149
Tableau 26 : Résultat d'impact bi-courbe sur l'ensemble du groupe A au 31/12/2014 et 28/02/2015.....	149

Résumé

Ce mémoire porte sur la valorisation de produits dérivés structurés au sein du service Risques Financiers de la Banque A.

Les produits que nous étudions sont des instruments financiers complexes et divers : Change, Taux, Inflation, Options, Spread Options, produits Hybrides. L'objectif académique de ce mémoire est la présentation, la mise en application (calibration) et la comparaison entre différents modèles (déterministes ou stochastiques) de volatilité et de taux d'intérêt. L'objectif professionnel est l'amélioration de la justesse de la valorisation des produits dérivés structurés, dans un cadre réglementaire et comptable défini et sous les contraintes informatiques de l'établissement.

Nous présentons dans une première partie le contexte et les enjeux de la valorisation. Le modèle actuel de Black-Scholes affiche des limites perceptibles, notamment au niveau des hypothèses de normalité des rendements et de volatilité constante. Des écarts de valorisation importants sont constatés avec les contreparties sur les dérivés structurés. Ceux-ci ont des conséquences notables sur la comptabilité, sur la trésorerie (Appels de Marge) et sur le calcul des fonds propres réglementaires (EAD).

Nous étudions et comparons ensuite différents modèles de volatilité : historique (GARCH), locale (Dupire, CEV) et stochastique (Heston, SABR, Bergomi). La comparaison des valorisations obtenues avec ces différents modèles souligne l'influence du choix de modèle sur le résultat. Il ressort que les modèles à diffusion stochastique semblent les plus à même de fournir une valorisation efficace pour des produits exotiques (complexes). En effet, ce sont les seuls qui prennent en compte les deux facteurs de risque principaux : la variation du prix du sous-jacent et la variation de la volatilité. Ils permettent de répliquer le smile de volatilité de marché mais aussi de copier la dynamique d'évolution de la volatilité. Nous choisissons le modèle SABR, en raison de sa robustesse aux variations de marché et de l'interprétation aisée de ses paramètres.

Dans la continuité, nous proposons le même travail sur la modélisation des structures de taux d'intérêt en présentant des modèles d'équilibre (Vasicek, CIR, Hull-White) et d'arbitrage (HJM). La valorisation d'un produit vanille (Cap sur Taux d'intérêt) avec des projections issues de ces différents modèles permet de confirmer la pertinence du modèle de Hull-White. Le modèle HJM étant plus précis mais plus difficile à mettre en œuvre dans sa version complète, nous retenons le modèle de Hull-White, dans sa version à 1 ou 2 facteurs selon les caractéristiques du produit à valoriser.

La quatrième partie détaille les spécificités des produits structurés du portefeuille de A et expose les résultats de la nouvelle valorisation utilisant des modèles étudiés dans les parties précédentes. En particulier, nous détaillons le fonctionnement des produits de change, examinons les spécificités des instruments sur indice CMS (ajustement de convexité) et menons une étude économétrique visant à montrer la saisonnalité de l'inflation. Nous évoquons également une correction de valorisation due à l'application de la méthode bicourbe.

Les résultats de la nouvelle valorisation, effectuée dans Numerix en intégrant des modèles de volatilité et de taux stochastiques, sont satisfaisants et répondent à l'objectif opérationnel fixé par A, puisque nous obtenons une réduction des écarts de l'ordre de 90% pour tous les produits.

Au vu des résultats finaux, nous pouvons conclure que l'utilisation nouvelle des modèles retenus aura permis d'accroître sensiblement la qualité de la réponse apportée à la problématique de A en terme d'amélioration de la valorisation des produits structurés. Le travail effectué et présenté dans le présent mémoire aura donc permis d'atteindre les objectifs définis, aussi bien d'un point de vue académique que professionnel.

Abstract

This report is about structured derivatives valuation. It has been written during my apprenticeship in the Financial Risk Department at Bank A. The financial products studied here are complex and diverse : Foreign Exchange, Fixed Income, Spread Options, Hybrid products. The academic goal of this report is to present, implement and compare several volatility and interest rate models (deterministic or stochastic ones). The professional goal is to upgrade the fair valuation calculus for these derivatives, within a precise legal and accounting context and under specific IT constraints.

The first part presents the context and the stakes of the valuation. The current model (Black-Scholes) is also described, with its limits. In particular, the hypothesis of returns normality and constant volatility are tested and proved as wrong. On structured derivatives, valuation spreads appear as regards to counterparties. These spreads have consequences about accounting, treasury management and regulatory equity calculus.

In the second part, different volatility models are studied and compared: historical model (GARCH), local model (Dupire, CEV) and stochastic model (Heston, SABR, Bergomi). The comparison of the valuations obtained from implementing these models emphasizes the importance of a good-chosen model. It appears that stochastic models seem to be better for exotic products valuation. Indeed, they are able to take two risk factors into account (underlying price and volatility). They allow to fit the market smile and also to replicate the future volatility dynamics. The SABR model is finally chosen thanks to its robustness and its easy-to-interpret parameters.

To continue, the third part is about term structure interest rate (IR) models. Equilibrium models and arbitrage models are described. Interest rate Cap pricing is done with these models, and indicates to choose the Hull-White model. This one is a good compromise between efficiency and easy implementation.

According to the characteristics of the products, the 1-factor model or the 2-factor model will be used for the valuation.

In the fourth part, A structured products specificities are detailed and final results are showed. Three types of instruments are presented: Helvetique (IR/FX hybrid), Spread Options on CMS indexes and Inflation products. Through these analyses, we describe the working of Foreign Exchange market; the special characteristics of CMS indexed products and the inflation seasonality phenomenon. Bi-courb valuation method is also studied. The results of the brand-new valuation, done with Numerix and integrating volatility and IR models, are satisfactory (spreads are reduced by 90%) and answer to the operational goal fixed by A.

Thanks to the models studied and the final results, this report reaches its academic and professional goals.

Synthèse

Ce mémoire porte sur la valorisation de produits dérivés structurés au sein du service Risques Financiers de la Banque A.

Les produits que nous étudions sont des instruments financiers complexes et divers : Change, Taux, Inflation, Options, Spread Options, produits Hybrides. L'objectif académique de ce mémoire est la présentation, la mise en application (calibration) et la comparaison entre différents modèles (déterministes ou stochastiques) de volatilité et de taux d'intérêt. L'objectif professionnel est l'amélioration de la justesse de la valorisation des produits dérivés structurés, dans un cadre réglementaire et comptable défini et sous les contraintes informatiques de l'établissement.

Partie I : Présentation du portefeuille et Audit de la méthode de valorisation actuelle

Nous présentons dans une première partie le contexte et les enjeux de la valorisation. Le modèle actuel de Black-Scholes affiche des limites perceptibles, notamment au niveau des hypothèses de normalité des rendements et de volatilité constante. Des écarts de valorisation importants sont constatés avec les contreparties sur les dérivés structurés. Ceux-ci ont des conséquences notables sur la comptabilité, sur la trésorerie (Appels de Marge) et sur le calcul des fonds propres réglementaires (EAD).

Type de produit	Nombre d'opérations	Nominal	Ecart de valorisation
DIGITAL QUANTO	18	109	14,15
SWAP TEC10	9	1373	32,41
SPREAD OPTION QUANTO	26	736	37,98
ZERO COUPON CALLABLE	18	357	37,54
SWAP INFLATION	5	178	35,68

HELVETIQUE	25	255	176,55
TOTAL	101	3008	334,31

Synthèse des écarts (en valeur absolue) constatés par type de produits

Partie II : Modélisation du smile de volatilité

Nous étudions et comparons ensuite différents modèles de volatilité : historique (GARCH), locale (Dupire, CEV) et stochastique (Heston, SABR, Bergomi). La comparaison des valorisations obtenues avec ces différents modèles souligne l'influence du choix de modèle sur le résultat. Il ressort que les modèles à diffusion stochastique semblent les plus à même de fournir une valorisation efficace pour des produits exotiques (complexes). En effet, ce sont les seuls qui prennent en compte les deux facteurs de risque principaux : la variation du prix du sous-jacent et la variation de la volatilité. Ils permettent de répliquer le smile de volatilité de marché mais aussi de copier la dynamique d'évolution de la volatilité.

Pour comparer les modèles présentés et calibrés précédemment, nous choisissons de pricer un Digital Européen de maturité 1 an sur le sous-jacent étudié, la parité USD/JPY. On rappelle qu'un Digital (ou Binaire) Européen, dans le sens Call où nous l'étudions, paye 1 si le strike est atteint et 0 sinon. Nous valorisons en date du 05/03/2015 et le spot est à 120,87.

Strike / Modèle	100	110	120	130	140	200
Black	0,9264	0,6935	0,3878	0,1556	0,0458	0,0000
Heston	0,9104	0,6614	0,3323	0,1157	0,0301	0,0055
SABR	0,9042	0,6516	0,3281	0,1144	0,0296	0,0053

Comparaison de prix d'un Digital sur USD/JPY pour différents strikes et modèles de volatilité

Nous pouvons observer la proximité entre les résultats des modèles de volatilité stochastique Heston et SABR, alors que le modèle de volatilité constante de

Black-Scholes donne des prix plus élevés. Sur les strikes extrêmes, nous voyons que les modèles de volatilité sont plus précis et tiennent mieux compte du smile de volatilité, alors que le modèle de BS donne des prix plus extrêmes puisque la volatilité n'est pas ajustée.

Par ailleurs, nous retrouvons ce que nous avions appelé en partie I la robustesse du modèle de Black-Scholes : le prix donné par BS constitue une borne supérieure du prix réel.

Nous choisissons le modèle SABR, en raison de sa robustesse aux variations de marché et de l'interprétation aisée de ses paramètres.

Partie III : Modélisation des courbes de taux

Dans la continuité, nous proposons le même travail sur la modélisation des structures de taux d'intérêt en présentant des modèles d'équilibre (Vasicek, CIR, Hull-White) et d'arbitrage (HJM). La valorisation d'un produit vanille (Cap sur Taux d'intérêt) avec des projections issues de ces différents modèles permet de confirmer la pertinence du modèle de Hull-White.

Nous nous intéressons à un Cap ayant les caractéristiques suivantes :

- Maturité : 10Y
- Notionnel : 10M€
- Fréquence de roll : 6M
- Indice sous-jacent : EURIBOR 6M

Nous obtenons les résultats suivants dans Numerix pour une valorisation au 05/03/2015 :

Strike	0,5%	1%	2%	5%	10%
HW1	635 872,11	438 381,66	195 294,00	8 285,07	2,34
HW2	655 478,90	463 731,86	205 132,96	9 616,24	4,64
Ho&Lee	662 577,32	457 321,62	205 607,95	10 400,05	6,92

Résultats de valorisation dans Numerix d'un Cap avec différents modèles de taux

Nous constatons que les résultats sont cohérents entre eux et que la différence de modèle est de l'ordre de 4% pour les strikes proches de la monnaie (0,71%).

L'importance du choix de modèle apparaît au niveau des strikes extrêmes, l'écart entre les modèles passe à 25% pour le strike 5% et à 196% pour le strike 10%.

Le modèle HJM étant plus précis mais plus difficile à mettre en œuvre dans sa version complète, nous retenons le modèle de Hull-White, dans sa version à 1 ou 2 facteurs selon les caractéristiques du produit à valoriser.

Partie IV : Etudes complémentaires & Valorisation de produits structurés

La quatrième partie détaille les spécificités des produits structurés du portefeuille de A et expose les résultats de la nouvelle valorisation utilisant des modèles étudiés dans les parties précédentes. En particulier, nous détaillons le fonctionnement des produits de change, examinons les spécificités des instruments sur indice CMS (ajustement de convexité) et menons une étude économétrique visant à montrer la saisonnalité de l'inflation. Nous évoquons également une correction de valorisation due à l'application de la méthode bicourbe.

Les résultats de la nouvelle valorisation, effectuée dans Numerix en intégrant des modèles de volatilité et de taux stochastiques, sont satisfaisants et répondent à l'objectif opérationnel fixé par A, puisque nous obtenons une réduction des écarts de l'ordre de 90% pour tous les produits.

	Valo CPT	Valo Tradix	Valo Numerix SABR	Valo Numerix BS
Valorisation	73 308 542,07	52 317 567,00	74 665 159,87	76 694 511,09
Réduction écart			94%	84%

Comparaison des valorisations obtenues pour un produit Helvétique

	CPT	Tradix	Numerix
Valorisation	14 820 477,81	18 061 000,00	14 424 091,65
Ecart		3 240 522,19	- 396 386,16
Réduction écart			88%

Résultat de la valorisation du CMS Spread Option dans Numerix

	CPT	Tradix	Numerix sans ajustement	Numerix avec ajustement
Valorisation	27 674 710,58	25 376 857,77	27 212 288,67	27 892 445,78
Ecart		2 297 852,81	462 421,91	217 735,20
Réduction écart			80%	91%

Résultats de valorisation d'un swap structuré inflation dans Excel

Conclusion

Au vu des résultats finaux, nous pouvons conclure que l'utilisation nouvelle des modèles retenus aura permis d'accroître sensiblement la qualité de la réponse apportée à la problématique de A en terme d'amélioration de la valorisation des produits structurés. Le travail effectué et présenté dans le présent mémoire aura donc permis d'atteindre les objectifs définis, aussi bien d'un point de vue académique que professionnel.

Introduction

Au cours de mon apprentissage dans le service **Risques Financiers** au sein de l'entreprise A¹, il m'a été proposé de travailler sur un projet **d'amélioration des valorisations des produits dérivés structurés**. Au regard de l'importance des enjeux, de la cohérence de ce choix avec mes compétences et de la richesse académique et professionnelle proposée par le projet, j'ai choisi d'effectuer mon mémoire d'actuariat sur ce sujet.

L'entreprise A fait partie d'un groupe bancaire C et possède une filiale à 100% B. Dans le cadre de sa politique de couverture, a recours à l'utilisation de swaps, dits « structurés ». **Ces swaps reposent sur des mécanismes plus sophistiqués, tels des options, des indices rares (TEC10, CMS, indices Inflation, taux de change) ou des combinaisons de produits exotiques². Ils sont, contrairement aux swaps dits « vanilles », complexes à appréhender tant au niveau du fonctionnement que de la valorisation.** Il est nécessaire pour A de savoir valoriser ces swaps liés aux produits structurés. Or actuellement nous constatons des écarts avec les chiffres fournis par les contreparties lors des rapprochements de valorisation effectués pour le calcul des appels de marge³. Nous proposons donc d'étudier les méthodes de valorisation des produits dérivés structurés et de chercher à corriger les biais de valorisation identifiés via la mise en place de modèles appropriés.

Dans une première partie, nous présenterons le contexte réglementaire et informatique ainsi que les enjeux de la valorisation, notamment à travers l'exemple du calcul de l'exposition au risque de défaut. **Nous examinerons également la méthode de valorisation actuelle, basée sur le modèle de Black-**

¹ Par souci de confidentialité, nous ne citons pas le nom des établissements bancaires concernés.

² Produit exotique : instrument financier à la structure complexe, en opposition à un produit « vanille ».

³ Appels de marge : mécanisme de compensation régulière des variations de valorisation mis en place pour éviter le risque de contrepartie (non-encaissement d'un flux positif en cas de défaut de la contrepartie au moment de clôturer le contrat). Cf Annexe A

Scholes, et les impacts de ses limites pour la valorisation de produits dérivés complexes.

Par la suite, nous chercherons à modéliser de manière plus précise les deux éléments fondamentaux pour la valorisation : la volatilité et le taux sans-risque. Pour cela, **nous étudierons et implémenterons différents modèles de volatilité historique (GARCH), de volatilité locale (Dupire, CEV) et de volatilité stochastique (Heston, SABR, Bergomi)** pour déterminer lequel semble le plus approprié à notre sujet de valorisation. **En ce qui concerne le taux sans-risque, nous comparerons des modèles d'équilibre (Vasicek, CIR, Hull-White) et d'arbitrage (HJM).**

Nous terminerons notre étude par une mise en place pratique des modèles choisis en vue d'une nouvelle valorisation des produits structurés détenus par A. **Nous détaillerons le fonctionnement de plusieurs types de produits dérivés complexes (Helvetica, Spread Options CMS, swap Inflation) et réaliserons des études spécifiques (modélisation de change, phénomène Quanto, saisonnalité de l'inflation, méthode de valorisation bi-courbe).**

En conclusion, nous serons en mesure de vérifier si l'utilisation nouvelle des modèles retenus dans le cadre de notre projet aura permis d'accroître sensiblement la qualité de la réponse apportée à la problématique de A en terme d'amélioration de la valorisation des produits structurés.

1. Présentation du portefeuille et Audit de la méthode de valorisation actuelle

Dans cette première partie, nous présentons le portefeuille étudié ainsi que le contexte et les enjeux de la valorisation.

1.1. Description de l'environnement

L'environnement dans lequel s'effectue la valorisation est caractérisé par un aspect réglementaire et un aspect SI (Système d'Information).

1.1.1. Contexte réglementaire

Le contexte réglementaire est constitué d'un ensemble de textes concernant la comptabilité, la gestion des risques et le fonctionnement des marchés.

1.1.1.a. Contexte comptable : l'environnement IFRS

La valorisation et la comptabilisation des dérivés sont régies par les normes internationales IFRS (International Financial Reporting Standards) établies par l'IASB (International Accounting Standards Board). Les produits dérivés et leur valorisation sont l'objet de plusieurs de ces normes.

- IAS 39 : « Instruments financiers : comptabilisation et évaluation »

La norme IAS⁴ 39 constitue la principale source réglementaire concernant la comptabilité des produits dérivés bancaires. La valorisation y joue un rôle primordial.

⁴ IAS : International Accounting Standard (Standard International de Comptabilité)

A l'heure actuelle, la comptabilisation standard des instruments dérivés se fait en « juste valeur par le résultat ». Cela signifie que la valeur de marché du dérivé est inscrite dans le bilan et que les variations entre deux dates passent directement en produits ou charges dans le compte de résultat.

Puisque les passifs et certains types d'actifs sont inscrits au coût amorti ou au coût historique, les dérivés de couverture créent des distorsions comptables évidentes.

Pour remédier à cela, le régulateur a mis en place le concept de « comptabilité de couverture » via des régimes comptables spécifiques.

Le régime dérogatoire distingue deux principaux types de couverture amenant à des traitements comptables différents :

- Couverture de juste valeur (FVH, Fair Value Hedge) : les variations de juste valeur du dérivé compensent les variations de juste valeur de l'actif ou le passif couvert. Dans ce cas, les variations de juste valeur pour le sous-jacent comme pour le dérivé sont enregistrées dans le compte de résultat, quelle que soit la classification du sous-jacent couvert.
- Couverture de flux : le dérivé compense exactement les flux futurs attendus de l'actif ou du passif couvert. Dans ce cas, les variations de juste valeur sont reportées soit dans le compte de résultat soit dans les fonds propres selon la classification du sous-jacent.

Ces deux modes dérogatoires permettent de corriger les distorsions comptables, mais introduisent de la volatilité dans le résultat (variation imprévisible de juste valeur) ainsi que des lourdeurs administratives.

Le régime optionnel « juste valeur par le résultat » permet, sous réserves de justifications adaptées, de déclarer en comptabilité la juste valeur des actifs ou passifs et d'enregistrer les variations dans le compte de résultat. Ainsi le dérivé et son sous-jacent obéissent au même mode de comptabilisation et la réalité financière de hedging⁵ est bien reflétée dans les comptes.

⁵ Hedging : couverture du risque

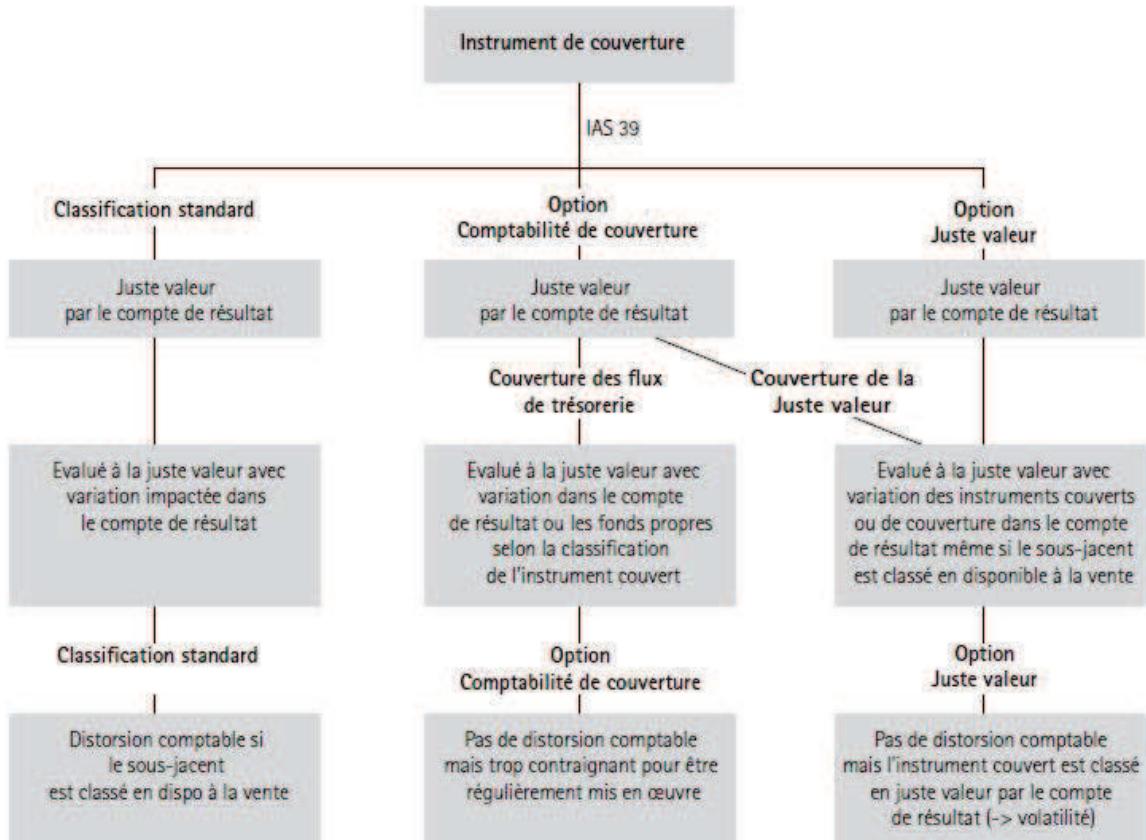


Figure 1 : Schéma des choix possibles de comptabilisation des produits dérivés

(source : cairn.info)

Nous pouvons voir à travers ces réglementations que la juste valorisation des dérivés est de plus en plus essentielle à une comptabilité fidèle.

Face aux difficultés résiduelles non résolues par l'IAS 39, les discussions à l'IASB se poursuivent sur les problématiques de macro-couverture et des modalités de comptabilisation des couvertures en vue de la mise en application de la règle IFRS 9.

- IFRS 13 : « Evaluation de la juste valeur »

La norme IFRS 13 définit la notion de juste valeur et les méthodes de valorisation acceptables.

La définition exacte retenue pour la juste valeur est la suivante : « prix qui serait reçu pour vendre un actif ou payé pour transférer un passif lors d'une transaction

normale entre intervenants de marché à la date d'évaluation ». La juste valeur est donc assimilable au prix de marché de l'instrument à la date d'évaluation.

Pour la calculer, l'IASB reconnaît 3 méthodes :

- Approche par le marché : la valorisation se base sur les prix de transaction observés à la date d'évaluation
- Approche par les coûts : la valorisation se fait en estimant le coût nécessaire au remplacement de l'instrument financier
- Approche par les revenus : la valorisation est calculée de manière académique en additionnant les cash-flows futurs actualisés

Au niveau des données, la norme privilégie les données observables sur un marché actif (niveau 1), puis les données sur un marché inactif (niveau 2) et en dernier recours les données internes à la société (niveau 3).

Dans le cadre de notre étude, nous fonctionnerons avec la méthode de valorisation « Approche par les revenus ». En effet, la complexité et l'originalité des produits rendent impossible les approches « par le marché » (pas de cotation directe) et « par les coûts » (pas d'instrument équivalent).

Cette nouvelle définition, en introduisant le passage de la notion d'« échange » (ancien IAS39) à celle de « transfert », amène de nouvelles problématiques telles que l'intégration du risque de contrepartie dans la valorisation (CVA-DVA⁶) ou la compensation des risques au sein d'un portefeuille.

- IFRS7 : « Instruments financiers : informations à fournir »

La norme IFRS 7 précise les informations à fournir concernant les instruments financiers (actif, passif, dérivés...). En particulier, les sociétés doivent :

- présenter l'incidence des couvertures sur le résultat
- présenter la politique de gestion des risques financiers

⁶ CVA : Credit Value Adjustment

DVA : Debit Value Adjustment

Ces notions, liées à la mesure du risque de contrepartie, seront détaillées par la suite.

Les différents types de risque font chacun l'objet d'un reporting :

- Crédit : exposition au risque, opérations renégociées, dépréciations...
- Liquidité : échéanciers de passif, politique de gestion de la liquidité...
- Taux, Change, Action, Matières Premières : volumes, influence en résultat, analyse de sensibilité, description de l'activité en devises...

Une valorisation juste et maîtrisée est donc aussi un enjeu public de communication pour la société, à laquelle l'on demande d'afficher ses comptes et de justifier sa politique de couverture avec des éléments quantitatifs.

1.1.1.b. Contexte prudentiel : la réglementation Bale III

La réglementation Bale constitue le cadre de la régulation de l'activité bancaire. Bale I et Bale II ont constitué les premières étapes des évolutions prudentielles en introduisant des minimums de fonds propres à respecter et la prise en compte des différents types de risques financiers (marché, taux, change, contrepartie, opérationnel etc...).

La législation Bale III a été entérinée par le G20 de Séoul en novembre 2010.

Ses principaux apports à la réglementation en vigueur sont les suivants :

- Création d'indicateurs de pilotage du risque de liquidité : ratios de liquidité court-terme (LCR, Liquidity Coverage Ratio) et long-terme (NSFR, Net Stable Funding Ratio)
- Renforcement du niveau et de la qualité des fonds propres : hausse des exigences Tier1 & Tier2⁷, coussins de sécurité supplémentaires (coussin de conservation, coussin contra-cyclique), plafonnement du ratio de levier⁸

⁷ Les fonds propres exigés sont constitués de 2 étages de qualité différentes : le Tier1 regroupe le noyau dur des fonds propres (capital social, les résultats mis en réserve, les intérêts minoritaires et le goodwill) et le Tier2 les fonds propres complémentaires (fonds de garantie, titres subordonnés). Le Core Tier1 est lui composé uniquement du capital social et des résultats mis en réserve.

⁸ Ratio de levier : rapport Fonds Propres / Total des Actifs

- Intégration du concept de risque systémique⁹ : surcharge en capital envisagée pour les institutions reconnues comme systémiques (calcul d'une VaR¹⁰ stressée), augmentation de la prise en compte du risque de contrepartie (nouveau mode de calcul de l'exposition, mise en place de compensation obligatoire sur le marché de gré-à-gré)

Bâle III		
Capital	Liquidité	Risque systémique
Renforcer la qualité et le niveau des fonds propres de base	Introduire un ratio de liquidité à court terme (ILCR)	Inciter à l'utilisation de chambres de compensation (CCP) pour les produits dérivés
Faire face à l'ensemble des risques	Introduire un ratio de liquidité à long terme (NSFR)	Renforcer les exigences en fonds propres pour les expositions entre institutions financières
Maîtriser l'effet de levier		Envisager une surcharge en capital pour les institutions systémiques
Intégrer des matelas de sécurité (coussin de conservation, coussin contracyclique)		

Figure 2 : Schéma des principales innovations de Bâle III (source : kpmg.com)

La valorisation des dérivés intervient dans les deux dernières mesures évoquées ci-dessus : l'exposition au risque de défaut et la régulation du marché des dérivés de gré-à-gré.

1.1.1.c. La prise en compte du risque de contrepartie

Le risque de défaut (ou risque de contrepartie) consiste en la mesure chiffrée du capital exposé à des pertes en cas de défaut de paiement ou de faillite de la contrepartie étudiée. Il concerne tout ce qui est dû à l'établissement par des

⁹ Risque systémique : risque de propagation d'une crise ou d'un défaut d'un établissement aux autres banques puis à toute l'économie d'une zone économique

¹⁰ VaR : Value at Risk, mesure du risque de marché par l'estimation des pertes ayant un pourcentage défini de chances de se produire (1% en général)

contreparties externes en lien avec les contrats de dérivés au moment présent et dans le futur.

Sa quantification s'effectue à plusieurs niveaux :

- Le calcul de l'EAD (Exposure At Default)
- L'intégration de la CVA-DVA au pricing des contrats de dérivés
- Exposure At Default

L'exposition au risque de défaut représente un indicateur du risque encouru par un établissement sur la totalité de son portefeuille de dérivés. Elle est notamment utilisée dans le calcul du Risque de Crédit et de l'Expected Loss¹¹, qui déterminent directement le niveau de fonds propres exigibles par le régulateur pour la solvabilité des banques. Elle a subi plusieurs évolutions dans son mode de calcul. La dernière méthode en date publiée par le Comité de Bale est la méthode SA-CCR (Standardised Approach for Counterparty Credit Risk) de Mars 2014. La valorisation des dérivés y joue un rôle central.

La méthode SA-CCR définit l'exposition au défaut comme ceci :

$$\text{EAD} = 1.4 * (\text{RC} + \text{PFE})$$

Avec RC = Replacement Cost

PFE = Potential Future Exposure

Le RC représente le risque actuel lié aux dérivés tandis que le PFE représente le risque futur généré par ces contrats. Le calcul du RC se base donc sur la situation de marché actuelle (valeur de marché, collatéral reçu) alors que celui du PFE se base sur les caractéristiques intrinsèques de l'opération (instrument, maturité, facteurs de risque, devise etc...).

Les deux éléments sont définis comme suit :

¹¹ Expected Loss : perte attendue en cas de défaut des contreparties.

$$RC = \text{Max}(0 ; V - C ; TH + MTA - NICA)$$

Avec V = Valeur de Marché

C = Collatéral Reçu

TH = Seuil d'Appel de Marge

MTA = Montant Minimum de Transfert

NICA = Marge Initiale Net

$$PFE = \text{Multiplier} * \text{Add-On}$$

Avec Multiplier = Coefficient de sur-collatéralisation

Add-On = Montant d'Exposition Future Estimée

La valeur de marché des dérivés apparaît dans le premier élément. Il s'agit donc d'un enjeu supplémentaire pour une valorisation correcte des dérivés.

Une étude chiffrée de l'impact des écarts de valorisation sur ce point sera effectuée plus loin.

- CVA-DVA

La nouvelle définition de la juste valeur établie par la norme IFRS 13 a permis de clarifier la nécessité de prendre en compte le risque de contrepartie dans la valorisation des instruments financiers. La juste valeur doit intégrer une correction au titre du risque de contrepartie, en positif lorsque la banque fait subir le risque à sa contrepartie et en négatif lorsque c'est elle-même qui l'encourt. Dans le premier cas on parle de DVA (Debit Value Adjustment) et dans le second de CVA (Credit Value Adjustment). Les deux notions fonctionnent de façon symétrique et ont les mêmes modalités de calcul¹².

Le calcul de la CVA (ou DVA) se fait à partir des 3 éléments suivants :

- L'assiette d'exposition avec la contrepartie (EAD). Elle est calculée selon une méthode similaire à celle décrite dans le paragraphe précédent.

¹² Une CVA et une DVA sont calculées par accord de netting. Il s'agit d'une majoration ou d'une minoration de la valeur de marché selon le sens du risque de contrepartie encouru ou non.

- La probabilité de défaut de la contrepartie (PD). Elle est estimée soit à partir de données historiques, soit à partir de spreads CDS¹³
- La perte estimée en cas de défaut (LGD, Lost Given Default). Elle est fixée par l'établissement sur la base d'observations historiques (autour de 40%) ou d'observations du marché des CDS (autour de 60%).

On obtient finalement la CVA/DVA pour chaque accord de netting par la formule :

$$\text{CVA/DVA} = \text{EAD} * \text{PD} * \text{LGD}$$

Année	AAA	AA	A	BBB	BB
1	0.03%	0.04%	0.05%	0.11%	0.91%
2	0.06%	0.08%	0.13%	0.44%	2.79%
3	0.10%	0.15%	0.28%	1.12%	6.07%
4	0.15%	0.24%	0.51%	2.15%	10.03%
5	0.20%	0.36%	0.83%	3.43%	14.23%
6	0.27%	0.51%	1.23%	4.94%	18.55%
7	0.35%	0.70%	1.74%	6.65%	22.90%
8	0.44%	0.93%	2.35%	8.49%	27.14%
9	0.54%	1.20%	3.03%	10.40%	31.16%
10	0.67%	1.52%	3.78%	12.37%	34.94%
11	0.81%	1.89%	4.63%	14.41%	38.57%
12	0.97%	2.32%	5.57%	16.53%	42.05%
13	1.16%	2.81%	6.59%	18.67%	45.31%
14	1.38%	3.35%	7.68%	20.83%	48.38%
15	1.62%	3.96%	8.83%	22.98%	51.25%
16	1.89%	4.63%	10.06%	25.14%	53.94%
17	2.19%	5.35%	11.33%	27.28%	56.44%
18	2.52%	6.12%	12.64%	29.36%	58.75%
19	2.88%	6.94%	13.97%	31.38%	60.88%
20	3.27%	7.82%	15.35%	33.38%	62.87%
21	3.71%	8.76%	16.78%	35.36%	64.75%
22	4.17%	9.74%	18.23%	37.29%	66.48%
23	4.68%	10.78%	19.71%	39.19%	68.11%
24	5.22%	11.87%	21.22%	41.05%	69.63%
25	5.80%	12.99%	22.73%	42.84%	71.04%

Figure 3 : Matrice de taux de défaut cumulé, calculée par D sur la base des notations

S&P¹⁴

1.1.1.d. La régulation du marché des dérivés de gré-à-gré (EMIR)

¹³ CDS : Credit Default Swap. Les écarts de prix entre les CDS constituent une mesure de la probabilité de défaut. En effet, plus les investisseurs prévoient un défaut probable, plus ils se tourneront vers le CDS (qui joue un rôle d'assurance), et donc le prix va augmenter.

¹⁴ S&P : agence de notation Standard & Poor's

Lors de la crise liée aux subprimes en 2007 et à la faillite de Lehman Brothers en 2008, les volumes de produits dérivés et leur manque de régulation ont été pointés du doigt. Représentant fin 2012 une somme en nominal de 600 000 milliards de dollars et une valeur de marché de 24 700 milliards de dollars¹⁵, ces instruments sont réalisés pour 90% d'entre eux de gré-à-gré (ou OTC, Over-The-Counter en anglais), c'est-à-dire directement entre les contreparties. Ce mode de fonctionnement opaque permet d'éviter les frais liés à l'utilisation d'un marché organisé, d'échapper aux règles appliquées par les chambres de compensation et de ne pas déclarer ces instruments dans les bilans officiels.

Pour remédier à ce manque de transparence, le G20 de Pittsburgh, réuni en septembre 2009, a donné l'orientation d'une régulation plus forte des banques et en particulier du marché des dérivés. Pour l'Union Européenne, cela a abouti à la publication en juillet 2012 de la réglementation EMIR (European Market Infrastructure Regulation). Cette réglementation prévoit d'améliorer la transparence et le contrôle des risques en imposant aux établissements financiers :

- La déclaration obligatoire de tous les contrats de dérivés OTC à l'AEMF (Autorité Européenne des Marchés Financiers) (article 9)
- La compensation (mise en place d'appels de marge quotidiens) obligatoire auprès d'une chambre de compensation (ou CCP, Central CounterParties) pour certains produits définis par l'AEMF (article 11)

La réglementation prévoit donc une valorisation quotidienne des produits dérivés déclarés. L'enjeu ici se situe au niveau de l'accord entre les deux contreparties sur la valeur de marché du contrat, lorsque celle-ci n'est pas cotée directement sur les marchés. En effet, en cas de désaccord de valorisation, un reporting doit être fait auprès de l'AEMF pour signaler le différend et le régler via des procédures spécifiques. La valorisation effectuée doit donc être aussi précise et juste que celle effectuée par la contrepartie, les modèles et données doivent répondre aux standards utilisés par le marché.

¹⁵ Source : BRI (Banque des Réglements Internationaux)

1.1.2 Contexte SI

Les réglementations et recommandations comptables établies, il apparaît que la valorisation des produits dérivés regroupe de nombreux enjeux. Toutefois, à l'heure actuelle, cette mission est en partie contrecarrée par les ressources informatiques disponibles pour A.

- Présentation de Tradix

A fonctionne pour la mise en place et la gestion de ses opérations financières (émission d'obligations, couvertures, refinancement...) sur le progiciel Tradix. Ce progiciel est édité par la société SUNGARD (ex-GL TRADE) et permet de créer et de gérer des deals de plusieurs types : Prêts, Emprunts, Emission d'Obligations, Dérivés Vanille et Structurés, Options... Il s'agit d'un software Front-to-Back, au sein duquel se déroule le processus de contrôle et de suivi des risques. Le Front Office saisit les caractéristiques du contrat conclu avec la contrepartie (date de début, date de fin, notionnel, devise, convention calendaire, type de taux, indice...). Celui-ci fait ensuite l'objet de vérifications et contrôles successifs par le Back Office et le Middle Office avant la validation définitive. La vie des deals (rachat, annulation, maturité, assignation...) est ensuite également suivie dans Tradix.

Tradix intègre une fonction de valorisation des instruments financiers. Celle-ci peut se faire au niveau d'un deal ou d'un portefeuille de deals. Elle sert au quotidien dans le calcul des appels de marge (échanges de collatéraux) avec les contreparties et est utilisée à fréquence régulière à des fins de reportings et de suivi des risques. C'est cette capacité de valorisation que l'on va ici chercher à approfondir car elle va se révéler erronée ou limitée pour les opérations complexes.

- Structure de Tradix

La structure de Tradix est relativement complexe.

Les deals se voient affectés un numéro d'identifiant Tradix unique et individuel. Ensuite un deal est affecté simultanément à différents groupes, appelées « classes », selon son instrument, sa devise ou encore son indice de référence. Ainsi, un swap de taux en EUR « Taux fixe contre EURIBOR 6M » sera relié à la classe des produits en EUR ; à la classe des Swaps et à la classe des produits indexés sur l'EURIBOR 6M. De la même façon, un cap en EUR sur EURIBOR 6M sera relié à la classe des produits EUR, à la classe des Cap&Floors et à la classe des produits indexés sur l'EURIBOR 6M. Des produits de nature différente et exigeant des valorisations différentes se retrouvent donc mélangés au sein de certaines classes. Sachant que chaque classe a ensuite ses propres règles et paramètres de valorisation (courbe d'estimation, courbe d'actualisation, matrice de volatilité, corrélation...), il faut s'assurer que les produits sont bien valorisés avec la méthode qui leur correspond. Pour cela, il existe un système de priorités pour indiquer à Tradix quel groupe prime sur les autres et fait appliquer ses règles de valorisation au deal concerné.

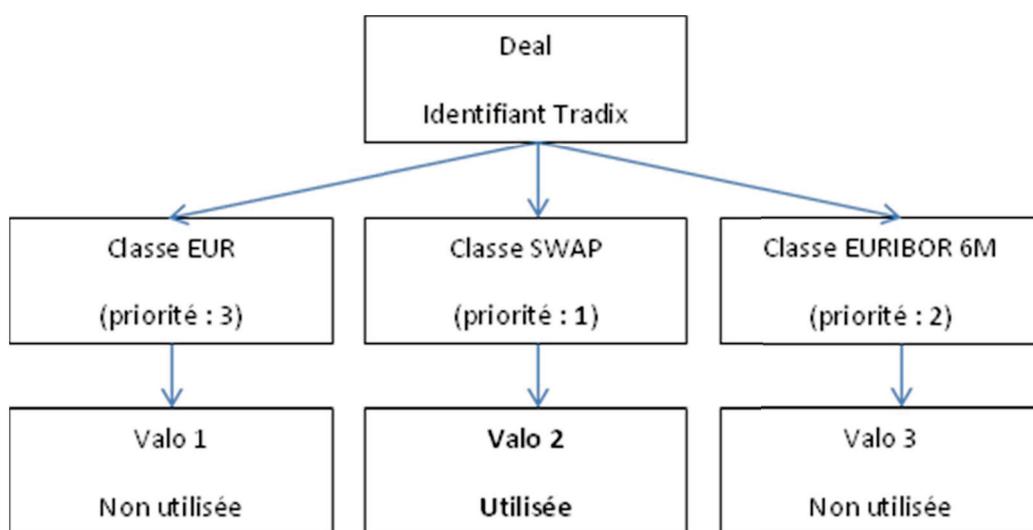


Figure 4 : Schéma de classification et de valorisation d'un deal dans Tradix

La difficulté de cette structure va résider dans la possibilité de corriger les méthodes de valorisation. En effet, un changement sur une classe aura un impact imprévisible et potentiellement contre-productif : on ne sait pas quels produits seront affectés dans leur valorisation par le changement. Admettons que l'on

change la matrice de volatilité des produits EUR, tous les produits EUR ne seront pas forcément affectés puisque certains sont valorisés en tant que membre de la classe des Cap&Floors, et il est très compliqué de faire le mapping exhaustif des classes, des priorités et de leur méthode de valorisation associée.

- Valorisation des dérivés dans Tradix

En ce qui concerne les produits dérivés, les opérations sont séparées en deux types dans Tradix : les opérations dites « à formule » et les opérations dites « scriptées ». Les opérations « à formule » sont valorisées à travers la formule de leur pay-off directement entrée dans Tradix avec les caractéristiques nécessaires.

Exemples d'opérations à formule :

- Un Call sur indice Equity : le call est défini par son indice (EURO STOXX 50), sa maturité (18 juin 2014) et son strike (2567.75 pts). D'où la formule = CALL(\$EURO STOXX 50,18.06.14,2567.75)
- Un Range Accrual sur CMS Spread¹⁶ : le Range Accrual est répliqué par son ratio « Nombre de jours au-dessus de la barrière » / « Nombre de jours total » portant sur le sous-jacent (CMS10Y – CMS2Y), le strike 0.05 et sur une période « before-end ». D'où la formule = DAYSUP(\$CMS-\$CMS2, #b->#e, 0.05)/DAYS(#b-> #e)

Les opérations « scriptées » sont valorisées directement via un script défini nativement et inaccessible dans Tradix. Cela permet d'utiliser des méthodes plus complexes (méthode de Monte-Carlo) mais l'inconvénient est que cela opacifie totalement les étapes de la valorisation. Dans ce cas, le progiciel agit comme une boîte noire qui n'offre pas de possibilité de calculs intermédiaires et qui n'affiche pas clairement les méthodes utilisées. Dans notre périmètre, cela concerne notamment les produits Helvetique, les produits sur Inflation, les produits sur CMS ou encore les produits Multi-Index Equity.

¹⁶ CMS Spread : le taux CMS (Constant Maturity Swap) est défini comme le taux d'un swap à échéance constante (par exemple 10ans). Un CMS Spread est la différence entre 2 taux CMS d'échéance différente, par exemple CMS10 – CMS2.

- Données et modèles dans Tradix

La majorité des données de marché, comme les courbes de taux, les fixings, les parités de devise etc... sont alimentées automatiquement et permettent une estimation immédiate de la valorisation.

D'autres données de marché sont quant à elle mises à jour périodiquement : corrélations, matrices de volatilité etc... La fréquence de mise à jour des données est variable (entre 1 semaine et 1 an). L'alimentation de certains paramètres est cependant manuelle pour d'autres paramètres, comme les smiles de volatilité.

Une éventuelle correction en termes de données peut donc se révéler compliquée à mettre en place compte tenu de ces contraintes système.

Nous détaillerons les méthodes de pricing utilisées un peu plus loin, il s'agit ici de comprendre à la fois la complexité et l'opacité du système Tradix et en quoi elles sont à l'origine des difficultés de contrôle et de correction des valorisations.

- Possibilité de valorisation dans Excel

Au cours de notre étude, nous serons amenés à rechercher des méthodes de valorisation parallèles à Tradix. L'outil Numerix, que nous présentons ci-dessous, est adapté, par sa puissance de calcul, sa fiabilité et son intégration de modèles complexes, à la valorisation des produits dérivés complexes. Cependant, nous pourrons dans certains cas utiliser Excel et VBA Excel lorsque nous aurons besoin de mieux maîtriser le code programmé et de modifier certains paramètres sur des modèles existants.

Excel et VBA Excel permettent le calcul et la calibration pour des modèles à formules fermées, comme les modèles de Black-Scholes (options de taux), de Garman-Kohlhagen (options de change), de SABR simplifié (volatilité), de Vasicek et de CIR (courbe des taux)...

- Présentation de Numerix

Pour réaliser des valorisations de produits structurés indépendants de Tradix et trop compliqués à valoriser pour Excel, nous aurons recours au logiciel Numerix. Il s'agit d'un add-in Excel qui permet de valoriser des deals aux pay-offs simples et complexes en faisant appel à des modèles divers.

Numerix propose des template prédefinis pour une grande variété de produits vanilles et structurés. C'est ainsi que nous pourrons par exemple valoriser directement les produits Inflation ou les produits Zero-Coupon Callable. Mais certains des instruments financiers que nous devons valoriser, comme les Helvetique (produits Hybride Taux-Change) ou les Spread Options sur CMS, ne sont pas pré-programmés dans Numerix et il nous faudra les modéliser en créant un modèle par nous-mêmes.

Le schéma ci-dessous décrit les étapes pour obtenir la valorisation d'un produit dérivé structuré dans Numerix. Ce logiciel fonctionne par la définition d'objets. On aura ainsi un objet de type EVENT pour définir l'échéancier, un objet de type INDEX pour définir les taux ou encore un objet SCRIPT pour définir le pay-off du produit (liste non exhaustive). Les modèles à utiliser pour projeter les taux ou prévoir la variance sont également des objets à définir, en faisant référence à des modèles déjà intégrés dans le logiciel (Hull-White pour les taux ou Black-Scholes pour la volatilité par exemple).

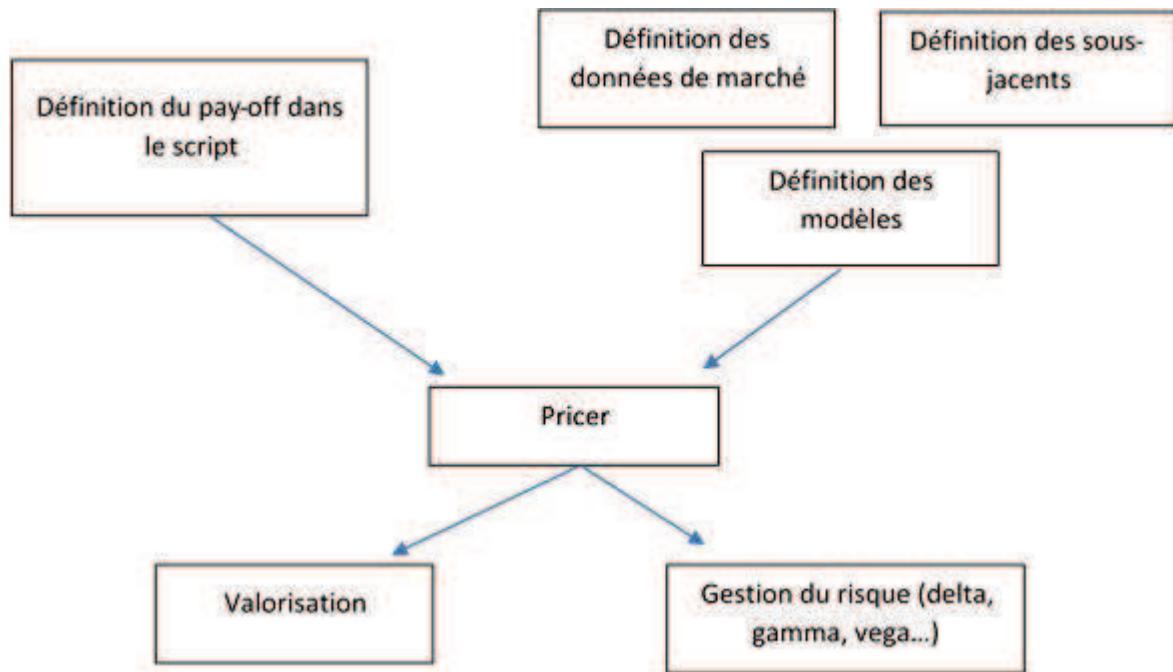


Figure 5 : Schéma de fonctionnement pour modéliser un produit dérivé structuré dans Numerix

1.2 Analyse du portefeuille et de la méthode actuelle de valorisation

Notre étude porte sur les produits les plus complexes du portefeuille détenu par A. La partie qui suit propose une typologie de ces différents produits.

1.2.1 Description du portefeuille de produits structurés

ZERO COUPON CALLABLE : Il s'agit d'une obligation zéro-coupon comprenant une option de paiement du coupon couru à chaque fin de période. De manière générale, le qualificatif « Callable » pour une obligation ou un swap signifie que l'investisseur peut mettre fin aux paiements et recevoir son remboursement de nominal prématulement selon la situation de taux à chaque date de paiement. En contrepartie, le taux est plus élevé que pour un bond ou un swap classique. La difficulté ici est la valorisation de l'option « cachée », qui appelle un ajustement de la valeur du bond.

SWAPTION : Swaption est la contraction des mots swap et option. Il s'agit d'une option négociée de gré à gré sur un swap : elle donne le droit de contracter un call swaption (ou un put swaption).

Une swaption payeur donne le droit de rentrer dans un swap et de payer un taux fixe en échange d'un taux flottant. A l'inverse, une swaption receveur donne le droit de rentrer dans un swap et de recevoir un taux fixe en échange d'un taux flottant.

Dans le cas d'une swaption payeur, à maturité, si le taux fixe (le strike) est plus bas que taux de swap, alors la swaption est exercée et l'investisseur choisit soit de rentrer dans le swap (swap settlement) ou de toucher un flux financier équivalent à la valeur du swap (cash settlement).

SPREAD OPTION : Il s'agit d'une combinaison de cap/floor sur deux taux de swap distincts. Le strike de l'option est un spread des deux taux pondérés par des Gear factor. Le payoff de l'option, dans sa formulation générique, est le suivant :

$$\text{Payoff} = \text{Max}(\text{Strike} - (\text{Gearing1} * \text{Index1} - \text{Gearing2} * \text{Index2}), 0)$$

Par exemple un spread possible est : Swap 10y USD – Swap 2y USD. Dans le cas où le spread porte sur des taux liés à une devise X mais que l'option est payable en une autre devise Y, l'option est également « Quanto ». Les problématiques de valorisation liées à ce produit sont la corrélation entre les indices, leur volatilité et l'effet de change dans le cas d'un contrat « Quanto ».

RANGE ACCRUAL : Il s'agit d'un swap de taux qui permet d'échanger un taux fixe contre un taux variable, à la différence que la jambe variable dépend de l'évolution de l'indice de référence sur la période. En effet, le montant du coupon dépend du nombre de jours sur la période où une condition sur le niveau de l'indice est respectée. Il se calcule de la manière suivante :

$$\text{Coupon} = n/N * \text{interest rate} * \text{notional}$$

(avec n nombre de jours où l'indice est dans l'intervalle, N le nombre de jours total de la période). De ce fait, du point de vue de la valorisation, un Range Accrual est en réalité une suite d'options journalières. La difficulté réside dans

le fait que chaque cash-flow futur dépend du chemin de l'indice pour chaque jour de la période. La valorisation est donc forcément « path-dependent »¹⁷.

REVERSE FLOATER : Il s'agit d'un swap de taux dans lequel une des deux jambes évolue dans le sens opposé d'un indice ou d'un taux variable. Sur cette jambe, le montant du coupon est inversement proportionnel à la valeur de l'indice. Le taux de coupon s'exprime de façon générique comme ceci :

Coupon = Fixed rate – Floating reference rate x gearing factor

Le Reverse Floater peut se trouver sous la forme d'un swap structuré ou d'une option.

Exemple de pay-off d'option Reverse (forme de Call) :

$$Pay-off = \max (15\% - EURIBOR3M * 2 ; 0)$$

SWAP CMS (Constant Maturity Swap) : Il s'agit d'un swap classique de taux ou de change dans lequel au moins une des deux jambes est basée sur un taux CMS. Un taux CMS est un taux de swap à maturité constante, il s'agit d'un indice observable sur une courbe de marché et non d'un indice publié comme l'EURIBOR ou l'EONIA. Le taux CMS peut être complexifié avec l'introduction d'un spread ou d'une option dans la formule du coupon.

Exemple de contrat Spread CMS :

- *Jambe 1 : 6M LIBOR*
- *Jambe 2 : 2*(CMS 10Y-CMS 2Y)*

Pour la valorisation, une courbe de taux de swap forward est utilisée. Celle-ci évalue les taux de swap qui seront appliqués dans le futur, comme le taux de swap 10Y dans 2Y. Cette courbe de taux forward est déterminée selon les prix des swaptions.

SWAP INFLATION : Il s'agit d'un swap de taux classique sauf que la jambe variable est basée sur un indice d'inflation (IPC¹⁸), ou d'une formule impliquant un indice inflation, au lieu d'un indice court-terme de référence :

¹⁷ Valorisation path-dependent (dépendance au sentier, en français) : se dit lorsque la valorisation nécessite la connaissance de tout le passé des prix de l'indice. Par exemple, un Range Accrual dépend du « chemin » pris par le cours de l'indice sur toute la période de coupon.

¹⁸ IPC : indice des prix à la consommation. Indice utilisé pour les produits Inflation.

Exemple de contrat de swap :

- *Jambe fixe : 2%*
- *Jambe variable : $[5 * \frac{IPC(t)}{IPC(t-1)}]$*

L'obstacle à une valorisation aisée réside dans la complexité de prévoir l'inflation future. Si le taux variable du swap inclut un spread entre deux indices inflation (« IPC France – IPC Europe » par exemple), la corrélation entre les indices prend une importance considérable.

Ce genre de contrat inclut souvent la possibilité de faire également évoluer le nominal en fonction de l'indice d'inflation, ce qui complique encore la valorisation. Les produits Inflation constituent un cas à part dans le portefeuille d'instruments dérivés structurés de A, à ce titre une étude particulière sera menée sur cette famille de produits dans la partie IV.

DIGITAL QUANTO : Il s'agit d'une option « Digital » (ou « Binaire ») classique, mais sa particularité est d'être payable dans une devise différente de celle liée au sous-jacent. En général, le taux de change de passage entre l'option et le paiement est fixé à l'avance pour éviter une exposition au risque de change. Cette option est utilisée lorsque l'investisseur veut miser sur un sous-jacent étranger S tout en évitant le risque de change. Son payoff dans son expression générique est le suivant :

Payoff (en Dev1)

$$= (Taux de change Dev1/Dev2 fixé ou non) \\ * 1_{\{S \text{ (en Dev 2)} > Strike\}}$$

C'est ici l'aspect « Quanto » qui rend la valorisation difficile : les formules classiques de valorisation d'une binaire doivent être ajustées.

HELVETIQUE : Il s'agit d'un produit dérivé structuré hybride entre Taux et Change. Le taux variable classique EURIBOR 6M est échangé contre une structure intégrant une option en EUR ayant comme sous-jacent de référence le taux USD/CHF.

Exemple de contrat :

- *jambe taux variable : TIBEUR3 + 0,32*
- *jambe structurée :*

- $0.32\% \text{ (Annuel, Exact/360) Ajusté si (USD/CHF) post fixé (J-15)}$
 > 1
- $0.32\% + 60\% \times [1 - (\text{USD/CHF}) \text{ post fixé (J-15)}] / (\text{USD/CHF})$
 $\text{post fixé (J-15) sinon}$

Nous retrouvons dans ce produit les problématiques de taux, de change, d'effet « Quanto », de corrélation et de prise en compte de l'option. En raison de cette complexité et des montants en jeu, les produits Helvetique feront en partie IV l'objet d'un traitement particulier.

Nous précisons que de manière générale, tous ces produits complexes sont sensibles aux projections futures des taux, des indices et des spreads. Cela implique que la volatilité, les taux et les corrélations entre les indices jouent des rôles primordiaux dans la valorisation.

1.2.2 Mesures de risques liées au portefeuille (grecques)

Sur les produits dérivés, les principales mesures de risque sont constituées par les « grecques », c'est-à-dire les sensibilités des prix aux différents paramètres. Chacune de ces « grecques » doit faire l'objet d'un suivi et d'un hedging particuliers.

- Delta

$$\delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du cours du sous-jacent. Le delta est la première mesure de risque prise en compte dans la politique de couverture. En particulier, le delta est fondamental dans le modèle de Black-Scholes, modèle de référence de valorisation des options.

- Gamma

$$\gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. Il précise si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. Une autre lecture du gamma est le sens d'évolution du delta en fonction du prix du sous-jacent. Lorsque le portefeuille est gamma positif, cela signifie que le prix du sous-jacent et le delta évoluent dans le même sens, alors que s'il est négatif, cela indique le contraire.

- Theta

$$\theta = \frac{\partial P}{\partial T}$$

Le thêta est le coût (ou le gain) du temps qui passe sur un portefeuille d'options. Il évalue combien le passage du temps influe sur la valeur d'une option. De manière générale, la valeur d'une option augmente avec la maturité T.

- Rho

$$\rho = \frac{\partial P}{\partial r}$$

Il est le taux de variation du prix en fonction du taux d'intérêt sans risque. Les modélisations de la partie III concerneront particulièrement cette sensibilité et sa gestion.

- Vega

$$\nu = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

Le véga est une mesure de la sensibilité à la volatilité implicite. Cette sensibilité sera au centre de la politique de couverture sur des produits complexes comme ceux que nous étudions dans ce mémoire. Les modèles analysés en partie II se fondent sur la nécessité d'une couverture en vega.

- Option Adjusted Duration

Pour les obligations avec des options intégrées (par exemple pour les obligations callable), la duration doit être ajustée pour prendre en compte le fait que l'exercice éventuel de l'option changerait les cash-flows futurs attendus. Ainsi, si la callabilité d'une obligation est exercée, les paiements d'intérêts cessent et le nominal est remboursé avant la maturité initialement prévue. La duration ajustée est appelée Option Adjusted Duration (OAD).

- Option Adjusted Convexity

De la même façon que pour la duration, la convexité doit être ajustée en présence d'une option intégrée. On définit l'Option Adjusted Convexity comme le changement de prix d'une obligation non-expliqué par l'OAD. En général, son évaluation se base sur le modèle de Black-Karasinski, modèle d'évaluation d'option dans lequel la structure de taux d'intérêt est lognormale.

1.3 Modèle d'évaluation actuel & Limites

Actuellement, les produits dérivés sont valorisés selon la théorie classique des options, c'est-à-dire dans un cadre gaussien et selon le modèle de Black-Scholes.

1.3.1 Modèle de Black-Scholes

Nous définissons d'abord le cadre du modèle avant d'introduire sa formule et d'en étudier les avantages et inconvénients pour la valorisation.

- Cadre de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes (BS) a été construit en 1973 et constitue la base de construction de la théorie de pricing d'options financières.

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- Marchés efficents : pas de coûts de transaction ; pas de limites sur les volumes de transaction ; pas d'opportunité d'arbitrage¹⁹.
- Les rendements du sous-jacent (noté S) sont gaussiens, stationnaires et indépendants :

$$\frac{dSt}{St} = \mu dt + \sigma dWt$$

Avec Wt un mouvement brownien²⁰ et (μ, σ) processus mesurables.

- Le taux sans-risque r est constant.

- Formule de Black-Scholes

On considère une option de pay-off $h(St)$.

On valorise cette option en cherchant à construire un portefeuille (Vt) autofinancant²¹ de valeur équivalente avec seulement des actions (δt) et du cash (Bt).

Condition d'autofinancement :

$$\begin{aligned} Bt_{i-} + \delta t_{i-} \cdot St_i &= Bt_i + \delta t_i \cdot St_i \\ \Rightarrow e^{r(t_i - t_{i-1})} \cdot Bt_{i-1} + \delta t_{i-1} \cdot St_i &= Bt_i + \delta t_i \cdot St_i \end{aligned}$$

$$Vt_i - Vt_{i-1} = (e^{r(t_i - t_{i-1})} - 1) \cdot (Vt_{i-1} - \delta t_{i-1} \cdot St_{i-1}) + \delta t_{i-1} \cdot (St_i - St_{i-1})$$

En passant à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, on trouve

$$dVt = (Vt - \delta t \cdot St) \cdot r \cdot dt + \delta t \cdot dSt$$

¹⁹ Opportunité d'arbitrage : possibilité de construire un portefeuille auto-financant apportant un flux strictement positif certain dans le futur.

²⁰ Mouvement brownien : voir Annexe D

²¹ Portefeuille autofinancant : stratégie de gestion de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent dans le portefeuille.

On suppose que $Vt = C(t, St)$ pour une fonction régulière $C(t, S)$. Alors $dVt = dC(t, St)$ et on peut appliquer la formule d'Itô²² à $dC(t, S)$:

$$dC(t, St) = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dSt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} d\langle S \rangle t$$

$$dC(t, St) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu \cdot St \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma St \frac{\partial C}{\partial S} dWt$$

Pour que $dVt = dC(t, St)$, on a nécessairement :

$$\delta t = \frac{\partial C}{\partial S}$$

$$rC(t, S) = \frac{\partial C}{\partial t} + r \cdot S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$
(1.1)

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique que la solution soit unique pour tout pay-off $h(S)$.

Pour trouver cette solution unique, on passe par les probabilités risque-neutre.

Sous la probabilité historique P ,

$$\frac{dSt}{St} = \mu dt + \sigma dWt$$

Soit Q une probabilité équivalente à P définie par :

$$\frac{dQ}{dP} | Ft = \exp \left(-\frac{\mu - r}{\sigma} Wt - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \right)$$

²² Formule d'Itô : voir Annexe D

Alors par le théorème de Girsanov²³ $Wt' = Wt + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ est un mouvement brownien sous Q et

$$\frac{dSt}{St} = rdt + \sigma dWt'$$

Posons $C'(t, St) = e^{-r(T-t)}E^Q[h(S_T|St)]$. Alors $e^{-rt}C'(t, St)$ est une Q-martingale²⁴. Une application de la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} e^{rt}d(e^{-rt}C') &= \left(-rC' + \frac{\partial C'}{\partial t} + r \cdot St \frac{\partial C'}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot St^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \\ &\quad + \sigma \cdot St \frac{\partial C'}{\partial S} dWt' \end{aligned}$$

Donc C' est solution de l'équation (1.1). Cette solution étant unique, on en déduit le prix d'une option de pay-off $h(S_T)$:

$$\begin{aligned} C(t, St) &= e^{-r(T-t)}E^Q \left[h(St \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma W'(T-t)) | St \right] \end{aligned}$$

Pour une option de call européen de pay-off $h(St) = (St - K)^+$, on obtient le prix suivant :

$$\begin{aligned} Call(t, St, T, K) &= e^{-r(T-t)}E^Q \left[(St \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma W'(T-t) - K)^+ | St \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$Call(t, St, T, K) = St \cdot N(d1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d2)$$

²³ Théorème de Girsanov : voir Annexe D

²⁴ Martingale : voir Annexe D

$$\text{Avec } d1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \left(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}} \right) + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T-t}$$

$$\text{Et } d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

On précise que la formule est exactement la même pour un caplet de Taux que pour les call sur Equity calculée ici, en considérant le prix du contrat « future » pour la valeur de $S(t)$. Pour s'en assurer on peut se reporter au modèle de Black-76²⁵.

- Avantages du modèle de Black-Scholes

L'utilisation du modèle de BS comporte 2 avantages principaux :

- Simplicité de mise en place : le modèle propose une formule fermée dont tous les paramètres sont connus à l'exception de la volatilité σ . Mais celle-ci peut soit être estimée historiquement, soit être tirée implicitement des prix de marché.
- Robustesse : le modèle, en dépit des limites que nous traitons ci-dessous, permet une estimation efficace du prix réel et fournit des bornes de prix (cf démonstration ci-après). C'est pour cette raison qu'il reste largement utilisé comme première approche par beaucoup de professionnels des marchés.

- Robustesse du modèle de BS :

L'erreur du modèle de BS est :

$$\varepsilon_T = V_T - C_{BS}(T, S_T)$$

En appliquant la formule d'Itô on obtient :

$$dC_{BS}(T, S_T) = \left(\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S t^2 \right) dt + \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} dS$$

²⁵ Modèle de Black-76 : voir Annexe A

Et sachant que $C_{BS}(t, S)$ satisfait l'EDP de BS :

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = r \cdot \left(C_{BS} - S \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} \right)$$

En rassemblant les équations, on obtient :

$$\varepsilon_T = V_T - C_{BS}(T, S_T) = \frac{1}{2} e^{rT} \cdot \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma t^2) \cdot S t^2 \cdot dt$$

Cela signifie que :

- L'erreur provient de l'estimation de la volatilité qui peut être différente de celle du marché (cf les limites du modèle, infra)
- Si $\Sigma \geq C_{BS}$, alors le prix de BS domine le prix de marché du call et constitue une borne supérieure pour l'estimation du prix réel.
- Limites du modèle de Black-Scholes

L'utilisation du modèle de BS comporte deux défauts principaux :

- L'hypothèse de normalité des rendements est fausse : l'analyse statistique prouve que les rendements ne sont pas gaussiens et notamment que BS sous-estime les occurrences des événements extrêmes (sous-estimation de l'épaisseur des queues de distribution).
- L'hypothèse de constance de la volatilité est fausse : l'analyse empirique des prix et des volatilités qui y sont associées montre que la volatilité n'est pas constante à la fois en fonction des maturités et en fonction des strikes.

Pour illustrer ces deux erreurs, et puisque les produits qui nous intéressent sont en majorité des produits de taux et non des actions Equity, nous étudions l'EURIBOR 6M et ses rendements sur la période du 13/02/2011 au 13/02/2015.

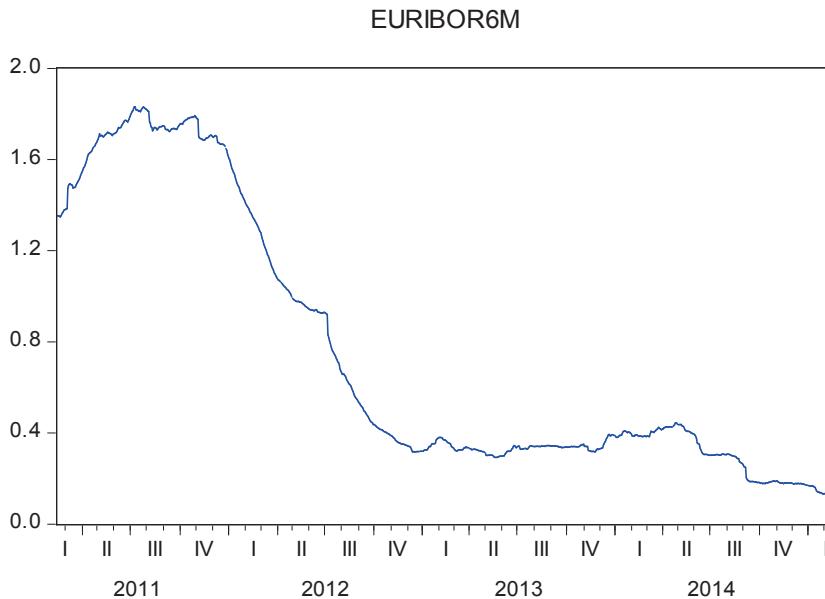


Figure 6 : Evolution des fixings EURIBOR 6M entre le 13/02/2011 et le 13/02/2015

- Non-normalité des rendements

Pour mener notre analyse, nous avons besoin d'introduire les conditions de normalité de base :

- Skewness : le skewness γ est une mesure de la symétrie ou de l'asymétrie de la distribution d'un échantillon statistique. Un skewness nul indique une symétrie alors qu'un skewness positif indique une asymétrie à droite (respectivement un skewness négatif indique une asymétrie à gauche). Il se calcule avec la formule suivante :

$$\gamma(X) = \frac{E[(X - E(X))^3]}{Var(X)^{\frac{3}{2}}}$$

- Kurtosis : le kurtosis κ est une mesure de l'épaisseur de la queue de la distribution d'un échantillon statistique. Un kurtosis égal à 3 indique une queue de distribution normale tandis qu'en-dessous cela indique une queue fine (respectivement au-dessus une queue épaisse). Une distribution à queue épaisse est dite leptokurtique. On parle aussi d'excès de kurtosis pour parler de la variable $\varepsilon = \kappa - 3$.

$$\kappa(X) = \frac{E[(X - E(X))^4]}{Var(X)^2}$$

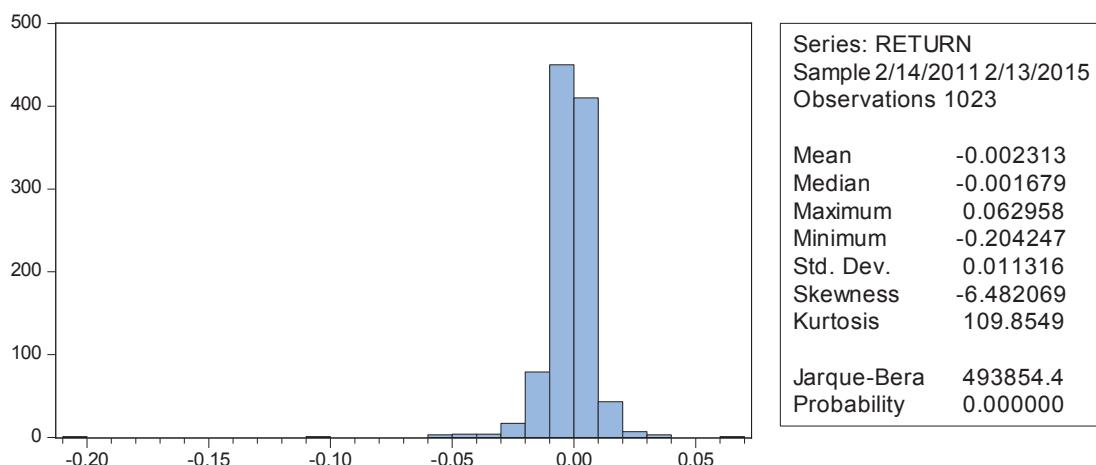
- Test de Jarque-Bera : le test de Jarque-Bera se base sur les conditions de skewness nul et d'excès de kurtosis nul pour estimer la probabilité qu'une distribution soit normale. Son hypothèse H0 est la normalité de la distribution versus son hypothèse H1 de non-normalité. La statistique JB se calcule comme suit et permet de calculer la p-value²⁶ qui indique le résultat du test :

$$JB = \frac{n - k}{6} \left(\gamma^2 + \frac{(\kappa - 3)^2}{4} \right)$$

Nous pouvons désormais nous intéresser à notre échantillon des rendements de l'EURIBOR 6M.

Nous calculons les rendements continus de l'EURIBOR 6M avec la formule :

$$r_{EUR6M}(t) = \ln\left(\frac{EUR6M(t)}{EUR6M(t-1)}\right)$$



²⁶ p-value de test : probabilité issue d'un test statistique indiquant le niveau de confiance auquel se vérifie l'hypothèse H0. Par exemple, si p-value = 0.95, l'hypothèse H0 est vérifiée à tous les niveaux de confiance jusqu'à 95%. Si au contraire p-value = 0.01, on rejette l'hypothèse H0 jusqu'à 99% de confiance.

Figure 7 : Statistiques usuelles des rendements de l'EURIBOR 6M sur la période étudiée

Nous constatons que le skewness est très négatif, ce qui indique une asymétrie à gauche (il y a plus de valeur en-dessous de la moyenne qu'au-dessus). Le kurtosis est très supérieur à 3 ce qui indique une distribution à queue épaisse et non normale. Le test de Jarque-Bera confirme la non-normalité de la distribution car la p-value < 0,05 permet de rejeter l'hypothèse H_0 de normalité.

Le graphe suivant compare la distribution de l'échantillon (lissé en rouge) avec celle d'une loi normale (en vert), nous pouvons y observer l'asymétrie des rendements EURIBOR6M ainsi que l'occurrence d'événements rares inexistant dans une distribution gaussienne :

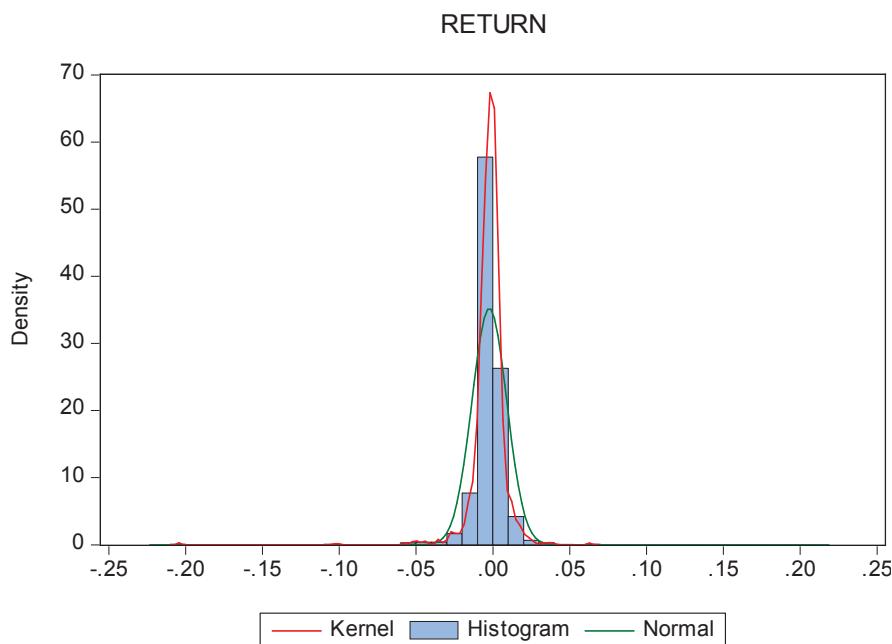


Figure 8 : Comparaison entre la distribution de l'échantillon et une distribution gaussienne

Le graphe QQ-plot, qui compare les quantiles de la distribution de l'échantillon et d'une distribution normale, finit de nous conforter dans notre jugement de non-normalité des rendements. En effet, nous observons que la courbe bleue issue de l'échantillon s'écarte visiblement de la droite rouge représentant les quantiles de la loi normale :

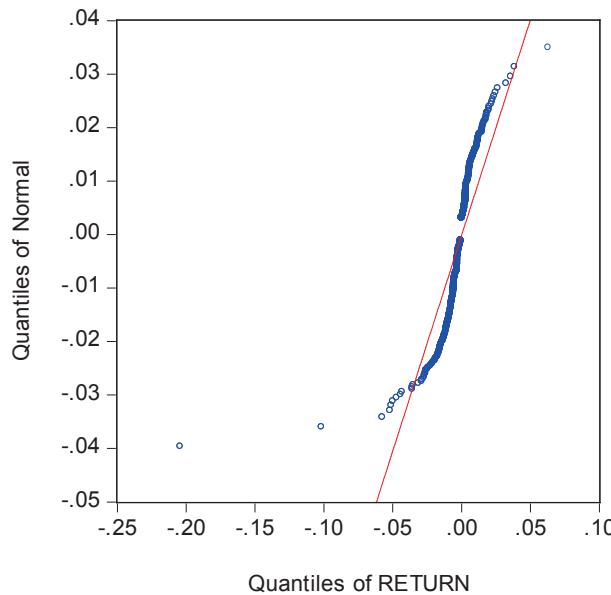


Figure 9 : QQ-plot des rendements de l'échantillon

Nous avons vérifié que l'hypothèse de rendements gaussiens faite dans le modèle de BS est effectivement erronée.

- Non-constance de la volatilité

Nous allons montrer dans ce paragraphe que, contrairement à l'hypothèse de BS, la volatilité n'est pas constante, ni dans le temps ni en fonction des maturités et des strikes.

En regardant le graphe de l'évolution des rendements de l'EURIBOR 6M sur la période, nous observons que la volatilité, comprise a priori comme la tendance à de forts mouvements des prix, présente des périodes de niveaux différents. C'est ce qu'on appelle les clusters de volatilité, qui tendent à montrer que la volatilité évolue à travers le temps et n'est pas constante.

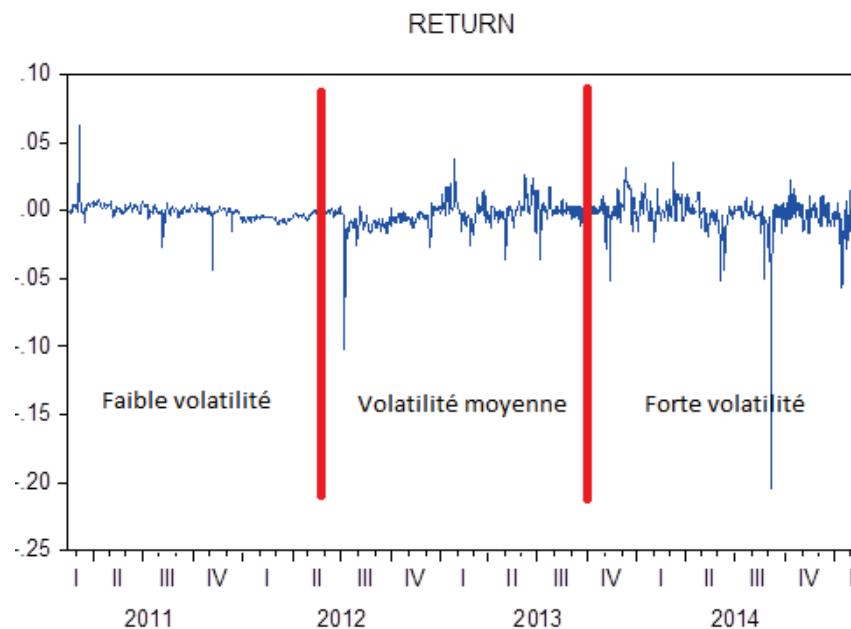


Figure 10 : Clusters de volatilité observés sur les rendements de l'échantillon

Afin de vérifier cette impression visuelle par des résultats mathématiques, nous commençons par observer la volatilité historique des rendements de l'EURIBOR 6M sur la durée de l'échantillon. La volatilité historique est une mesure statistique de première approche pour estimer la volatilité de marché. Elle se base sur le passé de l'échantillon pour essayer de tirer une valeur pour la volatilité du titre, en faisant l'hypothèse que celle-ci se conserve dans le temps. En annualisé, elle se calcule comme l'écart-type des rendements continus (avec 252 jours ouvrés dans l'année) :

$$\sigma_{histo} = \sqrt{\frac{E(X^2) - [E(X)]^2}{252}}$$



Figure 11 : Volatilité historique annualisé des rendements de l'EURIBOR 6M sur la période étudiée

Nous constatons que la volatilité historique est en effet non-constante et évolue à travers le temps. C'est ce qu'on appelle l'hétéroscédasticité. Nous retrouvons sur ce graphe les clusters de volatilité observés intuitivement ci-dessus, avec un décalage dû au calcul de la volatilité historique annualisé.

Nous souhaitons désormais montrer que la volatilité est également différente en fonction des maturités et des strikes des options étudiés.

Dans le modèle de BS, tous les paramètres sont connus à l'exception de la volatilité σ . Nous pouvons voir directement que, puisque le prix est une fonction strictement croissante de σ , la formule de BS est une bijection entre la volatilité σ et le prix C_{BS} : une volatilité donnée correspond à un prix, et vice-versa. C'est ce qui explique que certaines options sont cotées sur les marchés directement en volatilité et non en primes.

Il est donc possible d'inverser la formule de BS pour obtenir la volatilité en fonction du prix, c'est ce qu'on appelle la volatilité implicite. Il est impossible de résoudre directement l'équation d'inversion de BS pour trouver la volatilité implicite, qui est définie comme la solution σ^* de l'équation :

$$C_{BS}(S(0); r; T; K; \sigma^*) - C_{MARCHÉ}(T, K) = 0$$

Pour résoudre ce problème de recherche de 0, il est obligatoire de recourir à des méthodes numériques comme des algorithmes de dichotomie²⁷ ou la méthode de Newton-Raphson²⁸.

Les résultats empiriques montrent que la volatilité implicite est effectivement non-constante en fonction des maturités et des strikes, c'est ce qu'on appelle les phénomènes de smile et de skew de volatilité.

Surface de volatilité swaption en fonction des échéances et des maturités :

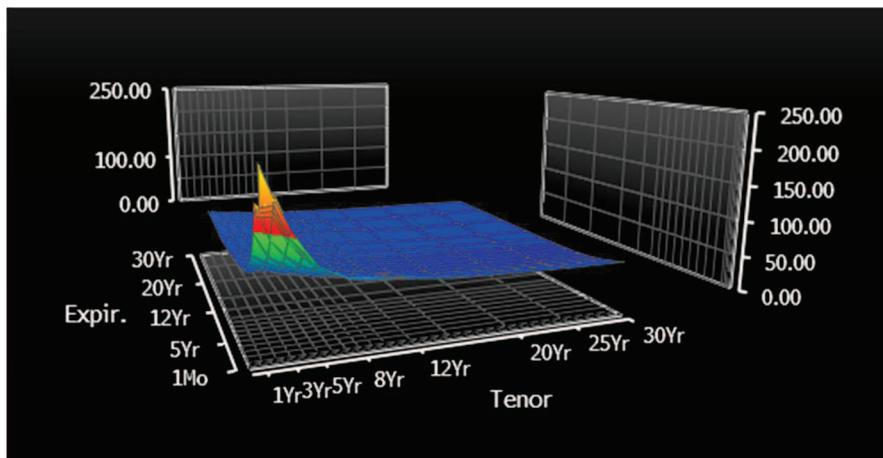


Figure 12 : Surface de volatilité swaption EUR en fonction des échéances et maturités

au 17/02/2015

Exemple de smile de change en fonction des delta (et donc des strikes) :

²⁷ Algorithme de dichotomie : voir Annexe C

²⁸ Méthode de Newton-Raphson : voir Annexe C

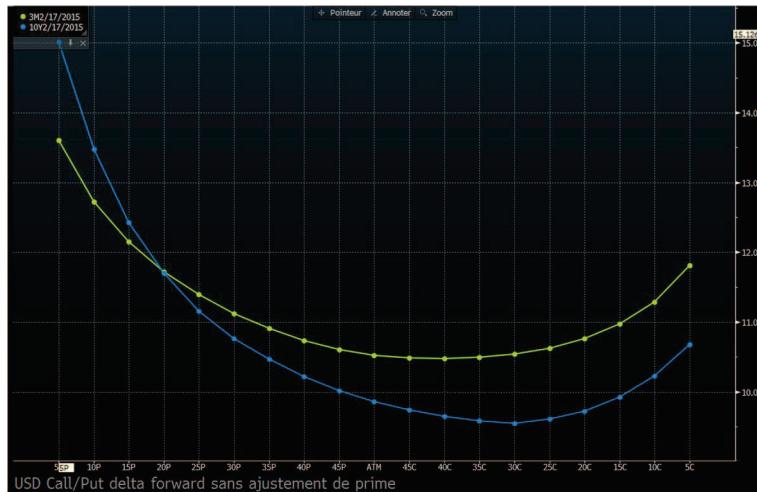


Figure 13 : Smiles de volatilité de change USD/CHF pour les maturités 3M et 10Y au

17/02/2015

Expliquons du smile :

- Non-normalité des rendements : BS sous-estime les événements extrêmes et donc propose une volatilité moyenne qui est plus proche de celle ATM que celle pour des strikes extrêmes.
- Prime de liquidité : la prime de liquidité²⁹ est plus forte quand on s'éloigne de la monnaie car ces options sont moins échangées que celles ATM. Cela joue sur le prix de l'option et donc sur la volatilité implicite calculée par l'inversion de BS.

Nous avons pu constater que la méthode de BS utilisée actuellement pour les valorisations dans Tradix, malgré ses avantages de simplicité et de robustesse, avaient plusieurs limites très importantes.

- Ecarts de valorisation constatés

Les conséquences de ces limites sont de mauvaises valorisations des produits dérivés complexes et optionnels. Des écarts de valorisation sont constatés avec

²⁹ Prime de liquidité : l'offre et la demande étant moins importantes loin de la monnaie, l'investisseur prend plus de risques en achetant une option ayant un strike extrême. Ce phénomène est compensé par une prime dite de liquidité qui encourage l'investisseur à acquérir une telle option.

les contreparties. Une synthèse chiffrée de ces écarts est reportée ci-dessous, par contrepartie et par type de produits³⁰.

Contrepartie	Ecart de valorisation (M€)
Banque 1	7,69
Banque 2	-3,27
Banque 3	9,09
Banque 4	-2,50
Banque 5	3,65
Banque 6	-10,42
Banque 7	5,56
Banque 8	-15,40
Banque 9	170,13
Banque 10	-4,33
Banque 11	-1,11
TOTAL	159,09

Figure 14 : Synthèse des écarts (nets) constatés par contrepartie

Type de produit	Nombre d'opérations	Nominal	Ecart de valorisation
DIGITAL QUANTO	18	109	14,15
SWAP TEC10	9	1373	32,41
SPREAD OPTION			
QUANTO	26	736	37,98
ZERO COUPON			
CALLABLE	18	357	37,54
SWAP INFLATION	5	178	35,68
HELVETIQUE	25	255	176,55
TOTAL	101	3008	334,31

Figure 15 : Synthèse des écarts (en valeur absolue) constatés par type de produits

Suite à la constatation de ces écarts, un audit a été mené conjointement avec l'équipe DRM (Direction des Risques de Marché) d'une filiale D du groupe C

³⁰ Pour la typologie des produits, cf. partie I.2.a

(auquel A appartient également) pour identifier les origines des erreurs de valorisation constatées.

Les préconisations de D suite à l'audit des valorisations Tradix sont restituées ci-dessous, elles sont regroupées en trois groupes (Market Data, Data Model et Modèles de Valorisation) :

- Mise en place de Market Data :
 - o Smiles de volatilité pour les Spread Options
 - o Basis cross currency et Smile de change pour les produits Change
 - o Structure par terme de corrélation taux-taux (Spread Options) et taux-change (Quanto)
 - o Smile de volatilité et corrélation par terme inflation (Spread Options/Inflation)
- Mise en place de Data Model :
 - o Bootstrapping des courbes de taux en mode bi-courbe
 - o Développement d'un modèle SABR pour le smile de taux des Cap/Floor/Swaptions
 - o Développement d'un modèle paramétrique pour le smile de volatilité de change
 - o Prise en compte de la saisonnalité dans la construction de la courbe forward inflation
- Correction des modèles de valorisation :
 - o Ajustement des forward de taux et change dans un cadre Quanto
 - o Mise en place d'un pricer pour les Zéro Coupons Callables au lieu de prendre la valeur intrinsèque
 - o Valorisation des produits sur CMS par réplication
 - o Valorisation des Spread Options (Taux ou Inflation) avec un modèle plus adapté
 - o Prise en compte du discount OIS pour les deals collatéralisés

Ce sont ces biais de valorisation identifiés que nous allons chercher à corriger au cours de cette étude, afin de résorber les écarts de valorisation constatés avec les contreparties.

1.3.2 Etude de l'impact des écarts de valorisation sur l'EAD

Pour rendre compte des enjeux de la valorisation des produits dérivés structurés pour A, nous menons une étude approfondie de l'impact des écarts sur l'EAD du groupe A.

Un bon exemple de conséquences des erreurs de valorisation pour la gestion du risque est celui du calcul de l'EAD ou Exposure At Default. L'EAD mesure le risque de contrepartie globale pour un établissement financier. Nous nous intéressons ici à l'EAD sur produits dérivés. Il s'agit de quantifier le risque encouru par l'établissement lié aux dérivés en cas de défaut ou faillite de ses contreparties. Autrement dit, il faut mesurer la perte qui risque d'advenir si au moment de payer les contreparties ne sont plus en mesure de le faire. Si la somme nette des valorisations des produits dérivés de notre société est de 100, nous sommes exposés à hauteur de 100 au risque de défaut vis-à-vis de cette contrepartie. La prise en compte de ce risque ayant été fortement sous-estimé durant la crise de liquidité des banques, celui-ci est désormais au centre des recommandations et des règles prudentielles du comité de Bale.

1.3.2.a Description de la nouvelle méthode SA-CCR

Nous approfondissons ici ce qui a été vu en partie 1.a et qui introduisait la notion d'EAD.

Le comité de Bale, via les documents juridiques CRR (Capital Requirement Regulation), propose aux établissements financiers des méthodes pour quantifier le risque de contrepartie. Les entreprises ont le choix entre utiliser leur propre modèle interne de mesure du risque (sous réserves de justifications) et appliquer la méthode du comité de Bale (auparavant Current Exposure Method, puis Non-

Internal Model Method et désormais Standard Approach). Ces méthodes ne cessent d'évoluer, nous étudions la dernière en date qui est celle de Mars 2014, appelée SA-CCR (Standard Approach for Counterparty Credit Risk exposure).

- Points de méthode

L'objectif de SA-CCR est de proposer une méthode applicable pour une large variété de produits dérivés, facile à mettre en place, cohérente avec le reste de l'environnement des réglementations baloises, efficace dans l'estimation du risque et qui corrige les faiblesses des méthodes précédentes.

La méthode SA-CCR corrige plusieurs limites et points négatifs des méthodes précédentes :

- Absence de distinction entre les opérations « margined » (collatéralisées) et « unmargined » (non collatéralisées). En effet, il est légitime de reconnaître que l'exposition des opérations collatéralisées est bornée par le seuil d'appel de marge (+ le montant minimum d'appel). On sait que si la valorisation positive dépasse un certain montant (le seuil), du collatéral sera versé par la contrepartie pour compenser cette valorisation. Le collatéral étant prélevé sur le compte d'appels de marge et géré par la chambre de compensation, il n'y a pas de risque de défaut à craindre. Au contraire, l'exposition pour les opérations non-collatéralisées est potentiellement illimitée. Et le paiement ayant lieu à la maturité du dérivé, il n'y a aucune garantie que le montant dû soit payé comme il se doit par la contrepartie. SA-CCR corrige ce manque en faisant la distinction entre les deux types d'opérations et en pénalisant moins les opérations « margined » que les « unmargined ».
- Pas de possibilité de netting au sein des paniers d'opérations par contrepartie. Autrement dit, avec une contrepartie, le risque ne pouvait que s'accumuler avec les opérations quel que soit leur sens. Ceci pouvait amener à des situations paradoxales. Par exemple, imaginons qu'avec une contrepartie notre établissement contracte 2 swaps exactement

opposés (2% contre Euribor 6M sur 10 ans avec les mêmes dates de paiement etc..) : nous recevons à chaque roll 2% + Euribor 6M et nous payons à chaque roll 2% + Euribor 6M. Supposons que les valeurs de marché sont +10M€ et -10M€, la valeur de marché du portefeuille est 0. Le risque réel est de 0, mais l'ancienne méthode ne permettait pas la compensation et faisait s'ajouter les risques et nous avions une exposition calculée de $20*1.5\% = 0.3\text{M}\text{\euro}$. Dans SA-CCR, les compensations au sein des hedging sets (panier de compensation) sont possibles. Un panier de compensation est défini par une contrepartie, une devise, une catégorie (Taux, Change, Equity, Commodity ou Credit) et un intervalle de maturité.

- Mauvaise calibration des Supervisory Factors (SF) appliqués aux Add-On dans le calcul du PFE. Les SF sont les taux forfaitaires utilisés dans le calcul du PFE. Selon la catégorie du produit (Change, Taux, Equity, Commodity, Credit) et son intervalle de maturité (<1an ; entre 1 et 5 ans ; > 5ans), un taux forfaitaire est appliqué au nominal pour déterminer l'Add-On puis le PFE. Les valeurs retenues dans les méthodes précédentes n'ont pas été jugées appropriées car elles ne reflétaient pas assez les niveaux de volatilité observés pendant les récentes périodes de fort stress. Les SF ont été corrigés dans SA-CCR.
- Description théorique de la méthode SA-CCR & Application au portefeuille de dérivés de A :

Comme vu plus haut :

$$\text{EAD} = 1.4 * (\text{RC} + \text{PFE})$$

Avec $\text{RC} = \text{Replacement Cost}$

$\text{PFE} = \text{Potential Future Exposure}$

L'EAD représente la mesure du risque de contrepartie que nous cherchons à valoriser. Plus l'EAD sera élevée, plus l'établissement est exposé au risque de contrepartie et plus une faillite de ses contreparties lui couterait cher. Le comité

de Bale sépare ce risque en deux éléments : le coût de remplacement (RC) et le Risque Potentiel Futur (PFE).

$$RC = Ma x(0 ; V - C ; TH + MTA - NI CA)$$

Avec V = Valeur de Marché

C = Collatéral Reçu

TH = Seuil d'Appel de Marge

MTA = Montant Minimum de Transfert

$NICA$ = Marge Initiale Net

Le RC représente le risque immédiat, au moment présent, de détenir une valorisation positive non –collatéralisée vis-à-vis d'une contrepartie. Il mesure l'exposition en valorisant la perte qui aurait lieu si la contrepartie faisait défaut et clôturait toutes ses opérations immédiatement.

Le calcul du RC ne présente pas de difficultés particulières.

Pour A on obtient les chiffres suivants au 31/12/2014 :

	Montant RC
A	195
B	694
Total	889

Tableau 1 : Montant du RC global pour A calculé au 31/12/2014

On s'intéresse maintenant au calcul du PFE, plus complexe à mettre en œuvre.

$$PFE = Multiplier * Add-On$$

Avec Multiplier = Coefficient de sur-collatéralisation

Add-On = Montant d'Exposition Future Estimée

Le PFE représente le risque futur lié au changement de valeur des opérations d'ici à leur maturité. Si la valeur de marché des opérations en Book s'apprécie, l'exposition au défaut augmente également. Au contraire, si la valeur baisse, l'exposition va baisser (si on possède moins, le risque de ne pas être payé est

moindre). Par défaut et selon une hypothèse conservatrice³¹, l'exposition future sera considérée comme augmentant linéairement avec le temps.

Pour le calcul du Add-On, on introduit les éléments suivants :

δ_i = Supervisory Delta Adjustement : facteur de sensibilité qui indique le sens et la linéarité ou non-linéarité du produit. Vaut 1 ou -1 pour les swaps (flux certains) et une valeur entre -1 et 1 pour les options selon leur strike, maturité, spot etc...

$$\delta_i = \begin{cases} -1 \text{ ou } 1 \text{ pour les swaps selon le sens (1 pour les receveurs de Taux Fixe)} \\ \pm \Phi \left[\frac{\ln\left(\frac{P_i}{K_i}\right) + 0.5 * \sigma_i^2 * T_i}{\sigma_i * \sqrt{T_i}} \right] (\Phi = 1 \text{ pour BuyCall / SellPut; -1 pour SellCall / BuyPut}) \end{cases}$$

SD_i = Supervisory Duration : approximation de la duration. La duration est une mesure simple du risque. En effet, plus elle est élevée plus le poids des cashflow dans le futur lointain est important, et donc le risque de défaut d'ici là est grand. Pour approximer la duration, le comité de Bale utilise la formule suivante :

$$SD_i = \frac{e \times (\bar{p} - 0.05 * Si) - e \times (\bar{p} - 0.05 * Ei)}{0.05}$$

N_i = Trade Notional Amount. Le nominal du dérivé est aussi un facteur de risque. Plus le montant est élevé, plus le MtM et les variations de MtM sont élevés, ce qui augmente les sommes d'argent en jeu et donc le risque de contrepartie.

³¹ « Hypothèse conservatrice » signifiant : hypothèse connue comme fausse et plus prudente que la réalité. Pour être sûr de couvrir le risque, on imagine des situations de marché pires que la réalité attendue et probable.

MFI = Margin Factor. Le facteur du temps d'exposition avant paiement est le dernier facteur de risque à prendre en compte dans le calcul de l'exposition. Il est justifié d'introduire un facteur qui représente le temps pendant lequel le risque est supporté. En effet, les contrats de collatéral font en sorte que les variations de valorisation soient payées/reçues à intervalle régulier (jour/semaine/mois), pour éviter de supporter un risque de défaut pendant une longue période. Ainsi, on distingue les opérations « margined » et « unmargined », car la mise en place d'un accord de cash-collatéral réduit fortement le délai de paiement et donc le risque.

$$MFI = \begin{cases} \sqrt{\frac{\min(Mi; 1y)}{1y}} & \text{si l'opération est « unmargined »} \\ \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{MPORi}{1y}} & \text{si l'opération est « margined »} \end{cases}$$

Di = Partial Effective Notional. La quantité Di est une valeur intermédiaire représentant un montant de risque par panier de maturité, de devises et de catégorie.

$$D(i, j) = \sum_{(i,j) \in (\text{devise, maturité})} \delta_i * N_i * SDi * MFI$$

EFj = Effective Notional pour une devise. Cette quantité est un résultat intermédiaire résultant de l'agrégation des Di pour les 3 différents paniers de maturité³². L'agrégation ci-dessous intègre des corrélations entre les paniers de maturité : 1,4 pour les paniers proches et 0,6 pour les paniers de maturité éloignés.

³² Paniers de maturité :

1 = maturité < 5 ans

2 = maturité entre 5 et 10 ans

3 = maturité > 10 ans

$$EFj = [D(1,j)^2 + D(2,j)^2 + D(3,j)^2 + 1,4 * D(1,j) * D(2,j) + 1,4 * D(2,j) * D(3,j) + 0,6 * D(1,j) * D(3,j)]^{1/2}$$

Add-on(j) = Add-On pour une devise. Cette quantité représente le PFE brut pour une devise donnée et un accord de netting donné. On le calcule en pondérant les EFj par les SFj (Supervisory Factors taux forfaitaires à appliquer selon le type de produits). L'add-on total pour un accord de netting consiste en la somme simple des Add-on par devise.

$$AddOn(j) = EFj * SFj$$

$$AddOn = \sum_{j \in (devise)} AddOn(j)$$

Multiplier = Coefficient de collatéralisation. Ce coefficient, compris entre 5% et 100% permet de prendre en compte une potentielle sur-collatéralisation³³. En effet, si une opération est dans la situation où le collatéral versé est plus important que la valeur de marché, l'exposition réelle est en effet réduite à la fois à l'instant présent (le RC sera faible) et dans le futur (on dispose d'une certaine marge avant de passer en situation de risque).

$$Multiplier = \min \left\{ 1; 5\% + (1 - 5\%) * \exp \frac{V - C}{2 * (1 - 5\%) * AddOn} \right\}$$

Le PFE est finalement obtenu en faisant le produit du Multiplier et de l'AddOn total.

Pour A nous obtenons les chiffres suivants au 31/12/2014 :

	Montant PFE
--	-------------

³³ Sur-collatéralisation : situation dans laquelle le collatéral versé est plus important que la valeur de marché. Dans ce cas, l'exposition à l'instant présent est nulle. Position inverse : sous-collatéralisation.

A	164
B	846
Total	1011

Tableau 2 : Montant du PFE global pour A calculé au 31/12/2014

Summary table of supervisory parameters

Table 2

Asset Class	Subclass	Supervisory factor	Correlation	Supervisory option volatility
Interest rate		0.50%	N/A	50%
Foreign exchange		4.0%	N/A	15%
Credit, Single Name	AAA	0.38%	50%	100%
	AA	0.38%	50%	100%
	A	0.42%	50%	100%
	BBB	0.54%	50%	100%
	BB	1.06%	50%	100%
	B	1.6%	50%	100%
	CCC	6.0%	50%	100%
Credit, Index	IG	0.38%	80%	80%
	SG	1.06%	80%	80%
Equity, Single Name		32%	50%	120%
Equity, Index		20%	80%	75%
Commodity	Electricity	40%	40%	150%
	Oil/Gas	18%	40%	70%
	Metals	18%	40%	70%
	Agricultural	18%	40%	70%
	Other	18%	40%	70%

Tableau 3 : SF, Corrélations et Volatilités à utiliser dans le calcul de l'EAD (Comité de Bale)

Finalement, en appliquant la formule multipliant (RC + PFE) par 1.4, pour A nous obtenons les chiffres d'EAD suivants au 31/12/2014 :

	Montant EAD
A	503
B	2157
Total	2660

Tableau 4 : Montant de l'EAD globale pour A calculé au 31/12/2014

Ce montant est important car il va permettre de déterminer les éventuelles provisions à passer au titre du risque de contrepartie et à déterminer le montant de fonds propres mobilisés pour ce risque. Nous notons que ce montant est en augmentation de 75% par rapport à l'ancienne méthode de calcul de l'EAD. Le Comité de Bâle a ainsi mis en place avec SA-CCR un mode de calcul beaucoup plus prudent.

1.3.2.b Quantification de l'effet des écarts

Afin d'illustrer par des chiffres l'importance d'une bonne valorisation, nous étudions maintenant l'effet des écarts de valorisation constatés dans le cas de A sur l'EAD.

Pour cela, nous ré-introduisons les valorisations fournies par les contreparties dans les données de calcul de l'EAD (méthode SA-CCR), dans la colonne Valo CPT ci-dessous.

Comme nous l'avons vu dans les formules, la valeur de marché intervient principalement dans le calcul du RC (Replacement Cost) et dans une moindre mesure dans le calcul du PFE (Potential Future Exposure).

Nous reportons ci-dessous les écarts globaux après recalcul de l'EAD :

	Valo CPT	Valo A	Ecart
RC	1 357	1245	112
PFE	1 417	1415	2
EAD	2 774	2660	114

Tableau 5 : Synthèse de l'impact des écarts de valorisation sur l'EAD

L'écart net de valorisation constaté était de 159M€, et on constate qu'il provoque un écart sur l'EAD de 114M€. Cela représente une hausse de 4,3% de l'exposition, et surtout cela a des conséquences sur le niveau de fonds propres exigibles en couverture de l'EAD.

Puisque l'écart provient principalement (et logiquement) du changement dans le RC, nous détaillons ici les résultats par société pour le RC :

	RC Valo CPT	RC Valo A	Ecart de RC	Ecart de valorisation
A	195	195	0	76
B	774	694	79	84
Total	969	889	79	159

Tableau 6 : Impact des écarts de valorisation sur le RC par société

Le fait de sous-estimer en valeur absolue certaines valorisations dans Tradix provoque une augmentation des MtM en valeur absolue lorsque l'on prend en compte les valeurs de marché de D. Pour A, les MtM sont négatifs donc l'effet sur la formule $\text{Max}(0 ; V-C)$ est nul. Mais à l'inverse, pour B, la majorité des MtM sont positifs donc l'effet sur la formule du RC est immédiat dès que $V-C$ est supérieur à $TH+MTA$. Sur B, les écarts de valorisation sont de +84M€ et provoquent une hausse de 79M€ du RC brut. Après application du coefficient levier de 1.4, cela entraîne une hausse de l'EAD de 112M€.

Les écarts de valorisation entraînent donc des écarts sur des montants aussi stratégiques que l'EAD. L'augmentation de l'EAD recalculée signifie que des fonds supplémentaires par rapport à ce qui était prévu initialement vont devoir être mobilisés au titre du risque de contrepartie.

2. Modélisation du smile de volatilité

Afin de résoudre les écarts de valorisation et pallier les limites du modèle de Black-Scholes examinées en première partie, nous allons chercher et tester des modèles de volatilité plus précis et plus complets. La difficulté avec ce type de modèles est l'arbitrage nécessaire entre d'un côté précision et fiabilité du modèle qui augmentent avec sa complexité, et de l'autre côté faisabilité et rapidité de l'application numérique.

2.1 Présentation des différents modèles de volatilité

Nous commençons par une revue des différents modèles, en allant du plus simple (et plus ancien) au plus complexe (et plus récent).

2.1.1 Modèles de variance conditionnelle (GARCH)

Dans cette section, on s'intéresse à l'évolution de la volatilité dans le temps (cf clusters de volatilité constatée en partie I.2).

Les modèles ARCH (Auto Regression Conditionnellement Heteroscedastique) puis GARCH (ARCH Généralisé), ont été proposés à partir de 1982 par Engle puis en 1986 par Bollerslev. Il s'agit de modéliser la variance (ici mesure de volatilité) en fonction de la valeur de ses valeurs précédentes et du niveau des rendements.

Dans le modèle GARCH de paramètres (p,q), la variance/volatilité à chaque date est calculée selon la formule suivante :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot r_{t+1-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \cdot \sigma_{t+1-j}^2$$

Avec r_t : rendements journaliers du jour t

$\sigma^2 t$: volatilité estimée du jour t

Le paramètre p représente le retard maximal pris en compte pour les rendements passés, et le paramètre q représente le retard maximal pris en compte pour la volatilité estimée passée. Le scalaire ω représente la tendance de fond de la volatilité. Si le modèle est efficace, ω doit être proche de 0 voire non-significatif.

Afin de rester pertinent vis-à-vis des particularités du portefeuille de A et de la finalité de nos recherches sur la volatilité (valoriser des produits en portefeuille), nous illustrons cette méthode par une étude portant sur le taux de change USD/CHF, sous-jacent d'un produit particulièrement problématique pour A.

Notre échantillon est constitué des parités USD/CHF de clôture sur la période du 23/02/2010 au 22/02/2015. Les rendements continus de cet échantillon sont représentés ci-après, nous retrouvons des clusters de volatilité à travers le temps :

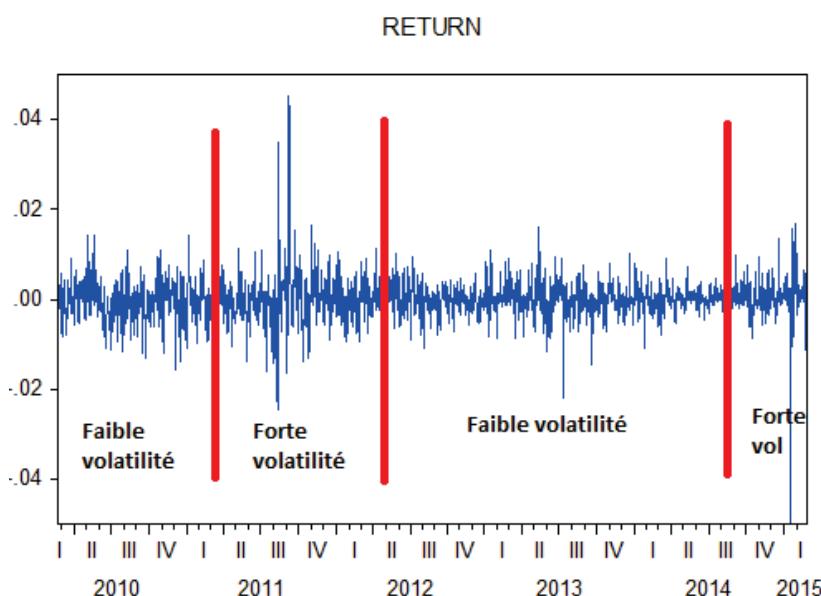


Figure 16 : Rendements continus de l'USD/CHF entre le 23/02/2010 et le 22/02/2015

Nous effectuons dans le logiciel E-Views la régression GARCH(1,1) pour modéliser les rendements et la variance hétéroscléastique (non-constante dans le temps). Nous obtenons le résultat suivant :

Dependent Variable: RETURN
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 02/23/15 Time: 14:48
 Sample (adjusted): 2/26/2010 2/23/2015
 Included observations: 1824 after adjustments
 Convergence achieved after 150 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.378586	0.025860	14.63962	0.0000
AR(2)	-0.153813	0.031385	-4.900852	0.0000
Variance Equation				
C	1.72E-07	3.65E-08	4.722322	0.0000
RESID(-1)^2	0.041634	0.002719	15.31258	0.0000
GARCH(-1)	0.955985	0.003677	260.0043	0.0000
R-squared	0.169287	Mean dependent var	-7.82E-05	
Adjusted R-squared	0.168831	S.D. dependent var	0.005314	
S.E. of regression	0.004844	Akaike info criterion	-8.102348	
Sum squared resid	0.042757	Schwarz criterion	-8.087247	
Log likelihood	7394.341	Hannan-Quinn criter.	-8.096777	
Durbin-Watson stat	1.834927			
Inverted AR Roots	.19+.34i	.19-.34i		

Figure 17 : Résultats de la modélisation GARCH(1,1) des rendements de l'USD/CHF

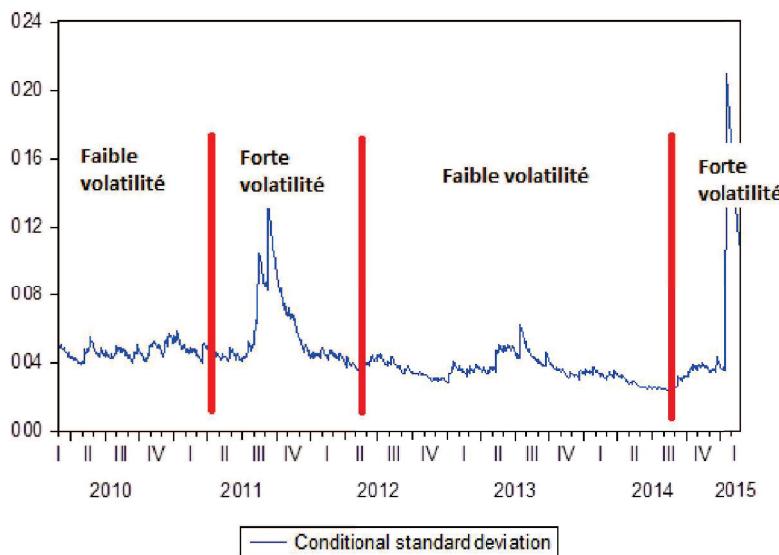
Ici les rendements sont modélisés de la façon suivante :

$$r_t = (c(1).r_{t-1} + c(2).r_{t-2}).\sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + c(3).r_{t-1} + c(4).\sigma_{t-1}$$

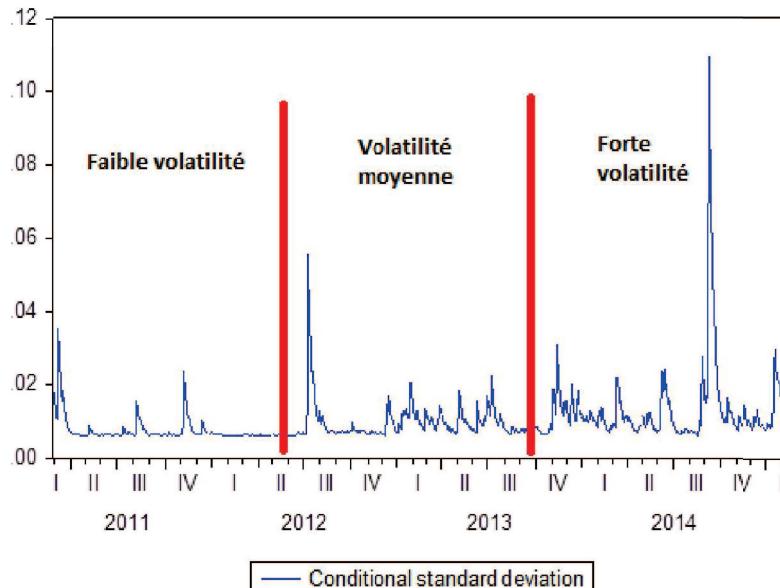
Les p-value sont toutes inférieures à 5%, ce qui signifie que les tests de non-significativité des paramètres sont tous rejetés. Le scalaire ω peut toutefois être considéré comme nul ($\sim 10^{-7}$).

Avec ce modèle, nous obtenons la volatilité conditionnelle suivante :



Le modèle reproduit les changements temporels de la volatilité : nous retrouvons les clusters de volatilité constatés sur le graphe des rendements continus.

En reprenant l'exemple des rendements EURIBOR 6M du 13/02/2011 au 13/02/2015, nous constatons que le modèle GARCH permet également d'intégrer les clusters de volatilité repérer sur le graphe des rendements.



Les modèles GARCH sont donc performants au niveau de la modélisation temporelle de la volatilité, mais ils ne donnent toujours qu'une seule volatilité par date de valorisation pour un sous-jacent, sans distinguer les maturités et les strikes des options.

2.1.2 Modèles à volatilité locale

Les modèles à volatilité locale sont les modèles les plus simples à même de fournir un smile/skew de volatilité. Ils sont dits « simples » car ils n'intègrent qu'un seul facteur de risque.

2.1.2.a Formule de Dupire

Dans le modèle de Dupire (1993), le facteur de risque du modèle est le prix du sous-jacent $S(t)$. On fait l'hypothèse que le modèle de diffusion risque-neutre du prix est le suivant :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r \cdot dt + \sigma(S(t); t) \cdot dW^Q(t)$$

Avec $S(0) > 0$

Pour obtenir la formule théorique de Dupire, on suppose qu'on a une série continue de prix de marchés de Call (ou de Caps) pour toutes les maturités et tous les strikes possibles.

Pour analyser les propriétés de probabilité d'une Equation Différentielle Stochastique (SDE) de la forme générale : $dy = A(y, t) \cdot dt + B(y, t) \cdot dW(t)$, on introduit la densité de la probabilité de transition $\varphi(y, t; y', t')$ définie par, avec $t' > t$:

$$P(a < y < b \text{ en } t' | y \text{ en } t) = \int_a^b \varphi(y, t; y', t') \cdot dy'$$

Dans notre cas, on aura $y=S(t)$; $y'=S(T)$ et $t'=T$.

Exprimons cette densité de probabilité de transition en partant de la définition du prix du call :

$$C(K, T) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \max[S(T) - K, 0] \cdot \varphi[S(t), t; S(T); T] \cdot dS(T)$$

$$C(K, T) = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} [S(T) - K] \cdot \varphi[S(t), t; S(T); T] \cdot dS(T)$$

En dérivant par rapport à K :

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} \varphi[S(t), t; S(T); T] \cdot dS(T)$$

En dérivant de nouveau par rapport à K :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = -e^{-r(T-t)} \cdot \varphi[S(t), t; S(T); T]$$

On obtient la densité de probabilité de transition ϕ :

$$\varphi[S(t), t; S(T); T] = -e^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

Cette densité est la solution de l'équation de Fokker-Planck³⁴ (ou équation Forward de Kolmogorov) suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S(T)^2} (B(S(T), T)^2 \cdot \varphi) - \frac{\partial}{\partial S(T)} (S(T), T) \cdot \varphi$$

Dans notre cas, on identifie $A(y, t) = r \cdot S(t)$ et $B(y, t) = \sigma(S(t), t) \cdot S(t)$. Ce qui nous donne pour l'équation de Fokker-Planck :

³⁴ Equation de Fokker-Planck : voir Annexe D

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S(T)^2} (\sigma(S(T), T)^2 \cdot S(T)^2 \cdot \varphi) - \frac{\partial}{\partial S(T)} (r \cdot S(T) \cdot \varphi)$$

En prenant la dérivée de $C(K, T)$ par rapport à T et en simplifiant les notations pour ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= -r \cdot e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S(T) - K) \cdot \varphi \cdot dS(T) \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S(T) - K) \cdot \frac{\partial}{\partial T} \varphi \cdot dS(T) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -r \cdot C + e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S(T) - K) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial T} \cdot dS(T)$$

En utilisant l'expression de $\frac{\partial \varphi}{\partial T}$ calculée plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= -r \cdot C + e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S(T) - K) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S(T)^2} (\sigma(S(T), T)^2 \cdot S(T)^2 \cdot \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial S(T)} (r \cdot S(T) \cdot \varphi) \right\} \cdot dS(T) \end{aligned}$$

Après intégration par parties et en supposant que $\lim_{Z \rightarrow \infty} \varphi = 0$ et $\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial S(T)} = 0$:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma(K, T)^2 \cdot K^2 - r \cdot K \cdot \frac{\partial C}{\partial K}$$

Cette équation nous donne finalement la formule de Dupire pour la volatilité :

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + r \cdot K \cdot \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2} \cdot K^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

Cette formule de la volatilité ne nous permet pas de la calculer directement, il nous faut utiliser une méthode numérique pour exploiter ce résultat.

Pour calibrer la fonction, on choisit une représentation paramétrique comme suit :

$$\sigma(S(t), t) = \sigma(S(t); \alpha_1(t); \dots; \alpha_5(t))$$

Où les α_k sont des fonctions linéaires du temps

En particulier on suppose que la fonction de volatilité est de la forme suivante :

$$\sigma_{DUPIRE} = \sigma(S(t), t) = \alpha_1(t) + \frac{\alpha_2(t)}{S(t)^{\alpha_5(t)}} + \alpha_3(t).S(t)^{\alpha_4(t)}$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_k(T_{j-1}) + \frac{\alpha_k(T_j) - \alpha_k(T_{j-1})}{T_j - T_{j-1}} \cdot (t - T_{j-1})$$

Les valeurs inconnues des $\alpha_k(T_j)$ sont solutions du problème d'optimisation suivant, qui cherche toujours à minimiser l'écart entre les prix de marché et les prix estimés en jouant sur les paramètres qui déterminent la volatilité :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_k(T_j)} & \left(\sum_{i=1}^N \left\{ C_{MARCHÉ}(K_i, T_j) \right. \right. \\ & \left. \left. - C_{DUPIRE}(K_i, T_j, \sigma_{DUPIRE}(S(T_j); \alpha_1(T_j); \dots; \alpha_5(T_j))) \right\}^2 \right) \end{aligned}$$

Les contraintes permettant d'augmenter la stabilité et la rapidité de l'optimisation sont issues de la méthode définie par Crank-Nicolson³⁵ (les deux conditions suivantes sont équivalentes) :

Condition à l'horizon T :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial S(T)} \cdot (r \cdot S(t) \cdot \varphi)$$

³⁵ Cadre de Crank-Nicholson : voir Annexe D

Ou de façon équivalente :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S(T)^2} = 0$$

Notons qu'il existe d'autres méthodes numériques pour résoudre ce genre de problèmes, comme les fonctions splines³⁶ ou les transformées de Fourier³⁷.

Les $\alpha k(T_j)$ permettent de piloter la dynamique du smile et s'interprètent de la façon suivante :

- $\alpha 1(t)$ reflète le composant permanent de la volatilité
- $\frac{\alpha 2(t)}{S(t)^{\alpha 5(t)}}$ permet de gérer la hausse de la volatilité quand le prix baisse
- $\alpha 3(t).S(t)^{\alpha 4(t)}$ permet de corriger l'effet du facteur précédent et de gérer la baisse (plus graduelle) de la volatilité quand le prix augmente

Application de la formule de Dupire :

Nous utilisons le cours de change USD/JPY et des prix d'options (Call Européen) au 05/03/2015 pour calibrer le modèle de Dupire dans Numerix. Numerix ne permet pas de voir les valeurs des paramètres αk mais donnent directement les volatilités (qui sont interprétées comme les vrais paramètres du modèle).

spot	Mat/Strikes	110	130	150
120,87	07/03/2016	11,65%	9,70%	7,87%
	06/03/2017	11,63%	9,65%	7,81%
	05/03/2018	11,67%	9,69%	7,82%
	05/03/2019	8,59%	9,19%	9,05%
	05/03/2020	10,59%	9,99%	9,35%

Tableau 7 : Volatilités obtenues par le modèle de Dupire dans Numerix

³⁶ Fonctions splines : voir Annexe D

³⁷ Transformées de Fourier : voir Annexe D

Nous voyons que les volatilités obtenues permettent de retrouver une structure de volatilité par strike et par maturité. Malheureusement, nous ne disposons pas d'assez de cotations pour recréer tout le smile de volatilité.

2.1.2.b Modèle CEV

Le modèle CEV (pour Constant Elasticity of Variance) est le second modèle de volatilité locale. Il a été développé par Cox en 1975 puis corrigé en 1996. Il a l'avantage d'aboutir, dans le cadre d'une approximation asymptotique, à une formule fermée qui facilite grandement la mise en application du modèle.

Dans ce modèle, la diffusion de la volatilité s'effectue selon le schéma suivant :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma_0 \cdot S(t)^{2/\beta} \cdot dW(t)$$

Avec $0 < \beta \leq 2$

On remarque que pour $\beta=0$, on obtient le modèle de BS avec une volatilité constante σ_0 .

Posons $Y = T(t, S(t)) = S(t)^{2-\beta}$ et $\mu = r - a$. D'après le lemme d'Itô, avec

$\frac{\partial Y}{\partial S} = (2 - \beta) \cdot S(t)^{1-\beta}$; $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = (2 - \beta) \cdot (1 - \beta) \cdot S(t)^{-\beta}$; on obtient :

$$\begin{aligned} dY = & \left[(r - a) \cdot (2 - \beta) \cdot Y + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot (2 - \beta) \cdot (1 - \beta) \cdot (2 - 2\beta) \cdot Y \right] \cdot dt \\ & + \sigma^2 \cdot (2 - \beta)^2 \cdot Y \cdot dW \end{aligned}$$

L'équation Kolmogorov forward pour Y devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial Y^2} [\sigma^2 \cdot (2 - \beta) \cdot Y \cdot P] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[(r - a) \cdot (2 - \beta) \cdot Y + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot (\beta - 1) \cdot (\beta - 2) \right] \cdot P \right\}\end{aligned}$$

L'auteur utilise ensuite le lemme de Feller pour obtenir une expression explicite du forward $f(S(T))$.

Après développements, Cox aboutit finalement au prix de call (ou de caplet) suivant :

C

$$= e^{-r(T-t)} \cdot S(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^n \cdot G\left(n + 1 + \frac{1}{2-\beta}; k^* \cdot K^{2-\beta}\right)}{\Gamma(n+1)} e^{-r(T-t)} \cdot K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^n \cdot G\left(n + 1 + \frac{1}{2-\beta}; k^* \cdot K^{2-\beta}\right)}{\Gamma(n+1 + \frac{1}{2-\beta})}$$

$$\text{Avec } G(m, v) = (\Gamma(m))^{-1} \int_v^{\infty} e^{-u} \cdot u^{m-1} \cdot du$$

$$\text{Et } k^* = \frac{2(r-a)}{\sigma^2 \cdot (2-\beta) \cdot [e^{(r-a) \cdot (2-\beta) \cdot (T-t)} - 1]}$$

$$x = k^* \cdot S(t)^{2-\beta} \cdot e^{(r-a) \cdot (2-\beta) \cdot (T-t)}$$

On peut aussi passer par l'équation suivante du prix forward (en notant la puissance $(1-\alpha)$ par facilité de lecture) :

$$dF(t) = \sigma_0 \cdot F(t)^{1-\alpha} \cdot dW(t)$$

Dans ce cas, pour obtenir la solution, il faut relier cette équation avec un processus de Bessel³⁸.

En 1999, Hagan et Woodward développent une approximation asymptotique qui aboutit à la formule de la volatilité implicite suivante :

³⁸ Processus de Bessel : voir Annexe D

$$\sigma_{CEV}(K, T) = \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha).(2+\alpha)}{24} \cdot \left(\frac{F(0) - K}{F_m} \right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{24} \cdot \frac{\sigma_0^2 \cdot T}{F_m^{2-2\alpha}} \right\}$$

$$\text{Avec } F_m = \frac{1}{2}(F(0) + K)$$

On constate que les paramètres ont leur influence sur la volatilité implicite CEV :

- Le terme $\frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}}$ permet d'avoir une estimation de la volatilité implicite CEV par une correction de la volatilité ATM selon l'éloignement du smile par rapport au spot.
- Le premier facteur de correction permet de piloter la courbure du smile et l'écart entre la volatilité ATM et aux strikes extrêmes (ie le niveau de skew).
- Le second facteur de correction introduit la maturité : plus la maturité augmente, plus la volatilité implicite CEV augmente.

Application du modèle CEV :

Nous mettons en place le modèle CEV sur l'exemple du smile de Change USD/JPY, avec les données spot au 05/03/2015. Nous ajoutons un poids λ devant la volatilité BS pour donner plus de flexibilité au smile et nous modifions le paramètre F_m de manière à ce qu'il représente plus directement l'écart à la monnaie.

La calibration par application du solveur dans Excel donne le résultat suivant :

alpha	0,920
lambda	1,617

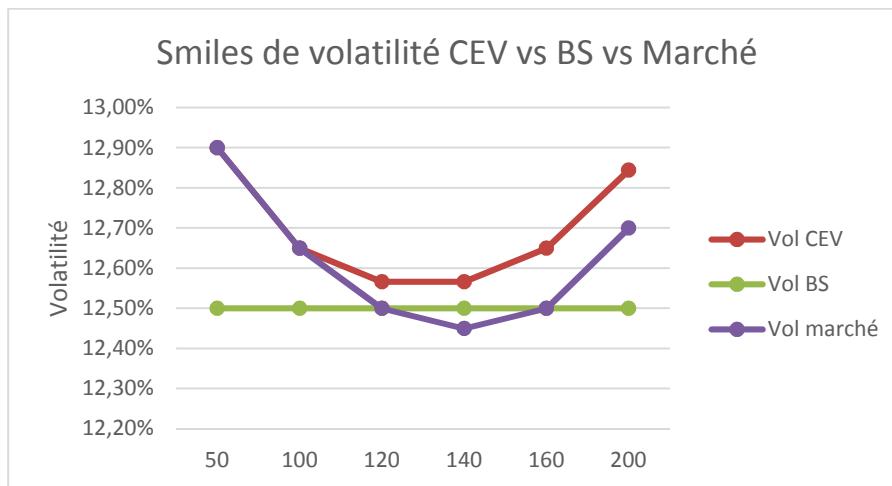


Figure 20 : Calibration du modèle CEV et comparaison des smiles avec le marché et le modèle de BS

Nous constatons que le modèle CEV permet d'obtenir une courbe de smile relativement proche de la courbe de marché. Nous améliorons bien la précision par rapport à la volatilité constante du modèle de Black-Scholes. Néanmoins, nous obtenons une courbe symétrique alors que le marché présente un smile moins pentu sur les strikes OTM (plus haut que la monnaie) que sur les strikes ITM (plus bas que la monnaie).

- Limites des modèles à volatilité locale

Même si les modèles à volatilité locale ont les avantages d'être faciles à mettre en œuvre et de permettre de reproduire le smile / skew de volatilité, ils comportent encore des limites relativement conséquentes :

- Sensibilité à la méthode d'interpolation : dans ces modèles on fait l'hypothèse idéale que les prix sont disponibles pour toutes les maturités et tous les strikes. Or en réalité on ne dispose que de points discrets, il faut donc réaliser une interpolation pour représenter la surface de volatilité. Celle-ci peut être effectuée par plusieurs méthodes : linéaire ou par splines (méthode plus précise).
- Modèle à un seul facteur : La diffusion de la volatilité ne prend en compte que le prix du sous-jacent mais cela empêche d'intégrer d'autres facteurs de risque observés en réalité, comme le risque de volatilité (volatilité de

la volatilité). On voit en reprenant l'exemple de l'EURIBOR 6M que la volatilité observée ne dépend pas que du niveau du sous-jacent. Il est difficile d'observer une corrélation complète entre les deux courbes :

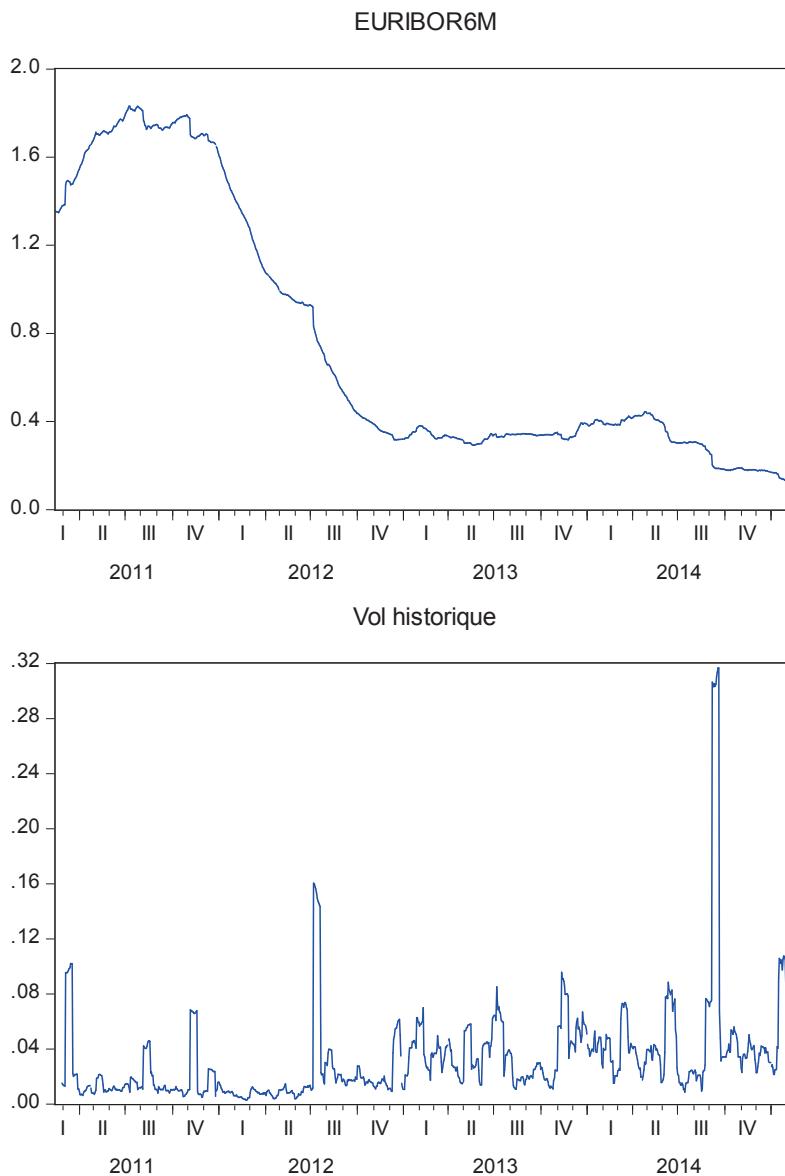


Figure 21 : Comparaison entre le niveau S du sous-jacent et le niveau σ de la volatilité pour l'EURIBOR 6M

- Instabilité dans le temps : Une surface de volatilité calibrée une fois avec le modèle à volatilité locale n'est pas stable avec l'évolution des prix et du sous-jacent. Il faut reprendre la calibration (l'estimation du paramètre α dans le modèle CEV) à chaque fois que les données historiques sont mises à jour. C'est problématique dans le sens où le but est justement

d'avoir un modèle fiable et permanent dans le temps permettant de construire la surface de volatilité adéquate avec le marché.

2.1.3 Modèles à volatilité stochastique

Les modèles à volatilité stochastique présentés dans cette partie considèrent que la volatilité est un processus stochastique à part entière, et qu'il faut intégrer une part d'aléatoire pour la modéliser. On le caractérise tout de même par sa corrélation avec le prix du sous-jacent et on y ajoute une propriété de retour à la moyenne. En effet, sans cela il serait fort probable que la volatilité s'envole au-delà des 100% qui paraissent en pratique une barrière raisonnable.

Le modèle général de diffusion dans les modèles stochastiques est le suivant (cadre markovien) :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t). dt + \sigma(t). dW(t)$$

$$d\sigma(t) = a(t). dt + bt. dW'(t)$$

$$d\langle W, W' \rangle(t) = \rho. dt$$

Où $a(t)$ et $b(t)$ sont fonctions de t , $\sigma(t)$ et $S(t)$,
et les mouvements browniens W et W' ont une corrélation ρ .

Pour obtenir le prix de l'option via un portefeuille de couverture autofinancant, on procède comme dans le modèle de Black-Scholes vu en partie I.2. Cette fois, puisqu'il faut couvrir deux sources de risque, la variation du sous-jacent $\frac{\partial C}{\partial S}$ et la variation de la volatilité $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$, on aura besoin de deux actifs risqués : le sous-jacent et un autre quelconque noté C^0 . On suppose que celui-ci existe et qu'il est coté au prix $C^0(t) = C^0(t, \sigma(t), S(t))$. Il s'agit d'une couverture en delta-vega, du nom des deux sensibilités liées aux deux facteurs de risque.

On note $V(t)$ la valeur du portefeuille autofinançant contenant $\delta(t)$ unités du sous-jacent et $\omega(t)$ unités de C^0 . On applique comme pour BS la condition d'autofinancement puis la formule d'Itô :

$$dV(t) = (V(t) - \delta(t).S(t) - \omega(t).C^0(t)).r.dt + \delta(t).S(t) + \omega(t).C^0(t)$$

$$\begin{aligned} dV(t) &= (V(t) - \delta(t).S(t) - \omega(t).C^0(t)).r.dt \\ &+ \left(\delta(t) + \omega(t). \frac{\partial C^0}{\partial S} \right).dS(t) + \omega(t). \frac{\partial C^0}{\partial \sigma}.d\sigma(t) \\ &+ \omega(t).L(t).C^0.dt \end{aligned}$$

$$\text{Avec } L(t) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2(t).\sigma^2(t).\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2}.b^2(t).\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + S(t).\sigma(t).b(t).\rho.\frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma}$$

En notant C la fonction qui nous donnera le prix de l'option et en lui appliquant la formule d'Itô pour $V(t) = C(t, \sigma(t), S(t))$, on obtient :

$$dV(t) = L(t).C.dt + \frac{\partial C}{\partial S}.dS(t) + \frac{\partial C}{\partial \sigma}.d\sigma(t)$$

Ce qui impose des conditions sur les rations de couverture, pour satisfaire les deux égalités de $dV(t)$:

$$\omega(t) = \frac{\partial C / \partial \sigma}{\partial C^0 / \partial \sigma}$$

$$\delta(t) = \frac{\partial C}{\partial S} - \omega(t). \frac{\partial C^0}{\partial S}$$

$$L(t).C - rC + r.S(t).\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \cdot \frac{L(t)C^0 - r.C^0 + r.S(t).\frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma}$$

Puisque le terme de droite ne dépend que de l'autre actif C^0 , on peut poser :

$$\lambda(t, \sigma, S) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \cdot \frac{L(t)C^0 - r \cdot C^0 + r \cdot S(t) \cdot \frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma}$$

Et on obtient finalement l'équation que satisfait le prix C de l'option, généralisation de l'équation particulière du modèle de Black-Scholes :

$$L(t)C - r \cdot C + r \cdot S \cdot \frac{\partial C}{\partial S} + \lambda(t, \sigma, S) \cdot \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0$$

Avec $L(t)$ défini comme au début du paragraphe.

Pour aller plus loin et avoir des résultats applicables, on passe par la probabilité risque-neutre Q , et on peut démontrer que sous les conditions $\sigma(t) > 0$ et $b(t) > 0$, le modèle se réécrit :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r + \beta(t) \cdot \sigma(t)) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dW(t)$$

$$d\sigma(t) = (\lambda(t) + \Phi(t) \cdot b(t)) \cdot dt + bt \cdot dW'(t)$$

Le coefficient $\beta(t)$ qui permet de passer de la probabilité risque-neutre à la probabilité historique est en général appelé prime de risque car il vient s'ajouter au taux r sans-risque dans la dérive μ du prix du sous-jacent. Par analogie, on appelle $\Phi(t)$ prime de risque de volatilité.

Nous avons ici donné la forme générale des modèles stochastiques et de l'équation de pricing associée. Nous allons désormais étudier des cas particuliers permettant de mettre en application les modèles et d'obtenir des résultats exploitables.

2.1.3.a Modèle de Heston

Le modèle de Heston (1993) est un des premiers modèles à volatilité stochastique et l'un des plus étudiés.

Ce modèle suppose que le prix du sous-jacent évolue selon l'équation différentielle stochastique :

$$dS(t) = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sqrt{v(t)} \cdot S(t) \cdot dW(t)$$

$$dv(t) = \kappa \cdot (\theta - v(t)) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{v(t)} \cdot dW'(t)$$

$$dW(t) \cdot dW'(t) = \rho \cdot dt$$

On interprète habituellement les paramètres comme suit :

μ est le coefficient de dérive du prix du sous-jacent

θ est la volatilité moyenne de long-terme

κ est le taux de retour à la moyenne

σ est la volatilité de la volatilité

$S(t)$ et $v(t)$ sont respectivement le prix du sous-jacent et la volatilité

ρ est la corrélation entre $W(t)$ et $W'(t)$ les deux mouvements browniens

On remarque que la volatilité $v(t)$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck³⁹.

Après développements mathématiques et en se référant à celles obtenues plus haut dans le cas général, on obtient les SED sous probabilité risque-neutre suivantes :

$$dS(t) = \left(r - \frac{1}{2} v(t) \right) \cdot dt + \sqrt{v(t)} \cdot dW(t)$$

$$dv(t) = \kappa^* \cdot (\theta^* - v(t)) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{v(t)} \cdot dW'(t)$$

Où κ^* et θ^* sont définis par :

³⁹ Processus d'Ornstein-Uhlenbeck : voir Annexe D

$$\kappa^* = \kappa + \lambda ; \quad \theta^* = \frac{\kappa \cdot \theta}{\kappa + \lambda}$$

Heston aboutit finalement à une formule semi-fermée du prix de l'option :

$$C(S, v, t) = S \cdot F1 - e^{-r(T-t)} \cdot K \cdot F2$$

Où F1 et F2 doivent satisfaire l'équation différentielle (pour j=1,2) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{\partial^2 Fj}{\partial S^2} + \rho \cdot \sigma \cdot v \cdot \frac{\partial^2 Fj}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot v \cdot \frac{\partial^2 Fj}{\partial v^2} + (r + u(j) \cdot v) \cdot \frac{\partial Fj}{\partial S} \\ + (a(j) - b(j) \cdot v) \cdot \frac{\partial Fj}{\partial v} + \frac{\partial Fj}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Avec les paramètres suivants :

$$u1 = \frac{1}{2} ; \quad u2 = -\frac{1}{2} ; \quad a = \kappa \cdot \theta ; \quad b1 = \kappa + \lambda - \rho \cdot \sigma ; \quad b2 = \kappa + \lambda$$

En pratique, on obtient le prix d'un call (ou équivalent) en utilisant la méthode de simulation de Monte-Carlo. Cette méthode simule des scénarios d'estimation des prix du sous-jacent et de la volatilité selon les paramètres du modèle, et on retient ensuite le scénario moyen pour avoir une courbe d'estimation crédible.

On effectue en général entre 5 000 et 10 000 simulations.

Nous choisissons de mettre en pratique cette méthode dans VBA Excel (voir Annexe E pour le code). Le tableau des inputs à intégrer dans le modèle se présente comme cela :

Prix spot ($S(t)$)	100
Strike (K)	100
Taux sans-risque (r)	0,02
Maturité ($T-t$)	10
Corrélation (ρ)	-0,7
Vitesse de retour à la moyenne (κ)	1
Volatilité long-terme (θ)	0,01
Lambda (λ)	0,05
Volatilité de la variance (σ)	0,15
Volatilité ($v(t)$)	0,1
Nombre de simulations	5000
Heston	2,09720096

Tableau 8 : Formulaire de pricing d'une option européenne selon le modèle de Heston dans Excel

- Volatilité implicite dans le modèle de Heston

Dans la pratique, ce qui nous intéresse est d'obtenir la structure de volatilité en partant des prix de marché observables. Nous nous concentrerons donc sur la volatilité implicite. Nous suivons ici les travaux de Bergomi (2004).

Dans le modèle de Heston, les volatilités implicites sont fonction de la volatilité spot $v(t)$, du strike K et du prix forward $F = F(t, T) = S(t) \cdot e^{r(T-t)}$:

$$\sigma_{imp} = f\left(\frac{K}{F}, v\right)$$

On distingue ensuite les maturités courtes et longues par rapport à $\tau = \frac{1}{\kappa}$ et cela donne les résultats suivants pour la volatilité ATM σ_{imp} et le skew $\frac{d\sigma}{d\ln(K)}$:

- Si $T \ll \tau$, on a :

$$\sigma_{imp}(F) = \sqrt{v}$$

$$\frac{d\sigma}{d\ln(K)} = \frac{\rho \cdot \sigma}{4\sqrt{v}}$$

- Si $T \gg \tau$, on a :

$$\sigma_{imp}(F) = \sqrt{\theta} \cdot \left(1 + \frac{\rho \cdot \sigma}{4\kappa} \right) + \frac{\sqrt{\theta}}{2 \cdot \kappa \cdot T} \left(\frac{v - \theta}{\theta} + \frac{\rho \cdot \sigma}{4\kappa} \cdot \frac{v - 3\theta}{\theta} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\ln(K)} = \frac{\rho \cdot \sigma}{2 \cdot \kappa \cdot T \cdot \sqrt{\theta}}$$

On remarque les points suivants :

- Les résultats de court-terme sont déterminés par la volatilité spot $v(t)$ aussi bien pour la volatilité ATM que pour le skew.
- Les résultats de long-terme sont indépendants de la volatilité spot $v(t)$ et deviennent fonction de la volatilité long-terme estimée θ et de la maturité T .
- Le paramètre de corrélation ρ est nécessairement négatif puisque le skew est attendu négatif et que σ , v , κ et T sont tous positifs.

- Calibration dans Numerix

Nous reprenons l'exemple du taux de change USD/JPY au 05/03/2015 et nous effectuons une calibration du modèle de Heston à partir de prix d'options.

spot	sv spot	dates	volatility	sv vol	sv rev	correlation
120,87	1	05/03/2015	10,22%	0,11%	0,2	-0,12
		07/03/2016	10,31%	47,81%		
		06/03/2017	10,70%	78,01%		
		05/03/2018	10,99%	62,75%		
		05/03/2019	9,67%	55,72%		

Tableau 9 : Calibration du modèle de Heston dans Numerix à partir de prix d'options

Nous observons que la volatilité pour chaque maturité est conforme à ce qu'on attend pour une parité de change, autour de 10%. La volatilité de volatilité σ explose avec le temps. De son côté, la tendance de retour à la moyenne vaut 0,2 ; ce qui paraît raisonnable. La corrélation est faible (-0,12), ce qui indique que les mouvements aléatoires de la dynamique de la volatilité et ceux de la volatilité de la volatilité sont quasiment indépendants. Ce résultat est surprenant, car nous

pourrions supposer que la dynamique de la volatilité est fortement corrélée à celle de la volatilité de volatilité.

- Avantages du modèle de Heston

Le modèle de Heston a les atouts suivants :

- Faisabilité : il fournit une formule fermée pour la valorisation d'une option européenne, et donc la volatilité implicite est relativement aisée à obtenir.
- Adaptabilité : il parvient à reproduire correctement la dynamique du prix même quand la distribution des rendements n'est pas gaussienne.
- Efficace pour la volatilité : la surface de volatilité obtenue est cohérente avec les prix de marché.
- Suffisant pour valoriser la plupart des produits dérivés structurés ou exotiques, ainsi que les options forward-start⁴⁰.

- Limites du modèle de Heston

Toutefois, le modèle de Heston a les désavantages suivants :

- Calibration difficile : la calibration des différents paramètres du modèle est compliquée à mettre en place et pas toujours possible selon les données de marché.
- Sensibilité à la calibration : le modèle est robuste si la calibration est parfaite mais en cas d'erreur, le modèle est très sensible aux paramètres et peut rapidement s'éloigner de la réalité.
- Incapacité à capturer le skew de marché pour les courtes maturités (d'après Mikhailov ren& Nogel, 2003).

⁴⁰ Options forward-start : options commençant dans le futur (le prix spot est le prix forward à la date 0).

- Insuffisance pour certaines options exotiques comme les Reverse Cliques, les Napoleons ou les Accumulators (=Range Accrual)⁴¹.

2.1.3.b Modèle SABR

Le second modèle de volatilité stochastique que nous étudions est le modèle SABR, pour « Stochastic Alpha, Beta, Rho », développé par Hagan, Kumar, Lesniewski et Woodward (2002). Il s'agit d'une extension du modèle CEV dans laquelle la volatilité devient elle-même stochastique. Sa particularité est de modéliser le processus des forwards F , ce qui en fait un modèle très utilisé sur les marchés de taux d'intérêt.

- Présentation du modèle SABR et formule de volatilité implicite

Le modèle SABR est défini par les EDS suivantes :

$$dF(t) = \sigma(t).F(t)^\beta.dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha.\sigma(t).dW'(t)$$

$$dW(t).dW'(t) = \rho.dt$$

Avec les paramètres constants α , β et ρ interprétés de la façon suivante :

α : volatilité de la volatilité ($\alpha > 0$)

β : courbure du smile ($0 \leq \beta \leq 1$)

ρ : corrélation entre les deux mouvements browniens ($-1 \leq \rho \leq 1$)

On remarque que si $\alpha=0$, on retrouve le modèle de type CEV.

Les auteurs aboutissent, en utilisant la méthode de perturbation singulière, à un prix d'option européenne pour ce modèle de volatilité, et par des approximations asymptotiques en déduisent une formule fermée pour la volatilité implicite :

⁴¹ Pay-off de ces options exotiques : voir Annexe A

$$\sigma_{imp} = \alpha \cdot \frac{F(0) - K}{\delta(K, F(0), \sigma(0), \alpha, \beta)} \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24} \cdot \left(\frac{\sigma(0) \cdot F_{mid}^\beta}{\alpha} \right)^2 + \frac{\rho \cdot \gamma_1}{4} \cdot \frac{\sigma(0) \cdot F_{mid}^\beta}{\alpha} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \right] \cdot \varepsilon \right\}$$

Avec les précisions suivantes :

$$F_{mid} = \frac{F(0) + K}{2}; \quad \gamma_1 = \frac{\beta}{F_{mid}}; \quad \gamma_2 = -\frac{\beta \cdot (1 - \beta)}{F_{mid}^2}; \quad \varepsilon = T \cdot \alpha^2;$$

$$\text{Et } \delta(K, F(0), \sigma(0), \alpha, \beta) = 1 \text{ o} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho \cdot \varsigma + \varsigma^2} + \varsigma - \rho}{1 - \rho} \right)$$

$$\text{Avec } \varsigma = \frac{\alpha}{\sigma(0) \cdot (1 - \beta)} \cdot (F(0)^{1 - \beta} - K^{1 - \beta})$$

Pour que la formule soit plus lisible tout en gardant un maximum de précision, les auteurs donnent une approximation supplémentaire :

$$\sigma_{imp} = \frac{\alpha}{F(0)^{1 - \beta}} \left\{ 1 - \frac{(1 - \beta - \rho \cdot \lambda) \cdot 1 \text{ o} \left(\frac{K}{F(0)} \right)}{2} + \frac{[(1 - \beta)^2 + (2 - 3\rho^2) \cdot \lambda^2] \cdot 1 \text{ o}^2 \left(\frac{K}{F(0)} \right)}{12} \right\}$$

$$\lambda = \frac{\sigma(0)}{\alpha} \cdot F(0)^{1 - \beta}$$

A partir de cette formule, on peut tirer les interprétations suivantes :

- Le premier terme $\frac{\alpha}{F(0)^{1 - \beta}}$ représente la volatilité ATM

- Le terme $1 - \frac{\rho}{\beta} \frac{K}{F(0)}$ donne la volatilité implicite par rapport au strike. Le terme amplificateur en β est appelé « beta skew » tandis que l'autre $\left(\frac{\rho \lambda}{2}\right)$ est appelé « vanna skew ».
- Le terme $1 - \frac{\rho^2}{\beta^2} \frac{K^2}{F(0)^2}$ indique la convexité de la volatilité implicite. Le terme amplificateur en β est appelé « beta skew au carré » tandis que l'autre $\left(\frac{(2-3\rho^2)\lambda^2}{12}\right)$ est appelé « volga skew ».

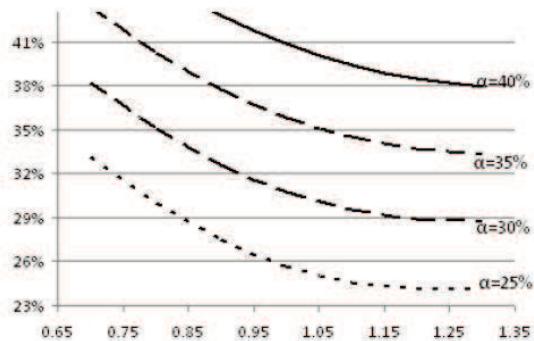
- Calibration du modèle de SABR

Nous passons à l'application en pratique du modèle SABR.

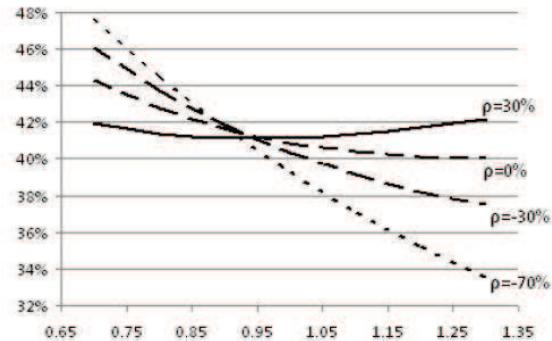
Nous suivons ici l'article « Fitting the smile » de Gautier & Rivaille (2009).

- Influence des paramètres du modèle

Les graphiques suivants permettent d'observer l'influence de chaque paramètre sur le smile de volatilité implicite calculée par le modèle SABR.



(a) Initial volatility α



(b) Correlation ρ

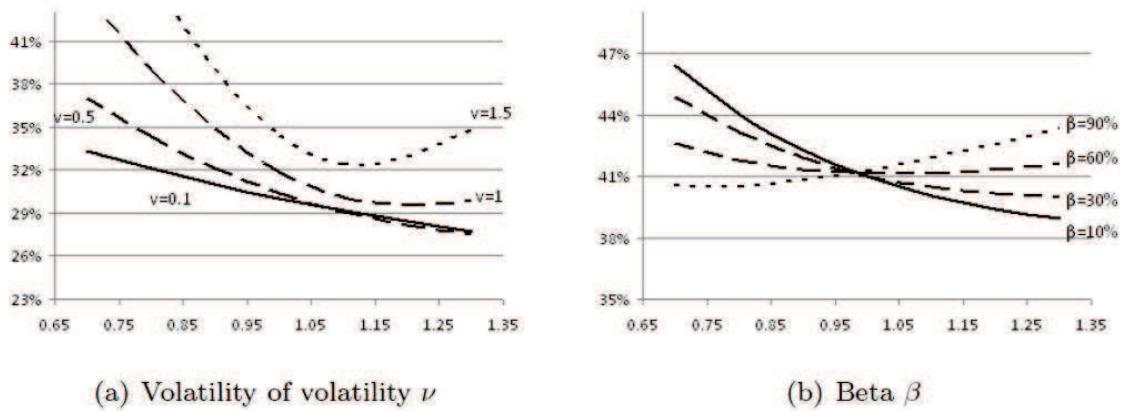


Figure 22 : Illustration de l'influence des paramètres du modèle SABR (Gautier & Rivaille, 2009)

On voit que les paramètres jouent le rôle suivant :

- La volatilité initiale indique le niveau global de la courbe. Un changement de ce paramètre permet de monter ou descendre toute la courbe.
- La volatilité de la volatilité représente la courbure du smile par rapport à la monnaie. Elle influence également le niveau de volatilité pour les strikes extrêmes (loin de la monnaie).
- La corrélation ρ et le « backbone » β ont la même influence sur la courbe, en déterminant la pente du smile.

Le β du modèle doit être fixé par l'utilisateur selon ses croyances en la log-normalité du marché. On le choisit entre 0,5 et 0,8. Une fois que β est fixé, on peut calibrer les deux autres paramètres ρ et α en fonction des données. Une autre possibilité est de fixer la corrélation ρ et de déterminer α et β ensuite.

- Méthodes numériques d'optimisation

Les méthodes d'optimisation d'Evolution Différentielle (DE) et du Simplex sont comparées avec les techniques Smart Parameters et Smart Levenberg-Marquadt (Smart LM)⁴². Toutes produisent une calibration efficace sauf la technique Smart

⁴² Méthodes d'optimisation : voir Annexe C

Parameters. On remarque que la technique Smart LM est de loin la plus efficiente et la plus rapide.

Method	Time (total)	Iterations (per smile)
DE	0.26 s	≤ 120
Simplex	0.15 s	≤ 1300
Smart Parameters	≤ 0.001 s	-
Smart LM	0.01 s	≤ 5

Figure 22 : Comparaison de l'efficacité des différentes méthodes numériques de calibration

- Calibration dans Numerix

Toujours sur l'exemple de l'USD/JPY au 05/03/2015, nous faisons une calibration du modèle SABR dans Numerix à partir de prix d'options :

vol0	beta	xi	rho	lambda	alpha	spot
0,10413665	0,36206347	0,2369747	-	0,4336934	0,83321874	2,15198637

Figure 23 : Calibration du modèle SABR dans Numerix pour USD/JPY au 05/03/2015

Nous voyons que le β est proche de 30% donc la pente du smile est peu prononcée, même si la corrélation ρ est proche de -0,40%. Le paramètre α est élevé, donc la volatilité de la volatilité est élevée (2,15) et la courbure du smile est assez importante.

Nous implémentons maintenant la formule fermée dans Excel :

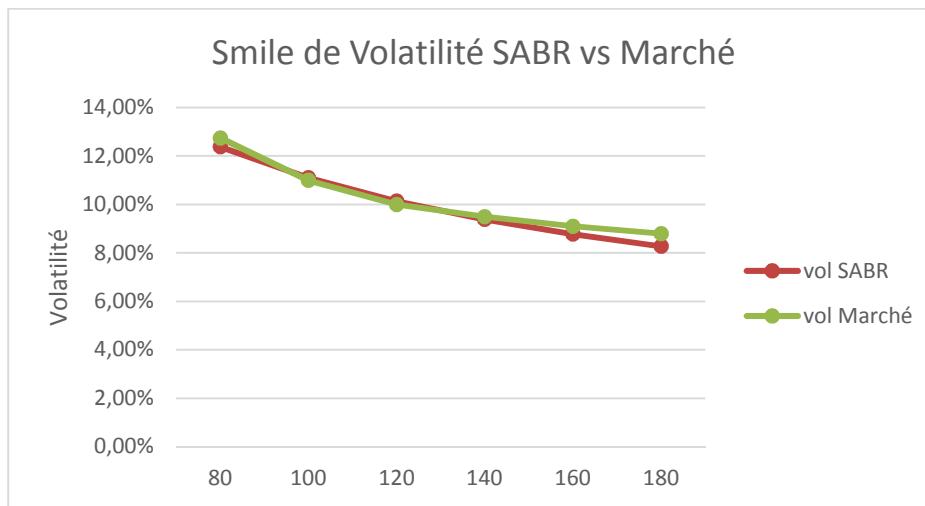


Figure 24 : Comparaison des smiles de volatilité SABR vs Marché

Nous constatons que la paramétrisation du modèle SABR permet d'obtenir une courbe très proche de la courbe de marché. Cependant, on voit que le modèle s'écarte aux extrêmes, mais de façon bien moindre que le modèle CEV de base par exemple.

- Adaptation du modèle SABR aux taux négatifs

Dans le contexte actuel de taux extrêmement bas, voire négatifs dans certains pays, il est devenu essentiel que les modèles puissent intégrer la possibilité des taux négatifs réalistes.

Deux modèles ont répondu à ce besoin :

- Le modèle « shifted SABR » : pour simuler des situations de taux négatifs sans remettre en cause les hypothèses de modèle, toute la courbe est remontée artificiellement d'un niveau A pour les calculs et on sait qu'il faut corriger le résultat de ce biais. Dans ce cas, le modèle est le suivant :

$$dF(t) = \sigma(t).F(t + A)^\beta \cdot dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha \cdot \sigma(t) \cdot dW'(t)$$

$$dW(t) \cdot dW'(t) = \rho \cdot dt$$

- Le modèle « free-boundary » : ce modèle corrige le problème du « shifted SABR » dont le problème principal est le niveau de shift : comment savoir à quel niveau fixer A pour éviter tous les taux négatifs ? Ici, on applique une valeur absolue au forward F et on met en place une barrière absorbante⁴³ en 0. Les auteurs (Antonov, Konikov, Spector, 2015) arrivent à une formule fermée pour le cas particulier d'une corrélation nulle et à une approximation dans le cas général. Le modèle est le suivant :

$$dF(t) = \sigma(t) \cdot |F(t)|^\beta \cdot dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha \cdot \sigma(t) \cdot dW'(t)$$

$$dW(t) \cdot dW'(t) = \rho \cdot dt$$

Avec $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ et une frontière absorbante en $F=0$.

2.1.3.c Aperçu du modèle de Bergomi

Pour valoriser les produits exotiques les plus exigeants en matière de modélisation de la volatilité (Swap de variance, Napoleons, Reverse-Cliquets), un dernier type de modèle a vu le jour récemment. Ce sont les modèles dits de la « 4^e génération ». L'objectif n'est plus de modéliser la volatilité à un instant t en connaissant la volatilité spot initiale. Dans ces modèles, c'est toute la structure des variances forward qui est considérée comme la variable à diffusion stochastique.

Nous prenons, pour illustrer la forme de ce type de modèle, l'exemple du modèle développé par Bergomi (2005, 2008).

La démarche générale est la suivante :

⁴³ Barrière absorbante : voir Annexe D

- Etablir une dynamique (discrète) des variances forward.
- Etablir un dynamique spot cohérent avec la dynamique forward déterminée à l'étape précédente.

Le modèle donne la possibilité de fixer des contraintes indépendamment sur :

- La dynamique des volatilités forward.
 - Le niveau du skew forward court-terme.
 - Les corrélations entre le prix du sous-jacent et les volatilités court-terme et long-terme.
- o Modèle de Bergomi à 1 facteur

Le modèle à 1 facteur est caractérisé par l'équation de diffusion suivante :

$$d\xi^T(t) = \omega \cdot e^{-k(T-t)} \cdot \xi^T(t) \cdot dW(t)$$

L'auteur obtient après développements mathématiques (en faisant apparaître des processus d'Ornstein-Uhlhenbeck), une solution pour la courbe de variance forward :

$$\begin{aligned} \xi^T(t + \delta) = & \xi^T(0) \cdot e^{\int_0^t \omega \cdot e^{-k(T-(t+\delta))} \cdot X(t+\delta)} \\ & - \frac{\omega^2}{2} \cdot e^{-2k(T-(t+\delta))} \cdot [X(t+\delta)^2] \end{aligned}$$

Avec les fonctions X et x telles que :

$$X(t + \delta) = e^{-k\delta} \cdot X(t) + x(\delta)$$

$$x(\delta)^2 = \frac{1 - 2e^{-k\delta}}{2k}$$

- o Modèle de Bergomi à 2 facteurs

Pour rendre le modèle plus souple et plus maitrisable (en particulier en termes de structure de volatilité de la volatilité), Bergomi propose un modèle à 2 facteurs :

$$d\xi^T(t) = \omega \cdot \xi^T(t) (e^{-k1(T-t)} \cdot dW(t) + \theta \cdot e^{-k2(T-t)} \cdot dW'(t))$$

$$dW(t) \cdot dW'(t) = \rho$$

A partir de cette équation différentielle, l'auteur obtient la courbe de variance forward suivante :

$$\begin{aligned} \xi^T(t + \delta) = & \xi^T(0) \cdot e^{\rho \omega} \left[e^{-k1(T-(t+\delta))} \cdot X(t + \delta) \right. \\ & + \theta \cdot e^{-k2(T-(t+\delta))} \cdot Y(t + \delta) \left. \right] \\ & - \frac{\omega^2}{2} \cdot \left[e^{-2k1(T-(t+\delta))} \cdot X(t + \delta)^2 \right. \\ & + \theta^2 \cdot e^{-2k2(T-(t+\delta))} \cdot Y(t + \delta)^2 \left. \right] \\ & + 2 \cdot \theta \cdot e^{-(k1+k2)(T-(t+\delta))} \cdot X(t + \delta) \cdot Y(t + \delta) \end{aligned}$$

Avec les fonctions X, Y, x et y telles que :

$$X(t + \delta) = e^{-k1\delta} \cdot X(t) + x(\delta)$$

$$x(\delta)^2 = \frac{1 - 2e^{-k1\delta}}{2k1}$$

$$Y(t + \delta) = e^{-k2\delta} \cdot Y(t) + y(\delta)$$

$$y(\delta)^2 = \frac{1 - 2e^{-k2\delta}}{2k2}$$

$$X(t + \delta) \cdot Y(t + \delta) = e^{-(k1+k2)\delta} \cdot X(t) \cdot Y(t) + \rho \cdot \frac{1 - e^{-(k1+k2)t}}{k1 + k2}$$

On appelle X(t) le facteur court-terme et Y(t) le facteur long-terme.

Avec ce modèle, on peut générer en temps 0 une courbe de variance forward pour n'importe quelle date future t en simulant 2 facteurs gaussiens et en calibrant cette courbe par construction selon la courbe initiale.

- Méthode de calibration

La calibration se fait en 3 étapes :

- Etablir la dynamique des volatilités implicites en choisissant les paramètres $k1$, $k2$, ω , ρ et θ .
- Calibrer le skew forward court-terme en déterminant les paramètres $\sigma_0(i)$ et $\beta(i)$ en fonction des volatilités implicites.
- Calibrer le skew de long-terme en fixant les corrélations $\rho(S, X)$ et $\rho(S, Y)$ entre le prix du sous-jacent et les facteurs de court-terme et de long-terme.

Nous nous en tenons à la théorie pour ce modèle, qui demande une implémentation relativement difficile et chronophage et qui n'est pas nécessaire pour valoriser les produits dérivés structurés qui nous intéressent. Mais il était important de présenter les modélisations les plus modernes de la volatilité pour comprendre le cheminement et l'évolution constante des techniques de valorisation et de complexification des produits et des modèles.

2.2 Comparaison des modèles présentés

Pour comparer les modèles présentés et calibrés dans les paragraphes précédents, nous choisissons de pricer un Digital Européen de maturité 1 an sur le sous-jacent étudié, toujours la parité USD/JPY. On rappelle qu'un Digital (ou Binaire) Européen, dans le sens Call où nous l'étudions, paye 1 si le strike est atteint et 0 sinon. Nous valorisons en date du 05/03/2015 et le spot est à 120,87.

Strike / Modèle	100	110	120	130	140	200
-----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Black	0,9264	0,6935	0,3878	0,1556	0,0458	0,0000
Heston	0,9104	0,6614	0,3323	0,1157	0,0301	0,0055
SABR	0,9042	0,6516	0,3281	0,1144	0,0296	0,0053

Tableau 10 : Comparaison de prix d'un Digital sur USD/JPY pour différents strikes et modèles de volatilité

Nous pouvons observer la proximité entre les résultats des modèles de volatilité stochastique Heston et SABR, alors que le modèle de volatilité constante de Black-Scholes donne des prix plus élevés. Sur les strikes extrêmes, nous voyons que les modèles de volatilité sont plus précis et tiennent mieux compte du smile de volatilité, alors que le modèle de BS donne des prix plus extrêmes puisque la volatilité n'est pas ajustée.

Par ailleurs, nous retrouvons ce que nous avions appelé en partie I la robustesse du modèle de Black-Scholes : le prix donné par BS constitue une borne supérieure du prix réel. Plus on est proche de la monnaie, plus cela est visible (le smile « se creuse »). A l'inverse, dans le cas du strike $K=200$, le smile de change observé indique que la volatilité est plus élevée qu'à la monnaie, ce qui explique que le modèle de BS sous-estime le prix.

3. Modélisation des courbes de taux

Dans les modèles de valorisation que nous avons vus, le second paramètre dont la valeur n'est pas connue de façon certaine est le taux d'actualisation r .

Des modèles mathématiques d'estimation des taux existent et permettent de créer des structures par terme avec différentes dynamiques de taux.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux modèles d'équilibre, c'est-à-dire définis par un taux de long-terme donné par l'utilisateur et qui définira l'évolution des taux entre l'instant t_0 et l'horizon long-terme. Puis nous verrons que les modèles d'arbitrage, c'est-à-dire définis par les données de marché actuelles et les règles de non-arbitrage, sont souvent plus pertinents et appropriés pour la prévision des taux futurs.

3.1 Modèles d'équilibre

Nous étudions d'abord les modèles d'équilibre avant de nous intéresser aux modèles d'arbitrage, plus complets mais plus difficiles à mettre en œuvre.

3.1.1 Modèle de Vasicek

Le modèle développé par Vasicek (1977) est un modèle de taux court, c'est le taux forward instantané $r(t)$ dont la dynamique est modélisée.

Dans ce modèle, le taux $r(t)$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr(t) = a(b - r(t)).dt + \rho.dW(t)$$

Où a , b et ρ sont des scalaires strictement positifs et $W(t)$ un mouvement brownien.

Sous la probabilité risque-neutre Q , la dynamique devient, en supposant la prime de risque λ constante :

$$dr(t) = a(b' - r(t)).dt + \rho.dW'(t)$$

$$\text{Avec } b' = b - \rho \cdot \frac{\lambda}{a}$$

On peut démontrer en utilisant le lemme d'Itô, que la forme explicite de $r(t)$ solution de l'EDS est :

$$r(t) = (r(0) - b').e^{-at} + b' + \rho \int_0^t e^{-a(t-u)}.du$$

Si $r(0)$ est une constante, $r(t)$ est une variable gaussienne, de moyenne $(r(0) - b').e^{-at} + b'$ et de variance $\rho^2 \cdot \frac{1 - e^{-2at}}{2a}$.

La construction d'une structure par terme sur l'évaluation des taux ZC forward, dont la définition de base est la suivante :

$$B(t, T) = E_Q \left[e \times \left(- \int_t^T r(s).ds \right) \middle| F(t) \right]$$

Pour évaluer cette espérance, on intègre l'EDS qui définit la dynamique de $r(t)$:

$$a \int_t^T r(s).ds = -(r(T) - r(t)) + a.b'.(T - t) + \rho \int_t^T dW(s)$$

Or par définition de la dynamique on a pour $r(T)$:

$$r(T) = b' + (r(t) - b').e^{-a(T-t)} + \rho \int_t^T e^{-a(T-u)}.dW'(u)$$

Donc en reportant l'expression de $r(T)$:

$$\int_t^T r(s).ds = b'.(T - t) + (r(t) - b').\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \rho \int_t^T \frac{e^{-a(T-s)}}{a} dW(s)$$

Après d'autres développements sous la probabilité risque-neutre, on obtient finalement l'expression suivante pour le prix du ZC de maturité T :

$$B(t, T) = e \times p \left[-r_\infty(T - t) + (r_\infty - r(t)) \cdot \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\rho^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right]$$

$$\text{Avec } r_\infty = b' - \frac{\rho^2}{2a^2}.$$

Et la courbe des taux à la date t est donnée par :

$$r(t, T) = -r_\infty + (r_\infty - r(t)) \cdot \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\rho^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

Le modèle de Vasicek est mis en pratique dans la section suivante où nous le comparons avec le modèle CIR.

3.1.2 Modèle de CIR

Le modèle dit CIR a été proposé par Cox, Ingersoll et Ross (1985) et complexifie un peu le modèle de Vasicek tout en reprenant la même structure de base.

Dans ce modèle, le taux forward instantané évolue selon la dynamique suivante :

$$dr(t) = a(b - r(t)) \cdot dt + \rho \cdot \sqrt{r(t)} \cdot dW(t)$$

On propose ici directement le résultat trouvé pour le prix d'un ZC de maturité T :

$$B(t, T) = \Phi(T - t) \cdot e^{-r(t) \cdot \Psi(T-t)}$$

Avec les fonctions Φ et Ψ et le paramètre γ suivants :

$$\Phi(s) = \left[\frac{2 \cdot \gamma \cdot e^{(a' + \gamma) \cdot s / 2}}{(a' + \gamma) \cdot (e^{\gamma s} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2 \cdot a' \cdot b'}{\rho^2}}$$

$$\Psi(s) = \frac{2 \cdot (e^{\gamma s} - 1)}{(a' + \gamma) \cdot (e^{\gamma s} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{(a'^2 + 2 \cdot \rho^2)}$$

Et la courbe des taux est donnée par :

$$r(t, T) = \frac{\Phi(T, t)}{T - t} \cdot r(t) - \frac{2 \cdot a' \cdot b'}{\rho^2} \cdot \frac{1 - \Phi(T - t)}{T - t}$$

Application des modèles Vasicek et CIR :

Dans cet exemple, nous avons fixé un taux instantané de 1%, un équilibre de long-terme de 2%, un retour à la moyenne de 50% et une volatilité de 1%.

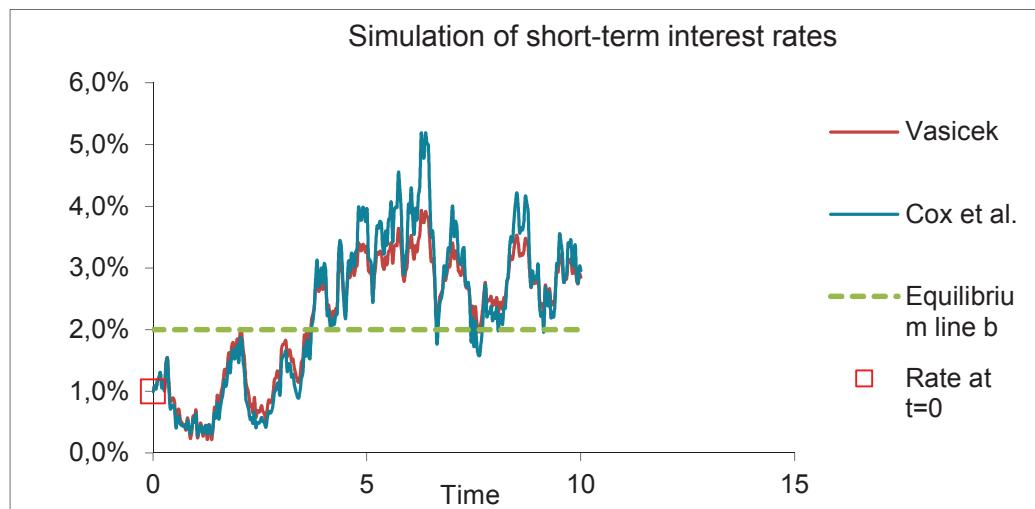


Figure 25 : Exemple de simulation des modèles de Vasicek et CIR sur 10 ans

La simulation permet de comparer les modèles de Vasicek et de CIR sur le même graphique. Le retour à la moyenne est ici bien illustré, ainsi que la volatilité du taux forward instantané. Nous constatons que le modèle de Vasicek provoque

des mouvements d'amplitude légèrement moins importants que le modèle de CIR.

Cela donne les structures par terme suivantes, nous voyons que la courbe est lissée entre le taux instantané et le taux à horizon infini :

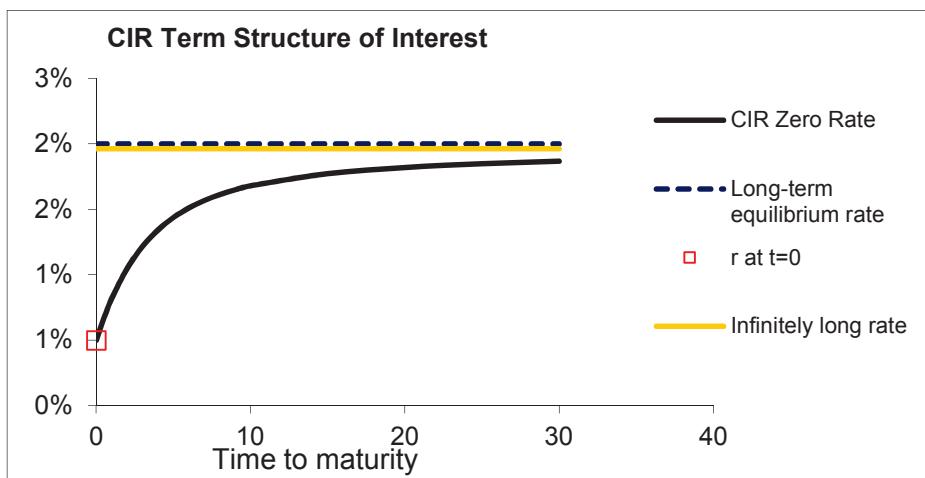
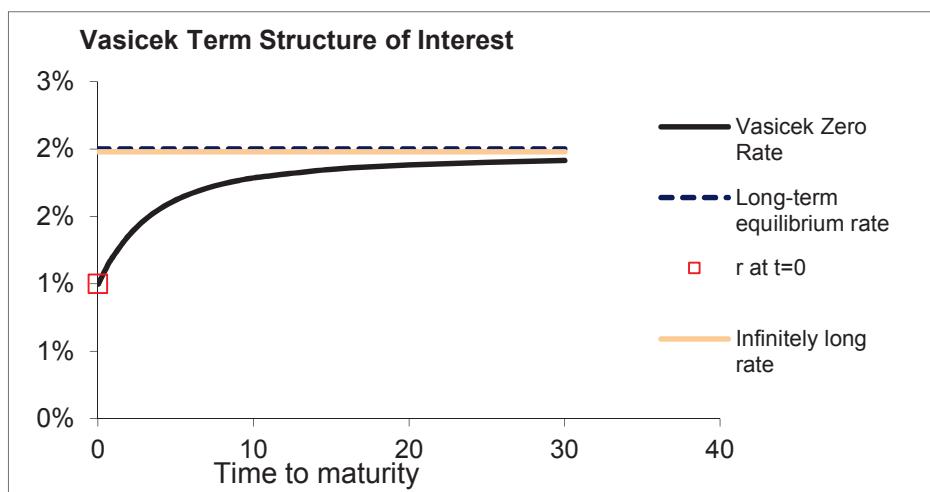


Figure 26 : Simulation de courbes de taux obtenues avec Vasicek et CIR

Les taux à 30 ans sont 1,915% pour Vasicek et 1,872% pour CIR, les deux courbes sont très proches.

Les ZC diffèrent de quelques bp entre les deux modèles.

3.1.3 Modèle de Hull-White

Nous commençons par évoquer le modèle de Hull-White à 1 facteur avant de passer au modèle à 2 facteurs.

- Modèle de Hull-White à 1 facteur

Le modèle de Hull-White (1990, 1994) à 1 facteur est également un modèle de taux court-terme. Il reprend le modèle de diffusion du modèle de Vasicek vu plus haut mais le paramètre θ devient dépendant par rapport au temps :

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha(t).r(t)].dt + \sigma.dW(t)$$

On détermine l'expression de $r(t)$ relativement rapidement :

$$d(e^{\alpha t}.dr) = \alpha.e^{\alpha t}.r.dt = \theta(t).e^{\alpha t}.dt + e^{\alpha t}.\sigma.dW$$

$$e^{\alpha t}.r(t) = r(0) + \int_0^t \theta(s).e^{\alpha s}.ds + \sigma \int_0^t e^{\alpha s}.dW(s)$$

$$r(t) = r(0).e^{-\alpha t} + \int_0^t \theta(s).e^{-\alpha(t-s)}.ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}.dW(s)$$

Dans ce modèle, le taux instantané tend à long-terme vers $\frac{\theta}{\alpha}$ et peut éventuellement devenir négatif, ce qui peut être problématique si l'on considère que ce n'est pas possible en pratique (sujet de discussion parmi les acteurs financiers puisqu'on en observe dans certains situations particulières).

Lorsque les paramètres α et σ deviennent également fonctions du temps, le modèle est appelé Modèle de Hull-White généralisé.

Application du modèle de Hull-White 1F (HW1) :

Nous effectuons dans Numerix une calibration du modèle HW1, avec des volatilités dépendantes du temps. Pour cela nous prenons pour référence un panel

de prix swaptions EUR avec différentes ténors et différentes maturités en date du 17/02/2015. Voici le résultat de la calibration :

dates	volatilities	reversions
08/04/2015	0,21%	0,01%
08/06/2015	0,29%	
08/09/2015	0,34%	
08/03/2016	0,37%	
08/09/2016	0,52%	
08/03/2017	0,49%	
08/03/2018	0,64%	
07/03/2019	0,74%	
06/03/2020	0,78%	
08/03/2021	0,83%	
08/03/2022	0,79%	

Tableau 11 : Calibration du modèle HWI à partir de prix de swaptions dans Numerix

Nous constatons que le retour à la moyenne est très faible. La volatilité augmente avec la maturité, ce qui est correct. Les niveaux de volatilité attendue sont relativement conformes à ce qu'on attend pour des indices de taux (bien plus bas que la volatilité des actions Equity ou de Change).

- Modèle de Hull-White à 2 facteurs

Le modèle de HW à 2 facteurs (2006) propose deux dynamiques stochastiques différentes pour le taux court $r(t)$ et le taux long $l(t)$:

$$dl(t) = k_l \cdot (\mu_l - l(t)) \cdot dt + \sigma_l \cdot dW_l(t)$$

$$dr(t) = k_r \cdot (l(t) - r(t)) \cdot dt + \sigma_r \cdot dW_r(t)$$

On obtient comme pour le modèle de Vasicek des expressions explicites pour les deux taux instantanés :

$$l(t+1) = l(t) \cdot e^{-k_l} + \mu_l \cdot (1 - e^{-k_l}) + \sigma_l \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_l}}{2k_l}} \cdot \varepsilon_l(t)$$

$$r(t+1) = r(t) \cdot e^{-k_r} + l(t) \cdot (1 - e^{-k_r}) + \sigma_r \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_r}}{2k_r}} \cdot \varepsilon_r(t)$$

Avec $\varepsilon_l(t)$ et $\varepsilon_r(t)$ suivants des lois normales centrées-réduites.

Après développements mathématiques, on peut obtenir donc une expression explicite du ZC de maturité T et donc obtenir une structure des taux par terme complète.

Application du modèle Hull-White 2F (HW2) :

Nous calibrons ce modèle dans Numerix à partir de prix swaptions EUR au 05/03/2015 :

dates	volatilities1	volatilities2	reversions
08/03/2016	0,88%	1,40%	4,11%
08/03/2017	0,87%	0,75%	43,95%
08/03/2018	1,27%	2,43%	
07/03/2019	1,40%	2,88%	
06/03/2020	1,46%	3,23%	
08/03/2021	0,10%	1,64%	
08/03/2022	2,19%	3,90%	
08/03/2023	0,93%	2,71%	
07/03/2024	0,40%	1,90%	

Tableau 12 : Calibration du modèle HW2 à partir de prix swaptions dans Numerix

Nous constatons que les taux de réversion sont très différents : faible pour le taux court-terme (4%) et fort pour le taux long-terme (44%). Cela paraît logique puisque le principe de retour à la moyenne est un principe de long-terme, qui suppose qu'avec le temps le taux $r(t)$ va se stabiliser et revenir proche d'un horizon R_∞ .

- Limites des modèles d'équilibre

Les 3 modèles vus pour l'instant ont pour défaut majeur de ne pas prendre en compte toute la courbe des taux disponibles au moment $t(0)$, mais seulement le taux instantané $r(0)$. On a vu également que les modèles sont très sensibles à la calibration et aux produits choisis pour la réaliser.

De plus le modèle de Vasicek peut théoriquement aboutir à des taux négatifs, ce qui en réalité est quasiment impossible en raison de possibilité évidente d'arbitrage (même si le contexte financier actuel propose des taux courts négatifs).

3.2 Modèle d'arbitrage (HJM)

Nous commençons par présenter la théorie générale du modèle d'arbitrage HJM avant d'effectuer des simplifications pour étudier en pratique le cas du modèle de Ho & Lee.

- Modèle général de HJM

Les modèles précédents dits « modèles de taux court » modélisaient la dynamique des taux forward instantanés. Le modèle HJM développé par Heath, Jarrow et Morton (1992), est lui un « modèle de marché », dans le sens où la dynamique stochastique porte sur l'intégralité de la courbe des taux directement. La variable modélisée est le taux forward $f(t, T)$:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, t) \cdot ds + \int_0^t \sigma'(s, t) \cdot dW(s)$$

$$df(t) = \alpha(t, T) \cdot dt + \sigma'(t, T) \cdot dW(t)$$

Avec $\sigma(t, T)$ volatilité des taux à terme et σ' sa transposée.

$F(0, T)$: structure des taux initiale, on la suppose connue.
 $(W(t))$: mouvement brownien de dimension k sous la probabilité historique P

Après passage sous probabilité risque-neutre et développements mathématiques, on obtient les équations différentielles caractéristiques suivantes avec f le taux forward, r le taux forward instantané et B le prix du ZC de maturité T :

$$df(t, T) = \left(\int_t^T \sigma(t, z) \cdot dz \right)' \cdot \sigma(t, T) \cdot dt + \sigma'(t, T) \cdot dW'(t)$$

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s, z) \cdot dz \right)' \cdot \sigma(s, t) \cdot ds + \int_0^t \sigma'(s, t) \cdot dW'(s)$$

$$dB(t, T) = r(t) \cdot B(t, T) \cdot dt + B(t, T) \cdot \sigma'(t, T) \cdot dW'(t)$$

- Cas particulier du modèle de Ho & Lee

Le modèle de Ho & Lee (1988) est un cas particulier du modèle HJM avec la simplification $\sigma(t, T) = \sigma$. Cela permet de rester en dimension 1 et d'appréhender plus facilement la mise en pratique, même si nous avons vu dans les chapitres précédents que la volatilité n'était pas constante avec les maturités.

On obtient des résultats explicites et qui permettent de tenir compte de la structure de taux initiale pour le calcul du taux instantané $r(t)$, du prix du ZC noté $B(t, T)$ et de la courbe de taux ZC des $R(t, T)$:

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \sigma \cdot \int_0^t dW'(s)$$

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \cdot \exp \left[(T - t) \cdot (f(0, t) - r(t)) - \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot (T - t)}{2} \right]$$

$$R(t, T) = R(0, t, T) - (f(0, t) - r(t)) + \frac{\sigma^2 \cdot t \cdot (T - t)}{2}$$

Le modèle de Ho & Lee permet d'obtenir un modèle d'arbitrage simple à mettre en œuvre et qui prend en compte la structure des taux initiale. L'inconvénient reste cependant que la volatilité est considérée comme constante pour toutes les maturités, ce qui est faux.

Application du modèle de Ho & Lee :

Nous effectuons une application du modèle de Ho & Lee sur l'indice EURIBOR 6M. Nous voulons calculer la courbe forward 1Y, et nous fixons la volatilité $\sigma=1\%$. A partir des courbes spot $R(0,0,T)$ et forward spot $R(0,1,T)$, nous pouvons calculer la courbe forward estimée $R(1,T)$ selon le modèle de Ho & Lee en appliquant la dernière formule.

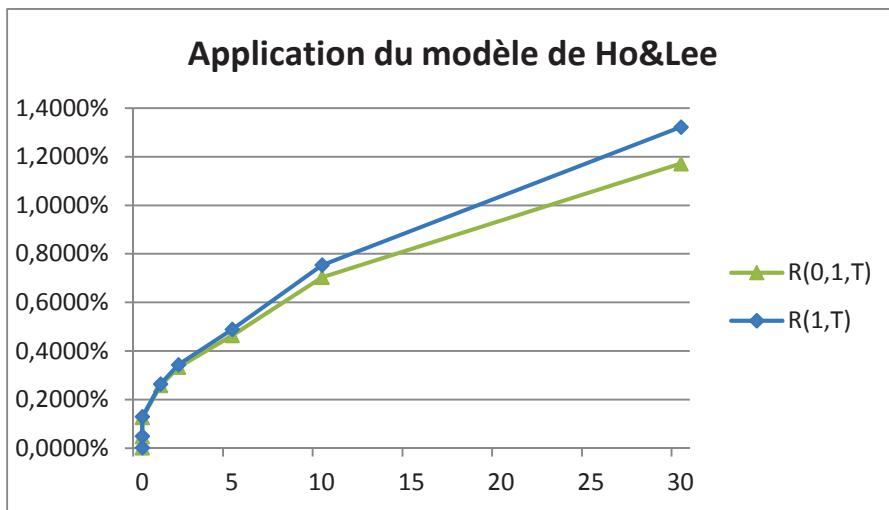


Figure 27 : Modélisation de l'EURIBOR 6M avec le modèle de Ho & Lee $R(1,T)$ vs courbe forward spot $R(0,1,T)$

Nous pouvons constater que la projection du modèle surestime la courbe forward spot. D'après la formule, nous nous attendons à ce que la volatilité fasse augmenter les taux. Le poids de la volatilité augmente avec la maturité, ce qui provoque l'écartement entre les deux courbes. L'avantage est de pouvoir coller parfaitement à la courbe sur la partie courte et de prendre en compte toutes les données disponibles au moment spot (courbe spot et courbes forward spot). La limite de ce modèle est la volatilité constante, que le modèle général HJM peut

corriger moyennant des coûts d'implémentation supplémentaires (en temps et en ressources informatiques).

3.3 Comparaison entre les modèles

Afin de comparer les valorisations fournies par les différents modèles, nous prenons comme exemple une option vanille : un Cap sur taux d'intérêt. Le principe d'un Cap est de s'assurer contre la hausse de taux. Du début du contrat jusqu'à maturité, on regarde à chaque date de roll si le taux sous-jacent est plus haut que le taux du Cap, alors l'acheteur du Cap reçoit le différentiel de taux multiplié par le notionnel.

Nous nous intéressons ici à un Cap ayant les caractéristiques suivantes :

- Maturité : 10Y
- Notionnel : 10M€
- Fréquence de roll : 6M
- Indice sous-jacent : EURIBOR 6M

Nous obtenons les résultats suivants dans Numerix pour une valorisation au 05/03/2015 :

Strike	0,5%	1%	2%	5%	10%
HW1	635 872,11	438 381,66	195 294,00	8 285,07	2,34
HW2	655 478,90	463 731,86	205 132,96	9 616,24	4,64
Ho&Lee	662 577,32	457 321,62	205 607,95	10 400,05	6,92

Tableau 13 : Résultats de valorisation dans Numerix d'un Cap avec différents modèles de taux

Nous constatons que les résultats sont cohérents entre eux et que la différence de modèle est de l'ordre de 4% pour les strikes proches de la monnaie (0,71%).

L'importance du choix de modèle apparaît au niveau des strikes extrêmes, l'écart entre les modèles passe à 25% pour le strike 5% et à 196% pour le strike 10%.

4. Etudes complémentaires & Valorisation de produits structurés

4.1 Etude de la valorisation des produits de change Helvetique

La classe de produits dits Helvetique est la classe de dérivés structurés qui affiche les plus gros écarts avec les contreparties au sein de A. Nous choisissons de nous y intéresser de plus près, l'objectif étant de produire une valorisation indépendante à la fois du système Tradix, considéré comme défaillant sur ce type d'instruments, et des contreparties, qui pour le moment fournissent la valorisation effectivement utilisée par A.

4.1.1 Présentation des produits Helvetique

Les produits dits Helvetique sont des options de longue maturité ayant des parités de devises (USD/CHF ou EUR/CHF) comme sous-jacent. Le taux de remboursement du prêt est selon les annuités soit fixe soit variable. Dans le premier cas (en général les 5 premières années de remboursement), le taux est déterminé à l'avance et le risque est nul. Dans le second cas (en général les 25 ou 30 années suivantes), le taux de l'annuité est indexé sur la parité USD/CHF ou EUR/CHF au sein d'une structure. La construction de la structure, qui comprend souvent un levier (coefficient multiplicateur) important, amène des situations extrêmes avec des taux d'intérêt annuels pouvant atteindre plus de 40% ou 50%. Cette imprévisibilité et cette forte volatilité des taux pratiqués justifient la qualification de « toxiques » de la part des médias pour ces emprunts. A, dans le cadre de sa politique de gestion du risque « taux », s'est protégé du risque en retournant cette structure sur le marché via un swap structure vs Euribor. Ce sont ces opérations qui posent aujourd'hui problème car l'évolution de leur valorisation entraîne le déclenchement d'appels de marge (versement de

cash-collatéral), et A et sa contrepartie doivent donc s'accorder sur une valorisation commune.

- Méthode de valorisation

La méthode utilisée pour valoriser est la décomposition du pay-off de la structure en somme de pay-offs d'options vanille et/ou binaires facilement valorisables par des formules fermées dans Excel.

La formule/pay-off du deal étudié est la suivante (hors période à taux fixe) :

Si $USD/CHF > 1$ alors taux = 0,98%

Si $USD/CHF < 1$ alors taux = $0,98\% + 57\% \left[\left(\frac{1 - USD/CHF}{USD/CHF} \right) \right]$

Pour la décomposition du pay-off, nous utilisons les notations suivantes :

Sdf : variable parité USD/CHF

X : coupon fixe = 0,98%

α : facteur levier = 57%

$Sdf(0)$: parité USD/CHF spot = 0.8839 CHF au 31/03/2014

B : strike = barrière = 1

$1\{\cdot\}$: fonction indicatrice

- Décomposition du pay-off :

$$PO = X \cdot 1\{Sdf > B\} + \left[X + \alpha \left(\frac{1 - Sdf}{Sdf} \right) \right] \cdot 1\{Sdf < B\}$$

$$PO = X + \alpha \left[\left(\frac{1}{Sdf} - 1 \right) \right] \cdot 1\{Sdf < B\}$$

$$PO = X + \alpha \left(\frac{1}{Sdf} \right) \cdot 1\left\{ \frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B} \right\} - \alpha \cdot 1\left\{ \frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B} \right\} \quad (1)$$

Or on a pour le prix d'un call vanille :

$$C = [St - K] \cdot 1\{St - K > 0\} = St \cdot 1\{St - K > 0\} - K \cdot 1\{St - K > 0\}$$

Soit :

$$St \cdot 1\{St - K > 0\} = C(St; K) + K \cdot 1\{St - K > 0\}$$

Ce qui donne, en prenant $St = 1/Sdf$ et $K = 1/B$:

$$\left(\frac{1}{Sdf}\right) \cdot 1\left\{\frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B}\right\} = C\left(\frac{1}{Sdf}; \frac{1}{B}\right) + \frac{1}{B} \cdot 1\left\{\frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B}\right\}$$

Donc en remplaçant dans (1) :

$$\begin{aligned} PO &= X + \alpha \left[C\left(\frac{1}{Sdf}; \frac{1}{B}\right) + \frac{1}{B} \cdot 1\left\{\frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B}\right\} \right] - \alpha \cdot 1\left\{\frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B}\right\} \\ PO &= X + \alpha \cdot C\left(\frac{1}{Sdf}; \frac{1}{B}\right) + \left(\frac{1}{B} \alpha - \alpha\right) \cdot 1\left\{\frac{1}{Sdf} < \frac{1}{B}\right\} \end{aligned}$$

On a donc le pay-off décomposé en la somme d'un coupon fixe, d'un call vanille et d'une binaire.

Dans notre exemple, $B = 1$, ce qui permet de supprimer la binaire puisque son coefficient multiplicateur $(\frac{1}{B} \alpha - \alpha)$ s'annule.

4.1.2 Modèles de change

- Modèle de Garman-Kohlhagen (1983)

Le modèle utilisé pour valoriser le call vanille est celui de Garman-Kohlhagen (1983). Ce modèle est une adaptation du modèle de Black & Scholes développé pour les options de change.

Le sous-jacent S est la parité USD/CHF (combien de CHF pour 1\$), le strike est K (nombre de CHF) et le pay-off du call est $\{max(0; St - K)\}$ (le pay-off est donc exprimé en CHF). Le modèle suppose que S suit un mouvement brownien géométrique, mais avec une volatilité constante. Il y a deux actifs : un actif considéré comme domestique, une obligation libellée en devise domestique (ici

le dollar) notée B , qui évolue selon la dynamique $dB(t) = r(t).B(t).dt$, et un actif étranger, une obligation libellée en devise étrangère (ici le franc suisse) notée B_f , qui suit la dynamique $dB_f(t) = rf(t).B_f(t).dt$.

Dans ce modèle, le prix C_t du call européen au moment t , de strike k et de maturité T est donné par la formule traditionnelle de Black & Scholes mais avec une modification du facteur de revenu. Le taux moyen de dividende (éventuel) $q(t)$ du modèle de BS est remplacé par le taux sans-risque étranger moyen sur la période $rf(t)$. Par souci de clarté, le taux sans-risque domestique devient $rd(t)$.

Le prix forward (ici la parité S_t) devient : $F(t, T) = S(t) \cdot e^{[(rd(t) - rf(t))(T-t)]}$.

Le prix du call devient :

$$C(t, T, K, \sigma) = e^{-r \cdot T} \cdot [F(t, T) \cdot N(d1) - K \cdot N(d2)]$$

Avec :

$$d1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{F(t, T)}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right]$$

$$d2 = d1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

- Avantages & Limites du modèle de Garman-Kohlhagen (1983)

Les avantages du modèle utilisé pour cette valorisation par réplication sont les suivants :

- Simplicité de mise en œuvre : le modèle de GK est simple à mettre en œuvre car propose une formule fermée dont tous les inputs sauf la volatilité sont connus. Les taux sans-risque peuvent être pluggés directement en courbes pour l'estimation des forwards.
- Robustesse : à l'instar du modèle de BS, le modèle de GK est relativement robuste aux variations de marché. Ses estimations restent valables sans changer de modèle même quand le spot ou le taux d'actualisation évoluent.

- Consensus de marché : Antoine Petrus et Cornelius van der Ploeg soulignent le fait que les volatilités implicites calculées sur le marché le sont avec le modèle de GK. Une majorité de traders l'utilisent pour avoir une estimation rapide et relativement efficace du niveau de prix/ de volatilité, à la manière dont est utilisée le modèle de BS sur les marchés de taux.

Cependant, des limites apparaissent et orientent vers l'utilisation d'un modèle plus poussé pour la valorisation de ces options de change :

- Hypothèse d'une volatilité constante : à l'instar du modèle de BS pour les Taux et les Equity, le modèle de GK fait l'hypothèse d'une volatilité constante pour un strike donné. On peut se reporter à la partie 1 pour se remémorer les limites liées à cette hypothèse restrictive.
- Aperçu du modèle de Bates (1996)

Pour corriger le problème de la volatilité constante du modèle de GK (1983), Bates a introduit en 1996 un modèle similaire mais incluant une volatilité stochastique suivant une dynamique de Heston (1993), étendu avec des sauts de Merton (1976). Ce modèle permet donc de coller à la réalité au niveau du smile de volatilité mais aussi de vérifier l'absence de corrélation entre les rendements des taux de change et les chocs de volatilité.

Les hypothèses de modèle sont les suivantes :

- Les marchés sont efficaces : pas de coûts de transactions ou de taxes, les échanges ont lieu en continu, pas de restriction sur les prêts et emprunts.
- Le différentiel de taux sans-risque instantanés domestique et étranger est connu et constant : $b = r - r^*$.
- Le taux de change S (USD/CHF pour nous) suit une diffusion géométrique à sauts avec une variance conditionnelle $V(t)$ suivant un process de retour à la moyenne :

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sqrt{VdZ} + kdq$$

$$dV = (\alpha - \beta V)dt + \sigma v \cdot \sqrt{V}dZv$$

$$cov(dZ, dZv) = \rho \cdot dt$$

$$prob(dq = 1) = \lambda \cdot dt ; l \cdot (1+k) \sim N[l \cdot (1+k) - \frac{1}{2} \delta^2; \delta^2]$$

Où :

μ est le taux instantané attendu d'appréciation de la devise étrangère

λ est la fréquence annuelle des sauts

k est probabilité conditionnelle de saut

q est un compteur suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

A l'heure actuelle, ce modèle fait office de référence sur les options de change. En effet, les distributions de volatilité implicite obtenues se rapprochent fortement des séries temporelles de marché. Le modèle à sauts s'avère également pertinent puisque les volatilités historiques affichent des clusters temporels. Le seul problème résiduel est l'instabilité du paramètre, qui n'est pas robuste par rapport à la variation dans le temps des volatilités implicites pour différentes maturités.

- Cotation des volatilités de change

La formule donnée par le modèle exige de connaître la volatilité de marché. Or la cotation des volatilités des produits de change est particulière. Contrairement au marché « equity », la matrice de volatilité disponible sur le marché indique les volatilités implicites ATM (At The Money) et les volatilités implicites des « butterfly » et des « risk-reversal » en fonction de leur delta et non en fonction des strikes. Il s'agit de conventions établies pour faciliter la lecture du prix par les traders et la gestion des risques.

Un butterfly est un montage financier qui correspond au portefeuille suivant :

- 1 Long call de strike $k-a$
- 1 Long call de strike $k+a$
- 2 Short call de strike k

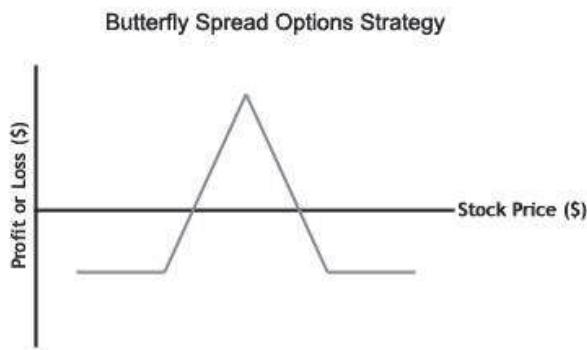


Figure 28 : Illustration du pay-off d'un Butterfly

En pratique, un butterfly permet de mesurer la convexité du smile de volatilité car sa volatilité mesure l'écart entre la volatilité ATM (strike k) et la volatilité moyenne des extrêmes (strikes $k-a/k+a$).

$$BB[25\Delta] = \frac{\sigma[25\Delta; C] + \sigma[-25\Delta; P]}{2} - \sigma[50\Delta]$$

Un risk-reversal est un montage financier qui correspond au portefeuille suivant

- 1 Long call de strike k
- 1 Long put de strike k' ($k' \geq k$)

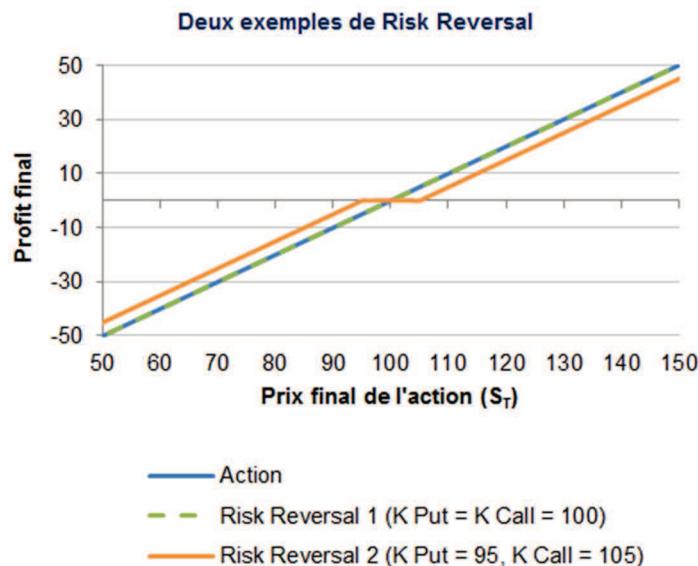


Figure 29 : Illustration du pay-off d'un Risk-Reversal

En pratique, un risk-reversal permet de mesurer la pente du smile de volatilité car sa volatilité mesure l'écart entre la volatilité à l'extrême des deltas négatifs (ITM pour un call) et la volatilité à l'extrême des deltas positifs (OTM pour un call).

$$RR[25\Delta] = \sigma[25\Delta; C] - \sigma[-25\Delta; P]$$

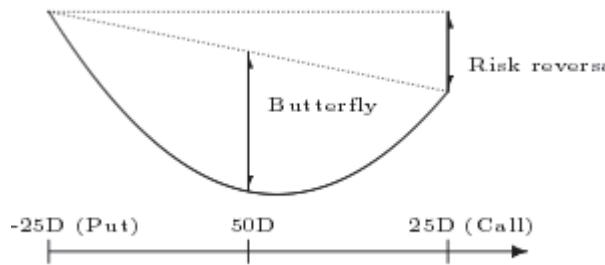


Figure 30 : Illustration de l'interprétation du Butterfly (convexité) et du Risk-Reversal (pente)

On peut retrouver le smile des volatilités implicites à partir des cotations des Butterfly et des Risk-Reversal en inversant les deux formules :

$$\sigma[25\Delta; C] = BB[25\Delta] + \sigma[50\Delta] + RR \frac{[25\Delta]}{2}$$

$$\sigma[-25\Delta; P] = BB[25\Delta] + \sigma[50\Delta] - RR \frac{[25\Delta]}{2}$$

Il faut ensuite réaliser des interpolations pour obtenir une courbe continue qui relie les différentes volatilités pour différents deltas. On peut également transformer les deltas en strikes nominaux ou relatifs.

4.1.3 Valorisation dans Excel et Numerix

Nous utilisons les formules ci-dessus pour recréer la matrice de volatilité implicite à insérer dans le modèle.

Il s'agit désormais de valoriser dans Excel les flux liés au pay-off de la structure. Le coupon fixe X ne pose pas de problème.

Le Call vanille est valorisé avec le modèle de Garman-Kohlhagen. Puisque le sous-jacent de l'opération étudiée est la parité USD/CHF mais que les flux finaux sont en EUR, la valorisation nécessite un ajustement Quanto Change à ce modèle.

Il faut tenir compte de la volatilité de la parité EUR/CHF (le prix du Call de base est exprimé en CHF et doit être payé en EUR) et de la corrélation entre les deux parités USD/CHF et EUR/CHF. C'est le facteur revenu qui va être une nouvelle fois modifié, la différence $\{r_d - r_f\}$ est remplacée par $\mu = \{r_d - r_f - \sigma(d).\sigma(f).\rho(d,f)\}$, avec $\sigma(d)$ la volatilité de la parité USD/CHF, $\sigma(f)$ la volatilité de la parité EUR/CHF et $\rho(d,f)$ la corrélation entre les deux parités. Ces corrections permettent de convertir le prix initialement calculé en CHF par le modèle de Garman-Kohlhagen en EUR.

La formule pour la valorisation du Call est finalement la suivante :

$$C = e^{-rf.T} \cdot \left[\frac{1}{Sdf(0)} \cdot e^{\mu.T} \cdot N(d1) - B \cdot N(d2) \right]$$

Avec :

$$\mu = rd - rf - \sigma(d).\sigma(f).\rho(d,f)$$

$$d1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{B}{Sdf}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma(d)^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma(d) \cdot \sqrt{T}} \right]$$

$$d2 = d1 - \sigma(d) \cdot \sqrt{T}$$

Les sources de données utilisées sont les suivantes :

Donnée	Source
Echéancier	Tradix
Taux domestique (USD)	Courbe Libor USD 3M - Bloomberg

Taux foreign (CHF)	Courbe Libor CHF 3M - Bloomberg
Taux devise de paiement (EUR)	Courbe EURIBOR 3M - Bloomberg
Vol USD/CHF	Smile de vol par delta - D
Vol USD/EUR	Smile de vol par delta - D
Correl USD/CHF - USD/EUR	Courbe de correl - D

Tableau 14 : Données utilisées pour le pricing dans Excel

- Résultats

N° Deal	Sous-jacent	Strike	Valo CPT	Valo Tradix	Valo Excel avec Quanto
1	USD/CHF	1	73 308 542,07	52 317 567,00	68 321 368,00
2	USD/CHF	1	48 746 022,51	32 388 000,00	47 455 240,00
3	USD/CHF	0,9	19 031 418,28	11 755 466,00	18 009 073,00

Tableau 15 : Résultats du pricing Helvetique dans Excel

Les écarts sont respectivement réduits de 76%, 92% et 86%.

Sur l'ensemble du portefeuille des produits Helvetique, les écarts sont réduits de 88% en moyenne (moyenne pondérée par nominal).

- Valorisation dans Numerix

Dans Numerix, nous construisons l'ensemble des éléments suivants pour obtenir la valorisation de notre produit Helvetique :

- Les objets usuels : calendriers, échéanciers,
- 1 script permettant de décrire le pay-off de la structure
- 3 objets de type Index pour représenter les trois taux utilisés : USD, EUR, CHF
- 3 modèles de taux (on choisit des modèles HW1 calibrés sur swaptions) pour les modéliser
- 2 modèles de change pour modéliser les taux de change (on choisit des modèles SABR, et Black-Scholes pour comparaison)
- 1 modèle hybride permettant de réunir tous ces éléments

Nous calibrons ensuite les modèles sur les collections d'instruments appropriées (swaptions, options de change). Nous présentons dans le tableau ci-dessous le résultat de la calibration du modèle SABR pour la parité USD/CHF :

vol0	beta	xi	rho	lambda	alpha	spot
0,1178425	1,25	0,25526038	0,63316888	0,44527584	0,11428351	1,13049278

Tableau 16 : Calibration du modèle SABR dans Numerix sur USD/CHF au 28/02/2015

La modélisation de la parité USD/CHF est primordiale car elle est le sous-jacent de la partie optionnelle de la structure. Sa distribution va déterminer la majeure partie du taux futur estimé de la structure.

Le résultat de la calibration des paramètres du modèle SABR nous indique que la pente du smile est prononcée puisque le β est supérieur à 1. Le paramètre de volatilité de la volatilité α est faible (0,11) donc la courbure du smile est également faible. Cela signifie que la différence de volatilité entre les strikes extrêmes et la monnaie est relativement peu élevée.

Nous obtenons ensuite la valorisation qui nous intéresse via l'objet de type Pricer relié au modèle Hybride utilisé :

	Valo CPT	Valo Tradix	Valo Numerix SABR	Valo Numerix BS
Valorisation	73 308 542,07	52 317 567,00	74 665 159,87	76 694 511,09
Réduction écart			94%	84%

Tableau 17 : Comparaison des valorisations obtenues pour un produit Helvetique

Les valorisations fournies par Numerix sont très satisfaisantes puisque l'écart initial est réduit de 94% lorsqu'on utilise le modèle de volatilité SABR. Nous vérifions que le modèle SABR est effectivement plus précis que le

modèle de BS. Une nouvelle fois le prix donné par le modèle de BS constitue une borne supérieure au prix réel (robustesse de BS).

4.2 Etude sur les Spread Options CMS

Dans cette partie, l'objectif est de produire une valorisation, améliorée par rapport à celle de Tradix, pour les instruments de type « Spread Option CMS ». Il s'agit d'options basées sur un spread entre deux indices CMS (CMS 10Y et CMS 2Y en général).

Nous examinons dans un premier temps les spécificités des produits indexés sur CMS, avant d'appliquer numériquement des modèles de valorisation dans Excel puis Numerix.

4.2.1 Etude des produits de taux CMS

Les taux CMS sont une alternative aux indices LIBOR pour les jambes variables de swap. Ils ont l'avantage de permettre à l'investisseur d'exprimer ses vues sur des taux long-terme (2Y, 10Y, 30Y) alors que les taux –IBOR sont relativement courts pour les plus usuels.

Les indices CMS présentent deux particularités par rapport aux autres indices variables dont il faut tenir compte dans la valorisation :

- Leur fréquence et leurs dates de fixing⁴⁴ ou de paiement sont souvent différentes de celles utilisées habituellement.
- L'évaluation des CMS forwards n'est pas simplement la courbe de swap forward, car c'est le LIBOR et non la courbe swap qui est utilisée comme actualisation dans la construction de la courbe CMS.

Dans cette partie, nous suivons le raisonnement de Lesniewski (2008).

- Paiement « in arrears »

⁴⁴ Date de fixing : pour un swap, date à laquelle on relève (fixe) la valeur de l'indice qui servira au calcul du coupon variable du prochain paiement.

On considère par défaut que les dates de paiement sont toujours le dernier jour de la période sur laquelle est calculé le coupon (« accrual period »). Mais imaginons un swap pour lequel le coupon variable est payé en début de période (en date T_{deb}) plutôt qu'en fin (date T_{fin}). Alors la valeur actuelle du coupon variable est :

$$VA = P_0(0, T) \cdot E^{Q(T_{deb})}[F(T_{deb}, T_{fin})]$$

Ici la mesure forward $Q(T_{deb})$ ne correspond plus au calcul du forward qui nous intéresse. Il faut donc changer de mesure pour retrouver une valeur en fonction de la mesure $Q(T_{fin})$. On applique le théorème de Girsanov :

$$P(0, T) \cdot E^{Q(T_{deb})}[F(T_{deb}, T_{fin})] = P_0(0, T) \cdot E^{Q(T_{fin})}\left[\frac{F(T_{deb}, T_{fin})}{P(T_{deb}, T_{fin})}\right]$$

Donc le taux forward est donné par :

$$E^{Q(T_{deb})}[F(T_{deb}, T_{fin})] = E^{Q(T_{fin})}[F(T_{deb}, T_{fin})] \cdot \frac{P_0(T_{deb}, T_{fin})}{P(T_{deb}, T_{fin})}$$

$$\begin{aligned} E^{Q(T_{deb})}[F(T_{deb}, T_{fin})] \\ = E^{Q(T_{fin})}[F(T_{deb}, T_{fin})] \\ + E^{Q(T_{fin})}[F(T_{deb}, T_{fin})] \cdot \left(\frac{P_0(T_{deb}, T_{fin})}{P(T_{deb}, T_{fin})} - 1 \right) \end{aligned}$$

A droite de l'égalité, le premier terme est le taux forward classique, connu en $t=0$ et noté $F_0(T_{deb}, T_{fin})$. Le second terme est la correction « in arrears », que l'on note par $\Delta(T_{deb}, T_{fin})$.

$$\Delta(T_{deb}, T_{fin}) = E^{Q(T_{deb})}[F(T_{deb}, T_{fin})] - F_0(T_{deb}, T_{fin})$$

$$\Delta(T_{deb}, T_{fin}) = E^{Q(T_{fin})}[F(T_{deb}, T_{fin})] \cdot \frac{P_0(T_{deb}, T_{fin})}{P(T_{deb}, T_{fin})} - F_0(T_{deb}, T_{fin})$$

Or, si on se place dans le cadre du modèle de Black :

$$E^{Q(T_{fin})}[F(T_{deb}, T_{fin})] = F_0(T_{deb}, T_{fin}) \cdot e^{\sigma^2 \cdot T_{deb}}$$

$$P(T_{deb}, T_{fin}) = \frac{1}{1 + \delta \cdot F(T_{deb}, T_{fin})}$$

D'où la formule suivante de l'ajustement Δ :

$$\Delta(T_{deb}, T_{fin}) = F_0(T_{deb}, T_{fin}) \cdot \theta \cdot (e^{\sigma^2 \cdot T_{deb}} - 1)$$

Avec $\theta = \frac{\delta \cdot F_0(T_{deb}, T_{fin})}{1 + \delta \cdot F_0(T_{deb}, T_{fin})}$

Et en utilisant l'approximation de l'exponentielle au premier ordre en 0 :

$$\Delta(T_{deb}, T_{fin}) = F_0(T_{deb}, T_{fin}) \cdot \theta \cdot \sigma^2 \cdot T_{deb}$$

On a obtenu la formule générique applicable pour les décalages de paiement.

- Ajustement de convexité CMS

Nous commençons par donner la formule théorique de l'ajustement de convexité obtenu par Lesniewski. Puis nous appliquons cette formule sur une opération présente dans le portefeuille de A dans Excel pour constater l'impact de l'ajustement.

- Formule théorique

On fait les hypothèses suivantes :

- Les fractions d'année des périodes de coupon sont égales à $1/f$, avec f fréquence de paiements du swap de référence (généralement, $f=2$).

- L'actualisation se fait en fonction d'un taux forward de swap R unique, correspondant au discount factor $P(t) = \frac{1}{1+R(t)/f_{CMS}}$, avec f_{CMS} fréquence de paiements du CMS (généralement $f_{CMS}=4$).
- Le taux de swap R évolue selon une dynamique de Black.

Après un raisonnement similaire à celui du calcul de l'ajustement « in arrears », on obtient les résultats suivants pour l'ajustement CMS :

$$\Delta(T_{deb}, T_{fin}) = R_0(T_{deb}, T_{fin}) \cdot (\theta_C - \theta_D) \cdot \sigma^2 \cdot T_{deb}$$

Avec θ_C l'ajustement du forward et θ_D l'ajustement « in arrears » tels que :

$$\theta_C = 1 - \frac{1}{1 + \frac{R_0}{f}} \cdot \frac{n \cdot \frac{R_0}{f}}{\left(1 + \frac{R_0}{f}\right)^n - 1}$$

$$\theta_D = \frac{R_0/f_{CMS}}{1 + R_0/f}$$

$$R_0 = R_0(T_{deb}, T_{fin})$$

- Application numérique

Nous appliquons dans Excel l'ajustement de convexité à la courbe forward des swaps 10Y pour obtenir les taux forward CMS 10Y. Ici le paiement « in arrears » est d'une période de 15BD⁴⁵ avant la fin de la période.

Value date	Taux Swap 10Y R_0	Facteur d'ajust Δ (bp)
22/12/2014	2,04%	0,08
22/12/2015	2,33%	0,17

⁴⁵ BD (Business Days) : jours ouvrés

22/12/2016	2,58%	0,26
...
22/12/2044	2,64%	2,22
22/12/2045	2,65%	2,32
24/12/2046	2,65%	2,43

Tableau 18 : Application de l'ajustement CMS à la courbe forward Swap 10Y

Nous constatons que le facteur d'ajustement de convexité est quasiment négligeable sur les courtes maturités mais que sur les maturités longues, l'effet est réel. Par exemple, pour un Swap de maturité 30 ans et de nominal 10M€, l'écart généré par l'ajustement de 2bps est d'environ 40k€.

4.2.3 Valorisation des Spread Options Excel (modèle de Bachelier)

Nous effectuons d'abord une valorisation indépendante et simplifiée dans Excel. Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Bachelier et nous prenons en compte l'ajustement de convexité des CMS.

- Modèle de Bachelier

Le modèle de Bachelier est un modèle très simplifié, élaboré au début du XXe siècle, soit bien avant le modèle de Black-Scholes (1973). Mais il permet une approximation intéressante car très rapide à implémenter et correcte pour une option sur spread. On considère donc que les indices CMS 10Y (noté S2) et CMS 2Y (noté S1) suivent les dynamiques suivantes :

$$\frac{dS1(t)}{S1(t)} = \mu. dt + \sigma1. dW1(t)$$

$$\frac{dS2(t)}{S2(t)} = \mu. dt + \sigma2. dW2(t)$$

$$dW1(t). dW2(t) = \rho. dt$$

On suppose également que le Spread S est gaussien comme différence entre deux processus gaussiens.

Sous ces hypothèses, la formule du prix du call sur Spread CMS est :

$$P = (m(T) - K \cdot e^{-rT}) \cdot N \left(\frac{m(T) - K \cdot e^{-rT}}{S(T)} \right) + S(T) \cdot n \left(\frac{m(T) - K \cdot e^{-rT}}{S(T)} \right)$$

Avec N la fonction de distribution normale et n la fonction de densité normale, ainsi que les paramètres m et S définis tels que :

$$m(T) = (S2(0) - S1(0))$$

$$S^2(T) = S1(0)^2 \cdot (e^{\sigma_1^2 \cdot T} - 1) + S2(0)^2 \cdot (e^{\sigma_2^2 \cdot T} - 1) \\ - 2 \cdot S1(0) \cdot S2(0) \cdot (e^{\rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot T} - 1)$$

- Valorisation d'une opération

L'opération que nous choisissons présente les caractéristiques suivantes :

- Notionnel : 15 469 000€ (amortissable)
- Date de début : 22/12/2006
- Date de fin : 22/12/2046
- Indice du coupon variable : EURIBOR 6M
- Fréquence de paiement du coupon variable : 6M
- Structure : voir ci-dessous
- Fréquence de paiement de la structure : 12M

Le pay-off de la structure, optionnel et basé sur un spread CMS, est défini comme ceci :

- Si $CMS 10Y - CMS 2Y \geq -0,20\% : 2,78\%$
- Si $CMS 10Y - CMS 2Y < -0,20\% : 4 \% - 10 * (CMS 10Y - CMS 2Y)$

Nous effectuons la même décomposition en produits simples que pour les Helvetique.

Nous devons donc valoriser pour chaque date de paiement un coupon fixe, une Binaire sur spread CMS et un Call vanille sur spread CMS.

Nous présentons ci-dessous le résultat obtenu par la valorisation Excel. Les données de marché utilisées sont issues de Bloomberg et l'échéancier de Tradix.

	CPT	Tradix	Excel
Valorisation	14 820 477,81	18 061 000,00	16 537 000,00
Ecart		3 240 522,19	1 716 522,19
Réduction écart			47%

Tableau 19 : Résultat de la valorisation du CMS Spread Option dans Excel

La réduction de l'écart de valorisation est réelle et significative, mais pour autant ce n'est pas satisfaisant pour l'objectif de maîtrise des valorisations demandé par l'entreprise.

4.2.4 Valorisation des Spread Options Numerix

Nous cherchons maintenant à obtenir une meilleure valorisation en utilisant Numerix, qui permet de modéliser les taux et les indices de façon plus complexe et plus précise. Nous paramétrons le call de la décomposition en produit simple, car le taux fixe ne pose pas de problème et la Binaire n'a aucune influence (poids = 3%).

ID	SpreadOptDtAnDbl
OBJECT	ANALYTIC
TYPE	CMS SPREAD OPTION
ACCURACY	1,00E-08
RHO	92%
SIGMA REC	20%

SIGMA PAY	20%
CMS SPREAD OPTION	INSTRDATES
NOWDATE	TODAY
DOMESTIC YIELD	EUR_CURVE_MID
CURVE	
Updated	6880 @ 05:19:00 PM
Value	4,128%
ID	SPREADOPTDTANDBL

Figure 31 : Résultat de valorisation d'un Call CMS Spread dans Numerix

Avec cette valorisation nous obtenons une valorisation finale bien plus satisfaisante :

	CPT	Tradix	Numerix
Valorisation	14 820 477,81	18 061 000,00	14 424 091,65
Ecart		3 240 522,19	- 396 386,16
Réduction écart			88%

Tableau 20 : Résultat de la valorisation du CMS Spread Option dans Numerix

La valorisation dans Numerix est bien plus satisfaisante puisque nous avons une réduction de l'écart de l'ordre de 88% sur cet exemple.

4.3 Etude sur l'inflation

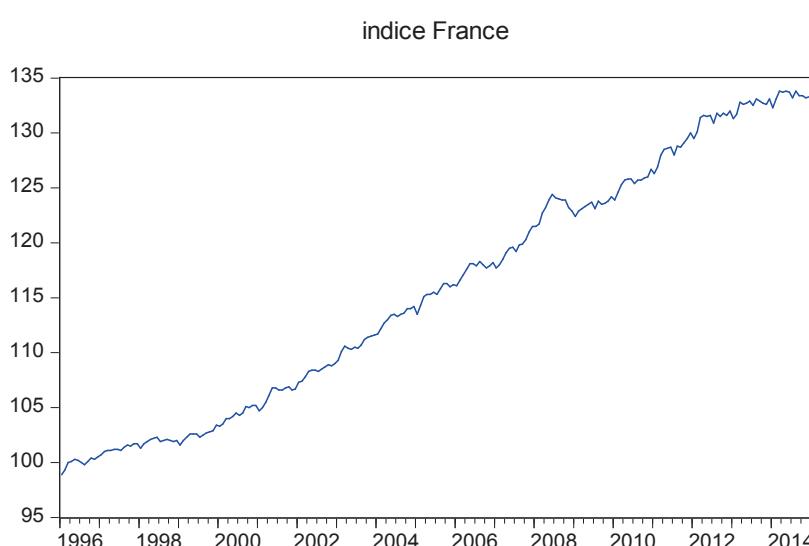
Nous nous intéressons maintenant à une autre classe de produits qui génèrent beaucoup d'écart avec les contreparties : les produits Inflation.

Le biais de valorisation identifié lors de l'audit réalisé en collaboration avec D est la saisonnalité de l'inflation. Nous vérifions dans un premier temps l'existence de ce phénomène à travers une étude économétrique sur l'Indice des Prix à la Consommation en France (IPCF). Puis nous essayons d'établir un modèle de prévision de l'inflation à partir des résultats statistiques. Enfin nous établissons le calcul de l'ajustement de convexité lié à la saisonnalité de l'inflation.

4.3.1 Etude économétrique de la saisonnalité de l'inflation

Notre étude porte sur l'historique des données mensuelles de l'IPCF entre janvier 1996 et décembre 2014. Les données sont tirées du site « eurostat » de l'Union Européenne⁴⁶. L'étude est réalisée avec le logiciel E-Views.

Voici le graphique d'évolution de l'indice sur la période étudiée :



⁴⁶ Source des données : <http://ec.europa.eu/eurostat/web/hicp/data/database>

Figure 32 : Evolution de l'IPCF entre janvier 1996 et décembre 2014 (données mensuelles)

Nous considérons les rendements mensuels (inflation d'un mois sur l'autre) notés $R(t)$ et calculés par la méthode continue :

$$R(t) = \ln\left(\frac{IPCF(t)}{IPCF(t-1)}\right)$$

- Observation graphique des moyennes mensuelles

Le graphique des moyennes mensuelles des rendements donne une bonne indication, bien que peu formelle du point de vue statistique, sur la saisonnalité :

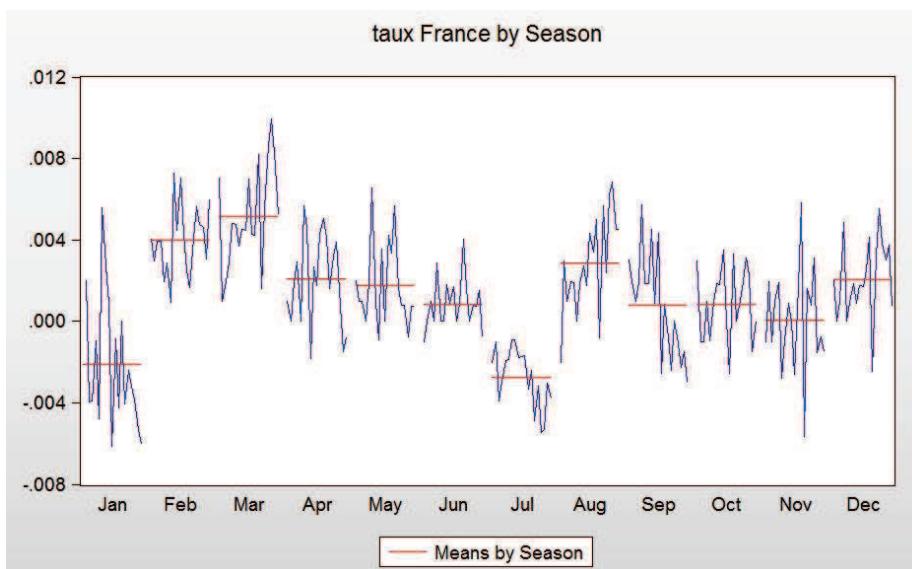


Figure 33 : Moyennes mensuelles pour l'IPCF sur la période étudiée

Sur ce graphique, nous observons qu'il y a bien des différences selon les mois de l'année et que nous retrouvons un même schéma annuel sur la période étudiée. Même s'il y a de fortes variations entre les mois, nous voyons que les niveaux moyens forment un schéma d'inflation crédible et non-linéaire. Par exemple, nous observons une chute de l'inflation en janvier et en juillet, ce qui correspond aux périodes de soldes. Au contraire, les prix augmentent en août pendant la période de vacances et en décembre à l'occasion des achats de Noël.

- Etude de la saisonnalité au moyen de tests statistiques

Afin de détecter une éventuelle saisonnalité de l'inflation avec des méthodes statistiques, nous recherchons des corrélations parmi les retards des données historiques. Nous disposons de deux principaux outils pour évaluer les relations entre les rendements des cotations IPCF : l'auto-corrélogramme et le test de Dickey-Fuller augmenté⁴⁷. L'auto-corrélogramme évalue la nullité ou non de la covariance entre deux décalages d'un processus. Le test de Dickey-Fuller est lié à l'inversibilité du polynôme autorégressif.

Pour travailler sur l'auto-corrélogramme, nous avons besoin de calculer les bornes des bandes de Bartlett. Ces bandes sont des zones de confiance à 95% dans lesquelles la présence de la fonction d'autocorrélation indique la nullité des coefficients d'auto-corrélation ou la dépendance entre un rendement et la valeur du rendement de retard x. En dehors de ces bandes, un des coefficients entre 1 et H est considéré comme non nul et le processus n'est plus stationnaire, c'est-à-dire contient des auto-corrélations fortes.

Calcul des bornes des bandes de Bartlett :

On divise le quantile de la loi Normale(0,1) au risque 5% par la racine du nombre d'observations, ce qui donne : $1,96/\sqrt{228} = 0,1298$

Il faut désormais comparer les valeurs successives (en valeur absolue) de la fonction d'autocorrélation à cette valeur. Une valeur empirique supérieure indique une corrélation avec la valeur ayant un retard x. Les retards pour lesquels la corrélation partielle sort des bandes de Bartlett sont les candidats à retenir pour évaluer la saisonnalité.

⁴⁷ Test de Dickey-Fuller augmenté : voir Annexe B.

Sample: 1996M01 2014M12
 Included observations: 227

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.020	-0.020	0.0946 0.758
		2	-0.036	-0.036	0.3921 0.822
		3	-0.023	-0.024	0.5114 0.916
		4	-0.092	-0.095	2.4935 0.646
		5	-0.154	-0.162	8.0600 0.153
		6	0.284	0.276	27.015 0.000
		7	-0.144	-0.171	31.925 0.000
		8	-0.081	-0.084	33.495 0.000
		9	-0.037	-0.062	33.828 0.000
		10	-0.018	-0.002	33.903 0.000
		11	-0.029	0.025	34.101 0.000
		12	0.513	0.431	97.754 0.000
		13	-0.119	-0.135	101.18 0.000
		14	-0.052	-0.020	101.85 0.000
		15	-0.117	-0.148	105.22 0.000
		16	-0.096	-0.035	107.49 0.000
		17	-0.107	-0.013	110.32 0.000
		18	0.222	-0.009	122.57 0.000
		19	-0.140	-0.042	127.44 0.000
		20	-0.083	-0.083	129.17 0.000
		21	-0.026	0.019	129.34 0.000
		22	-0.016	-0.035	129.41 0.000
		23	-0.092	-0.115	131.57 0.000
		24	0.485	0.287	191.82 0.000
		25	-0.037	0.059	192.18 0.000
		26	-0.002	0.072	192.18 0.000
		27	-0.041	0.025	192.62 0.000
		28	-0.090	-0.086	194.72 0.000
		29	-0.140	-0.035	199.85 0.000
		30	0.222	-0.002	212.85 0.000
		31	-0.156	-0.082	219.31 0.000
		32	-0.142	-0.130	224.69 0.000
		33	-0.057	-0.083	225.55 0.000
		34	-0.025	-0.015	225.71 0.000
		35	-0.040	0.034	226.14 0.000
		36	0.412	0.045	272.41 0.000

Figure 34 : Auto-corrélogramme des rendements de l'IPCF sur la période étudiée

Nous constatons sur l'auto-corrélogramme que les rendements de l'IPCF au moment t sont corrélés avec les rendements 6 mois avant, 12 mois avant et 24 mois avant. Les rendements de l'IPCF ne semblent donc pas être un processus stationnaire, ce qui indique qu'une saisonnalité est possible. Une saisonnalité annuelle (retard 12 et 24) serait alors remarquable, ce qui confirme la logique (chaque mois de l'année aurait un niveau d'inflation particulier).

Null Hypothesis: TAUX_FRANCE has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 11 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.614775	0.0915
Test critical values:	1% level	-3.460739	
	5% level	-2.874804	
	10% level	-2.573917	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(TAUX_FRANCE)

Method: Least Squares

Date: 02/16/15 Time: 14:54

Sample (adjusted): 1997M02 2014M12

Included observations: 215 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TAUX_FRANCE(-1)	-0.666320	0.254829	-2.614775	0.0096
D(TAUX_FRANCE(-1))	-0.318080	0.242004	-1.314362	0.1902
D(TAUX_FRANCE(-2))	-0.337164	0.227286	-1.483438	0.1395
D(TAUX_FRANCE(-3))	-0.342564	0.211868	-1.616875	0.1075
D(TAUX_FRANCE(-4))	-0.389248	0.195847	-1.987514	0.0482
D(TAUX_FRANCE(-5))	-0.484774	0.180727	-2.682359	0.0079
D(TAUX_FRANCE(-6))	-0.321657	0.167936	-1.915355	0.0569
D(TAUX_FRANCE(-7))	-0.410699	0.146204	-2.809081	0.0055
D(TAUX_FRANCE(-8))	-0.443058	0.127025	-3.487966	0.0006
D(TAUX_FRANCE(-9))	-0.481536	0.108125	-4.453504	0.0000
D(TAUX_FRANCE(-10))	-0.481961	0.087637	-5.499504	0.0000

D(TAUX_FRANCE(-11))				
C	-0.472579	0.063735	-7.414770	0.0000
R-squared	0.678791	Mean dependent var	-5.76E-06	
Adjusted R-squared	0.659709	S.D. dependent var	0.004407	
S.E. of regression	0.002571	Akaike info criterion	-9.030647	
Sum squared resid	0.001335	Schwarz criterion	-8.826841	
Log likelihood	983.7945	Hannan-Quinn criter.	-8.948300	
F-statistic	35.57285	Durbin-Watson stat	1.844501	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Figure 35 : Résultats du test de Dickey-Fuller augmenté

Le test de Dickey-Fuller augmenté ne nous donne ici qu'une demi-indication. En effet, la p-value de 0,0915 nous fait hésiter : nous pouvons rejeter l'hypothèse d'existence de racine-unité en prenant une marge d'erreur de 10% mais pas avec une marge d'erreur classique de 5%.

4.3.2 Ajustement de convexité

La saisonnalité avérée de l'inflation mensuelle entraîne nécessairement une correction dans les prévisions des forward de l'indice inflation. Bloomberg nous fournit les chiffres suivants pour la saisonnalité de l'inflation (évaluée au 17/02/2015) :

Mois	Historique	Normalisée
Jan	-0.003987	-0.004970
Feb	0.004581	0.003598
Mar	0.006799	0.005815
Apr	0.001113	0.000130
May	0.000411	-0.000573
Jun	0.000449	-0.000535
Jul	-0.003703	-0.004686

Aug	0.004675	0.003691
Sep	-0.002096	-0.003079
Oct	0.000562	-0.000421
Nov	-0.000227	-0.001210
Dec	0.003224	0.002241

Tableau 21 : Saisonnalité de l'inflation évaluée au 17/02/2015

On retrouve les tendances observées dans le paragraphe précédent :

- Baisse notable ($< -0,3\%$) de l'inflation mensuelle en Janvier et Juillet (période de soldes)
- Augmentation notable ($> 0,2\%$) de l'inflation mensuelle en Février, Mars, Août et Décembre (vacances, achats de Noël)

A partir de ces données de saisonnalité, il faut déduire des ajustements de convexité à appliquer à la courbe des forwards estimés. Nous ne détaillons pas ici la méthode de calcul des ajustements. La méthode se rapproche de celle utilisée pour les ajustements vus dans la section précédente pour les CMS. Bloomberg nous indique les résultats suivants :

Tenor	Ajustement convexité (bp)
1 YR	0.00
2 YR	1.18
3 YR	1.54
4 YR	1.55
5 YR	1.62
6 YR	2.09
7 YR	2.54
8 YR	3.31
9 YR	4.03
10 YR	4.71
12 YR	5.15

15 YR	4.59
20 YR	6.57
25 YR	7.97
30 YR	9.36

Tableau 22 : Ajustements de convexité à appliquer sur les forwards inflation (au 17/02/2015)

L'ajustement de convexité de l'inflation est important et plus conséquent que l'ajustement CMS. Un ajustement de 5bps en moyenne sur un swap de 10M€ et de maturité 30 ans entraîne un écart de prix d'environ 100k€.

4.3.3 Modèle statistique de prévision d'inflation

A partir des résultats précédents et dans le but de valoriser des produits ayant besoin de valeurs futures de l'inflation, nous allons chercher à modéliser l'inflation à partir de données historiques.

- Normalité des rendements

Nous débutons par l'analyse des statistiques usuelles sur la série des rendements de l'IPCF.

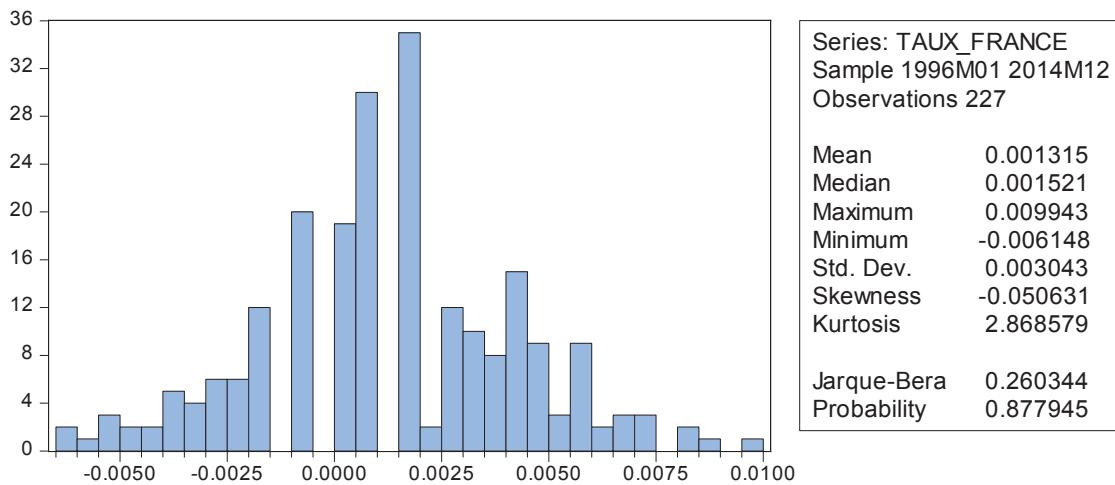


Figure 36 : Statistiques usuelles et test de Jarque-Bera sur l'échantillon étudié

Nous remarquons que sur l'échantillon des 227 observations, les tests de normalité ne peuvent pas rejeter la normalité de la distribution :

- Le skewness est très proche de 0 avec une valeur de -0.05. Cela indique que la distribution n'a pas d'asymétrie prononcée.
- Le kurtosis est très proche de 3 (valeur pour une distribution gaussienne) avec 2.87. Cela indique que la queue de distribution n'est ni plus fine ni plus épaisse que celle d'une loi normale.
- La p-value du test de Jarque-Bera est très élevée à 0.88 et ne permet pas de rejeter l'hypothèse H_0 de normalité des rendements.

Le graphique suivant, qui superpose le lissage Kernel issu de l'échantillon et une loi normale théorique, confirme visuellement les tests statistiques précédents :

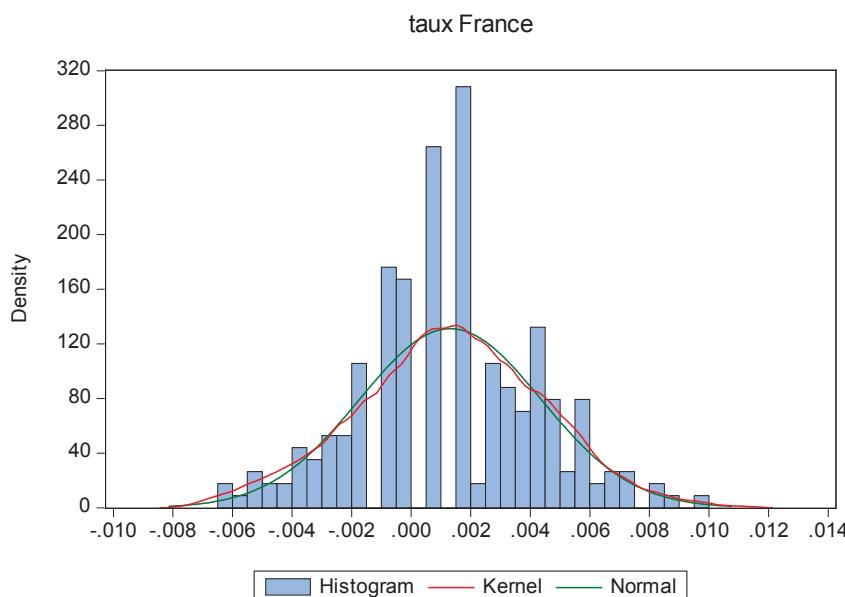


Figure 37 : Comparaison entre la distribution de l'échantillon et une distribution gaussienne

Une première possibilité pour prévoir l'inflation pourrait donc être la supposition que la distribution des rendements mensuels est purement gaussienne et pourrait être prévue par des méthodes de simulation de suites aléatoires. Mais cela ne permettrait pas de prendre en compte les corrélations fortes entre les rendements et les rendements avec retard 6, 12 et 24. Nous nous tournons donc vers un modèle auto-régressif (AR).

- Modèle ARMA

Nous envisageons suite aux résultats des tests précédents de construire un modèle auto-régressif (AR) de prévision de l'inflation. Après étude des résultats intermédiaires, nous proposons finalement un modèle ARMA.

- Construction du modèle

Un modèle ARMA intègre des retards (AR=Auto Regressive) et une moyenne mobile (MA=Moving Average). Voici la forme d'un modèle ARMA(p,q) :

$$X(t) = \sum_{i=1}^p \alpha(i) \cdot X(t-i) + \sum_{j=1}^q \beta(j) \cdot \varepsilon(t-j) + \varepsilon(t)$$

Où on suppose que les erreurs $\varepsilon(t)$ sont distribuées selon une loi normale (0,1).

Nous construisons notre modèle en intégrant les retards 6, 12 et 24 repérés sur l'auto-corrélogramme. Le bien-fondé du choix de ces retards est confirmé lorsque l'on effectue une méthode « backward » en sélectionnant tous les retards et en éliminant un à un les moins significatifs.

Dependent Variable: TAUX_FRANCE
 Method: Least Squares
 Date: 02/16/15 Time: 15:41
 Sample (adjusted): 1998M02 2014M12
 Included observations: 203 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: 1998M01

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(6)	0.134052	0.055821	2.401435	0.0173
AR(12)	0.380445	0.066412	5.728571	0.0000
AR(24)	0.367560	0.066259	5.547335	0.0000
MA(1)	0.148731	0.070791	2.100986	0.0369
R-squared	0.427307	Mean dependent var		0.001352
Adjusted R-squared	0.418674	S.D. dependent var		0.003117
S.E. of regression	0.002377	Akaike info criterion		-9.226844
Sum squared resid	0.001124	Schwarz criterion		-9.161559
Log likelihood	940.5246	Hannan-Quinn criter.		-9.200432
Durbin-Watson stat	2.002860			
Inverted AR Roots	.99 .85-.49i .50-.86i .00-.98i .50+.86i .85-.49i	.90+.24i .66+.66i .25+.90i -.25+.90i -.66-.66i -.90+.24i	.90-.24i .66-.66i .25-.90i -.25-.90i -.66+.66i -.90-.24i	.85+.49i .50+.86i -.00+.98i -.50-.86i -.85+.49i -.99
Inverted MA Roots	-.15			

Figure 38 : Résultats d'une modélisation ARMA(4,1) des rendements de l'IPCF avec les retards 6, 12 et 24.

Le modèle proposé ici pour l'inflation est le suivant :

$$IPCF(t) = 0,134 \cdot IPCF(t-6) + 0,380 \cdot IPCF(t-12) \\ + 0,368 \cdot IPCF(t-24) + \varepsilon(t-1) + \varepsilon(t)$$

Tous les coefficients ont une p-value inférieure à 5%, donc nous rejetons l'hypothèse de nullité (et de non-significativité) pour chacun des coefficients.

Le R^2 donne l'efficacité du modèle. Ici sa valeur de 0.42 indique que le modèle explique 42% de la variance de l'indice étudié. Il s'agit d'un résultat à la fois significatif et logique puisque l'inflation dépend certes de son historique mais aussi de beaucoup d'autres facteurs conjoncturels macro-économiques.

- Validité du modèle

Pour vérifier la validité du modèle ARMA, il faut s'assurer que l'hypothèse de stabilité de la variance (homoscédasticité) est bien vérifiée. En effet, dans le cas contraire, le modèle devrait être modifié de façon à modéliser également la variance en fonction du temps, des rendements et/ou des erreurs précédent(e)s.

Plusieurs tests statistiques existent pour vérifier cette hypothèse. En particulier, nous détaillons le fonctionnement du test de White (1980) :

- Hypothèses : on cherche à vérifier l'hypothèse H_0 : la variance σ^2 est constante. L'hypothèse H_1 est : la variance σ^2 n'est pas constante.
- Statistique de test :

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.081568	Prob. F(1,200)	0.7755
Obs*R-squared	0.082351	Prob. Chi-Square(1)	0.7741

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 02/16/15 Time: 15:45

Sample (adjusted): 1998M03 2014M12

Included observations: 202 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.45E-06	8.17E-07	6.664193	0.0000
RESID^2(-1)	0.020185	0.070674	0.285602	0.7755
R-squared	0.000408	Mean dependent var	5.56E-06	
Adjusted R-squared	-0.004590	S.D. dependent var	1.02E-05	
S.E. of regression	1.02E-05	Akaike info criterion	-20.13988	
Sum squared resid	2.08E-08	Schwarz criterion	-20.10712	
Log likelihood	2036.128	Hannan-Quinn criter.	-20.12663	
F-statistic	0.081568	Durbin-Watson stat	2.000060	
Prob(F-statistic)	0.775479			

Heteroskedasticity Test: White

F-statistic	0.466052	Prob. F(10,192)	0.9103
Obs*R-squared	4.810753	Prob. Chi-Square(10)	0.9035
Scaled explained SS	7.730327	Prob. Chi-Square(10)	0.6552

Figure 39 : Résultats des tests d'hétéroscédasticité sur le modèle ARMA(4,1)

La p-value du test de White est largement supérieure à la marge d'erreur $\alpha=5\%$, donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse de stabilité de la variance. Le modèle est bien homoscédastique et on peut valider le modèle ARMA présenté ci-dessus. Une modélisation GARCH n'est pas nécessaire.

Par ailleurs, la validité du modèle présenté est confirmée par le test de Ljung Box⁴⁸ dont nous pouvons voir la p-value pour chaque lag sur l'auto-corrélogramme des résidus. Le test de LB est un test global sur les coefficients d'autocorrélation avec une hypothèse H_0 de nullité conjointe de ces coefficients entre le retard 1 et le retard H considéré. Nous voyons ici que l'hypothèse H_0 est systématiquement non-rejetée : les résidus ne sont pas corrélées dans le temps et aucun retard supplémentaire n'est à intégrer dans le modèle ARMA.

4.3.4 Valorisation de swap inflation (Numerix)

Nous passons maintenant à l'étape de valorisation d'un produit structuré de A. Nous réalisons cette valorisation dans Numerix et prenons en compte l'ajustement lié à la saisonnalité.

Le produit choisi présente les caractéristiques suivantes :

- Maturité : 19/06/2028
- Notionnel : 68M€ (non amortissable)
- Indice variable : EURIBOR 3M + 1%
- Fréquence coupon variable : 3M
- Structure : voir ci-dessous
- Fréquence structure : 1Y

⁴⁸ Test de Ljung-Box : voir Annexe B

Le pay-off de la structure est défini comme ceci :

$$\text{Taux coupon r i a ble emax} \left(3\% ; 2,40\% + \left(\frac{IPCF(t)}{IPCF(t-1)} - 1 \right) \right)$$

En se basant sur les données Bloomberg et un modèle de Hull-White appliqué à l'inflation :

	CPT	Tradix	Numerix sans ajustement	Numerix avec ajustement
Valorisation	27 674 710,58	25 376 857,77	27 212 288,67	27 892 445,78
Ecart		2 297 852,81	462 421,91	217 735,20
Réduction écart			80%	91%

Tableau 23 : Résultats de valorisation d'un swap structuré inflation dans Excel

Nous constatons que la valorisation dans Numerix améliore notablement la valorisation par rapport à celle effectuée dans le logiciel Tradix. **La réduction de l'écart obtenue est de 91%, ce qui est satisfaisant.**

L'importance de l'ajustement de convexité dû à la saisonnalité est soulignée dans cet exemple puisqu'il permet de corriger la valorisation de 11% d'écart supplémentaire.

4.4 Etude sur l'effet bi-courbe

Une autre préconisation présente dans le rapport d'audit de D est la mise en place de la valorisation bi-courbe. Ce principe a été récemment développé par la plupart des grands établissements financiers pour la valorisation de leur portefeuille de dérivés.

Dans la méthode classique de valorisation d'un swap (dite mono-courbe), les flux futurs sont estimés sur la base de la courbe EURIBOR et actualisés sur la même courbe. Dans la méthode bi-courbe, il s'agit de reconnaître le fait que le collatéral de swap est en fait rémunéré à EONIA et non à EURIBOR. Cela entraîne deux effets :

- Un ajustement de l'EURIBOR
- Un changement de courbe d'actualisation : passage sur EONIA.

Auparavant, cette distinction ne constituait pas un enjeu puisque les courbes EONIA et EURIBOR étaient extrêmement proches. Mais depuis la crise, les spreads de taux se sont fortement écartés entre ces deux indices, et la valorisation bi-courbe devient réellement différente de la valorisation classique.

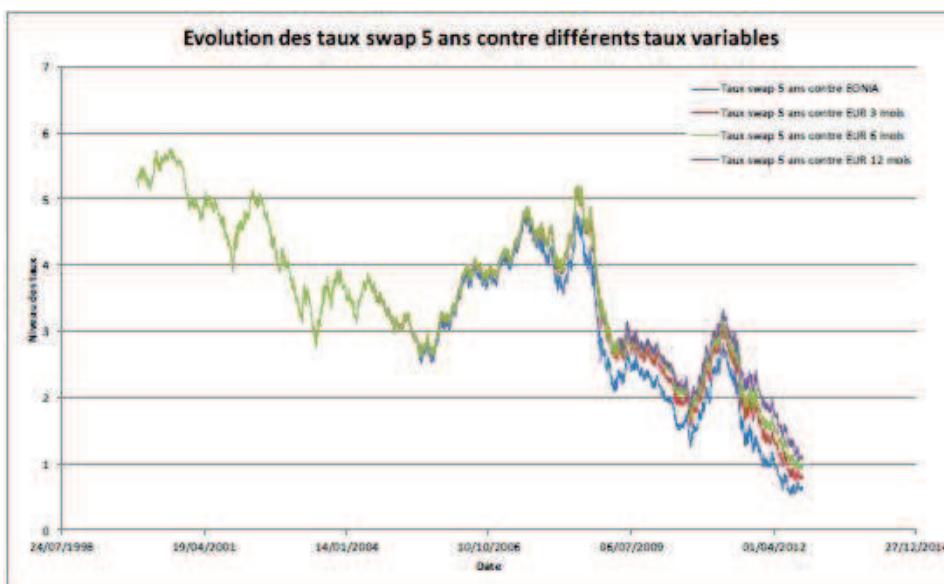


Figure 40 : Comparaison des courbes EONIA et EUR 3M, EUR 6M et EUR 12M

- Ajustement du forward EURIBOR

En mono-courbe, il est aisé de calculer les taux forward à partir des taux swaps du marché, grâce aux techniques de bootstrapping et des méthodes d'interpolation.

En effet, la relation entre le taux forward et le facteur d'actualisation EURIBOR dans un cadre mono courbe s'écrit, en l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$(1 + ZC_{i-1}^{EURI} * T_{i-1}) * (1 + f_{i-1,i}^{EURI} * A_i) = (1 + ZC_i^{EURI} * T_i)$$

Le taux forward est alors égal à :

$$f_{i-1,i} = \left[\frac{(1 + ZC_i^{EURI} * T_i)}{(1 + ZC_{i-1}^{EURI} * T_{i-1})} - 1 \right] * \frac{1}{A_i}$$

ZC_i^{EURI} est le facteur d'actualisation pour la période i calculé à partir de la courbe Euribor et $f_{i-1,i}$ le taux forward de maturité i calculé à partir de la courbe Euribor.

Une actualisation au taux EONIA entraîne mécaniquement un ajustement dans le calcul du taux Euribor forward pour obtenir une valorisation nulle du swap à l'initiation du contrat. Aussi, l'équation utilisée dans l'approche mono-courbe ne peut plus s'appliquer.

Le forward ajusté est calculé de sorte que les deux jambes au pair soient bien égales :

$$Taux_{SWAP_i} \sum_{j=1}^i DF_j^{EONIA} * A_j = \sum_{j=1}^i f_{j-1,j}^{Adj} * DF_j^{EONIA} * A_j$$

Le taux forward dans une approche bi courbe est alors égal à :

$$f_{i-1,i}^{Adj} = \frac{[Taux_{SWAP_i} \sum_{j=1}^i DF_j^{EONIA} * A_j - \sum_{j=1}^{i-1} f_{j-1,j}^{Adj} * DF_j^{EONIA} * A_j]}{DF_i^{EONIA} * A_i}$$

Avec $D F_i^{\text{EONIA}}$ le facteur d'actualisation pour la période i calculé à partir de la courbe EONIA et $f_{i-1,i}^{\text{Adj}}$ le taux zéro forward ajusté de maturité i calculé à partir de la courbe Euribor.

- Actualisation sur la courbe EONIA

Une fois les flux futurs estimés, l'actualisation se fait simplement sur la courbe des DF EONIA au lieu d'être sur la courbe des DF EURIBOR.

- Impact chiffré sur la valorisation

Nous commençons par nous intéresser au cas général avant de mesurer les impacts dans le cas particulier du groupe A.

- Effet bi-courbe dans le cas général

Dans une étude menée par le cabinet de conseil ESTER et publiée dans sa lettre de mai 2014, on trouve une étude d'impact de la valorisation bi-courbe pour des swaps receveurs de taux fixe 5% et de nominal 10M€, avec différentes maturités.

Le changement de valorisation est résumé dans le tableau ci-dessous :

TF 5% vs EUR6M	Mono-courbe (EUR 6M)	Bi-courbe (EONIA / EUR 6M)	Ecart	% ecart
5Y	1 945 146	1 965 772	20 627	1,1%
10Y	2 939 062	2 990 889	51 827	1,8%
15Y	3 577 087	3 659 780	82 693	2,3%
20Y	4 300 339	4 419 855	119 516	2,8%
25Y	4 994 681	5 151 594	156 914	3,1%
30Y	5 595 713	5 788 735	193 022	3,4%

Tableau 24 : Impact estimé de la valorisation bi-courbe

Nous constatons que l'augmentation de valorisation se situe entre 1% et 3,4% selon la maturité. L'impact est donc non-négligeable et justifie la mise en place

de cette méthode de manière généralisée. Rappelons que dans le cas d'un swap payeur de TF, l'effet est exactement opposé.

Le cabinet en déduit une formule empirique d'approximation de l'effet bicourbe :

Effet Bicourbe

$$\begin{aligned}
 &= (EONIA - EUR \text{ 6M}) * \text{Duration} \\
 &\quad * \text{Valorisation du swap}
 \end{aligned}$$

Voyons désormais comment se comporte le portefeuille de dérivés de A.

- Effet sur un swap du portefeuille de A

Nous étudions l'écart entre les deux méthodes de calcul sur un exemple présent en portefeuille de A. Le contrat de swap (swap vanille) a les caractéristiques suivantes :

- Notionnel : 50M€
- Devise : EUR
- Date de début : 31/12/2013
- Date de fin : 31/12/2063
- Coupon Fixe (TF) : 2,732%
- Fréquence de coupon fixe : 12M
- Indice du Coupon Variable : EURIBOR 6M
- Fréquence du coupon variable : 6M
- Spread de la jambe variable : 0bp

A partir des courbes EURIBOR 6M et EONIA évaluées à la date de valorisation, nous pouvons recalculer tous les flux futurs estimés ainsi que les Discount Factors d'actualisation. Nous comparons les résultats des deux méthodes pour deux dates de valorisation :

		BICOURBE	MONOCOURBE	Ecart

31/05/2014	Jambe R	43 110 693,38	41 492 535,97	1 618 157,41
	Jambe P	- 35 725 031,08	- 34 253 465,93	- 1 471 565,15
	Valorisation	7 385 662,30	7 239 070,04	146 592,26
31/08/2014				
	Jambe R	48 134 361,00	46 076 677,57	2 057 683,43
	Jambe P	- 31 845 069,72	- 30 318 931,44	- 1 526 138,28
	Valorisation	16 289 291,28	15 757 746,13	531 545,15

Tableau 25 : Impact de la valorisation bi-courbe sur un swap A

L'augmentation de l'écart de valorisation entre les deux méthodes provient de l'écartement du spread entre le 31/05/2014 et le 31/08/2014 (environ 3bps de spread supplémentaire sur l'ensemble de la courbe).

Nous voyons que l'effet bi-courbe est bien sensible à la duration (augmente avec la maturité) et à l'écartement du spread (EURIBOR-EONIA), mais nous ne pouvons pas vérifier la formule d'approximation vue au paragraphe précédent. Le second facteur (spread) semble avoir une influence plus importante que la duration.

- Effet bi-courbe sur le portefeuille de A

Nous passons à l'étude d'impact global sur le portefeuille des swaps vanilles du groupe A.

	31/12/2014	28/02/2015
Effet EURIBOR Ajusté	-14,1	-14
Effet Actualisation		
EONIA	5,3	-1,5
TOTAL Effet Bicourbe	-8,8	-15,5

Tableau 26 : Résultat d'impact bi-courbe sur l'ensemble du groupe A au 31/12/2014

et 28/02/2015

Le résultat du calcul de l'effet bi-courbe conduit à la passation d'une provision de résultat au niveau global du groupe A pour représenter la différence de valorisation liée au changement de méthode. Le changement de méthode de

valorisation vient donc directement affecter de façon conséquente le résultat de l'entreprise.

L'approche réalisée de la sensibilité permet de simuler les impacts d'un effet de variation des taux et d'un effet d'écartement des spreads sur l'évolution de la bicoûte:

- une diminution de 10 bps des taux de marché entraîne une perte nette de 2,8M€
- une augmentation de 1bp des spread Euribor/Eonia entraîne une perte de 0,5M€.

Cette connaissance de la sensibilité permettra à l'entreprise A de mieux adapter sa politique de couverture et de gestion du risque de taux, en tenant compte du coût réel lié aux swaps mis en place.

Conclusion

Nous avons dans une première partie exposé les enjeux d'une bonne valorisation des produits dérivés, avant de présenter le modèle utilisé actuellement par A et les problématiques liées à ses limites. Puis à partir d'une modélisation stochastique de la volatilité et de la structure des taux d'intérêt, nous avons mis en place les éléments théoriques permettant d'améliorer la valorisation des produits dérivés structurés posant problème. Enfin, nous avons présenté des méthodes de valorisation propres aux produits structurés particuliers au portefeuille de A (Helvetica, Spread Options CMS, Inflation). Dans cette dernière partie, nous avons aussi mis en place dans Excel et dans l'outil Numerix les modèles appropriés et obtenu des valorisations bien plus satisfaisantes que celles fournies auparavant par le logiciel Tradix.

L’étude théorique des différents modèles ainsi que les enseignements tirés de leur implémentation nous ont permis d’appréhender les enjeux du risque de modèle et de l’arbitrage entre précision du modèle et faisabilité de la mise en pratique. Nous avons pu à travers ces différents modèles mettre les théories apprises au cours des études supérieures au service d'un objectif professionnel aux enjeux réels. Les études économétriques ainsi que la mise en place (calibration et simulation) de modèles de diffusion stochastique en sont l’illustration.

Les résultats en termes d’efficacité de la valorisation et de possibilité d’exploitation pour l’établissement financier A sont satisfaisants puisque les valorisations obtenues dans la dernière partie de l’exposé affichent une réduction très conséquente des écarts avec les valorisations fournies par les contreparties (de l’ordre de 90%). Les enjeux directement impactés sont importants au niveau de la maîtrise des risques et du pilotage des couvertures notamment via les calculs des appels de marge ou encore de l’exposition au défaut.

Il pourrait être intéressant d’aller encore plus loin en termes de complexification des modèles stochastiques, domaine toujours en évolution et en construction pour les professionnels des risques financiers. Alors que ce mémoire se concentrat sur la valorisation et ses enjeux, ces travaux pourraient être également orientés en vue de conclusions pratiques liées à la gestion des risques de marché à travers les grecques (delta, gamma, vega etc...).

Bibliographie

ANTONOV A. & KONIKOV M. & SPECTOR M. (2015) : The Free Boundary SABR: Natural Extension to Negative Rates (Research Paper, SSRN)

Basel Committee on Banking Supervision (2014) : The standardized approach for measuring counterparty credit risk exposures (International Settlement)

BATES D. S. (1996) : Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options (The Review of Financial Studies, 9)

BERGOMI L. (2005) : Smile dynamics ii (Risk Magazine, 18)

BLACK F. & SCHOLES M. (1973) : The Pricing of Options and Corporate Liabilities (Journal of Political Economy, 81)

BRIGO D. & MERCURIO F. (2006) : Interest Rate Models – Theory and Practice (Springer Verlag)

Cabinet ESTER (2014) : Lettre d'Information – Mai 2014

CARR. P. (2005) : Continuous Time Finance, Chapitre 10 : Interest Rate Models: Hull White (Cours de Mathématiques à l'Université de New-York, NYU)

COX J. C. & INGERSOLL JR. & ROSS S. A. (1985) : An intertemporal general equilibrium model of asset prices (Econometrica, 53)

COX J. C. (1975) : Notes on option pricing I : Constant Elasticity of Variance diffusions (Research, Stanford University)

COX J. C. (1996) : The Constant Elasticity of Variance option pricing model (Journal of Portfolio Management, 22)

DEMETTRE S. (2007) : Four Generations of Asset Pricing Models and Volatility Dynamics (Thèse de Mathématiques à l'Université TU Kaiserslautern)

DUPIRE B. (1993) : Pricing and hedging with smiles (Conférence à La Baule)

DUPIRE B. (1994) : Pricing with a smile (Risk Magazine, 7)

EL KAROUI N. (2003) : Couverture des risques dans les marchés financiers (Cours de Finance & Probabilité, Université Paris VI)

ENGLE R. F. (1982) : Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation (Econometrica, 50)

FARES C. (2008) : Estimation et Prévision de la volatilité de l'indice S&P 500 (Maîtrise en Administration des Affaires, Université du Québec)

FAUTH A. (2014) : Modèles de Taux, Surface de Volatilité et Introduction au Risque de Crédit (Master de Mathématiques et Finance, Université Lille I)

GARMAN M. B. & KOHLHAGEN S. W. (1983) : Foreign Currency Options values (Journal of International Money and Finance, 2)

GATHERAL J. (2006) : The Volatility Surface : A Practitioner's Guide (Wiley Finance)

GAUTHIER P. & RIVAILLE P. Y. (2009) : Fitting the smile : Smart Parameters for SABR and Heston (Working Paper, SSRN)

HAGAN P. S. & KUMAR D. & LESNIEWSKI A. S. & WOODWARD D. E. (2002) : Managing the smile (Wilmott Magazine)

HAGAN P. S. & WOODWARD D. E. (1999) : Equivalent Black volatilities (Applied Mathematical Finance)

HENRY-LABORDERE P. (2005) : A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models (Cornell University)

HESTON S. L. (1993) : A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options (Review of Financial Studies)

HULL J. & WHITE A. (1987) : The pricing of options on assets with stochastic volatilities (The Journal of Finance)

HULL J. (2005) : Options, Futures and Other Derivatives (Prentice Hall)

INDJEHAGOPIAN J. P. (2012) : Econométrie Appliquée à la Finance (Cours d'Econométrie, à l'ESSEC Business School)

LAKEHAL S. (2013) : Modèles de Taux (Cours à l'ISUP, Université Paris VI)

LESNIEWSKI A. (2008) : Interest Rate and Credit Models, Chapitre 2 : The Volatility Cube & Chapitre 4 : Convexity & Chapitre 5 : Short rate models (Cours de Mathématiques à l'Université de New-York, NYU)

MIKHAILOV S. & NOGEL U. (2003) : Heston's stochastic volatility model implementation, calibration and some extensions (Wilmott Magazine)

OULD ALY M. (2011) : Modélisation de la courbe de variance et modèles de volatilité stochastique (Thèse de Mathématiques Appliquées, Université Paris-Est)

RACICOT F. E. & THEORET R. (2006) : Finance Computationnelle et Gestion des Risques, chapitre Programmes de volatilité stochastique et de volatilité

implicite : applications Visual Basic (Excel) et Matlab (Presses de l'Université du Québec)

SCHRODER M. (1989) : Computing the constant elasticity of variance option pricing formula (The Journal of Finance, 44)

TANKOV P. (2014) : Surface de volatilité (Cours à l'Université Paris-Diderot Paris VII)

XIONG C. (2013) : Introduction to Interest Rate Models (Cours de l'Université d'Utah)

YANG. Y (2013) : Valuing a European Option with the Heston Model (Thèse de Master en Sciences Mathématiques, Rochester Institute of Technology)

ANNEXES

Annexe A : Définitions (Finance de Marché)

- Swap

Un swap est un contrat financier qui permet d'échanger un taux A contre un taux B. A chaque date de coupon, une partie paye le taux A sur un nominal N et l'autre partie paye le taux B sur le même nominal N. A l'origine du contrat, la valeur d'un swap est nulle.

Il existe des swaps de divers types, dont des swaps de :

- Taux : échange d'un taux fixe et d'un taux variable
- Devise : échange de taux fixes ou variables en devises différentes
- Crédit (CDS) : échange des flux liés à un crédit et d'un taux fixe ou variable

- Option

Une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée.

- Option vanille/exotique

Une option vanille est une option ayant un pay-off simple, bien connue des investisseurs et facilement valorisable. A l'inverse, une option exotique (ou structurée) est une option au pay-off complexe, c'est une combinaison ou un mix d'options vanilles ou une création totalement nouvelle d'un nouveau type de pay-off. Les options vanilles s'échangent en général sur les marchés organisés alors que les options exotiques sont traitées de gré-à-gré (OTC).

- EURIBOR, EONIA

L'EURIBOR désigne un groupe de taux d'intérêt de la devise Euro largement utilisés en Europe. Ils sont, avec l'EONIA, les principaux taux de référence du marché monétaire de la zone euro. Le nom EURIBOR est formé à partir de la contraction des mots anglais EURo InterBank Offered Rate, soit en français : Taux InterBancaire offert en EURo (TIBEUR).

L'EURIBOR est, pour une échéance donnée (par exemple : trois mois, souvent noté EUR3M), le fixing calculé chaque jour ouvré à 11h, heure française, publié par la Fédération bancaire de l'Union européenne (FBE), d'un taux moyen auquel un échantillon de 43 grandes banques établies en Europe prêtent en blanc (c'est-à-dire sans que le prêt ne soit gagé par des titres) à d'autres grandes banques.

L'EONIA (Euro OverNight Index Average) est le taux de référence quotidien des dépôts interbancaires en blanc (c'est-à-dire sans être gagés par des titres) effectués au jour-le-jour dans la zone euro.

- Appels de marge, Contrat de collatéral

On appelle « collatéral » l'ensemble des actifs, titres ou liquidités, remis en garantie par la contrepartie débitrice à la contrepartie créitrice afin de couvrir le risque de crédit résultant des transactions financières négociées entre deux parties. En cas de défaillance du débiteur, le créiteur a le droit de conserver les actifs remis en collatéral afin de se dédommager de la perte financière subie.

Sur les marchés organisés, c'est la chambre de compensation qui gère les comptes de collatéraux des contreparties. Elle procède à un appel de marge lorsqu'un intervenant est en perte potentielle.

- Taux sans-risque

Un taux sans risque dans une devise et pour une période particulière est le taux d'intérêt constaté sur le marché des emprunts d'État de pays considérés solvables et d'organisations intergouvernementales pour la même devise et la même

période. Théoriquement, ces emprunts sont immunisés contre le risque de défaut d'où l'appellation de taux sans-risque.

- Modèle de Black-76

La formule de Black est similaire à la formule de Black-Scholes (1973) pour la valorisation des Equity sauf que le prix du sous-jacent est remplacé par le prix actualisé du contrat « future » F . Elle est utilisée pour les produits de Taux d'Intérêt.

Avec les mêmes notations que pour la formule de Black-Scholes, on a le prix suivant du call sur taux d'intérêt (caplet) :

$$C = e^{-rT} \cdot [F \cdot N(d1) - K \cdot N(d2)]$$

Avec $d1$ et $d2$ tels que :

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

- Exotiques : Reverse Cliques, Napoleons, Accumulators
 - Reverse Cliques

Option dont le pay-off est :

$$\max \left\{ 0; C + \sum_{i=1}^n (r_i; 0) \right\}$$

Où les r_i sont des rendements mensuels de l'indice sous-jacent choisi

- Napoleons

Option dont le pay-off est :

$$\max \left\{ 0; C + \min_{1 \leq i \leq 12} r_i \right\}$$

Où les r_i sont des rendements mensuels de l'indice sous-jacent choisi

- Accumulators

Option dont le pay-off est :

$$\max \left\{ 0; C + \sum_{i=1}^n \max \left((r_i; cap); floor \right) \right\}$$

Où les r_i sont des rendements mensuels de l'indice sous-jacent choisi ; et cap/floor des taux fixes ou indices variables.

Annexe B : Définitions (Econométrie)

- Test statistique

En statistiques, un test d'hypothèse est une démarche consistant à rejeter ou à ne pas rejeter une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle H_0 , en fonction d'une série de données (échantillon). Il s'agit de statistique inférentielle : à partir de calculs réalisés sur des données observées, nous émettons des conclusions sur la population, en leur rattachant des risques de se tromper.

- Erreur de première espèce et de deuxième espèce

Il y a deux façons de se tromper lors d'un test statistique :

- rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie. On appelle ce risque le risque de première espèce et on note α la probabilité de se tromper dans ce sens.
- retenir l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse. On appelle ce risque le risque de deuxième espèce et on note β la probabilité de se tromper dans ce sens.

Dans nos tests, on prendra souvent $\alpha=5\%$ (seuil usuel).

- T-stat

En considérant que β' est l'estimateur d'un paramètre β inconnu dans un modèle statistique, alors la t-statistique est une variable de décision de la forme générale :

$$t = \frac{\beta' - \beta}{S.E(\beta')}$$

Où $S.E(\beta')$ est l'écart-type de l'estimateur β' .

Elle permet de mesurer la « distance » entre l'estimateur $\hat{\beta}$ et une valeur supposée du vrai paramètre inconnu β .

- P-value

La p-value est la plus petite des valeurs de risque de première espèce pour lesquelles la décision est de rejeter H_0 . C'est le risque d'erreur qu'on a en rejetant H_0 . Par exemple, si on se fixe un risque maximal de première espèce $\alpha=5\%$, alors l'hypothèse nulle sera rejetée pour toutes les p-values inférieures à 5%.

- Test de Dickey-Fuller augmenté

Le test de Dickey-Fuller augmenté permet de détecter la présence ou non d'une racine unité dans le polynôme auto-régressif d'une série de données. L'hypothèse nulle H_0 est la non-stationnarité (présence de racine(s)-unité) tandis que l'alternative est la stationnarité (pas de racine unité).

- Test de Ljung-Box

Le test de Ljung-Box est un test global portant sur les résidus d'une modélisation ARIMA. Il permet de détecter des corrélations entre les résidus. Il teste l'hypothèse nulle H_0 de non-corrélation entre tous les résidus (ie d'indépendance) entre les lags 1 et h .

Sa statistique de référence obéit à la formule suivante :

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\rho_k^2}{n - k}$$

Et Q suit une loi du khi-2 à h degrés de liberté.

Annexe C : Méthodes Numériques

- Algorithme de dichotomie

La dichotomie est un processus itératif ou récursif de recherche où, à chaque étape, on coupe en deux parties un espace de recherche qui devient restreint à l'une de ces deux parties.

On considère une fonction f telle que:

- $f(a) < 0$
- $f(b) > 0$
- f est continue strictement croissante sur $[a;b]$ ($a < b$)

Une dichotomie permet de trouver rapidement la valeur y telle que $f(y) = 0$.

Marche à suivre :

- Partir du couple de valeurs (a, b) ;
- Évaluer la fonction en $(a+b)/2$;
- Si $f((a+b)/2) < 0$, remplacer a par $(a+b)/2$, sinon remplacer b par $(a+b)/2$;
- Recommencer à partir du nouveau couple de valeurs jusqu'à ce que la différence entre les deux valeurs soit inférieure à la précision voulue ε .

- Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est un algorithme efficace pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.

On va donc chercher à construire une bonne approximation d'un zéro de la fonction d'une variable réelle $f(x)$ en considérant son développement de Taylor au premier ordre.

On part d'un point x_0 appartenant à l'ensemble de définition de la fonction et on construit par récurrence la suite :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

où f' désigne la dérivée de la fonction f . Le point x_{k+1} est bien la solution de l'équation affine : $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$.

L'algorithme s'arrête quand $|f(x)| < \epsilon$; $\epsilon > 0$ fixé par l'utilisateur.

- Méthode du Simplexe

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Développé en 1947, c'est le premier algorithme permettant de minimiser une fonction sur un ensemble défini par des inégalités.

On suppose que le problème à résoudre est écrit sous la forme standard :

$$(P_L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_x \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions possibles est un polyèdre convexe, que l'on supposera non vide. La fonction \mathbf{c}^T est appelée fonction-coût. On peut montrer que lorsque le problème P_L a une solution, il a une solution sur un sommet du polyèdre convexe.

L'algorithme du simplexe est géométriquement très simple : chaque itération consiste à passer d'un sommet (face de dimension 0) du polyèdre convexe à un sommet adjacent en suivant une arête (face de dimension 1) particulière de ce polyèdre, de manière à faire décroître la fonction-coût.

- Méthode de Levenberg-Marquadt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt, ou algorithme LM, permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'une fonction, souvent non linéaire et dépendant de plusieurs variables.

Son application principale est la régression au travers de la méthode des moindres carrés : étant donné un certain nombre de paires de données (t_i, y_i) , on cherche le paramètre a de la fonction $f(t|a)$ de sorte que la somme des carrés des déviations $S(a)$ soit minimale :

$$S(a) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(t_i|a)]^2$$

La procédure de l'algorithme est itérative. On part d'un paramètre initial, que l'on suppose « assez proche » d'un minimum, et qui constituera le vecteur p de départ. Dans beaucoup de cas, un paramètre de départ « standard », tel que $p^T = (1, 1, \dots, 1)$ fonctionnera sans problème. Dans certains cas, il n'y a convergence que si le vecteur de départ n'est pas trop éloigné de la solution.

À chaque itération, on remplace p par une nouvelle estimation $p + q$. Afin de déterminer q , les fonctions $f_i(p + q)$ sont approchées en étant linéarisées :

$$f(p + q) \approx f(p) + Jq$$

où on a noté J la jacobienne de f en p .

À un minimum de la somme des carrés S , on a $\nabla_q S = 0$. En dérivant le carré de l'expression [1] de droite, qui s'annule donc, on obtient :

$$(JTJ)q = JT[y - f(p)]$$

d'où l'on tire aisément q en inversant JTJ .

Annexe D : Rappels de Mathématiques Stochastiques

- Processus stochastique

Un processus stochastique ou processus aléatoire représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

- Mouvement brownien

Le mouvement brownien unidimensionnel $B(t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique dépendant du temps t et vérifiant :

- Accroissements indépendants : Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B(t) - B(s)$ est indépendant du processus $B(u)_{0 \leq u \leq s}$ avant le temps s .
- Accroissements stationnaires et gaussiens : Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B(t) - B(s)$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $t-s$.
- $B(t)_{t \geq 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour presque toute réalisation, la fonction $B(t,w)$ est continue.

- Martingale

En calcul stochastique, une martingale désigne un type de processus stochastique, c'est-à-dire un processus aléatoire et dynamique. Ce type de processus X est tel que sa valeur espérée à une date future t connaissant l'information disponible à une certaine date s , dénotée $F(s)$, est la valeur à cette même date :

$$E(X(t)|F(s)) = X(s)$$

- Formule d'Itô

Un processus d'Itô est un processus stochastique de la forme :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s) \cdot ds + \int_0^t \sigma(s) \cdot dB(s)$$

Ou encore de façon équivalente, satisfaisant l'EDS :

$$dX(t) = \mu(t) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dB(t)$$

Avec $B(t)$ mouvement brownien.

Alors si $f(X(t), t)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} alors la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} d(f(X(t), t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) \cdot dX(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t) \cdot \sigma(t)^2 \cdot dt \end{aligned}$$

- Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov (1960) indique comment un processus stochastique change si l'on change de mesure.

Soit $X(t)$ une martingale locale continue par rapport à une filtration $(F(t))$ satisfaisant les conditions usuelles. On définit l'exponentielle stochastique Z de X par la formule :

$$Z(t) = e^{\int_0^t \mu(s) \cdot ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 \cdot ds}$$

Notamment, on a l'équation différentielle stochastique :

$$dZ(t) = Z(t) \cdot dX(t)$$

Le processus Z est alors une martingale locale strictement positive, et on peut définir une mesure $Q(t)$ équivalente à la restriction de la mesure P à $F(t)$ à partir de sa densité de Radon-Nikodym.

$$\frac{dQ(t)}{dP_{|F(t)}} = Z(t)$$

De plus, si Y est une martingale locale sous P alors le processus Y' suivant est une martingale locale sous Q :

$$Y'(t) = Y(t) - [X, Y](t)$$

Corollaire

Si X est un processus continu et W est un mouvement brownien sous P alors W' défini ci-après est une martingale sous Q :

$$W'(t) = W(t) - [Y, X](t)$$

- Equation de Fokker-Planck (Kolmogorov forward)

A une dimension, l'équation de Fokker-Planck avec un coefficient de diffusion $D2(x,t)$ et la tendance $D1(x,t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D2^2(x, t) \cdot P(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x} (D1(x, t) \cdot P(x, t))$$

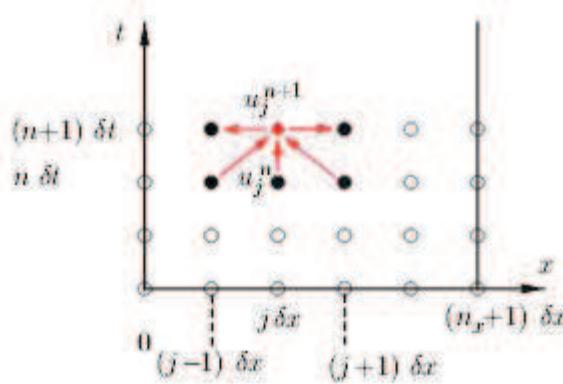
- Méthode de Crank-Nicolson

La méthode de Crank-Nicolson (1947) est un algorithme simple permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode utilise les différences finies pour approcher une solution du problème : elle est numériquement stable et quadratique pour le temps.

Le processus discret $u(j,n)$ s'évalue numériquement selon la méthode suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \frac{D}{2} \cdot \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{(\delta x)^2}$$

Cela correspond à appliquer l'algorithme décrit sur le schéma ci-dessous :



- Splines

Une spline est une fonction définie par morceaux par des polynômes. Dans les problèmes d'interpolation, la méthode des splines est souvent préférée à l'interpolation polynomiale, car on obtient des résultats similaires en se servant de polynômes ayant des degrés inférieurs.

Une courbe spline S est une fonction polynomiale par morceaux définie sur un intervalle $[a,b]$ divisé en sous-intervalles $[t(i-1), t(i)]$ tels que :

$$a = t(0) < t(1) < \dots < t(k-1) < t(k) = b$$

Sur chaque intervalle $[t(i-1), t(i)]$ on définit un polynôme $P(i)$.

S est égal à $P(i)$ sur chaque intervalle.

- Transformées de Fourier

La transformation de Fourier F est une opération qui transforme une fonction intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette

dernière. Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est la fonction $F(f)=f^*$ donnée par la formule :

$$F(f) = f'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot \xi \cdot x} \cdot dx$$

- Processus de Bessel

Un processus de Bessel d'ordre n est le processus X défini par :

$$X(t) = \|W(t)\|$$

Où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^N et W est un processus de Wiener (mouvement brownien). Le processus de Bessel de dimension n est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = dZ(t) + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{dt}{X(t)}$$

Où Z est un processus de Wiener à 1 dimension. On suppose que $X(0)=0$.

- Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, aussi connu sous le nom de mean-reverting process, est un processus stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique

$$dr(t) = -\theta \cdot (r(t) - \mu) \cdot dt + \sigma \cdot dW(t)$$

où θ , μ et σ sont des paramètres déterministes et W_t est le processus de Wiener.

- Barrière absorbante/réfléchissante

On dit qu'une valeur A est une barrière absorbante lorsqu'on est dans le cas suivant : si le processus prend la valeur A une fois, alors il la garde à partir de ce moment et jusqu'à la fin de la vie du processus.

Au contraire une barrière B est réfléchissante si le processus repart dans la direction opposée en atteignant la valeur B.

Annexe E : Code VBA Excel - Modele Heston

```
Function HestonMC(kappa, theta, lambda, rho, sigmav, daynum, startS, r, startv, K, ITER)
```

```
Dim allS() As Double, stock() As Double
```

```
simpath = 0
```

```
ReDim allS(daynum) As Double, stock(ITER) As Double
```

```
deltat = (1 / 365)
```

```
For itcount = 1 To ITER
```

```
    lnSt = Log(startS)
```

```
    lnvt = Log(startv)
```

```
    curv = startv
```

```
    curS = startS
```

```
    For daycnt = 1 To daynum
```

```
        e = Application.NormSInv(Rnd)
```

```
        eS = Application.NormSInv(Rnd)
```

```
        ev = rho * eS + Sqr(1 - rho ^ 2) * e
```

```
        lnSt = lnSt + (r - 0.5 * curv) * deltat + Sqr(curv) * Sqr(deltat) * eS
```

```
        curS = Exp(lnSt)
```

```
        lnvt = lnvt + (1 / curv) * ((kappa + lambda) * (kappa * theta / (kappa + lambda))
```

```
        - curv) - 0.5 * sigmav ^ 2) * deltat + sigmav * (1 / Sqr(curv)) * Sqr(deltat) * ev
```

```
        curv = Exp(lnvt)
```

```
        allS(daycnt) = curS
```

```
    Next daycnt
```

```
    simpath = simpath + Exp((-daynum / 365) * r) *
```

```
Application.MaxChange(allS(daynum) - K, 0)
```

```
    Next itcount
```

```
    HestonMC = simpath / ITER
```

```
End Function
```