

COPULES : UNE NOUVELLE VISION DU CAPITAL ECONOMIQUE ET APPLICATION A UNE COMPAGNIE A QUATRE BRANCHES

Fabien FAIVRE*
Tillinghast – Towers Perrin

RÉSUMÉ

Le problème de l'accumulation des risques est souvent mis en avant au travers d'événements comme les attentats du 11 septembre 2001. Cependant ce type d'événements catastrophiques n'est qu'une manifestation d'un phénomène plus général qui est la dépendance existante entre branches d'activité.

Nous allons considérer une compagnie d'assurance non-vie et supposer que son management a une profonde connaissance du risque souscrit dans chacune des branches. En particulier nous allons supposer qu'il n'existe aucune incertitude sur la distribution de la charge sinistre ultime pour chacune des branches d'activités.

Cependant nous allons aussi supposer que le management n'a mené aucune étude concernant la forme de dépendance existante entre ces branches, de sorte que le capital économique de la compagnie (qui est le montant de capital que la compagnie devrait détenir pour contrôler sa probabilité de ruine) est estimé en supposant que les branches sont indépendantes.

Que pourrait-il se produire s'il s'avérait que ces branches n'étaient pas indépendantes ? Dans cet article nous allons suggérer le recours à la théorie des copules comme solution de ce problème. Nous montrerons qu'une copule est en effet un outil permettant de rendre compte de manière exacte de la dépendance entre branches d'activités dans un cadre réaliste.

MOTS CLEFS

Copule, Capital Economique, Value at Risk, dépendance de queue, probabilité de ruine, DFA, solvabilité

* *Tour Neptune – La Défense 1*
20, place de Seine
F-92086 Paris La Défense cedex – France
E-mail: fabien.favre@tillinghast.com

ABSTRACT

The problem of risk accumulation is often stressed through events such as the September 11th terrorist attacks. However such catastrophic events are only part of a more general phenomenon, which is the dependence that exists between Lines Of Business (LOBs).

Let's consider a P&C insurance company. We will assume that its management has a thorough understanding of the firm. In particular we will assume that there is no uncertainty about the distribution of claims costs for each of the LOBs.

However we will consider that the management did not inquire about the dependence structure that exists between those distributions, so that the Economic Capital of the company, which is the amount of capital the company should hold to control its probability of ruin, is computed by assuming the LOBs to be independent.

So what would happen if the real dependence structure is not independence? In this paper we will suggest the use of the copula theory as a solution to this problem. We will show that copulas are indeed tools that enable to handle dependence between LOBs in a realistic modeling.

KEY WORDS

Copula, Economic Capital, Value at Risk, tail dependence, probability of ruin, DFA, solvency

1. INTRODUCTION

En assurance non vie, le problème de l'accumulation des risques est souvent mis en avant au travers d'événements comme les attentats du 11 septembre 2001. Cependant ce type d'événements catastrophiques, et donc atypiques, ne peut pas être pleinement pris en compte au travers d'une approche classique « moyenne – variance » (ou écart type) car cette dernière ne mesure qu'une dispersion moyenne des scénarii autour du scénario central ou « *best estimate* ». La prise en compte de tels phénomènes requiert au contraire l'accès à l'ensemble de la distribution jointe des charges sinistres au niveau de la compagnie.

Or jusqu'à récemment, les modèles d'évaluations du capital économique n'avaient que deux options pour modéliser l'ensemble des charges sinistres au niveau de la compagnie :

- L'accent pouvait soit être mis sur la description des risques souscrits dans chacune des branches. Chaque type de risque possédait alors sa propre distribution (fréquence Poisson et coût moyen Pareto, fréquence Binomiale Négative et coût moyen

Lognormale, etc...) qui pouvait être différente d'une branche à l'autre. Cependant, si un tel choix était fait, les branches étaient lors souvent supposées indépendantes.

- La priorité pouvait au contraire être donnée à la description de la dépendance entre les branches par l'utilisation de loi multivariées étudiées de longue date dans la littérature (telle que la loi normale multivariée). Une telle hypothèse impose cependant que la distribution des charges sinistres pour chacune des branches appartienne à la même famille, ce qui est rarement vérifié.

Dans cet article nous suggérons le recours à la théorie des copules pour lever cette contrainte. Une copule est en effet une fonction qui contient toute l'information sur la dépendance entre variables aléatoires. Grâce à son utilisation, il est possible de construire des modèles réalistes, où la dépendance est pleinement prise en compte alors que chacune des branches peut avoir un comportement qui lui est propre.

Ce modèle nous servira à illustrer l'impact que l'introduction d'une dépendance entre branches peut avoir seule sur la solvabilité d'une compagnie d'assurance. Pour ce faire nous allons considérer une compagnie d'assurance à quatre branches et supposer que son management à une connaissance profonde du risque souscrit dans chacune d'entre elles (il n'existe aucune incertitude sur la distribution des charges sinistres). Nous supposerons néanmoins que le management n'a mené aucune étude sur la dépendance existante entre chacune de ces branches, de sorte que le capital économique de la compagnie, qui est le montant de capital que la compagnie devrait détenir pour pouvoir piloter sa probabilité de ruine, est estimé en supposant que les branches sont indépendantes. La question est alors de mesurer l'impact de cette hypothèse sur la solvabilité de l'assureur. Nous pourrions, par exemple, créer une forme de dépendance par laquelle les charges attritionnelles tendent à se compenser alors que des charges sinistres exceptionnelles peuvent survenir simultanément sur différentes branches. De tels scénarios ne pourraient être créés par une distribution normale multivariée.

C'est pourquoi après avoir brièvement introduit la théorie des copules, nous décrirons la compagnie étudiée et en tirerons des conséquences pour l'évaluation du capital économique.

2. LA THÉORIE DES COPULES

La théorie des copules est intimement liée à l'étude des distributions de probabilité multivariées dont les marginales sont données. C'est à dire à l'étude de la manière dont des phénomènes aléatoires peuvent se combiner, et en particulier produire des phénomènes encore plus intenses ou au contraire amortir les fluctuations de chacun. Ce problème est

d'un intérêt tout particulier en assurance non-vie, où l'étude des charges sinistres pour chacune des branches s'est imposée au travers des activités de tarification ou d'étude de solvabilité.

Il apparaît que chaque branche d'activité possède une distribution de charge sinistre qui lui est propre. Cette dernière est souvent asymétrique et peut présenter une queue de distribution lourde (probabilité accrue de réalisation d'événements graves à extrêmes), de sorte qu'aucune fonction de répartition multivariée classique ne peut modéliser une telle variété de comportements individuels. Nous allons montrer que la théorie des copules permet de lever cette contrainte.

2.1 Qu'est-ce qu'une copule ?

Une copule (ou n-copule) C est la fonction de répartition jointe d'un vecteur aléatoire $U = (U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dont les marginales $U_1, \dots, U_n$ sont uniformes $U[0;1]$:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \quad u_1, \dots, u_n \in [0;1] \quad (1.)$$

L'un des principaux attraits de la théorie des copules est donné par le théorème de Sklar :

□ Théorème (Sklar 1959) :

Soit F une fonction de répartition n-variée (F est la fonction de répartition de $X = (X_1, \dots, X_n)$) dont les marginales $F_1, \dots, F_n$ sont continues (F_1 est la fonction de répartition de $X_1, \dots, F_n$ celle de X_n). Alors il existe une unique copule C telle que :

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.)$$

où $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \text{Dom } F_1 \times \dots \times \text{Dom } F_n$

On peut conclure trois choses de ce théorème :

- Tout d'abord, puisque la fonction de répartition multivariée contient toute l'information sur le vecteur aléatoire qu'elle caractérise, cela signifie que la copule contient toute l'information sur la dépendance qui existe entre les composantes du vecteur aléatoire.
- De plus, puisque le théorème ne requiert pas des marginales qu'elles soient identiques, ou même qu'elles appartiennent à la même famille, il est possible de construire des fonctions de répartition multivariées simplement en sélectionnant des fonctions de répartition marginales continues (par exemple Lognormale, Pareto, Weibull et Gamma) ainsi qu'une copule pour les lier.
- Enfin l'étude des phénomènes aléatoires multivariés peut se scinder en deux parties : l'étude, dans un premier temps, des comportements individuels au travers de l'étude

des marginales, puis l'étude de la forme de dépendance existante entre ces comportements individuels qui est l'étude de la copule.

Dans un contexte d'évaluation du capital économique d'une compagnie, cela signifie que l'étude de la distribution des charges sinistres au niveau de la compagnie se réduit à deux étapes clefs : rendre compte du comportement des charges sinistres au niveau de chaque branche, puis refléter la dépendance entre ces branches en choisissant une copule.

Ce théorème fournit aussi une manière de généraliser les modèles préexistants d'évaluation du capital économique ayant recours à des fonctions de répartitions multivariées connues. En effet, puisque toutes ces distributions présentent des marginales continues, il existe une unique copule, implicite, les reliant. Une fois cette dernière isolée, il devient possible de la réutiliser avec d'autres marginales susceptibles de mieux refléter les caractéristiques de la société étudiée.

En conclusion, une copule est une fonction qui contient toute l'information sur la dépendance existante entre les composantes d'un vecteur aléatoire. En tant que telle, il est possible d'en déduire des mesures de dépendance globales ou asymptotiques que nous décrirons par la suite, mais intéressons-nous auparavant aux formes de dépendance extrêmes.

2.2 Bornes de Fréchet et relation d'ordre partielle sur l'ensemble des copules

Parmi l'ensemble des copules, trois sont d'une nature particulière : C^- , $C^\perp$ et C^+ , qui sont respectivement les copules exprimant la *contre-comonotonie*, l'*indépendance* et la *comonotonie*.

La contre-comonotonie est la forme extrême de dépendance négative, l'indépendance est l'absence de dépendance et la comonotonie est la forme extrême de dépendance positive :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max \left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1; 0 \right) \quad (3.)$$

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \quad (4.)$$

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1; \dots; u_n) \quad (5.)$$

où $u_1, \dots, u_n \in [0; 1]$.

Remarque : $C^\perp$ et C^+ sont des copules quelle que soit la dimension n , mais C^- n'est une copule que dans le cas bivarié. Néanmoins C^- est quelle que soit la dimension n (n

supérieur à deux) la meilleure borne ponctuelle, c'est à dire que pour tout u dans $Dom C^-$ il existe une copule C telle que $C(u) = C^-(u)$.

Ainsi lorsqu'une compagnie considère que les sinistres auxquels elle est confrontée sont indépendants d'une branche à une autre, elle considère implicitement que la distribution de charges sinistres au niveau de la compagnie est :

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i), \text{ où } n \text{ représente le nombre total de branches pour la}$$

compagnie, F_i est la distribution de charges sinistres pour la branche i , et x_i est le montant de la charge sinistre pour la branche i , ce qui revient à écrire :

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = C^\perp(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)).$$

De manière à introduire un élément de comparaison entre copules, nous allons définir une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des copules :

□ Définition (Nelsen [1998]) :

Une copule C_1 est dite plus petite qu'une copule C_2 si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n, \quad C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n).$$

On note $C_1 \prec C_2$.

$\prec$ est appelé ordre de concordance, et est lié à la dominance stochastique d'ordre 1 sur les fonctions de répartition.

On peut remarquer que la relation $C^- \prec C \prec C^+$ reste valide pour toute copule C .

En s'appuyant sur cette définition, nous dirons qu'une copule C traduit :

- Une forme de dépendance positive si $C^\perp \prec C \prec C^+$,
- Une forme de dépendance négative si $C^- \prec C \prec C^\perp$.

Il est important de noter que $\prec$ est une relation d'ordre partielle. Il existe donc des copules qui traduisent une structure de dépendance qui n'est ni positive, ni négative.

Cette définition nous fournit un premier outil, théorique, pour introduire un élément de comparaison entre copule. Nous avons ainsi pu constater qu'il existait des formes extrêmes de dépendance que nous avons caractérisé. Nous allons maintenant introduire des mesures de dépendance qui s'appuient sur les propriétés des copules.

2.3 Mesures de concordance et dépendance de queue

Comme mentionné en 2.1, une copule contient toute l'information sur la structure de dépendance existante entre les composantes d'un vecteur aléatoire. A ce titre il est possible de créer des mesures de dépendance qui peuvent être exprimées en termes de la copule

sélectionnée. Dans cet article nous introduirons deux sous-catégories de mesures, selon qu'elles quantifient une dépendance globale (mesures de concordances), ou une dépendance asymptotique entre événements extrêmes (dépendance de queue).

Les mesures de concordance sont le pendant du coefficient de corrélation linéaire (ou Rho de Pearson) pour les distributions elliptiques (comprenant en particulier les distributions normales et student multivariées). En effet Embrechts (1999) [c] a montré que l'utilisation du coefficient de corrélation linéaire dans de telles situations pouvait amener à des résultats contre intuitifs. En particulier il a montré que si les distributions des variables mesurées étaient données et non elliptiques, alors le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables n'était pas libre de parcourir toute la plage $[-1 ; 1]$. C'est pourquoi en présence de distributions asymétriques, à queue de distribution lourde, les mesures de concordance constituent un bon substitut au coefficient de corrélation linéaire : elles appartiennent à $[-1 ; 1]$, sont nulles lorsque les variables sont indépendantes et l'ordre de concordance sur les copules induit l'ordre sur la mesure. Cependant ces mesures souffrent des mêmes lacunes que le coefficient de corrélation linéaire : si deux variables sont indépendantes alors la mesure de concordance est nulle, mais la réciproque est fausse. Deux exemples connus de mesures de concordance sont le Tau de Kendall et le Rho de Spearman.

□ Définition : *Le Tau de Kendall d'un vecteur aléatoire (X, Y) est tel que*

$$\tau(X, Y) = \Pr\{(X - X')(Y - Y') > 0\} - \Pr\{(X - X')(Y - Y') < 0\} \quad (6.)$$

où (X', Y') est une copie indépendante de (X, Y) .

Le Tau de Kendall mesure donc la différence entre la probabilité de concordance et de discordance d'un couple de variables aléatoires.

□ Définition : *Le Rho de Spearman d'un vecteur aléatoire (X, Y) est tel que :*

$$\rho_S(X, Y) = \rho_P(F_X(X), F_Y(Y)) \quad (7.)$$

où F_X et F_Y désignent respectivement les fonctions de répartition de X et Y , et où ρ_P est le coefficient de corrélation linéaire de Pearson.

Ces mesures permettent donc de quantifier une dépendance globale entre deux variables aléatoires, mais il peut être intéressant de connaître la dépendance existante entre les deux variables lorsque des événements extrêmes se produisent, c'est le but de la dépendance de queue.

Contrairement au Tau de Kendall ou au Rho de Spearman, la dépendance de queue est donc une mesure asymptotique de dépendance entre variables aléatoires. Plus particulièrement on peut différencier la dépendance de queue supérieure qui mesure la

dépendance asymptotique dans le quadrant supérieur droit (réalisations conjointement élevées), et la dépendance de queue inférieure qui mesure la dépendance asymptotique dans le quadrant inférieur gauche (réalisations conjointement faibles).

La dépendance de queue supérieure d'un vecteur aléatoire (X, Y) est définie par

$$\lambda_w(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr \left(X > F_X^{-1}(\alpha) \mid Y > F_Y^{-1}(\alpha) \right) \quad (8.)$$

La dépendance de queue inférieure d'un vecteur aléatoire (X, Y) est définie par

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Pr \left(X < F_X^{-1}(\alpha) \mid Y < F_Y^{-1}(\alpha) \right) \quad (9.)$$

De sorte que $\lambda_w, \lambda_u \in [0, 1]$.

Dans la suite de cet article nous désignerons par abus de langage « dépendance de queue » la dépendance de queue supérieure d'un vecteur aléatoire.

Dans notre contexte de gestion des risques, la dépendance de queue répond à la question : « sachant qu'une charge sinistre extrême affecte la branche Y, quelle est la probabilité qu'une charge sinistre d'ampleur relative au moins équivalente impacte aussi la branche X ? ».

Comme nous le verrons dans la partie suivante les formes de dépendances exprimées par les copules varient fortement d'une famille à une autre.

2.4 Etude comparative de trois familles des copules : les copules Normales, de Student et Gumbel

Cette brève introduction à la théorie des copules est suffisante pour introduire trois familles de copules : les copules Normales, de Student et Gumbel. Chacune d'entre elle traduit une forme de dépendance particulière qui sera utilisée dans la troisième partie de ce document.

Les copules Normales et de Student appartiennent toutes deux à une catégorie particulière de copules appelées copules elliptiques. Ces dernières sont en effet liées aux distributions elliptiques par un corollaire du théorème de Sklar introduit en 2.1. En effet sous les hypothèses du théorème de Sklar il est possible de créer des copules à partir de fonctions multivariées connues par la relation :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F \left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n) \right) \quad (10.)$$

où $u_1, \dots, u_n \in [0; 1]$.

Il est toutefois crucial de noter que l'emploi d'une copule normale, par exemple, ne signifie pas que la distribution de charges sinistres au niveau de la compagnie soit normale multivariée. Au contraire chaque branche possède une distribution qui lui est propre, mais elles sont liées au niveau de la compagnie via l'utilisation d'une copule normale.

□ **Copule normale** : cette copule tire son nom de l'une de ses propriétés qui veut que lorsqu'on l'applique à des distributions normales univariées, on obtient une distribution normale multivariée classique. Cette copule est donc explicitement ou implicitement à la racine de la plupart des modèles d'évaluation du capital économique que nous avons mentionnés dans l'introduction, une attention toute particulière est donc vouée à ses propriétés.

La copule normale peut s'exprimer de la façon suivante :

$$C_{\rho}^{Ga}(u) = \Phi_{\rho}^n \left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) \right), \rho \text{ la matrice des corrélations, } u_1 \dots u_n \in [0;1] \text{ (11.)}$$

où Φ_{ρ} et Φ sont respectivement les fonctions de répartition normales multivariées et univariées.

L'un de ses principaux attraits est qu'elle permet dans le cas bivarié d'exprimer tout le spectre de dépendance de C^{-} à C^{+} , en passant par $C^{\perp}$.

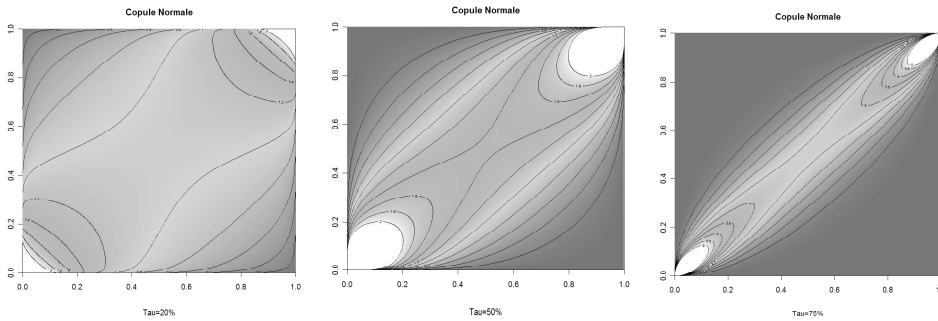
$$\tau_{i,j} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{i,j}), \rho_{S_{i,j}} = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho_{i,j}}{2}\right).$$

Néanmoins cette copule présente une dépendance de queue nulle sauf dans les cas extrêmes où $\rho_{i,j} = \pm 1$. Ceci signifie que l'utilisation cette copule implique que les charges sinistres extrêmes sont indépendantes d'une branche à l'autre.

La planche suivante fournit une représentation de la densité de la copule normale

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n) \text{ lorsqu'elle n'est appliquée qu'à deux branches}$$

d'activité. Lorsque le tau de Kendall augmente (de 20% à 75% dans cet exemple), on voit que la distribution de probabilité se resserre autour de la première bissectrice, ce qui traduit le fait qu'une forte perte sur la branche X sera probablement accompagnée d'une forte perte sur la branche Y.



□ **Copule de Student** : Il s'agit aussi d'une copule elliptique dont l'expression est la suivante :

$$C_{\nu,R}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu,R}^n(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)) \quad (12.)$$

où $t_{\nu,R}^n$ est la fonction de répartition de Student n-variée, ν le nombre de degrés de liberté, et R la matrice des corrélations. Dans le cas bivarié, cette copule permet de parcourir tout le spectre de dépendance de C^- à C^+ , excepté l'indépendance. En effet pour une valeur de ν finie et supérieure à 1, cette copule présente toujours une double tendance, à la fois positive et négative, qui ne disparaît que dans le cas où $R_{i,j} = \pm 1$.

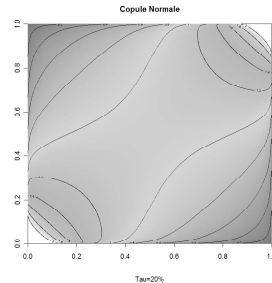
En particulier cette copule permet d'exprimer une dépendance de queue dont l'intensité dépend non seulement du coefficient $R_{i,j}$, mais encore de ce coefficient ν :

$$\lambda_{U_{i,j}} = \lambda_{L_{i,j}} = 2 \bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-R_{i,j}}{1+R_{i,j}}} \right), \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (13.)$$

avec $\bar{t}_{\nu+1}$ la fonction de survie d'une variable Student à $\nu+1$ degrés de liberté.

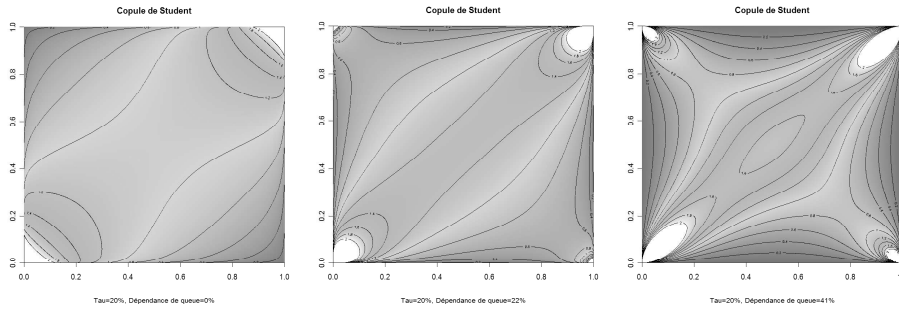
Cette copule est très proche de la copule normale, en particulier on peut montrer que la copule de student est exactement identique à la copule normale si on considère qu'il n'y a pas de dépendance de queue, c'est à dire pas de dépendance entre les événements extrêmes ($\nu \rightarrow \infty$). Cependant, la possibilité d'inclure une dépendance entre les événements extrêmes permet des formes de dépendance très différentes. Dans la série de graphique suivante, nous avons représenté les copules normales et Student dans le cas bivarié. Nous avons fixé la dépendance globale à un Tau de Kendall de 20% et faisons varier la dépendance de queue pour illustrer nos propos :

Copule normale :



0% Dépendance de queue 41%

Copule de Student :



A mesure que la dépendance de queue augmente, la distribution se transforme pour finir par adopter cette forme en croix, très concentrée autour de la première bissectrice, mais aussi à chaque coin du carré. Cela signifie qu'une forte charge sinistre sur la branche Y peut être vraisemblablement accompagnée soit d'une forte charge sinistre sur la branche X (coin supérieur droit), soit d'une faible sinistralité (coin inférieur droit). Une autre preuve de la parenté des copules normales et Student est le fait qu'elles partagent le même lien avec le Tau de Kendall :

$$\tau_{i,j} = \frac{2}{\pi} \arcsin(R_{i,j})$$

- ❑ **Copule de Gumbel** : contrairement aux copules normales et de Student, elle ne dérive pas d'une fonction de répartition multivariée, mais fait parti de la classe des copules Archimédiennes. La copule de Gumbel est très différente des deux précédentes copules : elle ne peut modéliser que des formes de dépendance positives (ou l'indépendance), et puisqu'elle ne dépend que d'un seul coefficient (à comparer aux $\frac{n(n-1)}{2}$ paires de composantes d'un vecteur aléatoire de dimension n), elle est symétrique et ne permet donc pas de traitement particulier pour quelques composantes. Son expression est la suivante :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta \right)^{1/\theta} \right), \quad \theta \geq 1 \quad (14.)$$

La structure de dépendance positive transparaît au travers de la relation entre θ et τ :

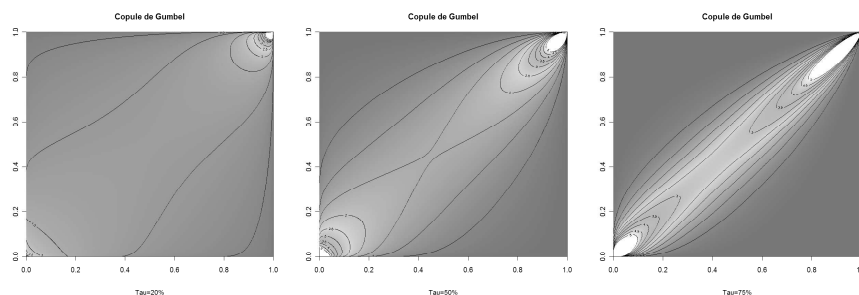
$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (15.)$$

La dépendance de queue supérieure exprimée par cette copule est de surcroît forte, alors que la dépendance de queue inférieure reste toujours nulle :

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta} \quad (16.)$$

$$\lambda_L = 0 \quad (17.)$$

Dans la planche suivante, on voit très nettement la masse de probabilité importante accordée à la réalisations de charges sinistres simultanément élevées (coin supérieur droit).



Dans le contexte de l'évaluation du capital économique d'une compagnie, le principal intérêt de l'utilisation d'une copule de Gumbel est qu'elle permet de confronter la solvabilité de la compagnie à des scénarii défavorables (stress scenarii), c'est à dire lorsque les événements exceptionnels tendent à survenir en même temps, alors que les sinistres les plus communs restent indépendants.

Après cette brève introduction à la théorie des copules, nous allons voir comment ces dernières peuvent être incorporées dans un modèle d'évaluation du capital économique, et explorer les avantages de leur utilisation.

3. DÉPENDANCE ET CAPITAL ÉCONOMIQUE

Nous avons vu que les copules étaient un outil de modélisation de la dépendance entre les composantes d'un vecteur aléatoire. Le théorème de Sklar (2.) montre que la théorie des copules s'inscrit parfaitement dans le contexte des compagnies d'assurance non-vie, pour lesquelles les charges sinistres ont des caractéristiques différentes d'une branche à une autre.

Nous allons maintenant introduire un modèle d'évaluation du capital économique qui prenne en compte la dépendance de la sinistralité entre branches d'activité. Ce modèle nous permettra d'appréhender les effets que la dépendance peut avoir, seule, sur la solvabilité d'un assureur.

Dans cet article nous entendons par capital économique le montant de capital juste nécessaire à la compagnie pour contrôler sa probabilité de ruine sur quatre ans sans soutien ponctuel extérieur en cas de défaillance. Mathématiquement cela se traduit en terme de Value at Risk à un certain niveau de protection de la distribution du maximum des pertes sur les quatre années de projection.

3.1 Description de la compagnie étudiée

Nous allons considérer une compagnie à quatre branches d'activité. Nous allons supposer que son management a une connaissance profonde du risque souscrit dans chacune des branches, en particulier ce dernier connaît sans ambiguïté la distribution de la charge sinistre dans chacune des branches, telle que décrite dans la table ci-dessous :

			Branche 1	Branche 2	Branche 3	Branche 4
Primes	Principe de tarification		Espérance mathématique			
	Chargement de sécurité		0%	20%	2%	-10%
	Cadence d'acquisition	Année 1 Année 2	100%	100%	50% 50%	50% 50 %
Flux financiers	Cadence des paiements	Année 1	100%	100%	50%	40%
		Année 2			30%	30%
		Année 3			20%	20%
		Année 4				10%
Sinistralité	Fréquence		Poisson			
	Paramètre		10			
	Coûts moyens		Pareto européenne	Pareto européenne	LogNormale	Pareto européenne
	Paramètres		a = 100 000 $\alpha = 2.1$	a = 100 000 $\alpha = 2.1$	$\mu = 2$ $\sigma = 3$	a = 100 000 $\alpha = 1.8$

Où

Distribution	Densité	Espérance	Variance
Pareto européenne	$\begin{cases} \frac{\alpha a^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{\alpha a}{\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 1$	$\frac{\alpha a^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad \text{si } \alpha > 2$
LogNormale	$\begin{cases} \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

Les actifs investis produisent de plus des intérêts fixe de 5%.

On retiendra de ce tableau que la Branche 1 possède une distribution à queue moyennement lourde au regard des autres branches. Ses primes sont tarifées à l'espérance mathématique de sorte que cette branche tend à produire des pertes un exercice sur deux. La Branche 2 est une copie de la Branche 1 avec un coefficient de chargement supplémentaire de 20% qui réduit sa probabilité de ruine. La Branche 3 présente une distribution de charges sinistres ayant une queue plus fine que les autres branches. La Branche 4 quant à elle a la distribution la plus lourde et ses primes sont de surcroît sous tarifées. La Branches 1 et plus particulièrement la Branche 4 sont donc les plus susceptibles de produire de larges pertes au niveau de la compagnie.

Suivant l'esprit du théorème de Sklar, nous avons introduit les comportements individuels de chaque branche. Nous allons maintenant introduire les formes de dépendance qui vont lier les charges sinistres au niveau de la compagnie.

3.2 Copules sélectionnées

Alors que les hypothèses précédentes étaient supposées connues du management, nous allons considérer que ce dernier n'a pas étudié la forme de la dépendance pour leur compagnie, de sorte que le capital économique est évalué en supposant que les branches sont indépendantes.

Dans notre modèle nous allons introduire une forme de dépendance directement au niveau de la distribution des charges sinistres via la sélection de différentes copules :

- Une copule normale tout d'abord dont la matrice des corrélations est la suivante :

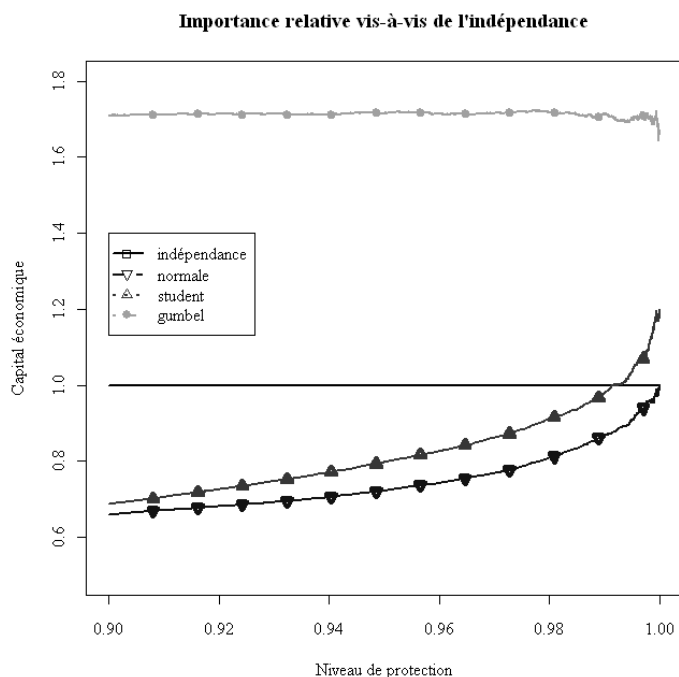
1	0.5	0	-0.9
0.5	1	0	-0.4
0	0	1	0
-0.9	-0.4	0	1

Sous cette hypothèse les Branches 1 et 4, qui sont les plus volatiles, tendent à se compenser. La Branche 3 reste indépendante des autres branches.

- Une copule de Student présentant la même matrice des corrélations que la copule normale, mais avec un coefficient ν égal à un, ce qui induit une forte dépendance de queue (équation 13).
- Une copule de Gumbel avec un coefficient θ égal à deux. Cette copule indique avec ce paramétrage que toutes les branches sont positivement dépendantes (Tau de Kendall égal à 50% (équation 15)), alors qu'une dépendance de queue forte existe aussi.

3.3 Résultats des simulations

Nous avons effectué 500 000 itérations de l'évolution de la société sur quatre ans et voici nos résultats :



Nous avons représenté sur ce graphique le montant de capital économique calculé à différents niveaux de protection pour chacune de nos hypothèses de dépendance. Ces montants sont exprimés en importance relative vis-à-vis de l'hypothèse d'indépendance, qui est l'hypothèse formulée par le management.

On peut voir que la dépendance positive, ainsi que la forte dépendance de queue induite par la copule de Gumbel se matérialise par une augmentation d'environ 70% du montant de capital économique requis. C'est à dire qu'avec une telle dépendance, il faudrait 70% de capital en plus à notre compagnie pour limiter sa probabilité de ruine à un certain niveau donné.

Au contraire, l'introduction d'une dépendance négative entre branches, via notre paramétrisation des copules normales et de Student, tend comme escompté à réduire l'exigence de capital. Cependant à mesure que le niveau de protection augmente, on observe que ces deux copules induisent un comportement différent : pour les très hauts niveaux de

protection, la copule normale tend vers les prédictions faites avec l'hypothèse d'indépendance, alors que pour de tels niveau de protection, la copule de Student va excéder ces prédictions.

La question est donc : pourquoi ces deux copules amènent-elles à des situation aussi différentes pour des niveaux de protection élevés ?

Nous allons apporter à cette question une réponse en deux partie.

3.4 Copules normales et de Student : de sœurs à cousines

La première partie de notre réponse va être de rappeler certaines propriétés des copules normale et de Student.

Comme nous l'avons vu en 2.4, la copule de Student est exactement identique à la copule normale si on suppose qu'il n'existe pas de dépendance entre charges sinistres extrêmes. Cependant la copule de Student présente un paramètre supplémentaire qui permet d'introduire, et de contrôler l'intensité d'une dépendance de queue. A niveau global de dépendance fixé (tau de Kendall fixé), l'augmentation de la dépendance de queue confère à la densité de cette copule une forme en croix que nous allons mettre en évidence dans les charges sinistres qui ont été générées par chacune de ces copules, via l'utilisation d'un dépendogramme, mais introduisons tout d'abord ce qu'est un dépendogramme.

Considérons qu'une compagnie Lambda ait expérimenté deux charges sinistres de disons 100 et 3000 sur la Branche 1 et la Branche 2 :

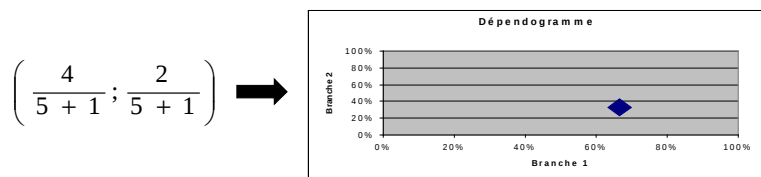
Branche 1 Branche 2 (100 ; 3000)

On ne peut pas dire immédiatement si ces montants sont ou non importants. Il faut les replacer dans toute l'expérience que l'on a sur ces deux branches. Supposons donc que l'on dispose de cinq années d'historique de charges sinistres ultimes pour ces deux branches :

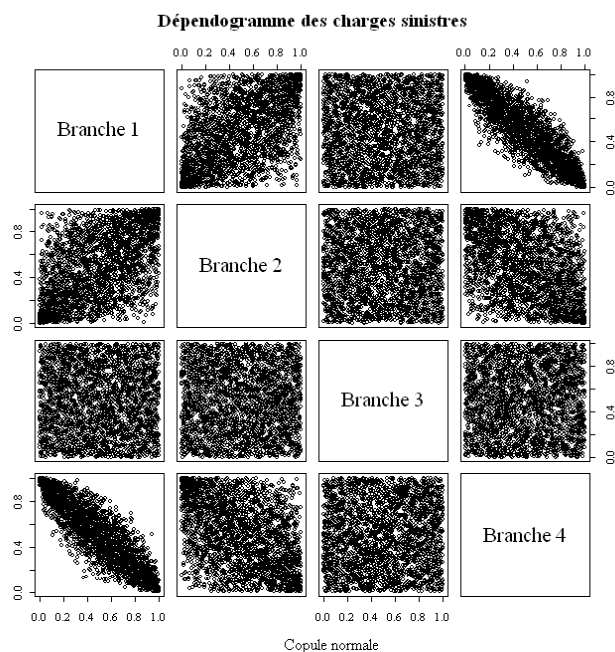
	1	2	3	4	5
Branche 1	10	13	53	100	223
Branche 2	2 000	3 000	4 000	10 000	50 000
	1	2	3	4	5

On les classe et on observe que les 100 de charge sinistre ayant affecté la Branche 1 constituent la quatrième plus grosse charge sinistre jamais expérimentée. Au contraire les 3000 de la Branche 2 ne constituent que la deuxième plus grosse. On peut donc faire un graphique et placer un point à (66%,33%) (respectivement $4/(5+1)$ et $2/(5+1)$) qui

correspond aux quantiles empiriques de la distribution de charges sinistres pour ces deux branches d'activité.

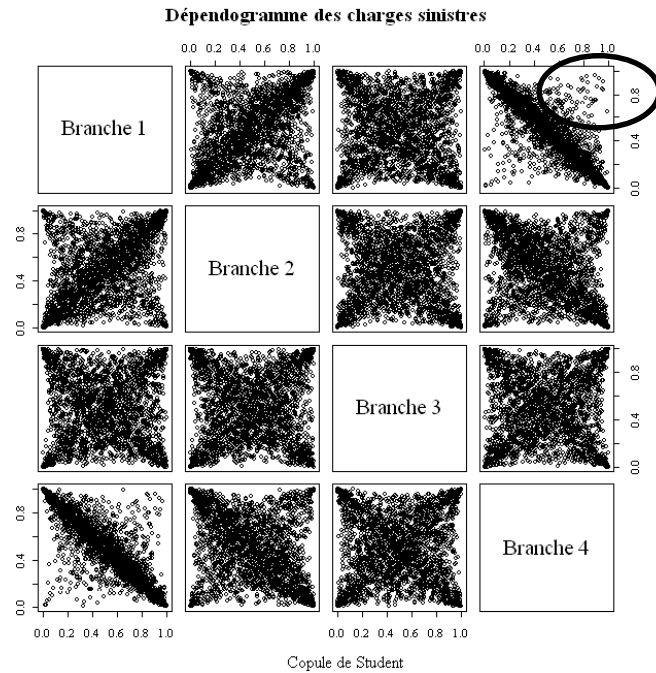


Or dans notre modèle, les quantiles des distributions de charges sinistres branche à branche sont exactement les objets que contrôle la copule.



Sur cette planche sont représentés les dépendogrammes de charges sinistres pour chacune des branches, lorsque la forme de dépendance supposée est une copule normale avec la matrice des corrélations introduite en 3.2. On peut remarquer que la Branche 3 est effectivement indépendante des autres branches puisque les points sont répartis uniformément sur chacun des dépendogrammes concernés. On peut aussi remarquer la forte dépendance négative entre la Branche 1 et la Branche 4.

Cependant lorsqu'on considère la copule de Student avec la même matrice de coefficients (et un coefficient de queue égal à 1), le comportement exprimé s'avère très différent :



En particulier la Branche 3 n'est plus indépendante des autres branches et sur chacun de ces dépendogrammes on peut remarquer cette forme en croix que nous avons évoquée en 2.4. Ce résultat est très intéressant car il montre que même pour les Branches 1 et 4 qui sont très négativement dépendante il y a toujours la possibilité de voir survenir des charges sinistres extrêmes lors du même exercice (cercle dans le coin supérieur droit).

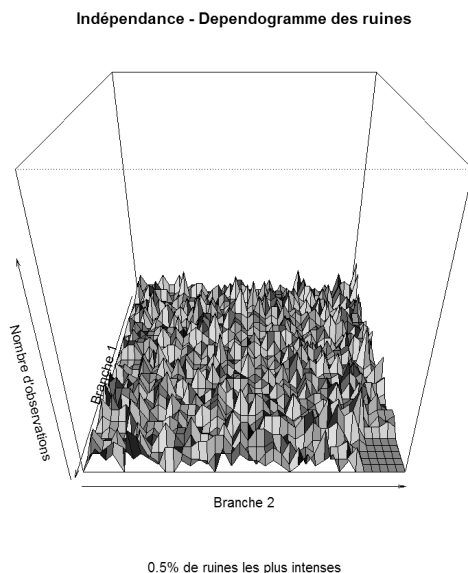
Nous avons donc vu que l'utilisation de la copule de Student permet de générer des scénarii dans lesquels la forme générale de la dépendance est celle exprimée au travers de la matrice des coefficients, mais qui autorisent néanmoins la survenance simultanée d'événements extrêmes. Ce que ne permet pas la copule normale.

3.5 Dépendance des charges sinistres extrêmes

La deuxième partie de notre réponse sera d'explorer la dépendance existante en cas de survenance d'une sinistralité exceptionnelle. Mais auparavant il faut se rappeler que dans notre modèle la Branche 2 est une copie de la Branche 1 (même distribution) et que le processus de ruine au niveau de la compagnie dépend non seulement de la forme de la dépendance, mais aussi des distributions marginales (sinistralité sur chacune des branches). C'est pourquoi nous allons considérer les 0.5% de ruines extrêmes au niveau de la

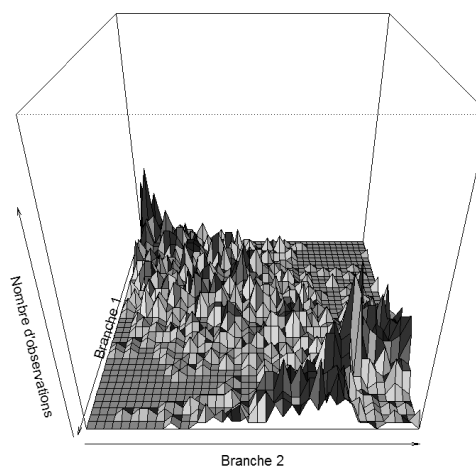
compagnie et se concentrer sur les Branches 1 et 2 comme illustration des propriétés de la copule sous-jacente.

Le graphique suivant constitue une sorte de dépendogramme modifié, incluant une dimension supplémentaire qui est le nombre d'observations faites.



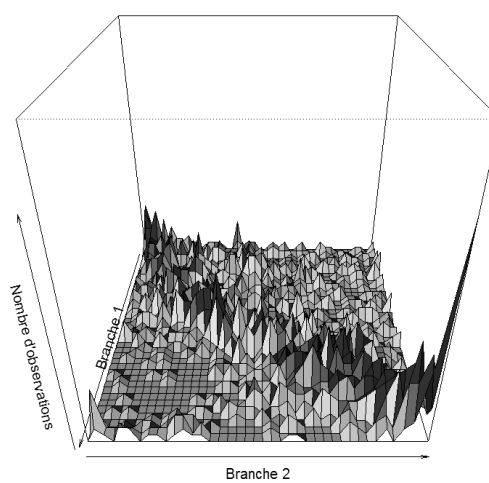
Lorsque les branches sont supposées indépendantes, on observe que les intensités des ruines sont distribuées uniformément sur le plan, sauf pour une région qui correspond aux événements extrêmes simultanés sur les Branches 1 et 2. Or nous avons vu en 2.2 que l'indépendance pouvait être exprimée sous forme de copule. Cette expression nous permet de calculer la dépendance de queue de cette copule, qui est nulle. Cela signifie que la probabilité pour que des événements extrêmes surviennent simultanément sur deux branches est nulle. Ceci ne constitue cependant qu'une propriété asymptotique, de sorte que pour n'importe quel seuil $0 \leq \alpha < 1$ donné, la probabilité pour qu'une charge sinistre de quantile supérieur à α se réalise sur deux Branches existe, mais est faible. Cela signifie qu'un modèle d'évaluation du capital économique fondé sur cette hypothèse va, si elle n'est pas vérifiée, produire peu, si ce n'est aucun, stress scénario.

La copule normale ne permet pas non plus de produire de tels stress scénarii, comme mis en évidence dans le graphique suivant :

Copule Normale - Dependogramme des ruines

0.5% de ruines les plus intenses

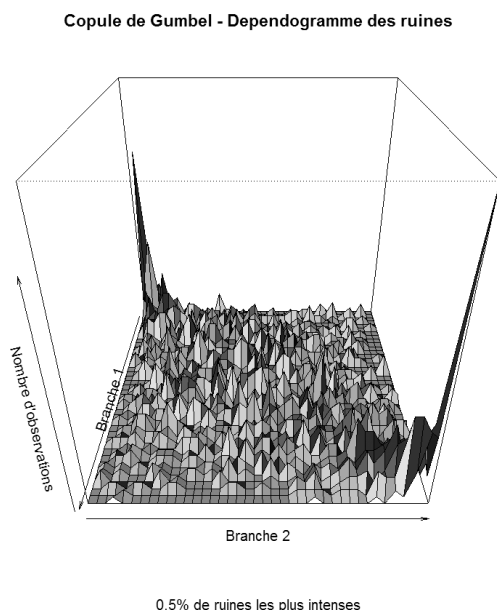
A contrario, la copule de Student, avec notre jeu de paramètres, présente une dépendance de queue de 50% qui se manifeste au travers de ce pique dans la région des ruines extrêmes simultanées :

Copule de Student - Dependogramme des ruines

0.5% de ruines les plus intenses

L'absence de ruines simultanément graves sur la Branche 1 et faible sur la Branche 2 est à mettre en relation avec le lien qu'ont ces dernières avec la Branche 4 qui présente la distribution de charges sinistres la plus lourde. La Branche 4 contribue en effet fortement à la qualification parmi les 0.5% de ruines les plus sévères. Pour les ruines de moindre intensité, la forte dépendance négative entre les Branches 1 et 4 empêche la qualification de charges sinistres moyennes à fortes sur la Branche 1 qui ne soient pas concomitantes avec des charges sinistres moyennes à fortes sur la Branche 2.

Le pic de sinistralité est encore plus marqué avec la copule de Gumbel et sa dépendance de queue de 58% induite par nos paramètres :



Ce qui corrobore la propension qu'a cette copule de placer une masse de probabilité accrue sur survenance d'événements simultanément élevés (voir 2.4))

4. CONCLUSION

Dans cet article nous avons présenté un modèle d'évaluation du capital économique d'une compagnie d'assurance qui prenne en compte la dépendance de la sinistralité entre branches d'activité, via l'utilisation des copules.

Ce modèle nous a permis d'explorer les effets que peut avoir la seule dépendance sur la solvabilité d'un assureur. Il apparaît que l'hypothèse d'indépendance, si elle n'est pas

vérifiée, peut amener à négliger les bénéfices de la compensation des risques et les dangers de leur accumulation.

En particulier, nous avons vu que la prise en compte d'une dépendance entre charges sinistres extrêmes amenait à une augmentation, qui peut être significative, du besoin en fonds propres.

Nous considérons que de futurs développements à ce travail pourraient être l'étude des copules à structure hiérarchique, de manière à introduire une dépendance au niveau des produits, puis au niveau d'une ligne d'affaire, puis au niveau de la compagnie, ainsi que l'étude de la théorie des valeurs extrêmes multivariées pour construire des scénarios de crises multivariés réalistes dans un cadre déterministe.

RÉFÉRENCES

- [a] BOUYE E., DURRLEMAN V., NIKEGBALI A., RIBOULET G., RONCALLI T. (2000) *Copulas for finance a reading guide and some applications*, Financial Econometrics Research Centre and Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais, Working paper
- [b] DURRLEMAN V., NIKEGBALI A., RONCALLI T. (2000) *Which copula is the right one?*, Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais, Working paper
- [c] EMBRECHTS P., MCNEIL A., STRAUMANN D. (1999) *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*, ETH Zürich, Working paper
- [d] EMBRECHTS P., LINDSKOG F., MCNEIL A. (2001) *Modelling dependence with Copulas and applications to risk management*, ETH Zürich, Working paper
- [e] FAIVRE F. (2002) *Copules, besoin en fonds propres et allocation de capital pour une compagnie d'assurance non-vie multibranches*, mémoire ISFA
- [f] FAIVRE F. (2003) *Copula, a new vision for economic capital and application to a four line of business company*, ASTIN colloquium, Berlin
- [g] FRACHOT A., GEORGES P., RONCALLI T. (2001) *Loss distribution approach for operational risk*, Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais, Working paper
- [h] FREES E.W., VALDEZ E.A. (1997) *Understanding Relationships using copulas*, 32nd Actuarial Research Conference, University of Calgary
- [i] GENEST C., RIVEST L-P. (1993) *Statistical inference procedures for bivariate Archimedian copulas*, Journal of the American Statistical Association 88, 1034-1043
- [j] HURLIMANN W. (2001) *Analytical evaluation of economic risk capital and diversification using linear Spearman copulas*, Working paper

- [k] JOE H., XU J.J. (1996) *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*, Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report, 166
- [l] MEYERS G. (1999) *Underwriting risk*, Insurance Services Office Inc.
- [m] PANJER H.H. (2001) *Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates*, University of Waterloo, Working paper
- [n] RONCALLI T. (2002) *Gestion des risques multiples ou copules et aspects multidimensionnels du risque*, Cours ENSAI 3ème année
- [o] SKLAR A. (1959) *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231.
- [p] WANG S. (2002) *A set of new methods and tools for enterprise risk capital management and portfolio optimization*, Working paper