La méthode des Simulations dans les Simulations

Séminaire SEPIA

Le 16 avril 2010

Milliman

Sommaire

Milliman

Le capital économique Solvabilité II
Définition

- Qu'est-ce que le besoin en capital ?
  - Capital nécessaire pour que la probabilité de ruine de la compagnie soit inférieure à un seuil de confiance donné sur un horizon donné.
- Comment le calculer ?
  - Définir l'événement de ruine
    - Par exemple: fonds propres ≤ 0 (ruine) ou ≤ exigence minimale des autorités de contrôle (insolvabilité réglementaire)
    - Calculs menés sur la base de fonds propres « comptes sociaux » ou dans une approche « économique » (comparaison de la valeur économique des actifs et des passifs pour déterminer un actif net)
  - Déterminer à l'aide d'un modèle de projection de la compagnie, grâce à des formules mathématiques ou des simulations (ou une combinaison des deux), la probabilité que l'événement de ruine soit constaté à l'horizon de référence
  - Si probabilité de ruine > seuil de référence -> augmentation des fonds propres initiaux jusqu'à respecter la limite. Sinon, libération possible de capital.
- Solvency II s'oriente vers les exigences suivantes en matière de capital économique :
  - Evénement de ruine -> Actif net négatif (VM actifs < valeur économique des passifs)
  - Horizon -> dans 1 an
  - Seuil de confiance -> probabilité de 0.5%

Le capital économique Solvabilité II

L'approche basée sur la distribution de la situation nette à un an

- Une approche « économique » repose sur la comparaison de
  - La valeur des actifs (en valeur de marché) et,
  - La valeur économique des passifs en t=1 dans le but d'obtenir une distribution de situation nette.

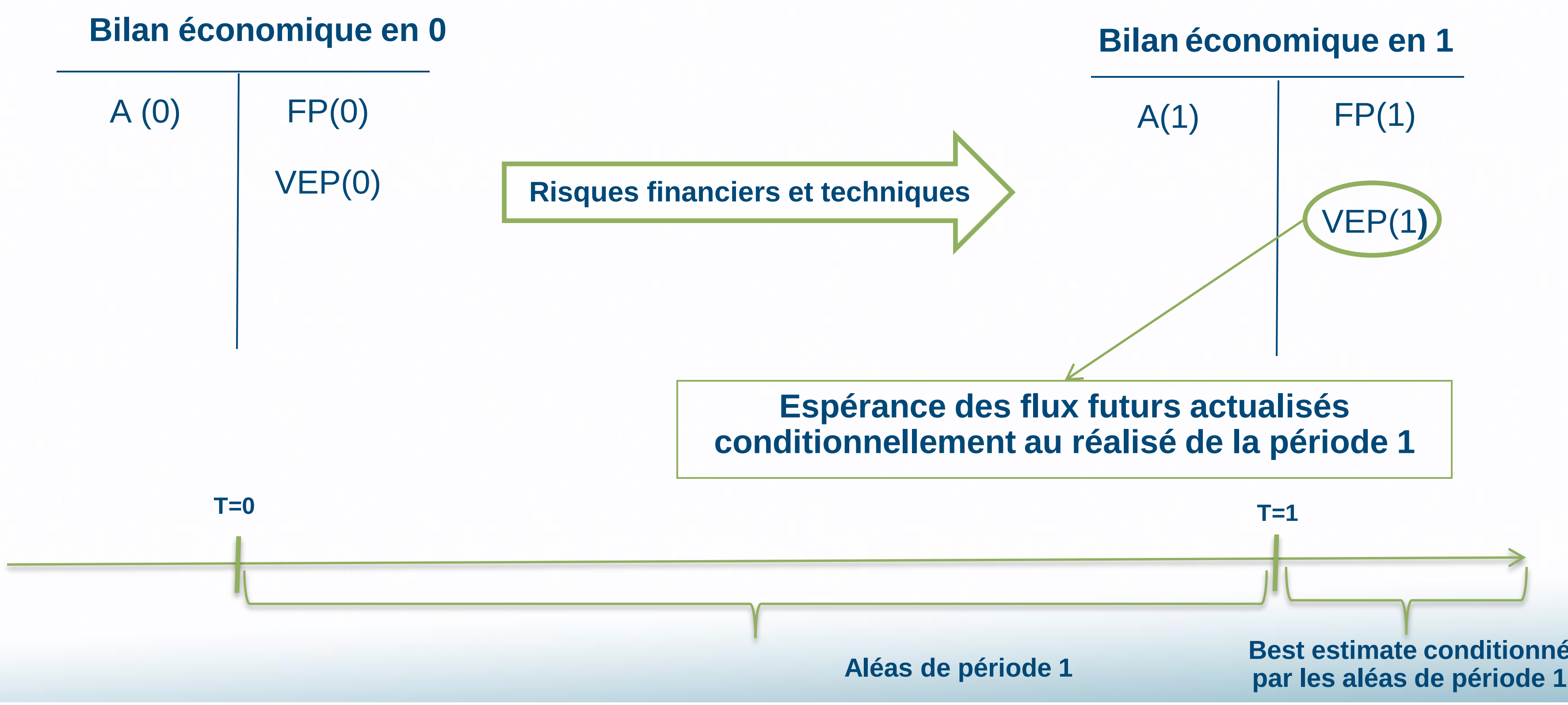
- Qu'est-ce qu'une valeur économique des passifs ?
  - Il s'agit du « prix » correspondant aux flux de passifs projetés,
  - La valeur économique des passifs se calcule avec un modèle ALM associé à un générateur de scénarios économiques,
    - Le best estimate des flux de passifs s'obtient par espérance des flux futurs actualisés = prix « pur » correspondant à un « actif » échangeable sur le marché.

- Remarque : les « prix » de passifs peuvent être délicats à calculer
  - Pour les portefeuilles « vie -> nécessité de se placer dans un environnement « market consistent »
    - Univers risque-neutre / facteurs d'actualisation, ou
    - Univers « réel » avec primes de risque / déflateurs

La méthodologie SdS

Méthodologie de calcul du capital économique

- Calculer le capital économique revient à obtenir une distribution de situation nette à 1 an
- L'actif est calculé en valeur de marché et la valeur économique des passifs à la date 1 correspond au « prix » de ces passifs vu à cette date



Milliman

La méthodologie SdS

Quels univers de probabilités considérer ?

- Problématique : quelles tables de scénarios économiques utiliser ?
  - Faut-il une unique table de scénarios économiques ?
  - La table doit-elle être market consistent ?
  - Quel univers considérer : « monde réel » ou « risque neutre » ?
  - Faut-il les deux types de tables ?
- Le calcul de la situation nette en date 1 requiert deux informations :
  - La valeur de marché de l'actif en t=1
    - Les scénarios économiques doivent projeter des primes de risque -> nécessité d'être « monde réel »
      - Exemple: les actions ne doivent pas évoluer simplement au taux sans risque car il est primordial de connaître leur vrai rendement pour évaluer correctement les occurrences de ruine
  - La valeur économique des passifs en t=1
    - Calculer la VEP revient essentiellement à déterminer le prix d'une chronique de flux
    - En assurance-vie, il est nécessaire d'utiliser des tables secondaires « market consistent » en t=1 de manière à « pricer » les passifs -> méthode dite des simulations dans les simulations (SdS)

Sommaire

- Le capital économique Solvabilité II
- La méthodologie SdS
- Les ajustements SdS financiers
  - Les ajustements de niveau
  - Les ajustements de volatilité
- SdS et risque de mortalité

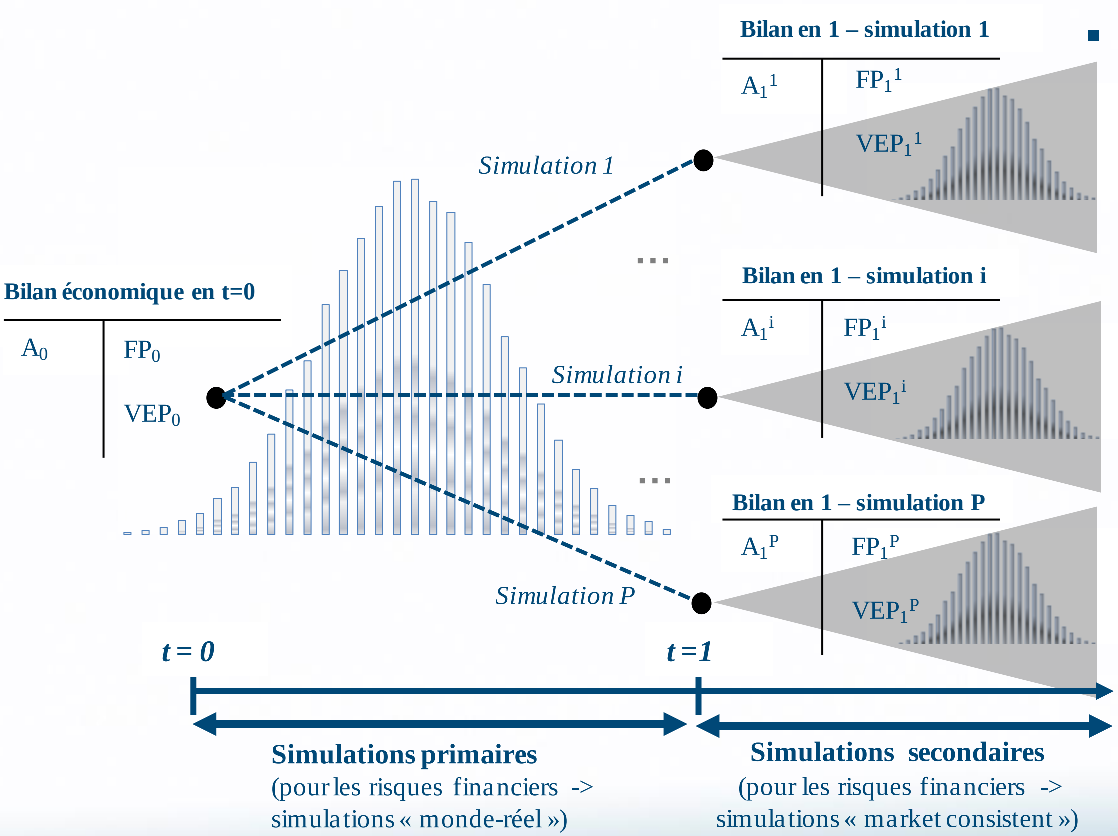
Milliman

La méthodologie SdS

Principe de la méthode

- **La méthode des simulations dans les simulations (SdS) :**

-> Objectif : calcul du quantile à 0,5% de la distribution de fonds propres économiques de fin de première période puis déduction du capital économique



- Sur la première période
  - Simulation de l'ensemble des risques

En fin de première période
  - Pour chaque simulation secondaire :
    - Ajustement des scénarios de seconde période afin qu'ils soient compatibles avec les informations de fin de première période
    - Lancement d'un jeu complet de simulations secondaires jusqu'à un horizon fixé (par exemple pendant 30 ans)
  - Calcul des moyennes empiriques permettant l'estimation des valeurs économiques du passif à la fin de la première période
  - Détermination de la situation nette à la fin de la première période

Milliman

La méthodologie SdS

Problématiques et exploitation des résultats

- Problématiques : comment articuler les simulations primaires et secondaires ?
  - Pour les risques financiers ?
  - Pour les risques techniques ?

- Après obtention de la distribution de fonds propres économiques, le capital économique s'estime de la manière suivante :

$$C = FP_0 - \boxed{P(0,1).q_{0,5\%}\left(FP_1\right)}$$

Fonds propres économiques initiaux

Surplus (algébrique) de capital à ajouter en t=0

Milliman

Sommaire

Les ajustements SdS financiers
Introduction

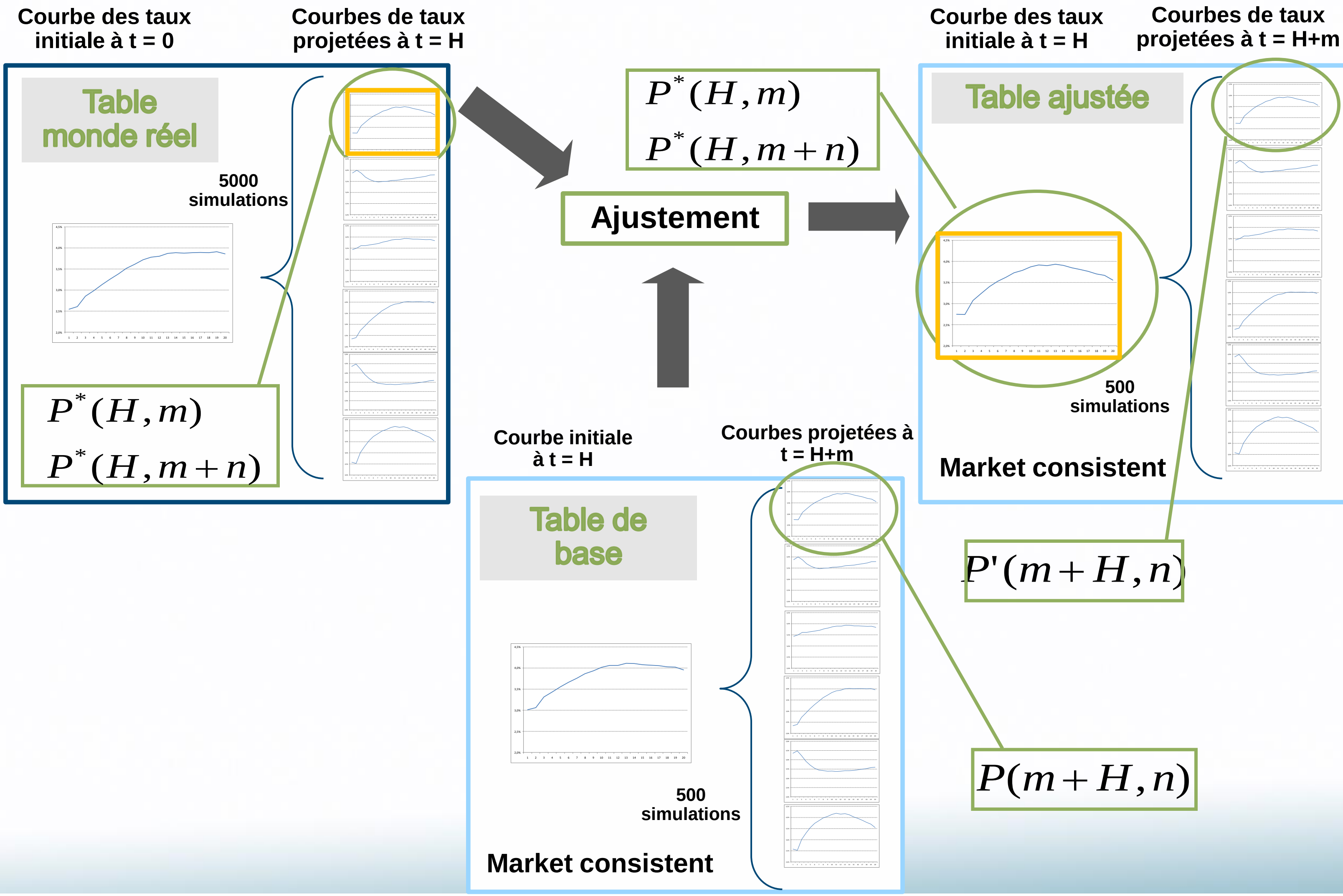
- La mise en œuvre de la méthodologie SdS soulève la problématique de l'ajustement des scénarios secondaires :
  - En Théorie :
    - Nouvelle génération de scénarios économiques à la fin de la première période prenant en compte les nouveaux **niveaux** des indicateurs économiques
  - En Pratique :
    - Impossible de générer -> volumétrie trop importante
      - Exemple pour 1000 simulations secondaires

      -> 1001 jeux de scénarios (1 table initiale + 1000 nouvelles par simulation primaire)
      - Temps de génération trop conséquent, stockage de données trop important
    - Une autre méthode est utilisée : les ajustements SdS
      - Une table stochastique monde-réel est utilisée pour les simulations de première période
      - Une unique table market-consistent (risque-neutre en général) est générée pour les simulations secondaires
    - Des facteurs d'ajustements sont appliqués à chaque simulation

- Nous distinguerons dans la suite deux types d'ajustements :
  - Les ajustements de niveau
  - Les ajustements de volatilité

Les ajustements SdS financiers

Illustration



Sommaire

- Le capital économique Solvabilité II
- La méthodologie SdS
- Les ajustements SdS financiers
  - Les ajustements de niveau
  - Les ajustements de volatilité
- SdS et risque de mortalité

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : les prix ZC

- **Hypothèse** : on suppose dans cette partie que les modèles utilisés reposent sur des paramètres de **volatilités déterministes**

- Dans la table stochastique, la courbe des taux initiale donne les prix ZC, mais aussi les prix ZC « futurs attendus » (prix forward)

  Ce prix forward est calculé comme suit : $F(0,m,n) = \dfrac{P(0,m+n)}{P(0,m)}$

  Avec : F(0,m,n) le prix forward vu en 0 d'un ZC de maturité n en date m

  P(0,T) le prix en 0 d'un ZC de maturité T

- Pour ajuster les prix des zéro-coupons à une date future t = m+H, on utilise les prix forward :

$$P'(m+H,n) = P(m+H,n)\frac{P^*(H,m+n)/P^*(H,m)}{P(H,m+n)/P(H,m)}$$

  - P'(m+H,n) : prix ajusté en *m+H* d'un ZC de maturité n dans la **table ajustée**
  - P(m+H,n) : prix en *m+H* d'un ZC de maturité n dans la **table de base**
  - P*(H,m) : prix en *H* d'un ZC de maturité m en utilisant la courbe de taux de la **table monde réel**

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : le déflateur

- Ajustement du déflateur: $D'(H+n) = \prod_{i=0}^{n-1} P'(H+i,1)$

- Vérification du test martingale « déflateur » :

$$E\left[D'(H+n)\right] = E\left[\prod_{i=0}^{n-1} P'(H+i,1)\right]$$

$$= E\left[\prod_{i=0}^{n-1} P(H+i,1)\frac{P^*(H,i+1)/P^*(H,i)}{P(H,i+1)/P(H,i)}\right]$$

$$= E\left[\left\{\prod_{i=0}^{n-1} P(H+i,1)\right\}\frac{P^*(H,n)}{P(H,n)}\right]$$

$$= \frac{P^*(H,n)}{P(H,n)} E\left[D(H+n)\right]$$

$$= \frac{P^*(H,n)}{P(H,n)} P(H,n)$$

$$\boxed{E\left[D'(H+n)\right] = P^*(H,n)}$$

Réconciliation avec la courbe des taux initiale

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : l'indice « actions »

- Ajustement de l'indice actions par la relation:

$$S'(H+n) = S(H+n)\frac{D(H+n)}{D'(H+n)}$$

- Vérification du test martingale « actions »

$$E\left[D'(H+n)S'(H+n)\right] = E\left[D'(H+n)S(H+n)\frac{D(H+n)}{D'(H+n)}\right]$$

$$= E\left[S(H+n)D(H+n)\right]$$

$$\boxed{E\left[D'(H+n)S'(H+n)\right] = 1}$$

Réconciliation avec la valeur initiale de l'indice

Avec *S'(H)=1*

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : vérification du test martingale ZC

- Vérification du test martingale « zéro-coupon » :

$$E\left[P'(H+m,n)D'(H+n)\right] = E\left[P(H+m,n)\frac{P^*(H,m+n)/P^*(H,m)}{P(H,m+n)/P(H,m)}\prod_{i=0}^{n-1}P'(H+i,1)\right]$$

$$= E\left[P(H+m,n)\frac{P^*(H,m+n)/P^*(H,m)}{P(H,m+n)/P(H,m)}\times\frac{P^*(H,m)}{P(H,m)}\prod_{i=0}^{n-1}P(H+i,1)\right]$$

$$= \frac{P^*(H,m+n)}{P(H,m+n)}E\left[P(H+m,n)\prod_{i=0}^{n-1}P(H+i,1)\right]$$

$$= \frac{P^*(H,m+n)}{P(H,m+n)}P(H,m+n)$$

$$\boxed{E\left[P'(H+m,n)D'(H+n)\right] = P^*(H,m+n)}$$

Réconciliation avec la courbe des taux initiale

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : vérification de la stabilité des volatilités projetées

- Lorsque **seuls** sont modélisés les **risques de niveau** dans les scénarios économiques, il convient de vérifier que les **volatilités** et **corrélations projetées** ne sont pas déformées par les ajustements SdS
- L'indice « actions » est modélisé en général par un mouvement brownien géométrique
  - Dans la table de base, cet indice est simulé comme suit :

$$S(H+n) = \frac{1}{D(H+n)} \exp\left\{-\frac{n\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{n}.\varepsilon_a\right\} \quad avec \;\; \varepsilon_a \sim N(0,1)$$

- Après ajustement on a :

$$S'(H+n) = S(H+n)\frac{D(H+n)}{D'(H+n)} = \frac{D(H+n)}{D'(H+n)} \times \frac{1}{D(H+n)} \exp\left\{-\frac{n\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{n}.\varepsilon_a\right\} \quad avec \;\; \varepsilon_a \sim N(0,1)$$

$$= \frac{1}{D'(H+n)} \exp\left\{-\frac{n\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{n}.\varepsilon_a\right\} \quad avec \;\; \varepsilon_a \sim N(0,1)$$

➔ Conclusion : les volatilités « actions » restent inchangées

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : vérification de la stabilité des volatilités projetées (suite)

- Supposons sans perdre en généralités que le modèle de taux soit un HJM (Heath-Jarrow-Morton) :
  - Dans la table de base, la dynamique des prix ZC est la suivante :

$$P(H+m,n)=\frac{P(H,m+n)}{P(H,m)}\exp\left\{-\frac{m\sigma_n^2}{2}+\sigma_n\sqrt{m}.\varepsilon_{ZC}\right\}\quad avec\ \ \varepsilon_{ZC}\sim N(0,1)$$

- Après ajustement on a :

$$P'(m+H,n)=P(m+H,n)\frac{P^*(H,m+n)/P^*(H,m)}{P(H,m+n)/P(H,m)}$$

- La dynamique du prix ZC ajusté se réécrit :

$$P'(m+H,n)=\frac{P^*(H,m+n)}{P^*(H,m)}\exp\left\{-\frac{m\sigma_n^2}{2}+\sigma_n\sqrt{m}.\varepsilon_{ZC}\right\}\ ;\ \varepsilon_{ZC}\sim N(0,1)$$

➔Conclusion : les volatilités « taux » restent inchangées

➔ Le terme $\frac{P^*(H,m+n)}{P^*(H,m)}$ constitue la valeur initiale de la dynamique de *P'(m+H,n)*

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de niveau : stabilité des corrélations actions / taux

- Définition : le coefficient de corrélation « actions / taux » correspond au coefficient de **corrélation des browniens** des diffusions actions et taux

- Rappelons les dynamiques permettant de générer la table de base :

$$\begin{cases} S(H+n) = \dfrac{1}{D(H+n)} \exp\left\{-\dfrac{n\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{n}.\varepsilon_a\right\} \\ P(H+m,n) = \dfrac{P(H,m+n)}{P(H,m)} \exp\left\{-\dfrac{m\sigma_n^2}{2} + \sigma_n\sqrt{m}.\varepsilon_{ZC}\right\} \end{cases} ;\ avec\ \ \rho = Corr(\varepsilon_a, \varepsilon_{ZC})$$

- Après ajustement, on obtient les dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} S'(H+n) = \dfrac{1}{D'(H+n)} \exp\left\{-\dfrac{n\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{n}.\varepsilon_a\right\} \\ P'(m+H,n) = \dfrac{P^*(H,m+n)}{P^*(H,m)} \exp\left\{-\dfrac{m\sigma_n^2}{2} + \sigma_n\sqrt{m}.\varepsilon_{ZC}\right\} \end{cases}$$

➔ Conclusion : la corrélation entre les bruits de chacune de ces dynamiques correspond donc exactement à la **corrélation** projetée dans la **table de base**

Milliman

Sommaire

Milliman

Les ajustements SdS financiers

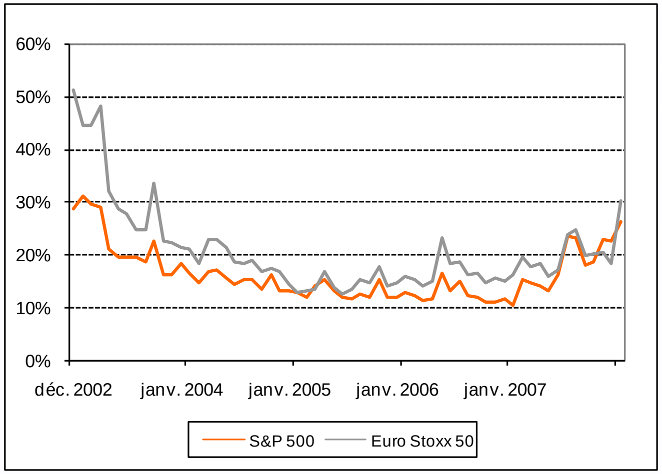
Les ajustements de volatilité : introduction

- Contexte : ces ajustements sont à effectuer lorsque les modèles employés reposent sur une modélisation **stochastique** de la **volatilité**
- Pourquoi une volatilité stochastique ?
  - L'analyse des données historiques révèle un comportement très erratique des volatilités implicites

- Conséquence : les **volatilités implicites** peuvent être considérées comme un **facteur de risque** à part entière

- Cette optique est évoquée dans :
  - Le document du CRO Forum « Calibration Principles for the Solvency II Standard Formula » - Mai 2009 :

    « The SCR framework is based on a one-year mark-to-market approach, and in this context implied volatilities are true risk factors » - p28



Volatilités implicites du S&P500 et de l'EuroStoxx 50 du 31/12/2002 au 31/01/08 - *Source: Datastream*

- Les CP 69 et 70 (Final Advice) qui traitent respectivement du risque Equity et du module « risque de marché » - janvier 2010 :

  -> intégration de **chocs de volatilité** au niveau du calcul des SCR actions et taux

  - le « SCR volatilité » est calculé selon une approche ΔNAV et est ensuite agrégé au « SCR niveau »

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de volatilité : analyse et mise en œuvre

- Le risque de volatilité concerne différents drivers modélisés : actions, taux, spreads de crédit, …
  - Remarque : les **ajustements SdS** permettant de prendre en compte le facteur « **volatilité implicite actions** » sont plus aisés à mettre en œuvre que les ajustements « **volatilité implicite taux** »

- Nous donnons ci-après un **exemple** de **calculs** et d'**ajustements SdS** dans le cas d'une « **volatilité implicite actions** » stochastique.

  La mise en œuvre proposée repose sur trois étapes :
  - Etape 1 : la modélisation « monde-réel » de l'indice « actions » et de sa volatilité implicite
  - Etape 2 : intégration du risque de volatilité au sein des calculs SdS
  - Etape 3 : zoom sur les ajustements effectués

Les ajustements SdS financiers

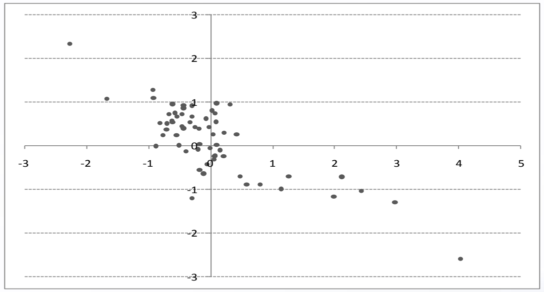
Les ajustements de volatilité : étape 1 - modélisation

- Choix d'un modèle pour la **volatilité implicite** « actions » en univers **monde-réel** :
  - Dans la littérature (cf. le modèle risque-neutre de Heston) la **variance implicite** peut être modélisée à partir d'un **processus CIR** …
  - … mais les modèles de type « séries chronologiques » (e.g. modèle **AR-GARCH**) sont parfois mieux adaptés à la modélisation monde-réel.

  - Dans l'exemple présenté (processus CIR), la volatilité implicite « actions » σ_t en univers « monde-réel » est supposée suivre la dynamique :

$$d\sigma_t^2 = a\left(V_\infty - \sigma_t^2\right)dt + \sqrt{\sigma_t^2}.\Sigma.dW_t$$

- En considérant une modélisation « monde-réel » des actions via un mouvement brownien géométrique, l'analyse des résidus laisse apparaître une très forte corrélation (de l'ordre de -80%) « indice / volatilité » sur l'historique considéré :



Résidus « variance implicite » (abscisses) vs résidus « actions » (ordonnées)

Plus le niveau de l'indice « actions » est bas plus la volatilité implicite est élevée

-> En revanche : dans des conditions « centrales » les deux variables paraissent beaucoup moins corrélées

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de volatilité : étape 2 - adaptation du calcul SdS

- Dans la projection SdS :
  - L'indice et la volatilité « actions » sont projetés conjointement en univers monde-réel sur la première période (parmi les autres drivers)
  - Les simulations secondaires market-consistent sont reconditionnées par le réalisé de première période
    - Pour les actions -> reconditionnement de **niveau** et de **volatilité**

Bilan économique en 0

A (0)	FP(0)
	VEP(0)

Bilan économique en 1

A (1)	FP(1)
	VEP(1)

Simulations « monde-réel » de l'ensemble des risques avec en particulier :

-Simulations de l'indice actions (brownien géométrique avec prime de risque et volatilité historique)

-- Simulations conjointes de la volatilité implicite actions

Projections secondaires basées sur la volatilité implicite générée en fin de première période

- la volatilité n'est donc pas stochastique au sein d'un jeu de simulations secondaires

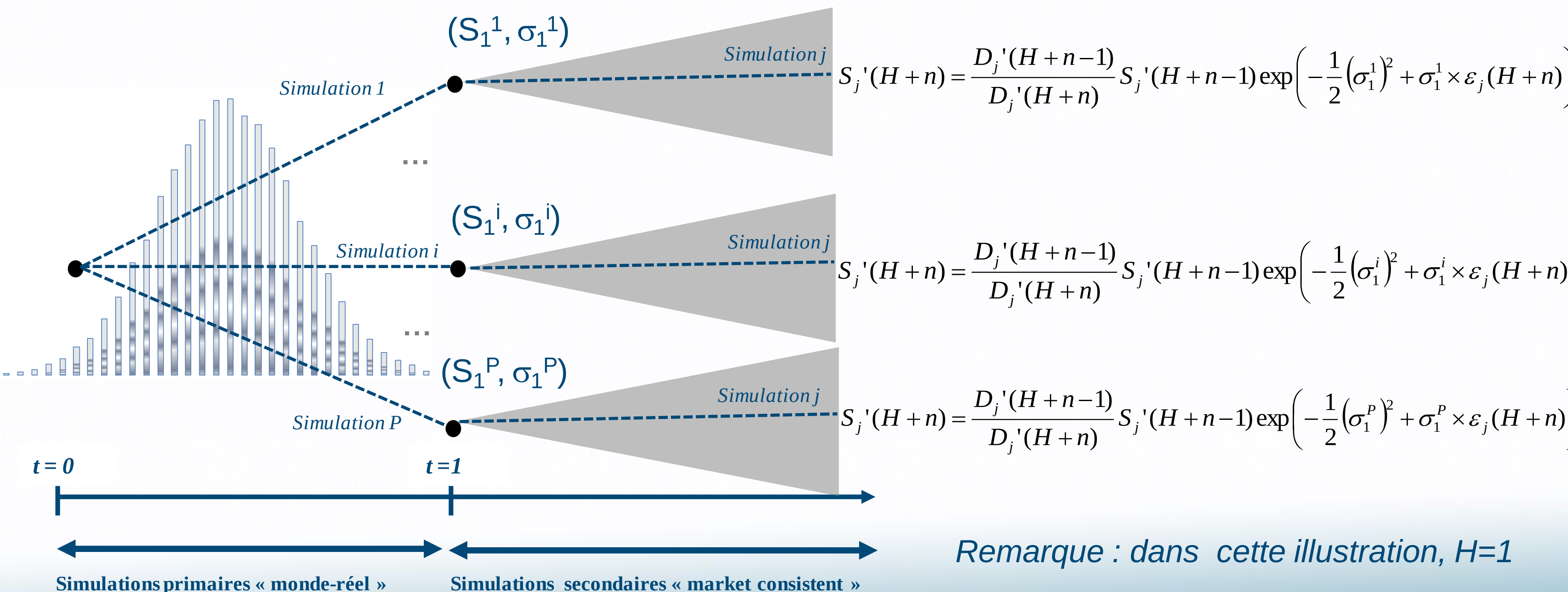
Deux **sous-approches** peuvent être envisagées :

- la **volatilité** est **cristallisée** (valeur simulée en t=1) sur l'horizon de projection des simulations secondaires
- la **volatilité** est **amortie** (à partir de la valeur simulée en t=1) sur l'horizon de projection des simulations secondaires (**phénomène de retour à la moyenne**)

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de volatilité : étape 3 - ajustements effectués (1/2)

- **Approche 1** : cristallisation de la volatilité
  - Dans la « table de base » -> export des bruits $(\varepsilon_j(H+n))_j$ normaux centrés / réduits permettant de générer l'indice « actions »
  - Re-calcul de l'indice « actions » dans les tables de simulations ajustées à partir, entre autres, des volatilités implicites simulées sur la première période



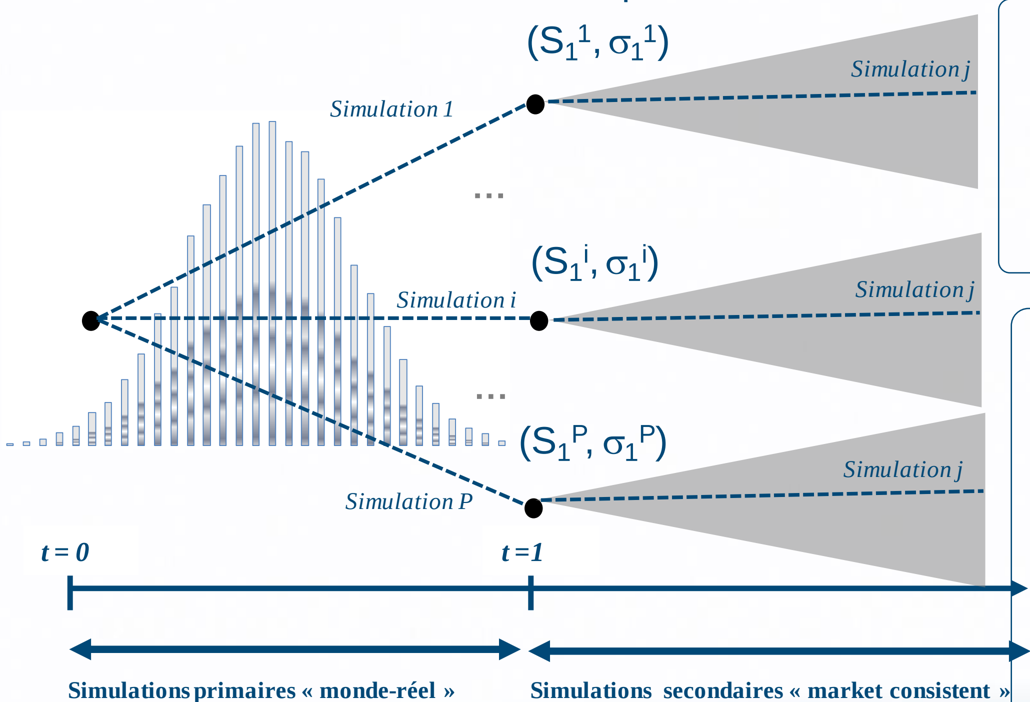
Remarque : dans cette illustration, H=1

Milliman

Les ajustements SdS financiers

Les ajustements de volatilité : étape 3 - ajustements effectués (2/2)

- **Approche 2** : amortissement du choc de volatilité
  - Re-calcul de l'indice « actions » dans les tables secondaires en tenant compte d'un profil d'amortissement de la volatilité
    - Notons **σ** la volatilité implicite de la table de base



Etape 1 – Calcul des profils d'amortissement pour chaque simulation primaire :

$$\Delta^i(t) = \frac{E\left[\sigma_t \middle| \sigma_1^i\right] - E\left[\sigma_t \middle| \sigma\right]}{E\left[\sigma_t \middle| \sigma\right]}$$

Recours à un modèle CIR

Etape 2 – Ajustement de la volatilité σ à partir du profil d'amortissement obtenu

$$S_j'(H+n) = \frac{D_j'(H+n-1)}{D_j'(H+n)} S_j'(H+n-1)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sigma \cdot \left(1+\Delta^i(n)\right)\right)^2 + \left(\sigma \cdot \left(1+\Delta^i(n)\right)\right) \times \varepsilon_j(H+n) \right)$$

Volatilité ajustée

Remarque : dans cette illustration, H=1

Milliman

Sommaire

- Le capital économique Solvabilité II
- La méthodologie SdS
- Les ajustements SdS financiers
  - Les ajustements de niveau
  - Les ajustements de volatilité
- SdS et risque de mortalité

SdS et risque de mortalité

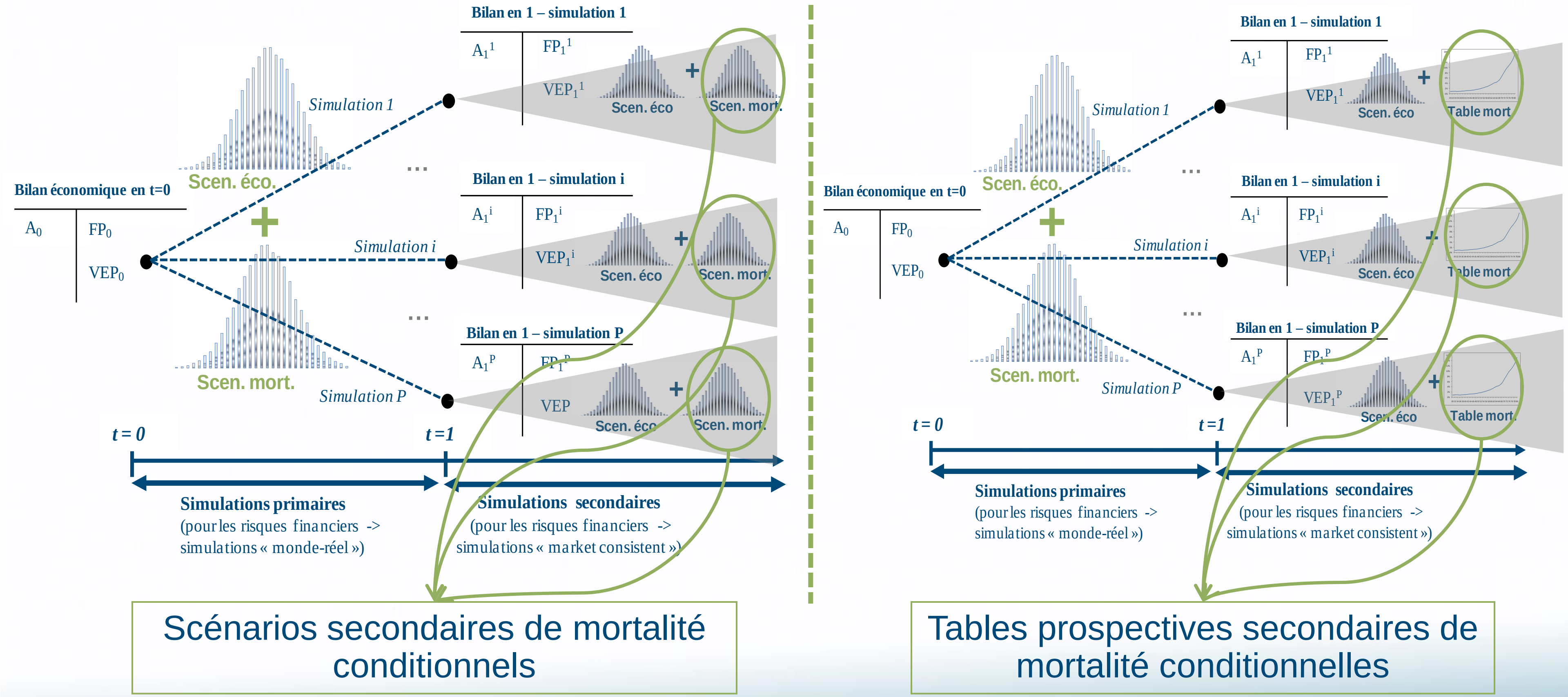
L'intégration du risque de mortalité

- **Problématique** : la compagnie souhaite effectuer un calcul SdS intégrant les risques financiers et le risque de mortalité
- Mise en œuvre opérationnelle à partir de projections conjointes reposant sur des jeux de scénarios de mortalité et de scénarios économiques
  - Pour ce faire, les scénarios démographiques et économiques sont **couplés** dans les simulations primaires et secondaires (dans certains cas il est possible de ne pas effectuer de simulations secondaires sur la mortalité cf. infra) :
    - La simulation primaire « p » des fonds propres économiques est constituée des trajectoires « p » des scénarios primaires financiers et démographiques
    - La simulation secondaire « s » des VAN de marges en t=1 pour la simulation primaire « p » est constituée des trajectoires « s » des scénarios secondaires financiers et démographiques (reconditionnés de manière à intégrer le réalisé de première période)
      - Remarque : les scénarios économiques et de mortalité peuvent éventuellement être corrélés (exemple -> impact d'une pandémie sur les marchés financiers)
- Deux traitements sont envisageables selon le « **degré d'asymétrie** » du **Best Estimate** en le risque de mortalité -> les projections secondaires peuvent reposer sur :
  - Une mortalité centrale (cas des produits d'épargne, de prévoyance individuelle, …)
  - Des scénarios de mortalité (cas des produits de retraite, des contrats emprunteurs,…)

SdS et risque de mortalité

L'intégration du risque de mortalité (suite)

- Ci-dessous une illustration des deux mises en œuvre :

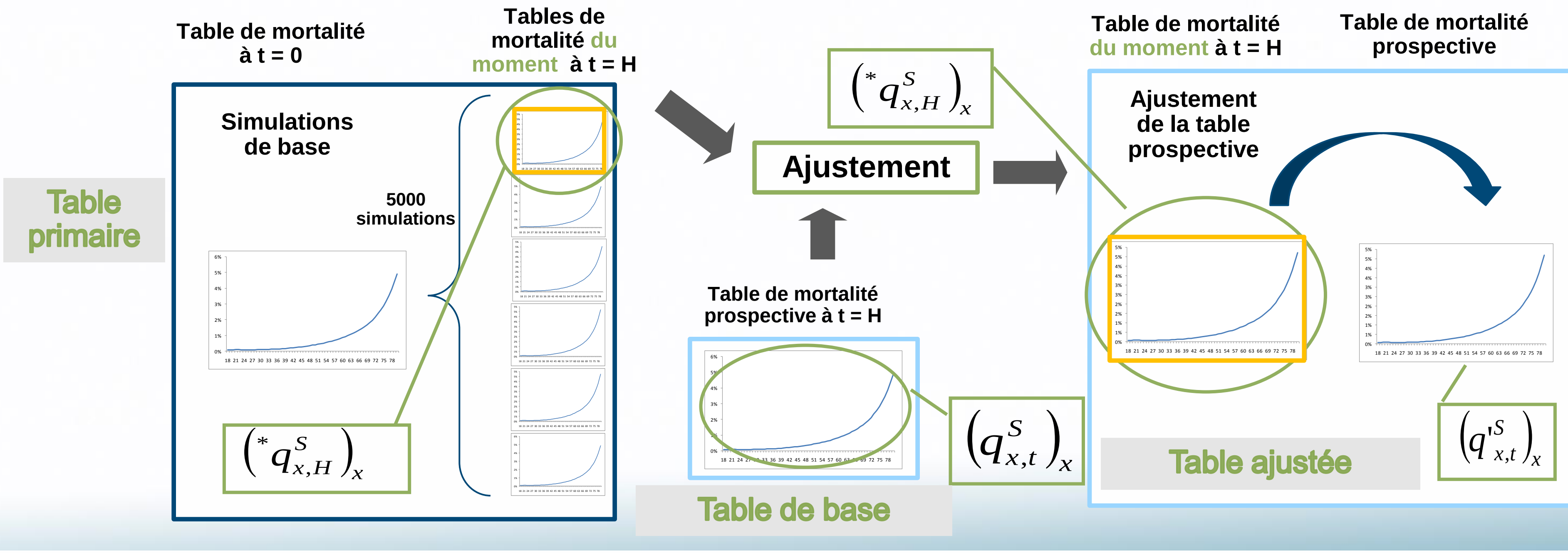


Milliman

SdS et risque de mortalité

La problématique des ajustements

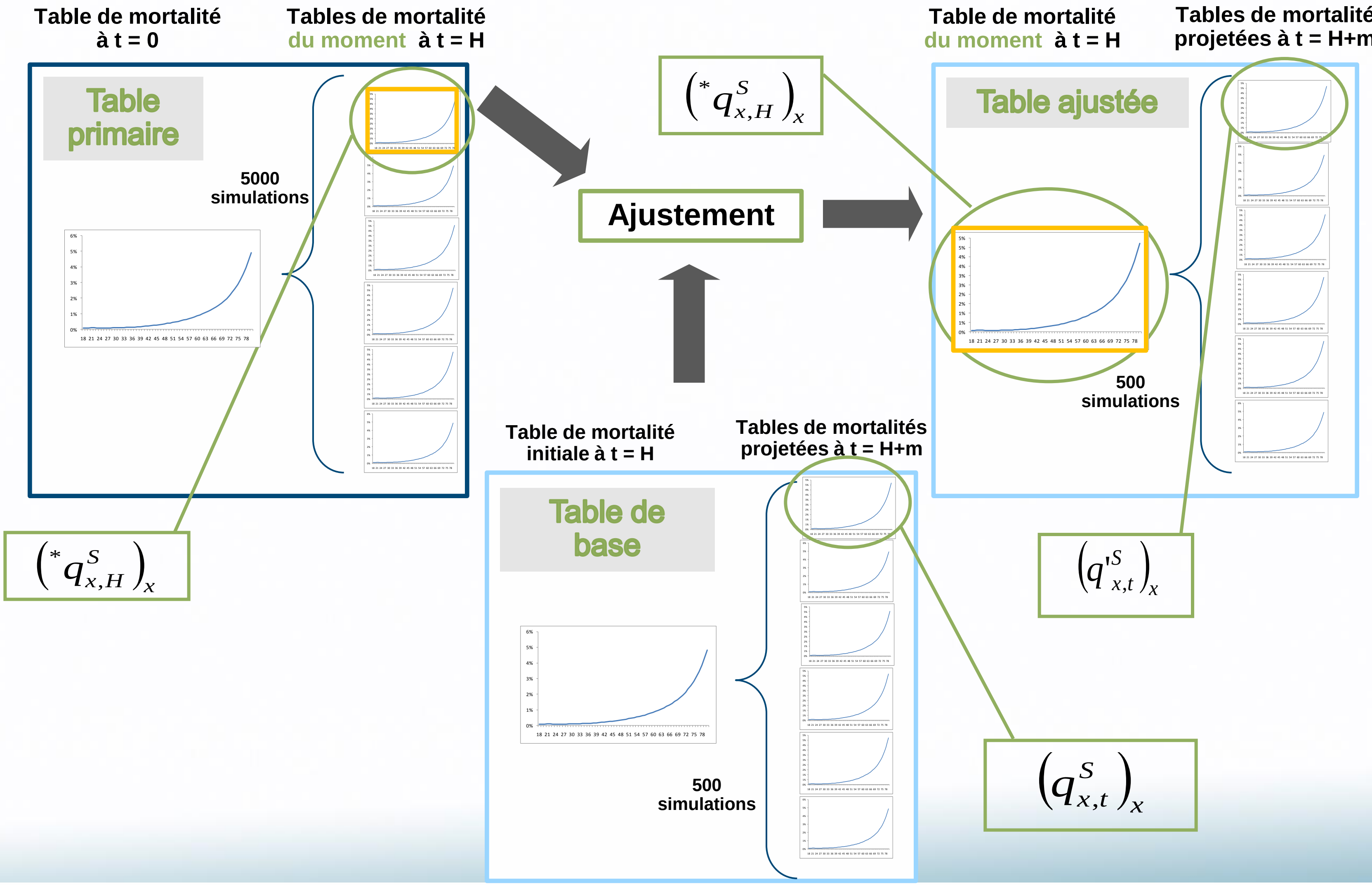
- Comme dans le cas des risque financiers, la mise en œuvre de la méthodologie SdS soulève la problématique de l'ajustement des **scénarios / tables de mortalité** secondaires :
  - En Pratique -> recours à des ajustements SdS
    - Une table de **mortalité primaire** est utilisée pour les simulations sur [0,H]
    - Une **unique table prospective** ou un **jeu unique de scénarios** sont utilisés pour les **projections secondaires**
  - Des facteurs d'ajustements sont appliqués à la table prospective ou au jeu de scénarios
- Ci-dessous une illustration de la problématique des ajustements pour des projections secondaires basées sur une table de mortalité prospective :



Milliman

SdS et risque de mortalité

Les ajustements : le cas des scénarios secondaires



Milliman

SdS et risque de mortalité

Les ajustements proposés

- Notons $\mu'_{x,t}$ (resp. $^*\mu_{x,H}$, $\mu_{x,t}$) le taux instantané de mortalité ajusté (resp. de la simulation primaire, de la simulation de base)
  - Rappel :

$$\mu'_{x,t} = -\ln\left(1 - q'_{x,t}\right) \; ; \; {}^*\mu_{x,H} = -\ln\left(1 - {}^*q_{x,H}\right) \; ; \; \mu_{x,t} = -\ln\left(1 - q_{x,t}\right)$$

- Les taux instantanés de mortalité sont ajustés de la manière suivante :

$$\mu'_{x,t} = \mu_{x,t} \times \frac{{}^*\mu_{x,H}}{\mu_{x,H}}$$

- Ce qui conduit à l'ajustement des taux de mortalité suivant :

$$q'_{x,t} = 1 - e^{\ln\left(1 - q_{x,t}\right) \times \frac{\ln\left(1 - {}^*q_{x,H}\right)}{\ln\left(1 - q_{x,H}\right)}}$$

- Remarque : les ajustements à effectuer sur les scénarios secondaires ou sur la table prospective sont identiques

- Nous considérons ci-après le cas d'un ajustement sur scénarios secondaires

Milliman

SdS et risque de mortalité

Vérification des ajustements

- Objectif : vérifier que les ajustements conduisent à des simulations **identiques en loi** à celles obtenues en générant une nouvelle table conditionnelle
- Supposons que les taux de mortalité soient générés par un modèle de Lee-Carter :

$$\mu_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \quad avec \quad \kappa_t = \kappa_{t-1} + c + \sigma.\varepsilon_t \quad ; \quad \varepsilon_t \approx N(0,1)$$

- L'ajustement proposé conduit aux calculs suivants :

$$\mu'_{x,t} = \mu_{x,t} \times \frac{{}^{*}\mu_{x,H}}{\mu_{x,H}} = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \times \frac{e^{\alpha_x + \beta_x {}^{*}\kappa_H}}{e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_H}} = e^{\alpha_x + \beta_x \left(\kappa_t - \kappa_H + {}^{*}\kappa_H\right)}$$

Par construction : $\kappa_t = \kappa_H + (t-H).c + \sigma \sum_{k=H+1}^{t} \varepsilon_k \quad et \quad {}^{*}\kappa_t = {}^{*}\kappa_H + (t-H).c + \sigma \sum_{k=H+1}^{t} {}^{*}\varepsilon_k$

- Par conséquent :

$$\mu'_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x \left(\kappa_t - \kappa_H + {}^{*}\kappa_H\right)} = \underbrace{e^{\alpha_x + \beta_x \left({}^{*}\kappa_H + (t-H).c + \sigma \sum_{k=H+1}^{t} \varepsilon_k\right)}}_{\text{Taux de mortalité ajustés}} \overset{loi}{=} \underbrace{e^{\alpha_x + \beta_x \left({}^{*}\kappa_H + (t-H).c + \sigma \sum_{k=H+1}^{t} {}^{*}\varepsilon_k\right)}}_{\text{Taux de mortalité simulés à partir du nœud H}}$$

- Les deux approches sont donc équivalentes

Milliman