

# APPLICATION DE TECHNIQUES STOCHASTIQUES POUR L'ANALYSE PROSPECTIVE DE L'IMPACT COMPTABLE DU RISQUE DE TAUX

## Exemple sur les frais financiers d'une dette obligataire complexe

François BONNIN<sup>1</sup>

Frédéric PLANCHET<sup>2</sup>

Marc JUILLARD<sup>3</sup>

*ISFA - Laboratoire SAF*

*Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1<sup>4</sup>*

*ALTIA<sup>5</sup> - WINTER & Associés<sup>6</sup>*

### Résumé

Cet article présente une approche opérationnelle pour l'analyse du risque de taux dans une optique de moyen terme et dans une dimension économique et comptable. Cette approche est développée en plusieurs étapes : tout d'abord nous présentons le modèle et les variables stochastiques retenues, ensuite nous présentons le calibrage et les techniques de simulation, et enfin les résultats obtenus. Ce qui fait l'originalité de l'approche est le point de départ qui consiste à laisser de côté délibérément les modèles de simulation risque-neutre pour concentrer les choix sur l'objectif recherché : le réalisme des courbes de taux simulées. Le fait de retenir les paramètres de forme de la représentation de Nelson-Siegel comme variables stochastiques et des processus à sauts pour le paramètre de taux courts, rendrait complexe une approche en probabilité risque-neutre, mais facilite au contraire la modélisation sous probabilité réelle.

### 1. INTRODUCTION

Le contrôle quantitatif des risques financiers dans le nouveau dispositif prudentiel Solvabilité 2 repose sur deux éléments fondamentaux :

---

<sup>1</sup> François Bonnin est directeur associé chez ALTIA. Contact : francois.bonnin@altia.fr.

<sup>2</sup> Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : fplanchet@winter-associes.fr.

<sup>3</sup> Marc Juillard est actuaire consultant chez WINTER & Associés

<sup>4</sup> Université de Lyon, université Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 - France.

<sup>5</sup> ALTIA - 76, rue de la victoire 75009 Paris - France.

<sup>6</sup> WINTER & Associés 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon - France.

- l'évaluation des provisions sur la base de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ;
- le contrôle de la probabilité de ruine à un an.

Les conséquences pratiques de ce cadre conceptuel sont importantes, puisqu'elles conduisent à devoir considérer les dynamiques des facteurs de risque dans une double dimension de détermination de prix et de calcul de quantiles. Différentes approches ont été développées : la détermination de portefeuilles répliquant (REVELEN [2009], SCHRAGER [2008]), le recours aux déflateurs (DESCURE et BOREAN [2006], JOUINI et al. [2005] ou encore SIJLAMASSI et OUAKNINE [2004]) et l'utilisation conjointe des probabilités historiques et risque neutre (DEVINEAU et LOISEL [2009]).

L'objet du présent article est de présenter comment l'application de techniques simples permet de calculer des indicateurs de risque à moyen terme portant sur des indicateurs comptables. On se place dans un cadre proche de la logique des *replicating portfolio*, en considérant les dynamiques des facteurs de risque dans l'univers historique et en s'appuyant sur des formules fermées pour l'évaluation des options.

Le facteur de risque considéré ici est le risque de taux, et l'on présente une mesure de risque comptable à un horizon pluriannuel dans le cadre soit d'une gestion de dette, soit d'une gestion d'actifs de taux.

Nous décrivons d'abord le mode de représentation du risque de taux retenu avant de montrer comment celui-ci se réalise dans les comptes. Nous terminons avec la présentation d'un exemple, puis nous proposons des voies d'amélioration ou d'extension possible.

Il convient de noter que cette démarche a été implémentée au sein de trésorerie d'entreprise ou de département de gestion d'actifs. Il s'agit donc essentiellement d'un travail empirique s'appuyant sur des techniques existantes, utilisées de manière pragmatique pour construire des indicateurs de risque efficaces.

## **2. MODELISATION FINANCIERE**

La littérature sur le risque de taux est abondante et de nombreux modèles ont été proposés. On pourra consulter RONCALLI [1998] pour une analyse détaillée de la modélisation de la courbe des taux ou PLANCHET et al. [2009] pour une présentation plus synthétique.

Dans le contexte du présent article, on retient une démarche consistant à s'appuyer sur la courbe des taux initiale et à lui faire subir des chocs aléatoires, pour en mesurer dans

un second temps l'impact sur la valeur des instruments de taux composant le portefeuille.

La modélisation des chocs s'effectue en deux étapes :

- dans un premier temps on ajuste un modèle paramétrique à la courbe de taux et on déforme la courbe des taux ajustés ;
- les écarts relatifs entre la courbe ajustée avant et après déformation sont appliqués à la courbe brute pour la déformer à son tour.

Cette démarche permet de garantir que la courbe des taux initiale est bien utilisée directement comme paramètre du modèle.

## 2.1 Modélisation paramétrique des chocs appliqués à la courbe des taux

Le choix du modèle paramétrique doit permettre de reconstituer de manière réaliste (au sens des propriétés statistiques constatées historiquement) les chocs sur l'ensemble de la gamme des taux. On retient comme modèle de référence le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]). Dans ce modèle on pose que le taux à terme instantané s'écrit (avec les notations de RONCALLI [1998]) :

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

ce qui conduit, comme le taux zéro-coupon  $R_t(\tau)$  se calcule à partir de

$$R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du, \text{ à l'expression :}$$

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right).$$

L'utilisation des taux à terme instantanés présente l'avantage de conduire à la condition nécessaire et suffisante simple d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), qui est la positivité de tous les taux à terme (cf. HULL [1999]).

Par la suite, afin d'alléger les expressions, nous noterons  $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$  et  $\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$ , de sorte que :

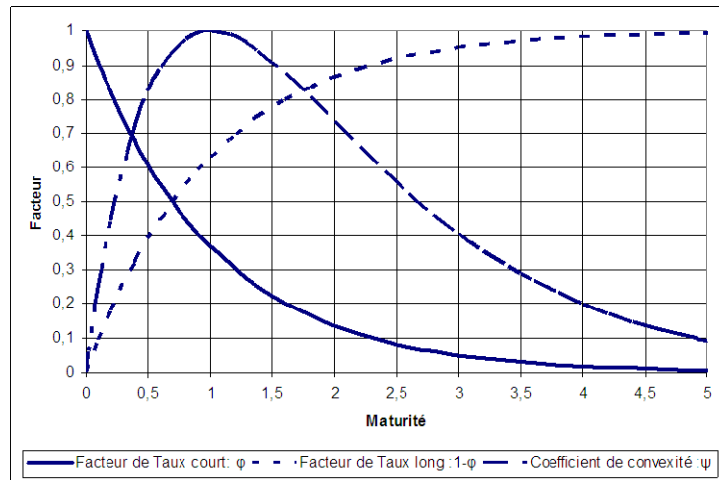
$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

On supposera par la suite que les paramètres de forme dépendent du temps et que le paramètre d'échelle  $\tau_1$  est constant (*cf. infra*) et on notera  $\mu_1 = l(t)$ ,  $\mu_2 = -s(t)$  et  $\mu_3 = c(t)$  pour faire référence à l'interprétation de ces valeurs dans le modèle, soit respectivement le taux long, le *spread* et la convexité. Pour choquer la courbe des taux on s'appuiera sur la représentation :

$$R_t(\tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

où  $r_0(t) = l(t) - s(t)$  est le taux court instantané. Cette équation présente l'avantage de faire apparaître des facteurs de détermination du taux zéro-coupon facilement interprétables : le taux court, le taux long et la convexité.

Les fonctions  $\varphi$ ,  $1 - \varphi$ , et  $\psi$  sont représentées ci-dessous, leur impact sur les différents segments de la courbe est immédiat :



La modélisation des déformations de la courbe est alors effectuée en proposant des dynamiques pour les processus  $l(t)$ ,  $s(t)$  et  $c(t)$ .

Préalablement à la définition de ces dynamiques nous justifions le choix de la constance du paramètre d'échelle  $\tau_1$ . Nous avons privilégié la robustesse de la modélisation à une précision probablement illusoire et avons fixé ce paramètre à 2 ce qui permet à la fonction qui représente les chocs de courbure d'être maximale. Ce choix est justifié par les résultats de l'ACP présentée ci-dessous et est de plus cohérent avec l'expérience des praticiens pour lesquels ce point sépare les segments de marché court terme (dépôt et futurs) des segments long terme pour les *swaps* de maturité supérieure à deux ans.

La détermination du nombre de facteurs déterminant la forme de la courbe des taux et leur interprétation a fait l'objet de nombreux travaux, dont on trouvera une synthèse dans RONCALLI [1998]. On conclut de ces études que les trois facteurs  $l(t)$ ,  $s(t)$  et  $c(t)$  utilisés ici expliquent classiquement plus de 95 % de la variance de la courbe. Nous avons néanmoins revalidé ce résultat sur une période de 10 ans couvrant les années 2007 et 2008 marquées par une crise du marché interbancaire. Les points retenus correspondent aux maturités 1 mois, 3 mois 6 mois et 12 mois pour les taux de dépôt et 2,3,4,5,7,12,15,20 et 30 ans pour les taux de *swap*, soit 14 points au total. Nous trouvons la matrice de corrélation suivante :

Table 9 – Matrice de corrélation des maturités

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	7 ans	10 ans	12 ans	15 ans	20 ans	30 ans
1 mois	100%	64%	59%	56%	18%	15%	12%	10%	9%	7%	5%	3%	1%	-1%
3 mois	64%	100%	90%	74%	39%	34%	29%	26%	24%	19%	16%	12%	9%	6%
6 mois	59%	90%	100%	90%	57%	51%	45%	41%	38%	31%	27%	22%	18%	14%
12 mois	56%	74%	90%	100%	72%	67%	62%	58%	54%	47%	42%	37%	32%	28%
2 ans	18%	39%	57%	72%	100%	98%	94%	91%	85%	77%	72%	68%	62%	58%
3 ans	15%	34%	51%	67%	98%	100%	97%	96%	92%	84%	80%	76%	70%	66%
4 ans	12%	29%	45%	62%	94%	97%	100%	99%	95%	88%	84%	81%	75%	70%
5 ans	10%	26%	41%	58%	91%	96%	99%	100%	97%	91%	87%	84%	79%	74%
7 ans	9%	24%	38%	54%	85%	92%	95%	97%	100%	98%	96%	92%	88%	84%
10 ans	7%	19%	31%	47%	77%	84%	88%	91%	98%	100%	99%	97%	94%	90%
12 ans	5%	16%	27%	42%	72%	80%	84%	87%	96%	99%	100%	98%	97%	93%
15 ans	3%	12%	22%	37%	68%	76%	81%	84%	92%	97%	98%	100%	98%	96%
20 ans	1%	9%	18%	32%	62%	70%	75%	79%	88%	94%	97%	98%	100%	98%
30 ans	-1%	6%	14%	28%	58%	66%	70%	74%	84%	90%	93%	96%	98%	100%

Sur la base de cette matrice de corrélation une ACP fournit les résultats suivants :

Table 10 – Résultats de l'ACP

Vecteurs propres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,063	0,429	0,479	0,754	0,061	0,063	0,044	0,070	0,002	0,001	0,009	0,006	0,000	0,005
2	0,118	0,489	0,194	-0,423	0,585	0,103	-0,107	-0,403	-0,028	0,013	-0,047	0,011	0,003	-0,009
3	0,164	0,479	0,026	-0,368	-0,155	-0,027	0,183	0,735	0,054	-0,024	0,075	-0,017	-0,011	0,017
4	0,212	0,403	-0,088	-0,059	-0,691	-0,247	-0,246	-0,425	-0,038	-0,004	-0,020	-0,016	0,012	-0,017
5	0,290	0,106	-0,393	0,117	-0,062	0,522	0,365	-0,080	-0,081	0,225	-0,432	0,240	0,061	-0,128
6	0,306	0,047	-0,329	0,127	0,064	0,252	0,184	-0,137	0,032	-0,219	0,693	-0,325	-0,152	0,041
7	0,310	0,001	-0,284	0,154	0,186	-0,075	-0,407	0,164	-0,036	0,078	-0,218	-0,167	0,109	0,688
8	0,312	-0,028	-0,229	0,147	0,217	-0,188	-0,464	0,205	0,000	0,045	-0,056	-0,029	-0,173	-0,673
9	0,319	-0,075	-0,048	0,051	0,122	-0,317	0,132	-0,037	0,204	-0,304	0,178	0,633	0,431	0,031
10	0,313	-0,125	0,117	-0,015	0,048	-0,348	0,348	-0,099	0,256	-0,007	-0,227	0,018	-0,692	0,146
11	0,307	-0,154	0,186	-0,044	0,020	-0,228	0,306	-0,067	0,114	0,216	-0,128	-0,577	0,510	-0,165
12	0,298	-0,182	0,237	-0,072	-0,028	-0,042	0,074	0,040	-0,870	-0,213	-0,009	0,039	-0,054	0,012
13	0,286	-0,208	0,313	-0,110	-0,105	0,186	-0,182	0,020	0,060	0,687	0,368	0,257	-0,056	0,075
14	0,274	-0,223	0,353	-0,131	-0,183	0,487	-0,273	0,032	0,325	-0,487	-0,197	-0,077	0,009	-0,025

avec les valeurs propres :

Table 11 – valeurs propres

Valeurs propres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeurs	9,42838	2,9045	0,85815	0,40589	0,17532	0,09274	0,04516	0,03623	0,01931	0,01185	0,00901	0,00599	0,0048	0,00267
% expliqué	67%	88%	94%	97%	98%	99%	99%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Les trois premiers vecteurs propres permettent d'expliquer 94 % de la variance totale ; on voit également que le premier facteur correspond à une déformation homogène du niveau des taux, le second à des modifications de pente et le troisième à des changements de courbure. Ces résultats classiques sont toujours observables aujourd'hui et valident *a posteriori* la capacité descriptive satisfaisante du modèle paramétrique de Nelson et Siegel retenu ici.

Il convient maintenant de spécifier la dynamique des facteurs.

## 2.2 Description de la dynamique des facteurs

Considérons le modèle classique proposé dans HULL et WHITE [1994], qui reprend l'approche de retour à la moyenne du modèle classique de VASICEK [1977] :

$$dr_0(t) = \mu_r (l_t - r_t) dt + \sigma_r dW_r(t)$$

$$dl(t) = \mu_l (l_\infty - l_t) dt + \sigma_l dW_l(t)$$

Avec ce type de spécification, les taux courts convergent nécessairement (en espérance) vers le taux long asymptotique, c'est-à-dire que la courbe asymptotique est nécessairement, en espérance, plate. Si ce comportement peut se justifier en probabilité risque neutre<sup>1</sup>, il n'en va plus de même en probabilité historique où le contraire devrait être vrai, la courbe asymptotique devant *a priori* avoir, en espérance, une forme normale, c'est-à-dire croissante et avec une pente déterminée par  $l_\infty - r_\infty$ . On retient donc ici :

$$dr_0(t) = \mu_r (r_\infty - r_t) dt + \sigma_r dW_r(t) + S(t) dN(t)$$

$$dl(t) = \mu_l (l_\infty - l_t) dt + \sigma_l dW_l(t)$$

afin de reproduire cet effet et de tenir compte de sauts sur le niveau du taux court. On complète par la dynamique du facteur de courbure :

$$dc(t) = \mu_c (c_\infty - c_t) dt + \sigma_c dW_c(t).$$

Ce point peut être vu comme un passage de la probabilité risque neutre à la probabilité physique par changement de tendance, le niveau de retour long terme faisant partie de la tendance.

Le processus de sauts est décrit par un processus de Poisson  $N$  d'intensité constante

<sup>1</sup> En probabilité risque neutre, le prix de marché du risque doit être asymptotiquement indépendant de la maturité du prêt.

$\lambda$ . Les amplitudes des sauts sont supposées décrites par une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Pareto de paramètre  $(s, \alpha)$  de sorte que :

$$P(S > x) = \left(\frac{x}{s}\right)^{-\alpha}.$$

En termes de structure de dépendance, les corrélations constatées historiquement sont compatibles avec une hypothèse d'indépendance. La corrélation des browniens est toutefois facile à ajouter dans le processus si une corrélation est constatée. Par ailleurs, l'intégration de dépendances entre la taille des sauts et/ou leur temps de survenance est possible *via* les copules (pour les aspects liés à la structure de dépendance des actifs financiers, on peut par exemple consulter KHAROUBI-RAKOTOMALALA C. [2009]) mais n'a pas été implémentée.

### 2.3 Calibrage des paramètres

Le calibrage des paramètres du modèle est effectué en deux temps : en premier lieu les paramètres du modèle de Nelson-Siegel sont ajustés à partir de séries historiques de prix, puis, dans un second temps, on utilise les évolutions des paramètres ainsi ajustés pour estimer les paramètres des diffusions de chaque facteur.

Une date  $t$  étant fixée,  $\tau_1$  étant supposé fixe et connu, les valeurs de  $r_0(t)$ ,  $l(t)$  et  $c(t)$  sont estimées en minimisant la somme des carrés des écarts entre les taux zéro-coupon observés et ceux issus du modèle. On utilise donc la fonction de perte :

$$p(\tau_1) = \sum_{i \in I} (R_i - R_i(\tau_1))^2$$

avec  $R_i(\tau) = r_0(t)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t)\left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$  le taux issu du modèle,  $R_i$  le

taux lu sur le marché, pour tout  $i \in I$ ,  $I$  étant l'ensemble des taux disponibles à la date  $t$  considérée. Comme  $R_i(\tau)$  est une fonction linéaire du paramètre à estimer  $\theta_i = (r_0(t), l(t), c(t))$ , la dérivée  $\frac{\partial}{\partial \theta} p(\tau_1)$  se calcule simplement et on obtient une solution explicite en fonction de  $\tau_1$ . Dans les applications, on prend comme indiqué *supra*  $\tau_1 = 2$ .

En effectuant cette estimation à différentes dates, on reconstitue une série  $\{\theta_t, t \in T\}$ . En pratique on retient un pas d'estimation hebdomadaire. A partir de la série ainsi obtenue,

et en effectuant une discrétisation d'Euler des dynamiques des facteurs, on peut alors en estimer les paramètres. Les processus étant indépendants, l'estimation des paramètres est menée séparément pour chaque dynamique. Pour ce qui concerne  $l$  et  $c$ , on se trouve dans la situation classique d'un modèle de régression linéaire dont les estimateurs sont bien connus (cf. PLANCHET et al. [2009]). La présence de la composante à sauts dans le processus de taux court impose une approche légèrement différente, en isolant les sauts supposés associés aux grandes déviations des valeurs standards :

- on estime le seuil de la loi de Pareto par comparaison des valeurs observées à la médiane théorique du maximum de l'échantillon sous une hypothèse de mouvement brownien pur ; celle-ci est déterminée à partir de la loi du maximum ;
- on estime alors ensuite les paramètres de manière classique sur la partie "hors sauts" et on utilise l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\alpha$  pour les sauts.

Dans l'application numérique proposée, le facteur de taux a été modélisé à l'aide de processus à sauts de deux types différents : processus à sauts normaux ou de Pareto. Le calibrage des paramètres a été réalisé sur les moments d'ordre 3 et 4 dans le cas de sauts supposés normaux et par identification explicite des sauts dans le cas de sauts suivants une loi de Pareto, conformément au processus décrit ci-dessus.

L'application numérique présentée ici s'appuie sur des courbes de taux *swaps* Euros et Dollars US (source Bloomberg). Sur la base de ces données arrêtées à fin 2007, les résultats sur les statistiques des sauts sont présentés ci-dessous :

Table 12 – Ajustement des sauts

Sauts Normaux	Vol Brownien	Fréquence des sauts	Ecart type des sauts	Méthode	Commentaire
Calibrage simple	0.309%	4.613	0.117%	Vol brownien approchée par excès, moments 2 et 4 fittés	cf Etape 1, manière simple pour prendre les sauts en compte; mais avec biais
Calibrage complet	0.242%	11.580	0.093%	Moments 2, 3 et 4 fittés	Intérêts de sauts mensuels sur un horizon de cinq ans ?

Pareto (Fat tails)	Vol Brownien	Fréquence des sauts	Alpha des sauts	Méthode	Commentaire
Sauts symétriques	0.291%	6.380	2.85	Identification des sauts après estimation vol du brownien	Pas de moments d'ordre 3
Sauts asymétriques	0.291%	A droite: 3.50 A gauche: 2.88	A droite: 3.41 A gauche: 2.37	Identification des sauts après estimation vol du brownien	Pas de moment d'ordre 3 à gauche Pas de moment d'ordre 4 à droite



Le choix a été fait de calibrer sur un historique depuis l'entrée en vigueur de l'Euro (sur l'hypothèse que les objectifs de la BCE seront stables à cinq ans). Les alternatives qui pourraient potentiellement être utilisées consistent à :

- Remonter plus loin pour prendre en compte les chocs des années 1990 ;
- Remonter plus loin mais en expurgeant les chocs du début des années 1990, liés à un moment particulier de l'Histoire (chute du mur de Berlin).

On peut ici noter que se pose *a priori* la question d'une éventuelle prime de liquidité non capturée par le modèle. Compte tenu du contexte du présent travail, qui se préoccupe de la simulation de *cash flows* indexés sur des taux *euribor* et de valorisation d'actifs, cela ne pose pas de problème majeur. Dans un contexte différent, par exemple s'il agissait de l'actualisation de passifs, la liquidité devrait par contre être intégrée à la modélisation.

### 3. MODELISATION DU BILAN

La modélisation des impacts des chocs subis par la courbe des taux sur la valeur des actifs considérés doit être complétée d'une description de leur comptabilisation, afin d'en déduire les effets du point de vue de l'entreprise détentrice.

Dans le cadre de cette étude, on considère un bilan dans lequel se trouvent les instruments de crédit suivants :

- Les obligations à taux fixe ou variable, amortissable ou *in fine* ;
- Les obligations indexées sur l'inflation ;
- Les *loans* et les lignes de crédit ;
- Les instruments de financement classiques des entreprises : crédit bail, prêts bancaires, etc.
- Les *caps* et les *floors*, vanilles ou à barrière.

L'évaluation se fait par formule fermée : actualisation et calcul des taux à terme pour les instruments linéaires, formule de Black pour les options (*cf.* HULL [1999] pour les formules associées) :

Table 13 – Formule fermée relative aux options<sup>1</sup>

	Formule fermée
Cap	$L\delta_k e^{-rT} [F_k N(d'_1) - R_k N(d'_2)]$
Floor	$L\delta_k e^{-rT} [F_k N(-d'_1) - R_k N(-d'_2)]$
Put européen	$e^{-rT} KN(-d_2) - S_0 N(-d_1)$
Call européen	$S_0 N(d_1) - e^{-rT} KN(d_2)$
Call down-and-in	$S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y) - e^{-rT} K \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$
Call up-and-out	$S_0 N(x_1) - e^{-rT} KN(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)]$ $+ Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$
Put up-and-out	$-S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(-y) + e^{-rT} K \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$
Put down-and-out	$-S_0 N(-x_1) + e^{-rT} KN(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)]$ $- Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$

Avec  $N$  la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite et :

- *Cap* et *Floor* de principal  $L$  et de taux plafond  $R_k$  où  $F_k$  est le taux *forward* entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$  avec :
 
$$d'_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{R_k}\right) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}, \quad \delta_k = t_{k+1} - t_k \text{ et } d'_2 = d'_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}.$$
- *Call* et *Put* européens de maturité  $T$  avec :

<sup>1</sup> Dans le cas d'actions ne versant pas de dividende.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

- Option à barrière  $H$  avec :

$$y = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{S_0 K}\right) + \lambda\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2}, x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \lambda\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } y_1 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_0}\right) + \lambda\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} .$$

La volatilité implicite par échéance est constatée à l'origine, puis incrémentée de la variation de volatilité historique propre à chaque scénario et à chaque échéance. L'écart entre volatilité implicite et volatilité historique est ainsi maintenu constant au cours du temps. L'impact comptable des chocs peut alors être considéré.

### 3.1 La norme IAS 39

#### 3.1.1 Principes généraux

La norme IAS 39 a pour objet la comptabilisation et l'évaluation des instruments financiers. La notion d'instrument financier a été définie en France par la loi 96-597 du 2 juillet 1996 de modernisation des activités financières article 1 et intégrée dans le Code monétaire et financier article L. 211-1. Cette définition intègre notamment les actions, titres donnant accès au capital, les parts ou actions d'OPC, les instruments financiers à terme et les titres pouvant donner accès au capital. Cette définition a été élargie aux instruments financiers dérivés en 1989 par l'IASB<sup>1</sup> : « un instrument financier est un contrat qui donne lieu à un actif financier d'une entité et à un passif financier ou à un instrument de capitaux propres d'une autre entité ». La norme IAS 39 a fait l'objet d'une première publication en 1998. Elle a depuis été revue de nombreuses fois, notamment en décembre 2003 et mars 2004.

L'axe principal de cette norme réside dans la classification des instruments financiers :

- Les *FVTPL* : actifs acquis dans le but évident de rechercher un profit à court terme. Ces actifs sont évalués à leur juste valeur dont les mouvements sont comptabilisés par le compte de résultat ;
- Les *HTM* : placements à paiements fixes ou déterminables et à échéance déterminée détenus jusqu'à l'échéance. Ils sont valorisés au coût amorti

<sup>1</sup> International Accounting Standards Board.

selon la méthode du taux d'intérêt effectif dont les flux et dépréciation<sup>1</sup> sont comptabilisés par le compte de résultat. Par définition la valeur comptable de cette classe d'actifs est neutre au risque de taux ;

- Les *L&R* : actifs ou passifs financiers non dérivables à paiements fixes et déterminables. Ils sont valorisés au coût amorti selon la méthode du taux d'intérêt effectif dont les flux et dépréciation<sup>2</sup> sont comptabilisés par le compte de résultat ;
- Les *AFS* : actifs financiers qui n'entrent pas dans l'une des trois catégories précédentes. Ils sont évalués à leur juste valeur dont les mouvements sont comptabilisés en capitaux propres. Il convient de noter qu'en cas d'indications objectives de la dépréciation d'un actif, la perte associée doit être sortie des capitaux propres et constatée dans le résultat.

### **3.1.2 Comptabilisation<sup>3</sup> des produits dérivés, produits hybrides et produits de couverture**

#### **Produits dérivés :**

Au sens de la norme IAS 39 un produit dérivé présente un faible coût à l'émission, est réglé à une date future dont la valeur fluctue en fonction d'un sous-jacent. Les produits dérivés intègrent, en outre, les contrats à terme ferme, les *swaps*, les options, les *caps*, *floors* et *collars*. Leur comptabilisation suit celle des FVPTL sauf s'il s'agit d'un instrument de couverture ou s'il s'agit d'un dérivé sur actions non coté dont la juste valeur ne peut être déterminée de manière fiable. Il est à noter que dans ce dernier cas et si le dénouement de ce dérivé ne peut se faire que par la livraison physique d'action alors le dérivé peut être enregistré au coût ou au coût amorti.

#### **Produits hybrides :**

Dans le cas des produits hybrides, le dérivé incorporé doit obligatoirement être comptabilisé à sa juste valeur. L'IASB définit un dérivé incorporé comme la composante d'un instrument hybride qui a pour effet de faire varier une partie des flux de trésorerie de l'instrument d'une manière analogue à celle d'un dérivé autonome. Si le dérivé incorporé doit être évalué à la juste valeur par résultat le traitement comptable du produit hybride dépend de la règle du *split accounting*. Cette règle vise à évaluer si le dérivé incorporé doit

---

<sup>1</sup> Contre le risque de crédit.

<sup>2</sup> Contre le risque de crédit.

<sup>3</sup> Dans le cas d'une acquisition et non d'une vente.

être séparé de son contrat hôte. D'une manière générale, il y a séparation du dérivé à partir du moment où trois principes sont respectés :

- les risques afférents au dérivé ne sont pas étroitement liés à ceux du contrat hôte ;
- le contrat hôte n'est pas comptabilisé en juste valeur par résultat ;
- l'actif incorporé rentre dans la définition IAS 39 d'un produit dérivé.

Ainsi les produits hybrides suivants devront être séparés :

- option d'achat ou de vente incorporée dans un instrument de capitaux propres ;
- indexation du principal ou des intérêts d'un instrument de dette ou d'un contrat d'assurance sur la valeur d'actions ;
- obligations convertibles ;
- dérivé de crédit incorporé dans un instrument de dette qui permet à l'une des parties de transférer le risque de crédit d'un actif.

A l'inverse, les produits suivants ne devront pas être séparés :

- dérivé de crédit lié à un taux d'intérêt modifiant les montants d'intérêts du contrat hôte (type OATI) ;
- *caps* ou *floors* incorporés dans un instrument de dette s'ils ne présentent pas d'effet de levier et qu'ils sont émis au taux de marché (à préciser) ;
- élément de dette dans une monnaie étrangère ;
- option de remboursement anticipé.

#### **Produits de couverture :**

La norme IAS 39 définit un instrument de couverture comme un dérivé dont les mouvements de juste valeur ou les flux de trésorerie doivent permettre de compenser les mouvements de juste valeur ou les flux de trésorerie de l'élément couvert. Le principe général de la comptabilité de couverture est qu'il faut retenir<sup>1</sup> l'élément de couverture comme l'élément principal, ce dernier étant comptabilisé à la juste valeur. Dans le cas d'une couverture en juste valeur, l'élément couvert doit suivre le mode de comptabilisation de l'instrument de couverture.

La comptabilisation des pertes et profits dépend de la nature de la couverture, à savoir une couverture en juste valeur, une couverture en flux de trésorerie et la couverture

---

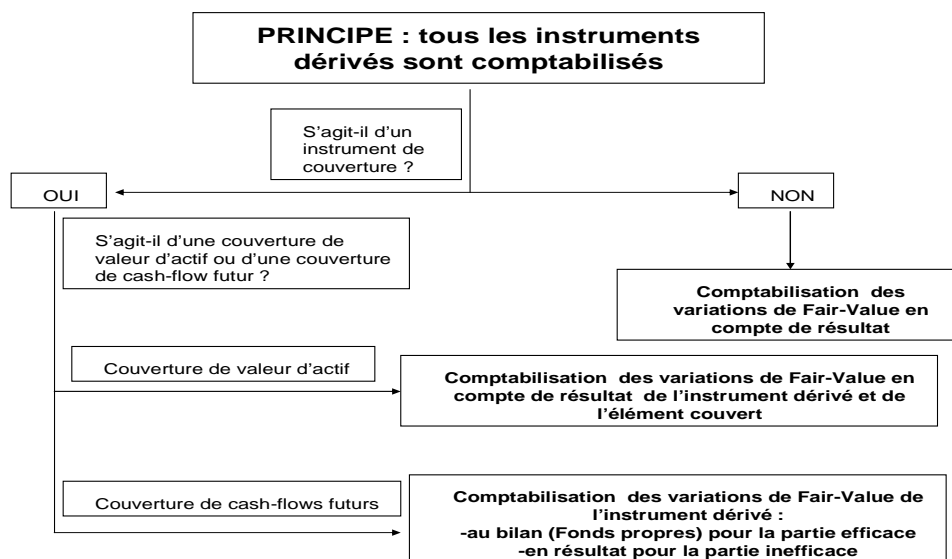
<sup>1</sup> Dans le cas où la compagnie est à même de démontrer l'efficacité de la couverture.

d'un investissement<sup>1</sup> net dans une entreprise étrangère :

- dans le cas d'une couverture en juste valeur, le profit ou la perte de la couverture et de l'élément couvert doit être comptabilisé en résultat ;
- dans le cas d'une couverture en flux de trésorerie :
- dans l'attente du dénouement de la transaction couverte la part du profit ou de la perte attribuable à la partie efficace de l'élément de couverture doit être comptabilisée selon la classification comptable de cet instrument ;
- au moment du dénouement de la transaction couverte, les montants enregistrés en capitaux propres sont reversés au compte de résultat selon le rythme des flux de trésorerie de l'élément couvert<sup>2</sup>.

De manière synthétique, on peut résumer le principe de comptabilisation des produits dérivés *via* le schéma suivant :

Figure 5 - Principe de comptabilisation des instruments dérivés



### 3.1.3 Application au bilan retenu

Sur la base de la structure de portefeuille envisagée, et en considérant un investissement classique (pas de comptabilisation en devise étrangère par exemple) et des

<sup>1</sup> Nous ne traiterons pas de la comptabilisation de ce type de couverture dans le présent article.

<sup>2</sup> Dans le cas où le dénouement donne naissance à un actif ou passif, le montant des capitaux propres accumulés sont enregistrés dans le coût d'entrée de l'instrument.

principes détaillés ci-avant, la comptabilisation du bilan peut être synthétisée suivant la Table 14. Il convient de préciser qu'une information ligne à ligne pourrait conduire à une valorisation différente (il n'est pas indifférent de déformer le *spread* moyen d'un regroupement de ligne ou chacun des *spread* des titres pris individuellement).

Table 14 – Comptabilisation du bilan

	En l'absence de couverture	Avec couverture en juste valeur	Avec couverture en trésorerie
Obligation à taux fixe (amortissable ou <i>in fine</i> )	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti	juste valeur par résultat	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti
Obligation à taux variable	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti	juste valeur par résultat	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti
Caps et floors seuls	Juste valeur par résultat	s.o	s.o
Caps et floors inclus dans un actif hybride	Comptabilisation du contrat hôte	s.o	s.o
Crédit bail	Juste valeur par résultat	Juste valeur par résultat	Juste valeur par résultat
Prêts bancaires	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti	juste valeur par résultat	Juste valeur par capitaux propres ou coût amorti
vanilles (seules ou incorporées)	Juste valeur par résultat	s.o	s.o
option à barrière (seule ou incorporée)	Juste valeur par résultat	s.o	s.o

### 3.2 La norme IFRS 9, futur de la norme IAS 39

L'IASB a publié le 19 novembre 2009 la première version de la norme IFRS 9, cette dernière devant remplacer à terme l'actuelle norme IAS 39.

La principale nouveauté introduite par la norme IFRS 9 est la disparition des 4 catégories d'actif de la norme IAS 39. Dorénavant, un actif ou passif financier devra être comptabilisé soit à la juste valeur par résultat, soit au coût amorti. La règle de classification est définie par le ou les *business models* de la compagnie ainsi que par les caractéristiques contractuelles de ses flux de trésorerie. Ainsi un actif peut être comptabilisé au coût amorti si les flux sont composés des intérêts et du principal et que le business model de la compagnie prévoit de payer et de recevoir les flux contractuellement prévus (intérêts et principal) générés lors de l'émission ou de la détention du titre. Les flux doivent être déterminables et sans effet de levier. Contrairement à l'actuelle norme IAS 39 l'appréciation ne se fait pas instrument par instrument mais au global.

Concernant la valorisation des instruments dérivés ces derniers sont toujours valorisés à la juste valeur par résultat.

Au niveau des actifs hybrides la norme IFRS 9 stipule que leur classification doit maintenant suivre celle du contrat hôte. Ainsi le principe de séparation afférent à la norme IAS39 n'existe plus. Dorénavant, les actifs hybrides seront comptabilisés suivant la nature du contrat hôte mais seuls les titres de dettes vanille intégrant un dérivé de type *cap*, *floor*, tranche *senior* d'une dette structurée (séparée en juste valeur par résultat et coût amorti sous IAS 39) pourront être classés dans la catégorie coût amorti, excluant :

- les tranches non *senior* de dette structurée ;
- les obligations convertibles ;
- les titres dont la performance est indexée sur un indice (hors OATi autorisées) ;
- *swap* et contrat *forward* ;
- les obligations détenues dans les OPCVM.

Il est à noter qu'une option dite « option OCI » permet de valoriser les actifs en juste valeur par fonds propres. Cependant, le marché ne semble pas vouloir la retenir.

Pour l'heure, la publication effectuée par l'IASB ne traite pas des produits de couverture, mais un exposé sondage relatif à cette problématique a été publié le 13 décembre 2010. Dans le cas où les propositions de l'exposé sondage seraient adoptées, elles viendraient compléter le chapitre 6 de la norme IFRS 9.

#### **4. CALCUL DE VAR**

Compte tenu de la complexité des mécanismes comptables, le recours à une approche par simulation s'avère inévitable pour le comportement des facteurs de risque dans le monde réel, les prix des actifs eux même étant calculés par des formules fermées, quitte à ce qu'il s'agisse d'approximations justifiées de la valeur de l'option.

Dans un premier temps on génère donc des trajectoires de  $r_0(t)$ ,  $l(t)$  et  $c(t)$  sur l'horizon de projection souhaité, puis on en déduit des estimateurs de la *VaR* sur la base des réalisations ainsi obtenues de la distribution des flux futurs de la dette.

##### **4.1 Méthode de simulation des courbes de taux**

La simulation de Monte Carlo mise en œuvre ici fonctionne sur les principes suivants, avec un pas de discrétisation  $h$  mensuel ( $h = \frac{1}{12}$ ) des processus sous-jacents :



- Simulation des browniens : 3 variables aléatoires normales centrées réduites sont simulées et stockées une fois pour toutes ;
- Simulation des mois avec ou sans sauts :
  - tirage d'une valeur  $U$  dans une loi uniforme ;
  - si  $U > \lambda h$ ,  $h = \frac{1}{12}$  il n'y a pas de saut ;
  - si  $\frac{\lambda h}{2} \leq U < \lambda h$  il y a 1 saut à droite ;
  - si  $U \leq \frac{\lambda h}{2}$  il y a 1 saut à gauche ;
- Taille des sauts : la taille du saut est obtenue par inversion de la fonction de répartition de la loi de Pareto :  $x = s \times (1 - V)^{-1/\alpha}$  avec  $V$  une réalisation d'une loi uniforme.

Les réalisations de variables uniformes sont générées en recourant aux suites de Sobol (cf. THIEMARD E. [2000] ou PLANCHET et al. [2005]) ce qui permet d'optimiser la convergence des indicateurs statistiques, et cela quelque soit la taille de l'échantillon. Cette méthode quasi-aléatoire présente les avantages suivants :

- Contrôle de la qualité de l'aléa généré ;
- Annulation de l'aléa d'échantillonnage dans la comparaison des résultats de deux simulations sur des données de marché ou de gestion différentes ;
- Performance de calcul.

Compte tenu du processus de retour à la moyenne, les paramètres sont d'abord simulés en niveau absolu puis les chocs sont édités dans des tables, pour pouvoir être appliqués à des courbes de taux différentes de la courbe initiale.

Cette pratique évite de générer les chocs pour chaque calcul de  $VaR$  : seuls sont modifiés les portefeuilles et les données de marché de départ.

#### 4.2 Estimation du quantile et indicateurs statistiques

L'estimation d'un quantile d'ordre élevé à partir d'un échantillon n'est pas simple et les travaux sur ce sujet sont nombreux (on se reportera par exemple à CHRISTOFFERSEN et al. [2001] et JORION [2001]). Nous utilisons ici les trois méthodes suivantes :

- Estimation directe du quantile à partir de l'échantillon simulé. Cette méthode non paramétrique consiste à ordonner l'échantillon afin de

déterminer ses quantiles. Ainsi dans le cas d'un échantillon de 1 000 valeurs, le quantile à 95 % correspond à la 950<sup>ème</sup> plus grande valeur.

- Approximation de Cornish-Fisher (CORNISH et FISHER [1937]) à partir des moments d'ordre 3 et 4. Il s'agit d'un estimateur semi-paramétrique basé sur le quantile d'une loi normale corrigé d'un développement dit de Cornish-Fisher pour prendre en compte la *skewness* et la *kurtosis* (moments d'ordre 3 et d'ordre 4 de la distribution des rentabilités). Son expression est :

$$VaR(1-\alpha) = \mu + \tilde{Z}_\alpha \sigma,$$

$$\tilde{Z}_\alpha = Z_\alpha + \frac{1}{6}(Z_\alpha^2 - 1)S + \frac{1}{24}(Z_\alpha^3 - 3Z_\alpha)(K - 3) - \frac{1}{36}(2Z_\alpha^3 - 5Z_\alpha)S^2.$$

Où  $Z_\alpha$  est le quantile  $1-\alpha$  d'une gaussienne centrée réduite,  $S$  est le coefficient d'asymétrie (*skewness*) du portefeuille et  $K$  son coefficient d'aplatissement (*kurtosis*).

- Approximation de Cornish-Fisher à partir des moments d'ordre 3,4 et 5.

Les éléments présentés jusqu'alors sont maintenant utilisés pour la détermination de la *VaR* à 95 % des charges financières associées à une dette d'entreprise.

## 5. APPLICATION AUX FRAIS ASSOCIES A UNE DETTE OBLIGATAIRE COMPLEXE

Les données de gestion utilisées ici sont composées d'une dette d'une entreprise industrielle dans le secteur du service aux collectivités. Le service de cette dette, supposée complexe, expose l'entreprise à devoir régler des flux dont le montant est aléatoire, du fait notamment de la présence d'instruments à taux variable et de produits dérivés. On considère l'impact des variations de taux sur deux montants différents :

- les frais financiers tels qu'ils apparaissent dans le compte de résultat, éventuellement exprimés en taux rapporté à l'encours de dette (pour un portefeuille d'actifs de taux, on aurait symétriquement le revenu comptable) ;
- la variation de fonds propres en M€, qui correspond à la variation des instruments de couverture de *cash flows* couverts. Ce deuxième montant est toutefois nettement moins sensible, l'impact potentiel du risque de taux au niveau des fonds propres étant négligeable en pratique, contrairement à l'impact sur le résultat.

- Les frais financiers sont déterminés à partir des flux suivants :
- les coupons pour les obligations à taux (ou taux variables *swappés* à taux fixes si la couverture est reconnue) ;
- un taux d'intérêt *euribor* + marge pour les obligations à taux variable ;
- la variation de *fair value* pour les dérivés de *trading*.

Pour les obligations indexées sur l'inflation, par simplification, on fixe le taux réel à son niveau de départ (coupon = inflation + marge fixe = taux nominal -taux réel + marge fixe1 = taux nominal +/- marge fixe2). Le comportement est similaire ensuite aux obligations à taux variable classiques. Cette approximation est justifiée par le fait qu'ici l'indicateur de risque est le taux comptable de la dette mesuré inflation incluse et que l'horizon de projection est relativement court (5 ans) au regard des risques d'inflation.

La *Var* à 95 % du montant des frais issus des deux flux décrits ci-dessus est évaluée par simulation sur la base de 10 000 courbes simulées.

Table 15 – Indicateurs de risque – hypothèse d'encours de la dette constante

Horizon		1	2	3	4	5
Encours base 100 année 0		100	100	100	100	100
Indicateurs statistiques du taux de frais financiers	Médiane	5,097%	4,997%	5,090%	5,113%	5,047%
	Moyenne	5,106%	5,001%	5,089%	5,111%	5,042%
	Ecart type	0,116%	0,161%	0,199%	0,237%	0,283%
	Skweness	0,494	0,126	-0,097	-0,063	-0,056
	Excess Kurtosis	0,572	0,373	0,023	-0,317	-0,418
95ème centile		5,314%	5,267%	5,412%	5,500%	5,498%
Estimation paramétrique gaussienne		5,297%	5,266%	5,416%	5,500%	5,507%
Centile correspondant		93,63%	94,87%	95,20%	95,05%	95,36%
Estimation semi paramétrique (Cornish Fisher)		5,311%	5,271%	5,411%	5,498%	5,505%
Centile correspondant		94,86%	95,16%	94,87%	94,88%	95,29%
T VAR 95%		5,379%	5,352%	5,489%	5,574%	5,596%

Table 16 – Indicateurs de risque - croissance organique de la dette (croissance du CA hors financement d'acquisitions)

Horizon		1	2	3	4	5
Encours base 100 année 0		105	114	118	117	118
Indicateurs statistiques du taux de frais financiers	Médiane	5,081%	4,969%	5,036%	5,057%	4,996%
	Moyenne	5,091%	4,972%	5,036%	5,053%	4,992%
	Ecart type	0,120%	0,195%	0,248%	0,286%	0,325%
	Skweness	0,485	0,112	-0,051	-0,054	-0,053
	Excess Kurtosis	0,602	0,293	-0,018	-0,242	-0,384
95ème centile		5,304%	5,296%	5,444%	5,518%	5,515%
Estimation paramétrique gaussienne		5,288%	5,293%	5,444%	5,523%	5,527%
Centile correspondant		93,70%	94,81%	95,03%	95,20%	95,40%
Estimation semi paramétrique (Cornish Fisher)		5,303%	5,298%	5,441%	5,520%	5,524%
Centile correspondant		94,86%	95,11%	94,81%	95,09%	95,32%
T VAR 95%		5,374%	5,392%	5,539%	5,615%	5,627%

Les tableaux ci-dessus permettent de faire les remarques suivantes :

- L'incertitude qui porte sur les frais financiers comptables, hors impact du propre risque de crédit de l'émetteur, est de l'ordre de 12bp la première année et se stabilise autour de 30bp à cinq ans.
- De manière un peu contre-intuitive, le risque est stable (voire diminue) entre la quatrième et la cinquième année. Cela est dû à la présence dans le portefeuille de produits dérivés classés en *trading* à cette échéance.
- Les queues de distribution ne présentent pas de caractère fortement leptokurtique, malgré la présence de sauts de Pareto sur les taux courts. La dispersion des dates futures d'émission et le lissage propre aux règles comptables peuvent expliquer cet apparent paradoxe.
- L'excellente qualité des approximations semi-paramétriques de Cornish-Fisher, malgré la complexité du calcul. Cela signifie qu'un nombre de simulations permettant d'estimer les moments jusqu'à l'ordre quatre est en fait suffisant pour l'estimation des quantiles à 95%.

## 6. CONCLUSION

Le modèle présenté ici permet de calculer des *VaR* sur un portefeuille d'instruments de taux en s'appuyant sur une modélisation aussi réaliste que possible des déformations de la courbe des taux et en en déduisant les conséquences sur la valeur des instruments dérivés par un ajustement des paramètres intégrant la prime de risque pour éviter de développer un modèle "risque neutre" en complément du modèle historique. Cette approche présente l'intérêt de permettre d'intégrer dans le modèle le calcul de quantile et le calcul de prix en évitant la lourdeur des approches de type "simulation dans les simulations" ou les portefeuilles répliquant.

Mise en place dans le contexte relativement simple d'une dette *corporate*, elle peut être également utilisée dans un contexte d'assurance, dans le contexte de la couverture d'engagements viagers par un portefeuille obligataire telle qu'elle est proposée dans PIERRE S. [2010]. Elle permet en effet une mesure de la déformation de la courbe de taux et de son impact plus fine qu'une approche par duration.

Son utilisation plus large dans le cadre par exemple du calcul des provisions sur des contrats d'épargne en Euro n'est pas contre pas simple, du fait de la difficulté de déterminer le coût des options et garanties par des formules fermées.

De plus, une dimension risque de crédit devrait également être modélisée pour représenter correctement les actifs de taux.

## 7. BIBLIOGRAPHIE

CHRISTOFFERSEN P., HAHN J., INOUE A. [2001] "Testing and Comparing Value-at-Risk Measures", CIRANO, 2001-s03.

CORNISH E. A., FISHER R. A. [1937] "Moments and Cumulants in the Specification of Distributions." Extrait de la Revue de l'Institut International de Statistique 4, 1-14, 1937. Reprinted in Fisher, R. A. Contributions to Mathematical Statistics. New York: Wiley, 1950.

DESCURE C., BOREAN C. [2006] "Gestion actif-passif et solvabilité", Proceedings of the 28th international congress of actuaries.

DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] "Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II", Bulletin Français d'Actuariat, vol. 9, n°17.

GRUPE REVUE FIDUCIAIRE [2009] "Code IFRS normes et interprétation", Collection des codes RF

HULL J.C. [1999] *Options, futures and other derivatives*, 4th edition, Prentice-Hall.

HULL J., WHITE A. [1994] "Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-Factor Models", *Journal of Derivatives* 2 (2), 37-48.

JORION P. [2001] *Value at Risk*, Second Edition, McGraw Hill.

JOUINI E.; NAPP C.; SCHACHERMAYER W. [2005] "Arbitrage and state price deflators in a general intertemporal framework", *Journal of Mathematical Economics*, 41, 6 (2005) 722-734.

KHAROUBI-RAKOTOMALALA C. [2009] *Les fonctions d'opulence en finance*, Paris : Presses de la Sorbonne.

LONGSTAFF F., SCHWARTZ E. [1992] "Interest rate volatility and the term structure: a two factor general equilibrium model.", *The Journal of Finance* 47, 1259-82.

NELSON C.R., SIEGEL A.F. [1987] "Parsimonious modelling of yield curves", *Journal of Business*, 60, 473-489.

PIERRE S. [2010] *Passif social, construction du portefeuille d'investissement et couverture du risque de taux*, Mémoire d'actuariat, CNAM.

PLANCHET F., THEROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉRON P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.

REVELEN J. [2009] "Replicating Portfolio et capital économique en assurance vie", Mémoire d'ingénieur, ISFA / Ecole Centrale de Lyon

RONCALLI T. [1998] *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux IV.

SIJLAMASSI M.; OUAKNINE Y. [2004] "Valorisation par les déflateurs stochastiques", Mémoire d'actuariat, ENSAE.

SCHRAGER D. [2008] "Replicating Portfolios for Insurance Liabilities", Actuarial Sciences

THIEMARD E. [2000] *Sur le calcul et la majoration de la discrédance à l'origine*, Thèse de doctorat, EPF, Zürich.

VASICEK O. [1977] "An equilibrium characterisation of the term structure", *Journal of financial economics*, vol. 5, 177-88.