LA LOI DE POISSON-KATZ EN ASSURANCE : AVANTAGES ET INCONVENIENTS

J.F. WALHIN

Université Catholique de Louvain et Secura Belgian Re, Belgique

RESUME

Cet article aborde une loi de comptage ignorée dans la littérature actuarielle, la distribution de Poisson-Katz. Celle-ci est obtenue en composant une loi de Katz avec une loi de Poisson. Un lien est fait avec la famille des lois de Panjer (classe $(a,b,0)$). Des formules récursives sont établies pour l'évaluation des probabilités ainsi que pour l'évaluation de la fonction de probabilité de la loi agrégée du montant de sinistres. Quelques commentaires sont apportés en ce qui concerne l'ordonnancement stochastique de cette famille de lois. Enfin, un ajustement est réalisé.

MOTS-CLES

Loi de comptage, Poisson composé, Katz, Panjer, Poisson, formules récursives.

1. INTRODUCTION

Dans la littérature actuarielle, la famille $(a,b,0)$ ou encore famille de Panjer a suscité beaucoup d'attention. Il s'agit de la loi de comptage présentant la caractéristique suivante :

$$\text{(1)} \qquad \frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n} \qquad , \qquad n \geq 1$$

où $p_n = P\left[N = n\right]$ lorsque N représente une variable aléatoire de comptage.

Cette famille est bien connue car il s'agit de la famille des lois pour lesquelles l'algorithme de Panjer (1981) est valable.

L'algorithme de Panjer permet de trouver, sous forme récursive, la fonction de probabilité de la variable aléatoire $S = X_1 + \ldots + X_N$ lorsque N appartient à la famille de Panjer et que X est arithmétique. On a

$$\begin{aligned} f_S(0) &= \left(\frac{1-af_X(0)}{1-a}\right)^{-(a+b)/a} \\ &= e^{-b(1-f_X(0))} \quad \text{si } a \to 0 \end{aligned}$$

$$f_S(x) = \frac{1}{1-af_X(0)} \sum_{i=1}^{x} (a + b\frac{i}{x}) f_X(i) f_S(x-i) \qquad , \qquad x \geq 1$$

avec $f_X(x) = P[X = x]$ et $f_S(x) = P[S = x]$.

La famille de lois de Panjer est aussi communément appelée classe (a,b,0) dans la littérature actuarielle en référence aux paramètres a et b. Dans Sundt et Jewell (1981), il est démontré que les seules lois appartenant à la classe (a,b,0) sont Poisson, Binomiale et Binomiale Négative. Lorsque l'on consulte la littérature probabiliste, on constate que ce résultat est en fait dû à Katz (1965). On a

Loi de probabilité	a	b
Poisson (λ)	0	λ
Binomiale (m,q)	$\frac{-q}{1-q}$	$\frac{(m+1)q}{1-q}$
Binomiale Négative (r,π)	π	$\pi(r-1)$

Table 1. Lois appartenant à la classe (*a*,*b*,0)

avec les paramétrisations suivantes :

$$f_{P0}(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \qquad n \geq 0$$

$$f_{BN}(n) = \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!n!} \pi^n (1-\pi)^r \quad , \qquad n \geq 0$$

$$f_{Bi}(n) = \frac{m!}{(m-n)!n!} q^n (1-q)^{m-n} \quad , \qquad 0 \leq n \leq m$$

Par ailleurs, l'algorithme de Panjer dans le cas particulier où N est Poisson est dû à Kemp (1967) et à Adelson (1966). Notons toutefois que dans ces deux références, la fonction de probabilité de X n'apparaît pas clairement.

Dans la suite de cet article nous ferons référence à la famille de lois de Katz, tout en sachant qu'il s'agit de la famille communément appelée de Panjer ou classe (a,b,0).

Une extension naturelle lorsque l'on veut construire des variables aléatoires discrètes consiste à composer une variable avec une autre, que l'on choisit souvent Poisson. Cette approche a été adoptée par Tripathi, Gurland et Bhalerao (1986) qui définissent la loi Poisson-Katz :

$$M = K_1 + \ldots + K_N$$

où N est distribuée selon une variable aléatoire de Poisson de moyenne λ et K_i appartient à la famille de Katz (a,b). On suppose bien entendu l'indépendance entre les K_i et N ainsi que l'indépendance entre les K_i lorsque N est fixé. La fonction génératrice des probabilités $(P_M(z) = E\, z^M)$ s'écrit

$$P_M(z) = P_N\left(P_K(z)\right) = e^{-\lambda\left(1-\left[\frac{1-az}{1-a}\right]^{-(a+b)/a}\right)}.$$

La section 2 présente les cas particuliers de la loi Poisson-Katz. La section 3 donne les formules récursives relatives à la loi Poisson-Katz. Dans la section 4, l'on s'intéresse à quelques notions d'ordre stochastique. La section 5 présente un ajustement sur un portefeuille automobile. La conclusion est donnée en section 6.

2. CAS PARTICULIERS

La présente liste de cas particuliers est donnée dans Johnson, Kotz et Kemp (1992).

Lorsque K est Poisson, alors M est Neymann Type A. Il s'agit du cas où $a \to 0$.

Lorsque K est Binomiale, alors M est Poisson-Binomiale. Il faut pour cela que $-\frac{a+b}{a}$ soit un entier strictement positif. Dans le cas particulier où $-\frac{a+b}{a}=2$, l'on tombe sur la loi de Hermite.

Lorsque K est Binomiale Négative, alors M est Poisson-Pascal. Il s'agit du cas où $0<b<1$. Dans le cas particulier où $\frac{a+b}{a}=1$, l'on tombe sur la loi de Polya-Aeppli.

3. FORMULES RECURSIVES

Puisque N est une variable aléatoire de Poisson, il est tout indiqué d'utiliser l'algorithme de Panjer pour trouver la fonction de probabilité de M :

$$f_M(0) = e^{-\lambda(1-f_K(0))}$$

$$f_M(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{i=1}^{x} i f_K(i) f_M(x-i) \qquad , \qquad x \geq 1$$

où $f_K(i)$ est donné par la formule décrivant la classe de Katz :

$$f_K(0) = (1-a)^{(a+b)/a}$$

$$f_K(n) = f_K(n-1)(a+\frac{b}{n}) \quad , \qquad n \geq 1$$

En sciences actuarielles, on est intéressé par les montants de sinistres. Il est donc judicieux de connaître la loi du montant de sinistres agrégé sur une période :

$$S = X_1 + \ldots + X_M$$

où X_i est la variable aléatoire représentant le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre. Classiquement l'on suppose que la suite de variables aléatoires (X_i) est iid et que *M* est indépendante des X_i. La fonction de probabilité de *S* est donnée par :

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_M(n) f_X^{*n}(x) .$$

On aimerait disposer d'une formule récursive pour évaluer cette fonction de probabilité. Comme *M* est Poisson composée, l'on a

$$P_S(z) = P_N\left(P_K\left(P_X(z)\right)\right).$$

En introduisant une variable aléatoire intermédiaire *V*, on peut donc écrire

$$V = X_1 + \ldots + X_K$$

$$S = V_1 + \ldots + V_N$$

avec *K* distribuée selon une loi de Katz et *N* selon une loi de Poisson. Comme la famille des lois de Katz, et en particulier la loi de Poisson, satisfait l'algorithme de Panjer, l'on trouve

$$f_V(0) = \left(\frac{1 - a f_X(0)}{1-a}\right)^{-(a+b)/b}$$

$$f_V(x) = \frac{1}{1 - a f_X(0)} \sum_{i=1}^{x} \left(a + b\frac{i}{x}\right) f_X(i) f_V(x-i), \qquad x \geq 1$$

$$f_S(0) = e^{-\lambda(1 - f_V(0))}$$

$$f_S(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{i=1}^{x} i f_V(i) f_S(x-i) \ , \qquad x \geq 1$$

et l'on a donc une formule récursive en deux étapes pour obtenir la fonction de probabilité de *S*.

4. ORDRE STOCHASTIQUE

L'ordre stop-loss est bien connu en sciences actuarielles. Deux risques *X* et *Y* sont ordonnés au sens de l'ordre stop-loss lorsque leurs primes stop-loss sont ordonnées pour toute priorité :

$$E\left[\max(X - t, 0)\right] \leq E\left[\max(Y - t, 0)\right] \quad \forall t \geq 0 \ .$$

On écrit

$X \times_{sl} Y$.

En particulier on constate que l'ordre stop-loss implique l'égalité des moyennes (t=0).

Supposons X et Y à valeurs entières. Définissons $r_X(x) = \frac{f_X(x)}{f_X(x-1)}$. Il est possible de démontrer la condition suffisante suivante (voir Hesselager (1995)) :

Si $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ et s'il existe c tel que $r_X(x) \le r_Y(x)$ pour $x > c$ et $r_X(x) \ge r_Y(x)$ pour $x < c$ alors $X \times_{sl} Y$. Dans le cadre de la famille de Katz, l'on a

$$r_N(n) = a + \frac{b}{n}$$

$$\mu = \frac{a+b}{1-a}$$

On peut donc réécrire $r_N(n)$ en fonction de a et μ :

$$r_N(n) = \frac{a(n-1-\mu)+\mu}{n} .$$

Soient à présent deux lois N et M appartenant à la famille de Katz et ayant même moyenne. Si le paramètre a de N est inférieur au paramètre a de M, on a immédiatement $r_M(n) \le r_N(n)$ pour $n < 1+\mu$ et $r_M(n) \ge r_N(n)$ pour $n > 1+\mu$. On a donc la condition suffisante pour écrire $N \times_{sl} M$.

Comme a<0 pour la Binomiale, a=0 pour la Poisson et a>0 pour la Binomiale Négative, on a immédiatement

Binomiale (m,q) $\times_{sl}$ Poisson (μ)$\times_{sl}$ Binomiale Négative (r,p)

avec la moyenne $\mu = mq = \frac{rp}{1-p}$ fixée.

Comme l'ordre stop-loss entraîne l'ordre des variances, et que la variance d'une Poisson est égale à sa moyenne, on retrouve le résultat bien connu de sous-dispersion pour la Binomiale, d'équidispersion pour la Poisson et de surdispersion pour la Binomiale Négative.

Comme l'ordre stop-loss est stable par composition (voir Goovaerts et al. (1990)), l'on a immédiatement le résultat suivant :

$$\text{Poisson-Binomiale } (\lambda,m,q) \times_{sl} \text{Neyman Type A } (\lambda,\mu) \times_{sl} \text{Poisson-Pascal } (\lambda,r,p) .$$

5. AJUSTEMENT

Dans cette section, nous reprenons le portefeuille étudié dans Walhin et Paris (2000b) et nous l'ajustons suivant une loi de Poisson-Katz en comparant avec l'ajustement Hofmann (de paramètres p, c et a). L'ajustement est effectué par maximum de vraisemblance.

Nombre de sinistres	*Obs*	*P-K*	*Hof*
0	122628	122707	122620
1	21686	21353	21725
2	4014	4282	3945
3	832	896	874
4	224	192	226
5	68	41	65
6	17	9	20
7	7	2	6
8	7	0	2
l		-87304.86	-87268.66
χ^2		81.61	5.93
ddl		3	4
p-valeur		0	0.2040
λ/p		1305.99	0.2249
a/c		0.000133	0.6982
b/a		0.226899	0.4522

Table 2. Portefeuille observé et ajustements

Comme la loi de Hofmann peut aussi s'écrire sous la forme d'une loi de Poisson composée, le tableau suivant reprend le paramètre de la loi de Poisson pour les deux lois ainsi que la fonction de probabilité de la loi qui est composée :

Nombre	*K*	*ETNB*
0	0.99985	0
1	0.00013	0.89439
2	1.510^{-5}	0.08316
3	2.310^{-6}	0.01655
4	3.910^{-7}	0.00417
5	7.110^{-8}	0.00118
6	1.310^{-8}	0.00036
7	2.610^{-9}	0.00011
8	5.210^{-10}	3.10^{-5}

	P_K	*Ho*
λ	1305.99	0.1771

Table 3. Ajustements de la loi de Poisson et de la loi composée

Dans le cas de la loi de Hofmann, la loi qui est composée est Binomiale négative tronquée étendue (ETNB) (voir Walhin et Paris (2000a)).

Notons que le maximum global de la vraisemblance pour la loi Poisson-Katz est difficile à atteindre. Il semble que plus λ devient grand et a petit, plus la vraisemblance est élevée. Le cas limite présente des difficultés numériques.

Il semble que le maximum de vraisemblance de l'espérance soit donné par la moyenne empirique.

6. CONCLUSION

La loi Poisson-Katz présente la propriété intéressante d'être Poisson composée. Toutefois l'ajustement obtenu ne permet pas de tirer des conclusions physiques. Il est en effet compliqué de discuter un modèle dans lequel la loi de Katz est quasiment dégénérée en 0 et la loi de Poisson présente une moyenne très élevée. Par ailleurs, la loi de Poisson-Katz peut être aussi vue comme un mélange de Katz où la mélangeante est une Poisson. Il est également difficile de donner une interprétation physique à ce modèle.

Par contre, la loi de Hofmann est Poisson composée avec une interprétation agréable de ce modèle : le nombre d'accidents est Poisson et le nombre de sinistres par accident est Binomiale négative tronquée étendue. De plus, la loi de Hofmann est aussi Poisson mélange, ce qui permet d'en donner l'interprétation classique du nombre de sinistres distribué Poisson avec un paramètre qui varie dans la population des assurés.

Un intérêt de la loi de Poisson-Katz est qu'elle autorise un ordonnancement stochastique, au sens de l'ordre stop-loss, de ces éléments, ce qui ne semble pas être le cas systématiquement pour la loi de Hofmann.

La loi Poisson-Katz donne un ajustement technique, qui n'est pas meilleur que celui obtenu par une autre loi à trois paramètres, la loi de Hofmann. Il est certainement plus adéquat de retenir des modèles qui ont une bonne interprétation physique, surtout lorsque la fréquence est faible. Il semble donc clair que la loi de Poisson-Katz présente plus d'inconvénients que d'avantages pour être utilisée en sciences actuarielles.

RÉFERENCES

ADELSON, R.M. (1966). Compound Poisson Distributions, *Operations Research Quarterly*, 17:73-75 .

GOOVAERTS, M.J. and KAAS, R. and VAN HEERWAARDEN, A.E and BAUWELINCKX, T., editors (1990). *Effective Actuarial Methods*. North-Holland, Amsterdam.

HESSELAGER, O. (1995). Order Relations for Some Distributions. *Insurance : Mathematics and Economics,* 16:129-134

JOHNSON, N. and KOTZ, S. and KEMP, A. (1992). *Univariate Discrete Distributions*. Wiley.

KATZ, L.. (1965). *Unified Treatment of a Broad Class of Discrete Probability Distributions*, pages 175-182. In (Patil, 1965).

KEMP, C.D. (1967). Stuttering-Poisson Distributions. *Journal of the Statistical and Social Enquiry Society of Ireland.* 21:151-157.

PANJER, H.H. (1981). Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. *Astin Bulletin*. 12:22-26

PATIL, G.P., editor (1965). *Classical and Contagious Discrete Distributions*. Statistical Publishing Society, Calcutta.

SUNDT, B. and JEWELL, W.S. (1981). Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions. *Astin Bulletin*. 12:27-39.

TRIPATHI, R.C. and GURLAND, J. and BHALERAO, N.R. (1986). A Unified Approach to Estimating Parameters in Some Generalised Poisson Distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 15:1017-1034

WALHIN, J.F. and PARIS, J. (2000a). A Large Family of Discrete and Overdispersed Probability Laws. (*à venir*).

WALHIN, J.F. and PARIS, J. (2000b). Processus de Poisson Mélange et Formules Unifiées pour Systèmes Bonus-Malus. *à paraître dans le Bulletin Français d'Actuariat*.

Jean-François Walhin
Secura Belgian Re
Rue Montoyer, 12
B-1000 Bruxelles
Belgique
jfw@secura-re.com

ABSTRACT

The present paper is about a counting distribution ignored in actuarial literature : the Poisson-Katz distribution. This distribution is obtained by compounding a Katz distribution with a Poisson distribution.

The link is provided with the Panjer’s class (a,b,0) of counting distributions. Recursive formulae are derived for the evaluation of the probability function as well as for the evaluation of the aggregate claims distribution.

Some comments are made regarding the stochastic ordering within this class of distributions.

Eventually a fit is proposed.