

MODELE DE DIFFUSION DES TAUX SANS RISQUE A LONG TERME DANS UNE OPTIQUE ASSURANCE ET GESTION ALM

François BONNIN¹

Anasse LAGHRAIB²

*KPMG*³

Résumé :

On présente dans ce travail un modèle de taux spécifiquement développé en vue de simulations de long terme, soit sous la probabilité risque-neutre à des fins de valorisation, soit sous la probabilité physique à des fins de modélisation ALM; en intégrant la contrainte d'adjonction au modèle d'autres facteurs de risques financiers que celui des taux d'intérêts.

¹ François Bonnin est directeur chez KPMG. Contact : fbonnin@kpmg.fr

² Anasse Laghraib est consultant chez KPMG. Contact : alghraib@kpmg.fr

³ KPMG- 2, avenue Gambetta 92400 Courbevoie - France

1. INTRODUCTION

Les modèles de taux utilisés sur les marchés financiers se placent dans le cadre d'une représentation des taux d'intérêts du type suivant :

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right)$$

Le processus de taux $r(s)$ est stochastique et le coefficient d'actualisation $P(t, T)$ entre deux dates futures t et T est une variable aléatoire.

Dans ce type de représentation le prix de marché d'un zéro coupon de maturité t s'écrit, par définition de la probabilité risque-neutre (Q) :

$$B(t) = E_Q \left[\exp \left(- \int_0^t r(s) ds \right) \right]$$

Pour des processus stochastiques quelconques sur le taux court $r(s)$, la validation de l'équation ci-dessus pose des problèmes de calibrage qui rendent les modèles de taux, sous cette représentation, généralement complexes. De plus, le profil de risque des zéro-coupons d'échéance fixe se modifiant dans le temps, la nappe de volatilité n'est, a priori, pas homogène dans le temps.

Ces inconvénients peuvent être considérés comme mineurs lorsqu'il s'agit de valoriser des options, dont les conditions d'exercice arrivent à échéance de quelques années au maximum, et surtout lorsque la complexité du calibrage a comme contrepartie de bénéficier de formules fermées pour évaluer le prix des options. C'est donc très naturellement que le monde des dérivés de taux a adopté historiquement une telle approche.

Concernant les problématiques de produits d'assurance vie, dont l'échéance est de l'ordre de grandeur de l'horizon de la vie humaine, et pour lesquelles le recours à des simulations stochastiques est incontournable dans le cadre des piliers 1 et 2 de Solvabilité 2 (malgré l'apport de certaines approches en formule fermées ou EDP), la modélisation décrite précédemment semble, quelque peu, inadaptée et moins intuitive (pour la raison simple qu'ils ont été construits par les salles de marché pour valoriser des options de maturités généralement plus petites qu'en assurance vie).

Le point de départ de cet article est donc la recherche d'une représentation des actifs de taux adaptée aux problématiques des assureurs-vie : identifier des variables homogènes dans le temps pour avoir une estimation des volatilités beaucoup plus robuste dans une optique de long terme ; privilégier un modèle dans lequel les corrélations avec d'autres facteurs de risque (tels que les actions) auront plus de chance d'être stables dans le temps (les prix des actifs de taux ayant des caractéristiques de risque constantes) et donc plus faciles à estimer.

2. DETERMINATION DES ACTIFS DE TAUX DIFFUSES PAR LE MODELE

2.1 Critère de détermination des actifs de taux diffusés

On souhaite identifier, a priori, quels sont les actifs de taux dont le profil de risque est stable dans le temps. On définit la stabilité du profil de risque par la propriété suivante :

(α) Un actif de taux présente un profil de risque stable si et seulement si son cash-flow à la date T , en proportion des cash-flows restant à verser au-delà d'une date t , ne dépend que la durée entre t et T .

Si on considère un actif de taux qui verse le flux $f(t)dt$ dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, la propriété énoncée plus haut s'écrit, en notant $u: = T - t$:

$$\frac{f(t+u)}{\int_t^{+\infty} f(s)ds} = K(u); K(u) > 0$$

Proposition

Toutes les solutions de cette équation s'écrivent : $f(t) = f(0) \exp(-K(0)t)$

Démonstration

$$f(t+u) = K(u) \int_t^{+\infty} f(s)ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(t+u) = -K(u) f(t) \xrightarrow{u=0} f'(t) = -K(0) f(t) \\ \Rightarrow CQFD$$

La fonction $K(u)$ s'écrit nécessairement : $K(u) = K(0) \exp(-K(0)u)$

La vie moyenne de l'actif défini par la fonction $f(t)$ ci-dessus est égale à $1/K(0)$:

$$\frac{\int_0^{+\infty} s f(s)ds}{\int_0^{+\infty} f(s)ds} = \frac{\int_0^{+\infty} u \exp(-u) du}{K(0) \int_0^{+\infty} \exp(-u) du} = \frac{1}{K(0)}$$

Le cas $K(0) = 0$ ($f(t) = \text{cte}$) dans la définition de $f(t)$ ci-dessus correspond au cas d'une rente perpétuelle continue à versements constants (rente qui verse $f(0) dt$ entre t et $t + dt$), elle ne rentre pas dans le cadre de la définition (α) car le montant de cash flows restant à verser est infini. Elle peut néanmoins être ajoutée comme un cas limite aux actifs de taux ayant un profil de risque homogène dans le temps.

Les actifs de taux ayant un profil de risque homogène (au sens de la définition α) sont les rentes perpétuelles continues, à amortissement géométrique.

Le cas limite où le coefficient d'amortissement est nul correspond aux rentes perpétuelles continues à versements constants.

La vie moyenne d'une rente géométrique de coefficient d'amortissement x est égale à « $1/x$ ».

2.2 Propriété des résultats obtenus : rentes de vie moyenne constante

On note $U(x, t)$ la valeur actuelle de la rente d'amortissement « x » à la date t .

On a :

$$U(x, t) = \int_t^{+\infty} f(u)P(t, u) du = f(0) \int_t^{+\infty} \exp(-x * u) P(t, u) du$$

Par changement de variable :

$$U(x, t) = f(0)\exp(-x * t) \int_0^{+\infty} \exp(-x u) P(t, t + u) du$$

Si on note $y(x, t)$ le taux continu équivalent au taux actuariel de la rente¹ d'amortissement « x », on a alors :

$$U(x, t) = f(0) \exp(-x * t) \int_0^{+\infty} \exp(-x u) * \exp(-y(x, t) * u) du = \frac{f(0) \exp(-x * t)}{x + y(x, t)} \quad (2.1)$$

Pour simplifier les écritures, on considère désormais un continuum d'actifs de taux indicés par « x » et composé pour chacun d'eux par la détention à la date t , d'une quantité $\frac{\exp(x * t)}{f(0)}$, notés A_x et dont la valeur actuelle à la date t est : $S(x, t)$

On a donc :

$$S(x, t) = \frac{\exp(x * t)}{f(0)} U(x, t) \quad (2.2)$$

Et d'après (2.1), on obtient :

$$S(x, t) = \frac{1}{x + y(x, t)} ; y(x, t) \text{ étant le taux de l'actif } A_x \text{ vu de la date } t$$

On rappelle que la vie moyenne de l'actif A_x est égale à $\frac{1}{x}$.

Note : Si le prix de la rente de l'actif A_x est compris dans l'intervalle $]a, b[$ ($a \geq 0$), celui du taux d'une rente de vie moyenne $\frac{1}{x}$ sera compris dans l'intervalle : $]1/x + 1/b, 1/x + 1/a[$; ainsi le taux d'une rente perpétuelle constante ($x=0$) est toujours strictement positif, les autres taux de rentes peuvent éventuellement devenir négatifs, d'autant moins rarement que les vies moyennes des rentes sont plus courtes.

Cette formule permet le passage d'un continuum de prix d'actifs de taux, choisis pour leur caractère homogène dans le temps, à un continuum de taux continus de rentes perpétuelles.

Le passage des de prix de rentes aux prix des zéro-coupons constitue l'objet du paragraphe suivant.

¹ Le taux actuariel de la rente est le taux d'actualisation unique qui permet d'égaliser le prix de la rente et la valeur actuelle de ses cash-flows futurs (actualisés avec le taux de la rente). Cette définition est la même que pour les obligations et les titres à revenu fixe en général.

3. FORMULES DE PASSAGE AUX ZERO-COUPONS, INVERSION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Les actifs présentant des propriétés théoriques de stabilité sont donc les rentes géométriques. Pour être capable de déduire de l'ensemble des rentes géométriques, l'ensemble des prix des zéro-coupons, il faut résoudre l'équation fonctionnelle suivante :

$$S(x, t) = \int_0^{+\infty} \exp(-x u) P(t, t + u) du$$

Dans laquelle on connaît la fonction $x \rightarrow S(x, t)$ et on cherche la fonction : $u \rightarrow P(t, t + u)$ à t fixé.

On reconnaît le problème général de l'inversion numérique d'une transformée de Laplace.

Les deux méthodes d'inversion les plus présentes dans la littérature sont la méthode de *Fourier* et la méthode de *Stehfest*.

Rappel mathématique

Le problème de l'inversion numérique de la transformée de Laplace consiste à retrouver la fonction $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, connaissant F où F est la transformée de Laplace définie comme suit :

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx \quad (3.1)$$

Avec F définie pour tout $z > 0$.

3.1 Méthode de Fourier

La formule analytique donnant la transformée inverse de Laplace est la suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

On pose $s = c + iu$ avec $c, u \in \mathbb{R}$. Nous verrons dans la suite que le paramètre c doit satisfaire une certaine condition pour assurer la convergence de la méthode.

En remplaçant s par sa nouvelle expression, on a :

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} F(c + iu) du$$

Or $e^{iut} = \cos ut + i \sin ut$ et $F(c + iu) = \text{Re}(F(c + iu)) + i \text{Im}(F(c + iu))$

Donc

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ut + i \sin ut) (\text{Re}(F(c + iu)) + i \text{Im}(F(c + iu))) du$$

Comme f est à valeurs réelles, la partie imaginaire de la formule précédente est nulle.

D'où :

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(ut) \operatorname{Re}(F(c + iu)) - \sin(ut) \operatorname{Im}(F(c + iu))] du$$

En utilisant une méthode d'approximation de l'intégrale par une somme infinie (ex. méthode des séries de Fourier), on a l'expression suivante :

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{t_{max}} \left(\frac{F(c)}{2} + \sum_{k \geq 1} [\cos(\omega_k t) \operatorname{Re}(F(c + i\omega_k)) - \sin(\omega_k t) \operatorname{Im}(F(c + i\omega_k))] \right)$$

$$\text{Avec } \omega_k = \frac{k\pi}{t_{max}}$$

La somme infinie introduite précédemment est calculée en considérant un nombre élevé, mais fini, de termes n . Dans la pratique $n > 100$

A noter que cette méthode nécessite de fixer les deux paramètres c et t_{max} . La relation suivante doit être vérifiée : $e^{-2ct_{max}} F(2t_{max}) \approx 0$

3.2 Méthode de Stehfest

Cette méthode est aussi appelée algorithme de *Gaver-Stehfest*. Elle consiste à trouver une approximation de f à l'aide d'une série de fonctions f_n où

$$f_n(x) = \frac{\ln(2)}{x} \sum_{k=1}^{2n} a_k(n) F\left(k \frac{\ln(2)}{x}\right), \quad n \geq 1 \text{ et } x > 0 \quad (\text{i})$$

Les coefficients $a_k(n)$ sont définis comme suit :

$$a_k(n) = \frac{(-1)^{n+k}}{n!} \sum_{j=\lceil (k+1)/2 \rceil}^{\min(k,n)} j^{n+1} \binom{n}{j} \binom{2j}{j} \binom{j}{k-j}, \quad n \geq 1 \text{ et } k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$$

Où $[x]$ représente la partie entière de x .

Afin de comprendre l'origine de cette formule, il faut s'intéresser à celle proposée par *Gaver* en 1966.

En effet, la formule des f_n proposée par *Gaver* est

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{\ln(2)}{x} \frac{(2k)!}{k!(k-1)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i F\left((k+i) \cdot \frac{\ln(2)}{x}\right), \quad k \geq 1 \text{ et } x > 0 \quad (\text{ii})$$

En remplaçant F par son expression décrite dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{\ln(2)}{x} \frac{(2k)!}{k!(k-1)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \int_0^\infty e^{-(k+i) \ln(2) \frac{v}{x}} f(v) dv, \quad k \geq 1 \text{ et } x > 0$$

On pose : $\ln(2) \frac{v}{x} = u$

$$\Rightarrow \tilde{f}_n(x) = \frac{(2k)!}{k!(k-1)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \int_0^\infty e^{-(k+i)u} f\left(\frac{xu}{\ln(2)}\right) du$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_n(x) = \frac{(2k)!}{k!(k-1)!} \int_0^\infty e^{-ku} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i e^{-iu} \right)}_{=(1-e^{-u})^k \text{ (formule binômiale)}} f\left(\frac{xu}{\ln(2)}\right) du$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_n(x) = \int_0^\infty p_k(u) f\left(\frac{xu}{\ln(2)}\right) du$$

Avec

$$p_k(u) = \frac{(2k)!}{k!(k-1)!} e^{-ku} (1 - e^{-u})^k, \quad k \geq 1 \text{ et } u \geq 0$$

On vérifie que : $\int_0^\infty p_k(u) du = 1$. On peut alors considérer que $u \mapsto p_k(u)$ est la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire U_k . Les calculs d'espérance et de variance de U_k donnent au voisinage de $+\infty$:

$$\mathbb{E}[U_k] = \ln(2) + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\text{Var}[U_k] = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Il s'ensuit que la suite de variables aléatoires $\{U_k\}_{k \geq 1}$ converge en distribution vers $\ln(2)$. On peut alors en déduire que, pour toute fonction continue f sur \mathbb{R}

$$\forall x > 0, \quad \tilde{f}_k(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{x U_k}{\ln(2)}\right)\right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$$

Gaver va aussi montrer que :

$$\tilde{f}_k(x) = f(x) + \frac{\alpha_1(x)}{k} + \frac{\alpha_2(x)}{k^2} + \dots + \frac{\alpha_{m-1}(x)}{k^{m-1}} + O\left(\frac{1}{k^{m-\frac{1}{2}}}\right), k \rightarrow \infty$$

Avec $f \in C^{2m}(\mathbb{R})$ et $f^{(i)}(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$, pour $i \in \llbracket 0 ; 2m \rrbracket$.

La formule précédente montre que \tilde{f}_k converge lentement vers f . Afin d'accélérer sa convergence, *Stehfest* propose une nouvelle approximation :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(n) \tilde{f}_k(x) \quad \text{(iii)}$$

Où les coefficients $c_k(n)$ sont choisis de telle façon à éliminer les termes en $\frac{\alpha_i(x)}{k^i}$ pour $i \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$

Une forme possible des $c_k(n)$ est :

$$c_k(n) = (-1)^{n+k} \frac{k^n}{k!(n-k)!}, n \geq 1 \text{ et } k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$$

Il suffit alors d'injecter l'expression précédente dans (iii) et d'utiliser l'expression de $\tilde{f}_k(x)$ explicitée dans (ii) pour obtenir la formule de (i).

L'algorithme de *Gaver-Stehfest* possède quelques caractéristiques qui en font une des méthodes numériques les plus intéressantes pour le calcul de la transformée inverse de

Laplace. En effet, l'algorithme ne nécessite pas le passage par les nombres complexes pour la transformée F et les coefficients $a_k(n)$ sont faciles à calculer.

3.3 Méthodes numériques

L'objectif de cette partie est de voir si, compte tenu de la forme a priori particulière d'une fonction d'actualisation et, corrélativement, d'une courbe des taux ; une méthode ad-hoc d'inversion ne pourrait pas donner des résultats numériques meilleurs que la méthode de *Stehfest*.

On cherche à modéliser la courbe des taux de telle sorte que la transformée de Laplace donne une formule fermée, avec une fonction limitée à trois paramètres (en pratique, les ACP indiquent que les variations de la courbe des taux sont expliquées par trois paramètres).

3.3.1 Méthode à un facteur additive

Dans cette partie, nous considérons que les prix de ZC sont de la forme :

$$B(u) = e^{-yu} + \varepsilon(u)$$

Où y est une constante positive, obtenu en minimisant le carré de la fonction des résidus $u \rightarrow \varepsilon(u)$.

Avec une telle fonction, On peut écrire :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xu) B(u) du = \frac{1}{x+y} + L(\varepsilon)(x)$$

Où L représente l'opérateur de la transformée de Laplace.

L'écriture précédente permet de ramener le problème d'inversion de Laplace du prix de rente $S(x)$ à l'inversion du résidu. L'avantage d'une telle démarche réside dans la réduction de l'erreur issue de l'utilisation de la méthode de *Stehfest* pour l'inversion de $S(x)$.

3.3.2 Méthode à 3 facteurs

Pour cette méthode, nous considérons un prix du ZC de la forme :

$$B(u) = e^{-lu} + (l-r) u e^{-0.5*(\theta*u)^2} + \varepsilon(u)$$

Où r , l et θ sont des constantes.

Les constantes r et l peuvent être interprétées comme des paramètres de forme de la courbe, respectivement, comme des représentations du taux court et du taux long. En effet :

$$\text{Au voisinage de } 0 : B(u) = (1-l*u) + (l-r)*u + o(u) = 1-r*u + o(u)$$

$$\text{Au voisinage de } +\infty : B(u) \sim e^{-lu}$$

Le paramètre θ est un paramètre d'échelle, qui fixe la convexité de la courbe et la vitesse de convergence des taux courts vers les taux longs.

En négligeant dans un premier temps le résidu $\varepsilon(u)$, l'expression de $B(u)$ décrite précédemment permet de réécrire le prix de la rente comme suit :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xu) B(u) du = \frac{1}{x+l} + \frac{(l-r)}{\theta^2} * \psi\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

Avec $\psi(z) = 1 - \sqrt{2\pi} * z * e^{\frac{z^2}{2}} * N(-z)$, où N est la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite.

La recherche des paramètres r , l et θ se fait via la méthode des moindres carrés sur la distribution des prix de rentes $S(x)$.

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir l'expression des $B(u)$ par formule fermée sans passer par une inversion numérique (du type *Stehfest*).

La fonction $S(x)$ étant linéaire en fonction de r , on trouve une formule fermée pour le calcul de r en fonction des deux autres paramètre l et θ .

Le calcul implicite de l peut être fait par une méthode numérique de *Newton* en fonction du paramètre θ .

En revanche l'estimation de θ , dont dépend la qualité de l'estimation des autres paramètres s'avère plus délicate.

Une fois les trois paramètres l , r , θ estimés au mieux ; le résidu $\varepsilon(u)$ peut être estimé numériquement par la méthode de *Stehfest* ou de *Fourier* :

$$\varepsilon(u) = L^{-1}\left(S(x) - \frac{1}{x+l} - \frac{(l-r)}{\theta^2} * \psi\left(\frac{x}{\theta}\right)\right)(u)$$

Le cadre méthodologique de passage des données observables en amont et utilisés dans les modèles en aval, constitués par les prix des zéros coupon, et des variables intermédiaires de simulation possédant les propriétés d'homogénéité souhaitées est maintenant posé.

4. PROCESSUS STOCHASTIQUES DE DIFFUSION DES RENTES

Les actifs A_x ayant un profil de risque homogène dans le temps, on suppose qu'ils suivent un processus stochastique également homogène, à variance bornée pour autoriser une convergence en loi pour la courbe des taux asymptotique.

On suppose en pratique que la volatilité déterministe¹ à l'instant t de l'actif A_x est de la forme :

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) \exp(-a(x) t) \quad (4.1)$$

Malgré son apparente parcimonie ce modèle est assez riche car il permet de calibrer des volatilités instantanées et des vitesses de retour à la moyenne différentes pour toutes les rentes géométriques de vies moyennes différentes.

La volatilité cumulée asymptotique à l'infini est donnée par : $\sigma_\infty(x) = \sqrt{\int_0^{+\infty} \sigma^2(x, t) dt} = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2a(x)}} \quad (4.2)$

Cette volatilité asymptotique s'interprète comme une volatilité inconditionnelle, le calibrage portera donc sur la volatilité instantanée $\sigma(x)$ d'une part et sur $\sigma_\infty(x)$ d'autre part. Si la volatilité des actifs de taux croît avec leur vie moyenne, $\sigma(x)$ est une fonction décroissante de x .

Sous une hypothèse un prix du risque de marché proportionnel à la variance des prix, noté λ (qui est a priori commun à toutes les classes d'actifs), il vient alors :

$$S(x, t) = E_{F_t}[S(x, t)] \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \int_0^t \sigma(x, s)^2 ds + \int_0^t \sigma(x, s) dW_x(s)\right)$$

W_x étant le brownien propre à l'actif A_x ; et F_t la probabilité forward-neutre pour l'horizon t

Remarque :

La diffusion sous probabilité neutre au risque correspond au cas particulier $\lambda=0$

Et d'après (2.1) :

$$\begin{aligned} E_{F_t}[S(x, t)] &= E_{F_t} \left[\int_0^{+\infty} \exp(-x u) P(t, t+u) du \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-x u) E_{F_t}[P(t, t+u)] du \\ E_{F_t}[S(x, t)] &= \int_0^{+\infty} \exp(-x u) \frac{B(t+u)}{B(t)} du \end{aligned}$$

Finalement:

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \int_0^{+\infty} \exp(-x u) \frac{B(t+u)}{B(t)} du * \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \int_0^t \sigma(x, s)^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \sigma(x, s) dW_x(s)\right) \quad (4.3) \end{aligned}$$

¹ Ce choix pour la forme de volatilité renvoie à un actif suivant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec un facteur de retour à la moyenne égal à « $a(x)$ »

($dX_t = -c X_t dt + \sigma dW_t \Rightarrow X_t = X_0 \exp(-ct) + \int_0^t \sigma \exp(-cs) dW_s$)

On en déduit la distribution asymptotique des prix des rentes géométriques en fonction du taux long l :

$$S(x, \infty) = \frac{\exp [(\lambda - \frac{1}{2}) \sigma_{\infty}(x)^2 + \sigma_{\infty}(x) Z_x]}{x + l}$$

Où Z_x suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

En faisant l'hypothèse que les prix des rentes historiquement observés sur une période longue constituent un échantillon inconditionnel représentatif de la distribution asymptotique, cette égalité sera utilisée pour estimer les paramètres $\sigma_{\infty}(x)$ à partir des logarithmes des prix des rentes (& 3.4.2).

Et on peut en déduire la distribution asymptotique du taux d'une rente géométrique de vie moyenne égale à $1/x$:

$$y(x, \infty) = -x + (x + l) \exp [(\frac{1}{2} - \lambda) \sigma_{\infty}(x)^2 - \sigma_{\infty}(x) Z_x]$$

Le taux d'une rente géométrique suit une loi log-normale décalée d'un taux égal à l'inverse de sa vie moyenne (le taux d'une rente perpétuelle constante suit une loi log-normale sans shift).

Note : depuis l'apparition de taux négatifs, la pratique empirique sur les marchés consiste à « shifter » à gauche le modèle LMM, log-normal. Ces travaux donnent une certaine légitimité théorique à cette pratique de place, en la généralisant.

Quelques propriétés statistiques des taux asymptotiques

- Espérance mathématique :

$$E[y(x, \infty)] = -x + (x + l) \exp ((1 - \lambda) \sigma_{\infty}(x)^2)$$

- Médiane :

$$Md[y(x, \infty)] = -x + (x + l) \exp ((\frac{1}{2} - \lambda) \sigma_{\infty}(x)^2)$$

- Variance :

$$Std[y(x, \infty)] = (x + l) * \exp((1 - \lambda) \sigma_{\infty}(x)^2) * \sqrt{\exp(\sigma_{\infty}(x)^2) - 1}$$

- Fréquence de taux négatifs (T=1/x, vie moyenne de la rente) :

$$P\left(y\left(\frac{1}{T}, \infty\right) < 0\right) = N\left(-\frac{\ln(1 + lT)}{\sigma_{\infty}(1/T)} + \sigma_{\infty}(1/T) \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right)$$

N étant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Sous la mesure Q et tant que $\lambda < \frac{1}{2}$, la probabilité de taux négatifs est :

- Décroissante avec T (les taux plus longs sont plus rarement négatifs, sous réserve que $\sigma(x) \downarrow x$)
- Croissante avec λ (l'augmentation de la prime de risque de marché fait baisser les taux sans risque) (sous Q et sous R, quelque-soit λ)

- Croissante avec σ

L'ensemble des processus Z_x est de dimension infinie. La réduction à une dimension finie se fait à l'aide d'une analyse en composantes principales qui permet d'écrire :

$$\frac{Z_x(t)}{\sqrt{t}} = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x) V_i \text{ avec } \sum_{i=0}^n \alpha_i(x)^2 = 1 \text{ et } V_i \sim N(0,1)$$

Dans le cadre d'un modèle qui intègre toutes les classes d'actif cette approche présente l'avantage de pouvoir corrélérer les aléas V_i (et donc le risque de taux) avec les autres classes d'actifs, dans un cadre gaussien standard.

5. CALIBRAGE DES PARAMETRES

5.1 Calibrage historique

5.1.1 Choix des données de calibrage

Le calibrage est réalisé sur la base de la courbe des taux swap Euribor pour différentes maturités à partir du 22/06/2004. Nous disposons 2991 entrées réparties sur les 20 maturités suivantes : 1 à 12 par pas annuel, 15 à 50 ans par pas de 5 ans. A partir des données précédentes, nous calculons les courbes de taux pour toutes maturités entre 1 et 50 ans par interpolation. Le prix des zéro-coupons historiques se déduit en utilisant la formule suivante :

$$ZC_n = \frac{(1 - r_n * \sum_{i=1}^{i=n-1} ZC_i)}{1 + r_n}$$

Où ZC_n le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité n , r_x le taux swap obtenu par interpolation et x sa maturité en années.

Le taux ZC continu est immédiatement obtenu par : $t_n = \frac{-\ln(ZC_n)}{n}$

A ce stade, nous disposons de la courbe ZC pour toutes les maturités entre 1 et 50 ans. L'historique des prix des rentes est calculé en considérant la forme suivante de la fonction $B(u)$:

$$B(u) = \sum_i e^{-t_i * u} * 1_{[u_{i-1}, u_i]}(u)$$

Avec $u_0 = 0$, $u_{n+1} = +\infty$ et $u_i = i$ avec $i \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$ et $u \rightarrow 1_{[u_i, u_{i+1}]}(u)$ est l'indicatrice de l'intervalle $[u_i, u_{i+1}[$.

Ainsi, le prix des rentes historiques est de la forme :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xu) B(u) du = \sum_{i=0}^n \int_{u_i}^{u_{i+1}} \exp(-(x + t_i) * u) du$$

$$S(x) = \frac{1}{x + t_1} (1 - \exp(-(x + t_1))) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{x + t_i} (\exp(-(x + t_i)) - \exp(-(x + t_{i+1}))) + \frac{1}{x + t_n} \exp(-(x + t_n))$$

Nous obtenons donc un échantillon composé de 2991 observations (quotidiennes) pour chacune des 50 variables représentant les prix d'une rente de facteur d'amortissement « 1/x ».

5.1.2 Résultats du calibrage des volatilités

Afin de définir les paramètres de diffusion des rentes, nous calculons à partir de l'échantillon décrit précédemment la valeur de la volatilité inconditionnelle correspondant à chaque durée de vie moyenne. Concrètement, cela revient à calculer l'écart-type de chaque échantillon de 2991 d'observations du log de prix de rentes. Cette grandeur correspond à la valeur de $\sigma_\infty(x)$, dans le modèle et ses valeurs sont les suivantes :

$$\sigma_\infty(x) = \sqrt{\mathbb{V}[\log(S(x))]}$$

Durée de vie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_∞	1,405%	2,594%	3,622%	4,540%	5,376%	6,149%	6,869%	7,545%	8,182%	8,785%
Durée de vie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ_∞	9,357%	9,901%	10,419%	10,914%	11,388%	11,843%	12,279%	12,697%	13,100%	13,488%
Durée de vie	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
σ_∞	13,863%	14,224%	14,572%	14,909%	15,235%	15,550%	15,856%	16,152%	16,439%	16,718%
Durée de vie	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
σ_∞	16,988%	17,251%	17,506%	17,754%	17,996%	18,230%	18,459%	18,682%	18,899%	19,110%
Durée de vie	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
σ_∞	19,317%	19,518%	19,714%	19,906%	20,093%	20,276%	20,454%	20,629%	20,799%	20,966%

Tableau 1: Résultats de calibrage de la volatilité cumulée asymptotique σ_∞

Les volatilités instantanées se déduisent, de façon similaire, en calculant l'écart-type de chacun des échantillons du log du rendement quotidien pour chacune des rentes de durée de vie « 1/x ». Cette grandeur est notée σ_0 :

$$\sigma_0(x) = \sqrt{\mathbb{V}\left[\log\left(\frac{S(x, t + 1)}{S(x, t)}\right)\right]} \times \sqrt{nb \text{ observations par année}}$$

Durée de vie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_0	0,479%	1,027%	1,555%	2,066%	2,562%	3,044%	3,511%	3,965%	4,405%	4,832%
Durée de vie	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
σ_0	5,245%	5,647%	6,036%	6,413%	6,779%	7,134%	7,478%	7,812%	8,136%	8,451%
Durée de vie	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
σ_0	8,757%	9,054%	9,342%	9,622%	9,895%	10,160%	10,418%	10,668%	10,913%	11,151%
Durée de vie	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
σ_0	11,382%	11,608%	11,828%	12,043%	12,252%	12,456%	12,655%	12,850%	13,040%	13,225%
Durée de vie	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
σ_0	13,407%	13,584%	13,757%	13,926%	14,092%	14,254%	14,413%	14,568%	14,720%	14,869%

Tableau 2: Résultats de calibrage de la volatilité instantanée σ_0

Nous pouvons enfin déduire la valeur du coefficient de retour à la moyenne grâce à l'équation (4.2).

Le graphique suivant reprend l'ensemble des résultats de calibrage des volatilités :

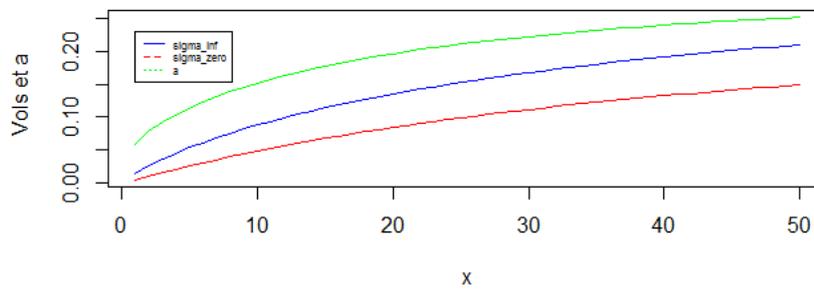


Figure 1: Paramètres de calibrage de la volatilité des prix des rentes

5.1.3 Résultats du calibrage des ACP

Comme rappelé dans le paragraphe 4, le processus stochastique W_x étant de dimension infinie, il convient de déterminer les variables explicatives de son évolution. Nous réalisons donc deux ACP pour distinguer le cas de la volatilité instantanée de celui de la volatilité inconditionnelle. En effet, les processus W_x associées à ces dernières n'ont aucune raison d'être les mêmes.

Afin d'identifier les variables explicatives de la volatilité inconditionnelle (resp. instantanée), nous réalisons une ACP sur la base de la matrice de corrélation (resp. des rendements quotidiens) des log de prix des rentes. Cette matrice est obtenue à partir de l'historique des (rendements quotidiens des) prix des rentes calculés précédemment.

Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus :

<code>> summary(acp_Px)</code>				<code>> summary(acp_Perf)</code>			
Importance of components:				Importance of components:			
	Comp.1	Comp.2	Comp.3		Comp.1	Comp.2	Comp.3
Standard deviation	7.0328883	0.702635804	0.2087948497	Standard deviation	6.9114002	1.43210738	0.40786945
Proportion of Variance	0.9892304	0.009873941	0.0008719058	Proportion of Variance	0.9553491	0.04101863	0.00332715
Cumulative Proportion	0.9892304	0.999104294	0.9999761999	Cumulative Proportion	0.9553491	0.99636769	0.99969484

Figure 2: Variance cumulée de l'ACP des prix (à gauche) et des performances quotidiennes (à droite)

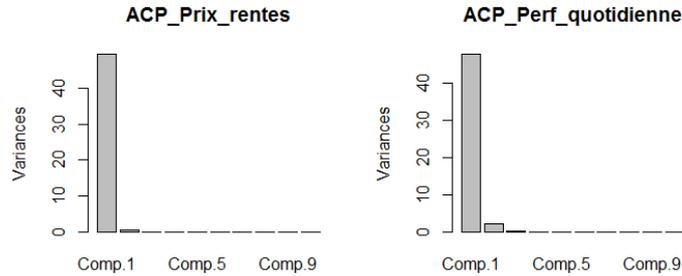


Figure 3 : Diagramme des éboulis des ACP des prix et des performances quotidiennes

Nous constatons que plus de 99,5% de la variance des deux paramètres est expliquée par les 2 premiers vecteurs propres de l'ACP, en l'occurrence le taux long et le taux court.

Nous pouvons alors considérer que $\frac{Wx(t)}{\sqrt{t}} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) V_i$ avec $V_i \sim N(0,1)$ et i allant de 1 à 3. Les valeurs de α_i sont déduites de l'ACP : $\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) V_i$; ils sont présentés en annexe. On reconnaît les facteurs de forme habituels : niveau général des taux, pente de la courbe, courbure.

5.2 Possibilité de calibrage sur les prix d'options

Le principe est de calibrer un modèle de marché, par exemple LMM+, sur des prix de marché puis de simuler des trajectoires avec deux ou trois aléas (avec une corrélation historique ou à dire d'expert comme cela est fait usuellement pour les modèles de marchés) enfin de calibrer les paramètres sur les trajectoires simulées comme s'il s'agissait de trajectoires historiques. La question à traiter est celle des hypothèses pour la modélisation au-delà de l'horizon des options traitées, on peut par exemple faire une hypothèse pour les volatilités asymptotiques (calibrée historiquement ou à dire d'experts).

Dans la mesure où la gestion de l'actif général en face des engagements en euros réalisé par les assureurs vie est essentiellement réalisée sur la base d'une politique d'allocation d'actifs, dont le coût de réallocation est fonction de la volatilité historique et non pas de la volatilité implicite, et plus marginalement (par rapport à la taille totale du

bilan) sur la base d'achat d'options dans le marché ; il nous semble que la calibration sur des volatilités historiques est plus adaptée pour une approche financière de l'évaluation des passifs d'assurance vie.

Une méthodologie alternative de calibration des paramètres de volatilité du modèle sur la base des prix d'options est néanmoins envisageable car c'est une référence souvent utilisée et conforme à l'approche réglementaire sous Solvabilité II. Une possibilité serait de procéder selon les étapes suivantes :

- Calibrage standard sur des prix d'options
- Simulations de plusieurs milliers de trajectoires de courbes de taux avec les paramètres de volatilité implicite
- Calibrage des paramètres de diffusion des rentes sur la base des trajectoires simulées selon la méthodologie décrite dans l'article sur un échantillon historique

6. MISE EN ŒUVRE DES SIMULATIONS

6.1 Calcul de la rente à diffuser

La rente initiale est calculée à l'aide de la formule (2.1) sur la base de la courbe des taux ZC souverains (échelon de crédit AAA), au 31/12/2015.

Pour des raisons de simplifications évidentes, nous calculerons des facteurs d'amortissement $B(u)$ pour des valeurs de u comprises entre 1 et 50, ainsi que les prix d'une rente de durée de vie moyenne « $1/x$ » où x , le facteur d'amortissement de la rente, est égal à $1/u$.

6.2 Diffusion de la rente

Les prix des rentes calculés précédemment sont diffusés selon l'équation (4.3). Cette diffusion est réalisée sur 1000 scénarios, l'aléa N utilisé est celui de Sobol et l'horizon de projection choisi est 50 ans.

Cette dernière valeur tient compte des durations constatées dans le cas des engagements en cas de vie, plus particulièrement dans le cas d'une rente viagère.

7. RESULTATS NUMERIQUES

7.1 Test de martingalité

A la fin des projections, nous disposons de la valeur des facteurs d'actualisation $B(u)$ pour chaque valeur de u allant de 1 à 50, et ce pour les 1000 scénarios considérés.

Pour chaque valeur de u , nous calculons la moyenne de l'échantillon de $B(u)$ constitué de 1000 observations, notons la $m(u)$. Afin de vérifier le caractère martingale de la variable aléatoire $(B(u))_t$, nous allons comparer les valeurs suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 1, 50 \rrbracket, ZC_{exp,i} = m(u_i) * e^{-s_T * T} \text{ et } ZC_{th,i} = e^{-s_{i+T} * (T+i)}$$

Où s_T le taux spot de maturité T .

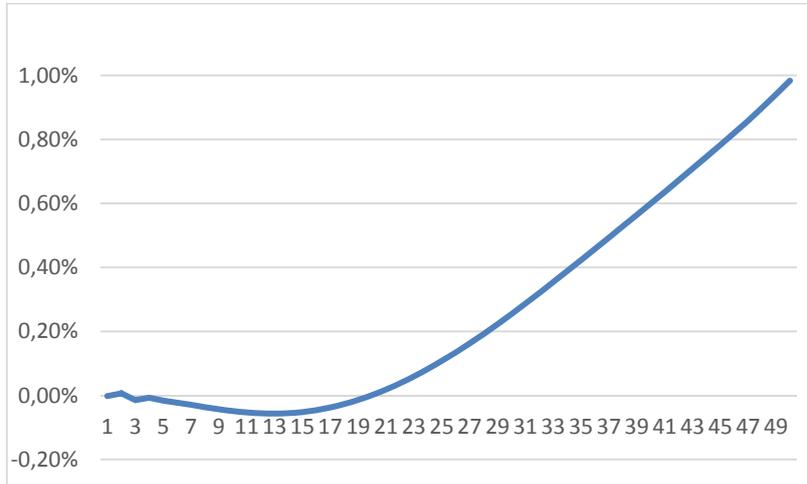


Figure 4: Ecart de convergence en valeur relative

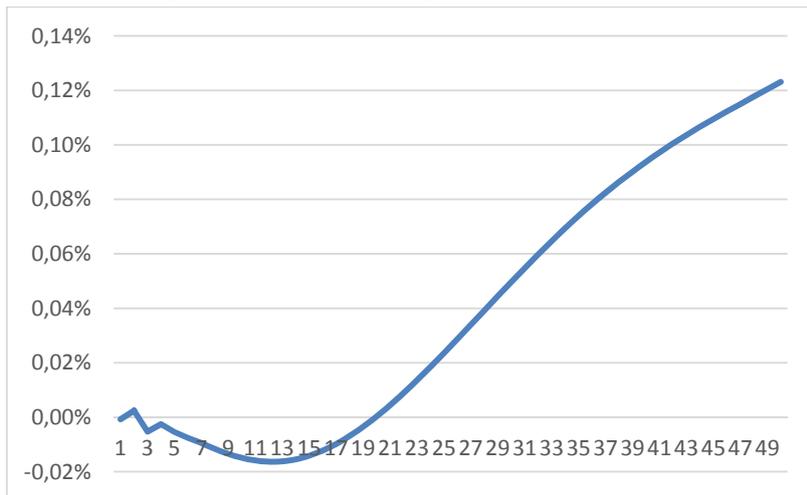


Figure 5: Ecart de convergence en valeur absolue

Avec un écart par rapport aux tests martingales de moins de 1% en valeur relative des prix des zéro-coupons, et de moins de 12 points de base des nominaux, pour un horizon de 100 ans (50 ans d'horizon de simulations et 50 de maturité des courbes), la procédure d'inversion numérique donne des résultats acceptables.

La méthode retenue est la méthode à un facteur, qui est à la fois simple et robuste.

7.2 Distribution des taux

Ci-dessous l'histogramme de la distribution des taux à 1 an, 10 ans et 30 ans :

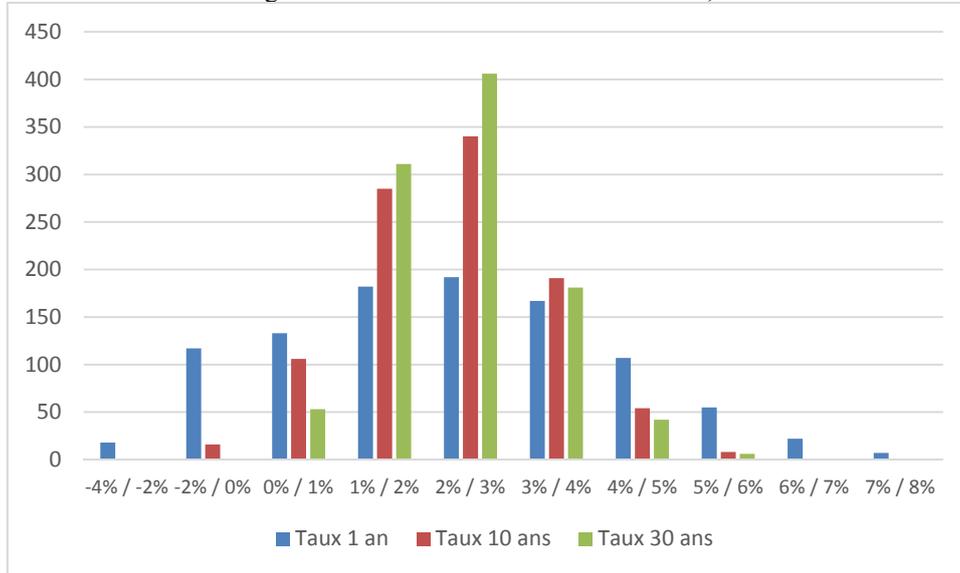


Figure 6: Histogramme des taux 1an, 10 ans et 30 ans

On observe que les taux long-terme sont moins dispersés que les taux court terme, ce qui est conforme à l'intuition et aux données historiques. Cela est confirmé par leur écart type :

	Taux 1 an	Taux 10 ans	Taux 30 ans
Std	1,99%	1,10%	0,91%
Avg	2,25%	2,29%	2,36%

Tableau 3: Propriétés statistiques des taux 1an, 10 ans et 30 ans

La moyenne des taux est légèrement croissante avec leur maturité, sans que les taux longs divergent. Leur volatilité est au contraire décroissante.

La répartition des taux négatifs est la suivante :

	Taux 1 an	Taux 10 ans	Taux 30 ans
Entre -4% et -2%	1,8%	0%	0%
Entre -2% et 0%	11,7%	1,6%	0,1%
Total	13,5%	1,6%	0,1%

Tableau 4: Répartition des taux négatifs dans les taux 1 an, 10 ans et 30 ans

Les taux négatifs restent floorés, et leur fréquence est d'autant plus faible que les taux sont longs –elle tend vers zéro pour les taux asymptotiques long-terme- ; comme cela est prévu par le modèle théorique.

8. CONCLUSION

Le modèle stochastique de taux présenté dans cet article a été conçu pour mieux répondre aux besoins des assureurs, en étant mieux adapté aux difficultés particulières que posent la simulation à long terme avec la contrainte du caractère martingale sur les prix. Contrairement aux modèles de taux usuellement utilisés, l'approche proposée ici permet de considérer un vecteur aléatoire dont tous les browniens représentent des logarithmes de prix d'actifs présentant des propriétés d'homogénéité dans le temps (y compris pour les actifs de taux).

Dans un premier temps les paramètres de dispersion du modèle ont été calibrés sur un historique de prix. Cela appelle trois remarques :

- En premier lieu ce choix peut se justifier sur un plan théorique de par la gestion d'actifs effectivement mise en œuvre par les assureurs (allocation d'actif en fonction du profil de risque du bilan plutôt que stricte répllication par des stratégies optionnelles)
- En second lieu, ces calibrations apparaissent relativement stables, selon les fenêtres temporelles mais également selon le choix de courbes Swap ou Govies
- Enfin, un calibrage sur des prix d'options est techniquement possible sur la base de volatilités implicites de modèles usuels dans le monde bancaire, comme cela est décrit dans l'article

Le changement de probabilité entre univers risque neutre et monde réel peut se faire de manière simple et robuste via des hypothèses de prix du risque (tels que le ratio de Sharpe) et dans un cadre cohérent entre toutes les classes d'actifs.

Les résultats obtenus en matière de profil des trajectoires de courbes de taux simulées apparaissent prometteurs, l'étape ultérieure de nos travaux va consister à les comparer en termes de *best estimate* avec une approche ALM complète.

9. BIBLIOGRAPHIE

AASE K.K., PERSSON S.A. [1996] « Valuation of the Minimum Guaranteed Return Embedded in Life Insurance Products », *Wharton School Working Paper*, 96-20.

BAUER D., BERGMANN D., REUSS A. [2010] « Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach », *Proceedings of the 2010 ICA congress*.

BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°21.

BRIYS E., de VARENNE F. [1994] « Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 19, 53-72.

CEIOPS [2010] *Technical Specifications for QIS5*, European Commission.

PLANCHET F., LEROY G. [2011] « Solvabilité 2 : quels standards pour le risque de marché ? », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°156 du 01/03/2011.

PLANCHET F., THEROND P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risque dynamiques - seconde édition*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THEROND P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.

QUITTARD-PINON F. [2002] *Mathématiques financières, les essentiels de la gestion*, EMS.

REVELEN J. [2009] "Replicating Portfolio et capital économique en assurance vie", *Mémoire d'ingénieur, ISFA / Ecole Centrale de Lyon*

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third edition. Springer Verlag, Berlin

D. P. Gaver, Jr. [1966] *Observing stochastic processes, and approximate transform inversion*. *Operations Research*, 14(3):pp. 444-459, 1966.

10. ANNEXE

Tableaux des coefficients alpha obtenus par l'analyse en composante principale

Performances Quotidiennes			Distribution Asymptotique (inconditionnelle)		
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3
0,542	0,704	0,459	0,862	0,499	0,084
0,650	0,708	0,275	0,918	0,397	0,028
0,712	0,688	0,140	0,950	0,313	-0,002
0,753	0,656	0,046	0,969	0,248	-0,018
0,786	0,619	-0,018	0,980	0,197	-0,026
0,815	0,577	-0,060	0,987	0,156	-0,030
0,842	0,532	-0,087	0,992	0,124	-0,032
0,868	0,486	-0,103	0,995	0,098	-0,032
0,892	0,439	-0,111	0,997	0,077	-0,031
0,913	0,392	-0,114	0,998	0,059	-0,029
0,932	0,345	-0,113	0,999	0,045	-0,028
0,947	0,300	-0,109	0,999	0,032	-0,026
0,961	0,257	-0,104	0,999	0,021	-0,024
0,971	0,216	-0,097	1,000	0,011	-0,022
0,980	0,178	-0,090	1,000	0,003	-0,020
0,987	0,141	-0,082	1,000	-0,004	-0,018
0,991	0,107	-0,074	1,000	-0,011	-0,016
0,995	0,076	-0,066	1,000	-0,017	-0,014
0,997	0,046	-0,059	1,000	-0,022	-0,012
0,999	0,019	-0,051	1,000	-0,027	-0,010
0,999	-0,007	-0,044	0,999	-0,032	-0,009
0,999	-0,031	-0,037	0,999	-0,036	-0,007
0,998	-0,053	-0,030	0,999	-0,040	-0,005
0,997	-0,073	-0,023	0,999	-0,044	-0,004
0,996	-0,092	-0,017	0,999	-0,047	-0,002
0,994	-0,110	-0,011	0,999	-0,050	-0,001
0,992	-0,126	-0,006	0,999	-0,053	0,000
0,990	-0,142	-0,001	0,998	-0,056	0,002
0,988	-0,156	0,004	0,998	-0,058	0,003
0,986	-0,169	0,009	0,998	-0,061	0,004
0,983	-0,182	0,013	0,998	-0,063	0,006
0,981	-0,194	0,018	0,998	-0,065	0,007
0,979	-0,205	0,022	0,998	-0,067	0,008
0,976	-0,215	0,026	0,998	-0,069	0,009
0,974	-0,225	0,029	0,997	-0,071	0,010
0,972	-0,234	0,033	0,997	-0,073	0,011
0,969	-0,243	0,036	0,997	-0,075	0,012
0,967	-0,251	0,039	0,997	-0,077	0,013
0,965	-0,259	0,042	0,997	-0,078	0,014
0,963	-0,266	0,045	0,997	-0,080	0,015
0,961	-0,273	0,048	0,997	-0,081	0,016
0,959	-0,280	0,050	0,996	-0,083	0,017
0,957	-0,286	0,053	0,996	-0,084	0,018
0,955	-0,292	0,055	0,996	-0,086	0,019
0,953	-0,298	0,057	0,996	-0,087	0,020
0,951	-0,303	0,060	0,996	-0,088	0,021
0,949	-0,309	0,062	0,996	-0,090	0,021
0,947	-0,314	0,064	0,996	-0,091	0,022
0,946	-0,318	0,066	0,995	-0,092	0,023
0,944	-0,323	0,067	0,995	-0,093	0,024

