L'HORIZON TEMPOREL DANS SOLVABILITE 2

Anthony DERIEN [1]

RESUME :

Les futures normes de solvabilité vont demander aux assureurs de détenir un montant de capital permettant de faire face à 99.5% des cas dans l'année à venir. Cette vision court terme va non seulement à l'encontre de leurs engagements qui s'étalent sur plusieurs années, mais induit également une problématique de fréquence de calcul du capital infra annuelle.

Pour apprécier l'exigence de capital à un point intermédiaire avant l'échéance des engagements, il convient d'utiliser une mesure de risque qui s'adapte à différentes périodes temporelles, une mesure de risque multipériodique.

Cette mesure de risque sera étendue à l'approche proposée par le régulateur. Il sera démontré que cette extension appliquée à Solvabilité 2 évite de procéder à une augmentation de capital en cours de période, et permet d'évaluer l'impact de la mise à jour infra annuelle de l'exigence de capital.

Mots-clés : Mesure de risque multipériodique, Solvabilité 2.

ABSTRACT:

The new rules of solvency for the insurance industry set the capital requirement at 99.5% for a year horizon. This short term horizon does not match the time horizon of their liabilities and leads to some problems in updating the capital requirement.

To evaluate the regulatory capital at a point in time, it should be used a risk measure which adjusts to different periods, a multiperiod risk measure.

This risk measure is applied to the approach of Solvency 2. This extension avoids to increase the capital through the time horizon and allows to quantify the impact of updating the capital during the year.

[1] Université de Lyon, Université Lyon 1 - Laboratoire de Science Actuarielle et Financière - 50 av. Tony Garnier, 69366 Lyon Cedex 07, France - anthony.derien@etu.univ-lyon1.fr.

1. INTRODUCTION

Le nouveau référentiel, Solvabilité 2, met l'accent sur deux points très importants pour une mesure de risque:

- Son niveau
- Son horizon temporel

Le 1er point permet de définir quel doit être le niveau de probabilité pour que la ruine d'une compagnie d'assurance soit considérée comme acceptable par le régulateur. Dans Solvabilité 2, ce niveau est fixé à 99.5%. Autrement dit, le régulateur accepte qu'il y ait 0.5% des cas où une entreprise d'assurance puisse être en faillite. En actuariat cette notion est dénommée Value at Risk (voir [21] pour les premières utilisations en finance).

Après avoir défini le niveau, il reste à définir sur quel horizon. Le régulateur demande à une entreprise d'assurance d'être solvable dans 99.5% des cas dans l'année à venir. Ces deux éléments concourrent à définir le montant de capital cible que doit détenir la compagnie, appelé «Solvency Capital Requirement" (SCR, voir [6] et [14]).

Même si en apparence la définition de la solvabilité pour un horizon d'un an semble facile à appréhender, différents éléments nécessitent d'être approfondis:

- Faut-il que l'entreprise d'assurance soit solvable à chaque instant jusqu'à l'extinction de l'horizon temporel? Dans le cadre de Solvabilité 2, cela se traduirait par le fait d'être solvable pendant 12 mois consécutifs. Si la solvabilité est estimée le 31 décembre 2009, chaque jour qui passe jusqu'au 31 décembre 2010, le capital doit être supérieur aux exigences de solvabilité. Ou, est-ce que l'entreprise d'assurance doit être solvable dans un an? En appliquant cette approche à l'exemple précédent, cela signifie que l'entreprise d'assurance doit être solvable au 31 décembre 2010, sans forcément tenir compte de la solvabilité entre ces deux dates.
- Est-ce que l'horizon visé est représentatif de l'activité exercé et comment est-il pris en compte dans le calcul?

L'article 100(3) de la Directive Européenne permet de répondre à la 1ère question. La traduction française de celui-ci spécifie que le besoin en capital est calculé à l'horizon d'un an. La version anglaise est plus explicite puisqu'il y est fait mention de « over a one-year period ». Dans ce cas, il est clair qu'il s'agit d'avoir la marge de solvabilité pendant tout l'horizon spécifié et pas seulement à l'échéance. L'article 102(1) de la Directive précise que le calcul doit avoir lieu au moins une fois par an.

Deux approches sont prévues par Solvabilité 2 pour estimer le SCR:

- Une formule standard: elle est définie par le régulateur et s'applique à l'ensemble des acteurs.
- Un modèle interne: une compagnie adopte une modélisation qui lui est spécifique pour différentes raisons (appétit pour le risque différent, souscription de risques atypiques, système de gouvernance développé, ...)

Pour les compagnies qui auront recours à la formule standard pour définir leur besoin en capital, la différence entre le fait de raisonner à solvabilité permanente pendant 12 mois ou dans 12 mois ne les affectera pas. En effet, ce sont les données observées au dernier arrêté comptable qui permettent d'apprécier la solvabilité de l'arrêté à venir.

Par contre les entreprises utilisant un modèle interne devront être à même d'évaluer les exigences de capital quand il se produira dans l'année un changement de nature à affecter leur solvabilité (voir article 102(2) de la Directive). Il y a peu de détail sur l'ordre de grandeur de ce changement. Le paragraphe 5.158 dans [8] précise que lorsqu'il y a conditions anormales dans l'environnement économique, la fréquence de calcul doit être augmentée.

Il est à noter que le calcul du capital minimum («Minimum Capital Requirement", MCR, voir [6] et [9] pour une présentation) à détenir doit être réalisé trimestriellement. Comme la MCR est encadrée par le SCR ( ), afin de ne pas avoir de décalage temporel entre une MCR calculée en fin de trimestre de l'année N ajusté sur un SCR calculé au 31/12/N-1, la fréquence de calcul devrait être à minima trimestrielle pour le SCR.

La réponse à la 2ème question a donné lieu à un débat entre les professionnels et le régulateur. La réforme rencontre de nombreuses critiques sur l'aspect court terme de sa vision qui va à l'encontre de l'activité même des assureurs, à savoir des engagements qui s'échelonnent au dela d'une année. Les assureurs vie portent des engagements qui s'étalent sur plusieurs dizaines d'années. Il en est de même pour les assureurs non-vie pour lesquels, même si les contrats sont annuels, la duration de leur passif excède une année (voir [1] pour un exemple de duration du passif d'un assureur).

Par exemple, la stratégie de placement des assureurs vie est adossée à l'horizon long terme de leur engagement. Pour le risque action, appliquer un scénario de baisse de 32% du cours des actions pour l'année à venir (voir [6]) est tout à fait crédible (comme l'ont démontré les récents évènements de la crise financière) mais la moins value ne se réalisera que si l'entreprise liquide ses positions. Si elle a investi dans ce support pour suivre sa stratégie de rendement à long terme, le risque ne se matérialisera qu'au moment du débouclement de ses achats. Dans cet exemple, l'horizon de calcul n'est pas pertinent.

De manière similaire pour les assureurs non-vie avec le risque de provisionnement, il est défini par le SCR de l'ensemble des provisions en valeur économique à la date d'évaluation à l'horizon d'un an. L'idée est de faire face à la volatilité de l'ensemble des paiements à verser dans l'année à venir. Seule la variation pour l'année à venir est couverte par le SCR, quand bien même l'assureur doit honorer ses engagements sur tout l'horizon.

Les évolutions qui surviendront au dela de l'année à venir seront prises en compte via le calcul de la Risk Margin (RM). Dans le cadre d'un transfert de portefeuille d'une entreprise d'assurance vers une autre société, la RM représente la rémunération du capital à immobiliser pour cette autre société afin d'assumer les engagements d'assurance jusqu'à leur extinction. Pour ce faire, chaque année un besoin en capital à horizon d'un an sera calculé puis un taux (6%) représentant le coût du capital sera appliqué à ces montants.

Comme la RM rémunère l'immobilisation du capital nécessaire à faire face aux engagements jusqu'à leur échéance, pourquoi ne pas déterminer un besoin en capital sur tout l'horizon plutôt que de le déterminer année par année? Est-ce que cette approche serait plus prudente?

Pour résoudre ces deux questions, l'approche utilisée sera différente de celles utilisées en « théorie de la ruine » (voir par exemple [16], [22] et [23]), puisqu'il s'agira d'utiliser une mesure de risque qui tienne compte des flux intermédiaires survenant entre la date d'évaluation et la fin de l'horizon. Ainsi, la mesure de risque devra s'adapter à différentes périodes temporelles, autrement dit être multipériodique.

Dans une Section 2, l'extension multipériodique d'une mesure de risque sera caractérisée au travers d'une approche axiomatique. Puis à la Section 3, il sera démontré que suivant les spécifications de Solvabilité 2, plus la mise à jour du besoin en capital est fréquente au cours d'une année plus le capital à immobiliser est important. De la même façon, estimer le besoin en capital à détenir entre un point intermédiaire et l'échéance nécessite de raisonner conditionnement au positionnement en cours et ainsi de détenir plus de capital. Une conclusion viendra mettre en perspective l'application managériale de cet horizon court terme.

2. MESURE DE RISQUE MULTIPERIODIQUE

Déterminer une mesure de risque sur une variable aléatoire qui évolue dans le temps, implique de sortir de l'approche traditionnelle de quantification du besoin en capital où une mesure de risque monopériodique est utilisée (voir [3] et [5] pour une présentation des propriétés des mesures de risques). Pour appréhender le comportement de celle-ci à chaque période de temps, il conviendrait d'utiliser une mesure de risque qui évolue avec le temps, à savoir une mesure de risque multipériodique.

Dans cette section, les propriétés que doit revétir une mesure de risque multipériodique seront présentées. Cette notion de mesure de risque multipériodique a déja été étudiée de manière axiomatique dans de nombreux travaux scientifiques (voir [4], [11], [12], [24], [25]).

Soit la variable $t = 0,\ldots,T$ dénotant une succession de périodes de temps, un ensemble fini des états de la nature Ω et X_t est l'information révélée au temps t. La filtration est représenté par $F_t = \sigma(X_1,\ldots,X_t)$ et $F_0 = (\varnothing,\Omega)$. $D = (D_t)$ représente le montant des paiements restant à effectuer en date t. D_t est F_t mesurable. L'ensemble des paiement possible est dénoté par Δ. La variable r est le taux d'intéret (constant). $\rho_t(D,\omega)$ est une mesure de risque multipériodique, autrement dit dans l'état de la nature ω à la date t qui a donné lieu au montant D, la compagnie d'assurance doit disposer d'un montant de capital égal à $\rho_t(D,\omega)$, pour que la position soit acceptable.

Une mesure de risque multipériodique partage des axiomes avec le cas monopériodique, d'autres lui sont spécifiques. En premier sera communiqué les axiomes qui sont commun au deux mesures de risques puis seront présentés les axiomes liés au coté multipériodique.

Axiomes communs avec une mesure de risque monopériodique:

Monotonie : Si $D > D'$ alors $\rho_t(D,\omega) > \rho_t(D',\omega)$. Tout comme dans le cas monopériodique, plus le montant à payer en date t est important, plus il faut immobiliser de capital.

Translation par invariance : ρ_t est invariant par translation par rapport à des flux certains. Soit Z - F_t mesurable, où $D(s,\omega) = Z(\omega)1_\tau(s)$ pour tout $\tau \geq t$. Dans ce cas, pour toutes les positions D' et tout $\omega \in \Omega$, on a:

$$\rho_t(D + D',\omega) = \rho_t(D',\omega) + \frac{Z(\omega)}{(1+r)^{\tau-t}}.$$

Sous additivité : Une mesure de risque est sous additive si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D,D') \in \Delta$, la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_t(D+D',\omega) \leq \rho_t(D,\omega) + \rho_t(D',\omega).$$

La mutualisation des paiements doit donner un besoin en capital moindre que la somme des besoins en capitaux.

Homogénéité : Une mesure de risque est homogène si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D) \in \Delta$, $\lambda > 0$ la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_t(\lambda D,\omega) = \lambda \rho_t(D,\omega).$$

Appliquer une mesure de risque sur des paiements qui sont multipliés par une constante, revient à multiplier la mesure de risque par cette même constante.

Les axiomes d'homogénéité et de sous additivité sont souvent remis en cause lorsque le risque de liquidité est pris en compte. Liquider ses positions en période de crise peut induire une perte supérieure ($\rho_t(\lambda D,\omega) \geq \lambda \rho_t(D,\omega)$). C'est pour cela que l'axiome de convexité lui est préféré (voir [15], [19]).

Convexité : Une mesure de risque est convexe si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D,D') \in \Delta$, $\alpha \in [0,1]$, la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_t(\alpha D + (1-\alpha)D',\omega) \leq \alpha\rho_t(D,\omega) + (1-\alpha)\rho_t(D'\omega).$$

Un besoin en capital estimé sur une combinaison de flux de paiements doit donner un capital moindre que la combinaison des capitaux.

La transposition des axiomes d'une mesure de risque monopériodique au cas multipériodique est directe.

Axiomes spécifiques d'une mesure de risque multipériodique:

Adaptabilité : Pour tout $D \in \Delta$ et pour tout t, $\rho_t(D,\omega)$ est F_t mesurable. Autrement dit, la mesure de risque ne dépend pas de l'information qui sera révélée dans le futur. Seule l'information présente à la date t permet d'apporter des modifications à la mesure de risque.

Indépendance du passé : Pour tout paiement réalisé $D, D' \in \Delta$ et l'intervalle de temps auquel a lieu ce paiement, si $D(s,\omega) = D'(s,\omega)$ pour tout $s \geq t$ et pour tout $\omega \in \Omega$ alors $\rho_t(D,\omega) = \rho_t(D',\omega)$. Cette propriété signifie que les paiements passés n'ont aucune influence sur la façon d'estimer le risque à venir.

Consistance temporelle : Une mesure de risque est consistente dans le temps si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D,D')\in\Delta$, la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_{t+1}(D,\omega) = \rho_{t+1}(D',\omega)\ \ \forall\omega\in\Omega.$$

Cela implique que

$$\rho_{t}(D,\omega) = \rho_{t}(D',\omega)\ \ \forall\omega\in\Omega.$$

Cette propriété provient du fait que si deux paiement qui vont avoir lieu dans le futur sont aussi risqués l'un que l'autre dans chaque état de la nature, alors dès à présent ils représentent le même risque. Autrement formulé, si demain le risque est accepté, pourquoi ne le serait-il pas aujourd'hui?

Dynamiquement récursive : Une mesure de risque est récursive si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D)\in\Delta$, la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_{t}(D,\omega) = \rho_{t}(\rho_{t+1}(D,\omega)).$$

Le montant de capital à immobiliser aujourd'hui pour faire face aux paiements à l'échéance est égal au montant de capital à immobiliser demain ρ_{t+1} pour faire face à ce même risque. Une autre façon d'exprimer cette récursivité est:

$$\rho_{t}(D,\omega) = \rho_{t}(D+(1+r)^{-1}\rho_{t+1}(D,\omega)).$$

Supermartingale : Une mesure de risque est une supermartingale si et seulement si pour toutes périodes $t = 0,\dots,T-1$ et toutes positions $(D)\in\Delta$, la relation suivante est vérifiée:

$$\rho_{t}(D,\omega) \geq E(\rho_{t+1}(D,\omega)\,|\,F_t).$$

Plus l'échéance se rapproche, plus il y a d'information sur le montant à payer. Cela entraîne une diminution de la perception du risque.

Une mesure de risque qui satisfera à ces différentes propriétés sera appelée une mesure de risque convexe multipériodique.

La VaR ne satisaifaisant pas à l'axiome de sous additivité dans le cas monopériodique, elle ne saurait être une mesure de risque multipériodique puisqu'elle partage un ensemble d'axiome avec le cas monopériodique. Toutefois pour suivre les recommandations de Solvabilité 2 quant à la mesure de risque à retenir, des extensions de la VaR seront considérées pour vérifier si elles respectent les axiomes liés au caractère multipériodique, et voir comment il serait possible de modifier la formule standard pour prendre en compte un horizon de calcul différent.

Trois approches sont possibles pour déterminer un besoin en capital sur une variable qui évolue dans le temps:

- L'approche la plus simple consiste à calculer un besoin en capital pour chaque période de temps. Elle sera appelée, suivant la dénomination de [17], R-VaR pour « Recalculated VaR ». Cela revient à recalculer la $VaR_{1-\alpha}$ à chaque intervalle de temps. De manière formelle, elle est définie par: $VaR_{1-\alpha}(D \mid F_t)$. C'est l'approche que propose le régulateur pour déterminer le coût d'immobilisation du capital dans le cadre de la RM, puisque le besoin en capital est calculé à horizon d'un an pour chaque arrêté comptable jusqu'à extinction des engagements (voir [18]).
- Une alternative serait de déterminer le capital en période t=0 et de détenir ce montant jusqu'à l'échéance. Cela aurait pour avantage de ne pas augmenter le capital au cours de la période, mais aussi inversement de peut-être immobiliser plus de capital que nécessaire, ou d'être insuffisant. Cette approche est appelée A-VaR, « Accumulated VaR », car la VaR est calculée à la date F_0, elle accumule l'ensemble des valeurs pendant tout l'horizon. Elle est égale à: $VaR_{1-\alpha}(D \mid F_0)$. Seule l'information présente à la date 0 est intégrée dans le calcul de la VaR. Cette approche est employée par la plupart des professionnels pour estimer le risque de provisionnement, voir [2].
- Plutôt que de considérer les pertes à l'échéance vues depuis la date d'évaluation, les pertes potentielles sont prises en compte à la fin de la prochaine période de temps. Cette méthode est appelée I-VaR, « Incremental VaR », puisque le calcul du besoin en capital est effectué de manière récursive en partant des valeurs à l'échéance. Sa formulation est la suivante: $VaR_{1-\alpha}(D \mid D = VaR_{1-\alpha}(D \mid F_{t+1}))$

Pour illustrer ces 3 approches, l'arbre binomial suivant sera considéré avec la variable aléatoire X représentant les pertes d'une compagnie:

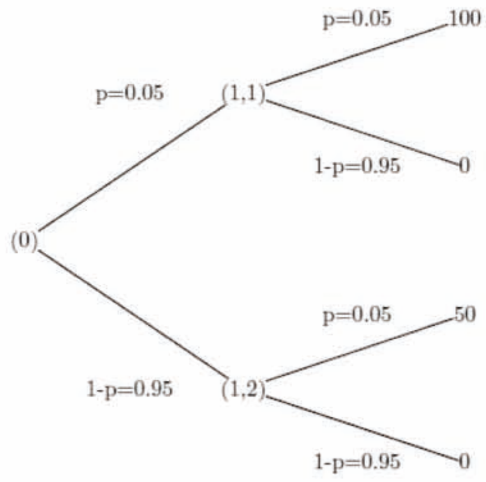

Figure 1 : Arbre binomial avec deux périodes

L'arbre s'étend sur deux périodes. En période 0, la variable aléatoire X vaut 0, en période 2, elle peut prendre les valeurs:

$$X=\begin{pmatrix} 100 \textit{ avec probabilité } 0.0025 \\ 50 \textit{ avec probabilité } 0.0475 \\ 0 \textit{ avec probabilité } 0.95 \\ \end{pmatrix}.$$

En suivant la contrainte réglementaire de Solvabilité 2 pour la détermination du besoin en capital, à savoir la $VaR_{99.5\%}$, le montant de capital à immobiliser en période t=0 est égale à 50. En période t=1, la variable est soit au noeud (1,1), soit au noeud (1,2) de l'arbre. Au noeud (1,1), $VaR_{99.5\%}(X)=100$, alors qu'au noeud (1,2), $VaR_{99.5\%}(X)=50$.

Sur cet exemple, déterminer le besoin en capital en se basant sur le comportement de la variable aléatoire entièrement connue dès la période t=0, induit un besoin de capital supplémentaire de 50 si la variable se positionne sur le noeud (1,1).

Dans le tableau suivant est résumé les résultats des 3 méthodes pour l'exemple présenté à la Figure 1 ci-dessus:

Nœud	R-VaR	A-VaR	I-VaR
(0)	50	50	100
(1,1)	100	50	100
(1,2)	50	50	50

Tableau 1 : Comparaison du besoin en capital selon les différentes approches

La méthode I-VaR permet de faire face à toutes les exigences de capital et évite ainsi d'avoir à faire une augmentation de capital en cours de période.

L'application des différents axiomes vu précédemment sur les trois méthodes donne les résultats suivants [1]:

Mesure de risque	Convexe	Multipériodique
R-VaR	Non	Non
A-VaR	Non	Non
I-VaR	Non	Oui

- De par sa construction, A-VaR n'est pas dépendante du temps, puisqu'étant une mesure de risque monopériodique, de fait aucun des axiomes liés à l'aspect multipériodique n'est accepté.
- La méthode R-VaR satisfait à l'axiome d'indépendance du passé, puisqu'elle n'évalue que les risques futurs. Bien qu'elle soit recalculée à chaque intervalle de temps, comme les risques ne sont envisagés qu'à l'échéance, les axiomes de consistance, de récursivité et de supermartingale ne sont pas satisfaits.
- La méthode I-VaR satisfait à tous les axiomes liés à la notion multipériodique.

3. APPLICATION NUMERIQUE

Il a été vu à la section précédente, que seule la version itérative de la mesure de risque utilisée (une VaR pour suivre les recommandations de Solvabilité 2) satisfaisait aux contraintes spécifiques liées à son utilisation dans un cadre multipériodique.

L'application de la méthode I-VaR sera d'abord faite pour le cas standard d'une variable aléatoire suivant une loi Lognormal (loi utilisée pour le risque de souscription non-

[1] Il est à noter que les critères liées au caractère monopériodique ne sont respectés pour aucune des trois méthodes, ceci tient au fait que la mesure de risque utilisée est une Value at Risk.

vie, voir [10] pour une présentation de ce risque). Ce cas simple permettra d'illustrer la problématique de la fréquence du calcul du besoin en capital à l'horizon d'un an. Puis des résultats spécifiques seront établis pour la RM du risque de provisionnement non-vie puisque la période envisagée est l'extinction des engagements. Dans ce cadre, il sera possible d'avoir une formule standard et de comparer la VaR dans un cadre monopériodique et multipériodique.

3.1 Fréquence de calcul du capital dans un modèle interne

Soit T, la date à laquelle tous les engagements auront été réglés, t la date d'évaluation de la mesure de risque. La relation suivante est vérifiée: $nk = T - t$ avec k qui indique la fréquence de mise à jour de la mesure de risque dans une année et n le nombre de mise à jour. Par exemple, si T=10 et t=0, pour une mise à jour semestrielle de la fréquence de calcul ($k = \frac{1}{2}$), n vaudra 20.

Pour l'exemple standard, T=1 et t=0. Soit X_t, une variable aléatoire suivant une loi Lognormal avec les paramètres μ et $\sigma > 0$. La distribution de $X_{t+k} \mid X_t$ pour $t + k \leq 1$ est Lognormal avec les paramètres $\mu k + \ln(X_t)$ et $\sigma^2 k$.

Suivant cette formulation, le résultat pour la VaR est:

$$VaR_{1-\alpha}(X_{t+k} \mid X_t) = X_t \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right), \tag{1}$$

où $N_{1-\alpha}$ est l'inverse de la loi normale centrée réduite pour le percentile $1-\alpha$. Si t=0 et k=1, alors:

$$VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_0) = X_0 \exp\left(\sigma N_{1-\alpha} + \mu\right). \tag{2}$$

Maintenant, si la période est décomposée en $n = \frac{1}{k}$ intervalles de temps égaux de k années. Le calcul de la VaR lors du dernier intervalle de temps donne:

$$VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_{1-k}) = X_{1-k} \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right).$$

En appliquant ce raisonnement et en utilisant la propriété d'homogénéité de la Value at Risk, $VaR_{1-\alpha}(cX) = cVaR_{1-\alpha}(X)$, cela entraîne que:

$$\begin{aligned} VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_{1-2k}) &= VaR_{1-\alpha}(VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_{1-k}) \mid X_{1-2k}) \\ &= VaR_{1-\alpha}(X_{1-k} \mid X_{1-2k}) \exp\left(\sigma\sqrt{k}N_{1-\alpha} + \mu k\right) \end{aligned}$$

$$= X_{1-2k} \exp\left(\sigma 2\sqrt{k} N_{1-\alpha} + \mu 2k\right).$$

De manière similaire pour une 3$^{\text{ème}}$ itération:

$$VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_{1-3k}) = X_{1-3k} \exp\left(\sigma 3\sqrt{k} N_{1-\alpha} + \mu 3k\right).$$

En continuant de manière itérative jusqu'à t=0:

$$VaR_{1-\alpha}(X_1 \mid X_0) = X_0 \exp\left(\sigma n\sqrt{k} N_{1-\alpha} + \mu nk\right) = X_0 \exp\left(\sigma \frac{1}{\sqrt{k}} N_{1-\alpha} + \mu\right). \qquad (3)$$

L'équation (2) est une version monopériodique de la VaR alors que la formule (3) est une version multipériodique de la VaR pour une variable aléatoire suivant une loi Lognormal.

Si l'horizon de calcul est de un an (n=1) sans mise à jour infra annuelle, les 2 méthodes de calcul donnent le même montant, par contre dès lors qu'il y a une mise à jour infra annuelle, la méthode multipériodique donne un montant plus important que dans le cas monopériodique.

A titre d'illustration, soit une variable aléatoire X qui suit une loi Lognormal de paramètre $\sigma = 12\%$ et $\mu = -0.72\%$. Ce paramétrage permet d'avoir $\mathbb{E}(X) = 1$.

Dans la figure ci-dessous, le niveau de sécurité retenu pour la VaR est de 99.5% à horizon d'un an, comme indiqué dans la réforme Solvabilité 2.

Avec la Figure 2, il apparaît que plus le nombre d'intervalles augmente (nombre de mise à jour dans l'année), plus la VaR multipériodique exigera de capital par rapport à la VaR monopériodique.

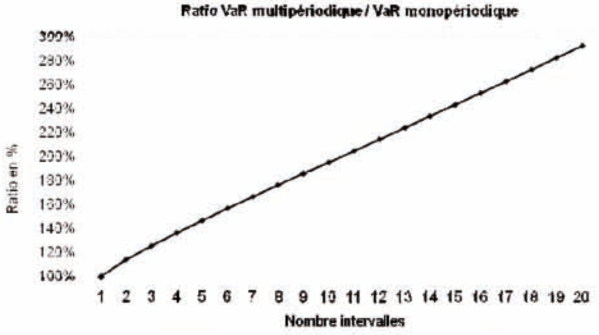

Figure 2 : Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d'intervalles.

Lecture: Une mesure de risque calculée à horizon d'un an qui est mise à jour tous les trimestres (nombre d'intervalles=4) donne un montant plus élevé de 36% par rapport à une mesure de risque calculé à une fréquence annuelle. Une mise à jours mensuelle (n=12) du besoin en capital nécessitera un capital plus important de 112% par rapport à une mise à jour annuelle.

Autre test de sensibilité, sur le graphique ci-dessous, le rapport de la VaR mutlipériodique sur la VaR monopériodique varie en fonction du niveau de sécurité pour une mise à jour k=10 fixe.

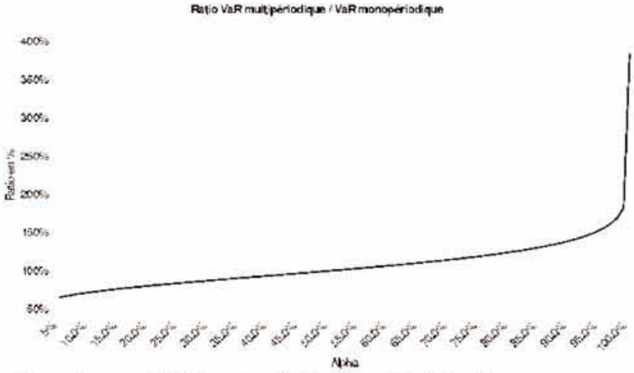

Figure 3 : Test de sensibilité entre la VaR multipériodique et monopériodique en fonction du niveau de percentile.

Lecture: Pour un niveau de sécurité de 75%, la VaR multipériodique pour k=10 donne un besoin en capital supérieur à la VaR monopériodique de l'ordre de 20%.

Plus le niveau de sécurité est élevé plus la différence est importante entre les approches monopériodique et multipériodique. Sur cet exemple, à 99.5% la différence est supérieure à 95%.

Il est à noter que pour un niveau de sécurité inférieur à 50%, la méthode monopériodique donne une valeur supérieure à la méthode multipériodique.

Cet exemple simplifié illustre la problématique de la mise à jour du calcul du capital qui induit des conséquences importantes. Alors que le régulateur ne donne pas de consignes précises sur la fréquence de calcul dans le cadre d'un modèle interne, les entreprises d'assurance seront incitées à suivre les recommandations minimales, à savoir une fréquence de mise à jour annuelle.

Le choix de la fréquence de mise à jour des calculs sera importante, puisque plus celle-ci sera fréquente, plus l'ampleur des pertes sera faible (en l'absence de chocs). En effet, la surveillance en continue de la solvabilité va amener à liquider la compagnie dès lors que son passif sera supérieur à son actif, ainsi il n'y aurait aucune perte à charge pour la collectivité (voir [20]). A l'inverse, une surveillance permanente du niveau de fonds propres, empêcherait la compagnie de fonctionner puisque à chaque fois qu'un nouveau contrat serait souscrit, il faudrait évaluer son impact sur le besoin en capital. Ce qui est difficilement concevable.

3.2 Mesure de risque multipériodique appliquée à la RM

Afin de voir l'impact d'une mesure de risque multipériodique sur la durée des engagements d'une compagnie d'assurance, l'exemple précédent est modifié pour le rendre conforme à l'application de la RM du risque de provisionnement non-vie dans Solvabilité 2 (détermination la $VaR_{99.5\%}$ à l'horizon d'un an sur les provisions à chaque arrêté comptable jusqu'à extinction des engagements, puis application d'un taux de 6% sur ces besoins en capitaux actualisés).

L'hypothèse de base est que l'évolution du stock de provisions à horizon d'un an, dénotée par la variable aléatoire X, est modélisée par une loi Lognormal multivariée. Afin d'avoir une formule fermée, l'approximation utilisée dans le QIS4, à savoir une loi Lognormal univariée, sera employée. Les paramètres de cette variable aléatoire seront supposés constant dans le temps (hypothèse similaire à celle de Solvabilité 2).

Le Best Estimate (moyenne actualisée des paiements futurs) pour chacune des 12 branches d'activités proposées dans le QIS4[1] sera supposée égale à 1 $(\mathbb{E}(X_i) = 1, \forall i = 1,\ldots,12)$. Les volatilités des provisions par branche communiquées dans [6] seront utilisées. La matrice de corrélation du QIS4 sera appliquée pour réprésenter la bénéfice de mutualisation au sein de ce portefeuille (bien que le régulateur n'en tienne pas compte dans le calcul de la RM, voir [7]).

Avec ces hypothèses, les paramètres sont $\sigma = 7.616\%$ et $\mu = -0.29\%$. Ce paramétrage permet de faire correspondre les moments (moyenne et volatilité) de la distribution à ceux du portefeuille (voir le paragraphe TS.XIII.B.31 dans [6]).

Dans un souci de présentation, les paiements futurs s'étaleront sur 10 ans (T=10) et seront réglés de manière proportionnelle dans le temps. Le pas des itérations sera fixé à 1 an (k=1) de fait n=10.

Afin d'avoir des résultats comparables entre l'approche proposée par le régulateur, qui estime le capital dans l'année à venir, et l'approche multipériodique qui quantifie le

[1] Pour paramétrer la formule standard, le régulateur a consulté les assureurs au travers de différentes « Quantitative Impact Study » (QIS). Les paramètres de la quatrième étude réalisée en 2008 sont utilisés.

risque jusqu'à l'échéance; les résultats pour l'approche Solvabilité 2 seront agrégés pour chaque année jusqu'à extinction des engagements afin d'avoir une vision du besoin en capital jusqu'à l'échéance. Cette vision correspondra ainsi aux résultats présentés dans le cas multipériodique.

A titre d'illustration, quand le calcul du besoin en capital se fera en période t=5, pour l'approche mise en place par le régulateur, les SCRs de chacune des années de t=5 à t=10 seront agrégés afin d'être comparable au résultat multipériodique.

Suivant la formule (2)[1]:

$$\begin{aligned} SCR_\alpha^{Multi}(X_{10} \mid X_9) &= SCR_\alpha^{Mono}(X_{10}) \\ &= X_9 \left(\exp\left(\sigma N_{1-\alpha} + \mu\right) - 1\right) \\ &= 10\% X_0 \left(\exp\left(\sigma N_{1-\alpha} + \mu\right) - 1\right) \\ &= 0.2554, \end{aligned}$$

où

- SCR_α^{Multi} est le besoin en capital calculé avec une mesure de risque multipériodique.
- SCR_α^{Mono} est le besoin en capital calculé avec une mesure de risque monopériodique.

Lors de la 9[ème] année, le calcul du besoin en capital sur un horizon d'un an est équivalent entre la méthode monopériodique et la méthode multipériodique, dès lors que le pas des itérations est de 1 an.

Par contre pour l'estimation du besoin en capital de la 8[ème] année, les résultats sont différents. En effet, pour le cas multipériodique:

$$\begin{aligned} SCR_\alpha^{Multi}(X_{10} \mid X_8) &= 10\% X_0 \left[\underbrace{\left(\exp\left(\sigma N_{1-\alpha} + \mu\right) - 1\right)}_{Montant\ payé\ en\ t=8} + \underbrace{\left(\exp\left(2\sigma N_{1-\alpha} + 2\mu\right) - 1\right)}_{Montant\ payé\ en\ t=9} \right] \\ &= 0.8207. \end{aligned}$$

Il apparait dans le formule précédente la propriété de récursivité multipériodique vu à la section précédente. La mesure de risque vue en période t est basée sur ce qui sera payé en t à laquelle est ajoutée la mesure de risque en t+1.

---

[1]La mesure de risque n'est plus représentée par une Value at Risk mais par le SCR comme indiqué dans le QIS4, $SCR(X) = VaR_{1-\alpha}(X) - \mathbb{E}(X)$

Alors que dans le cas monopériodique:

$$SCR_\alpha^{Mono}(X_{10}) + SCR_\alpha^{Mono}(X_9) \quad = X_0\left(\exp\left(\sigma N_{1-\alpha}+\mu\right)-1\right)\left(20\%+10\%\right)$$
$$= 0.7663$$

Ce qui donne un besoin en capital de près de 7% de plus pour la méthode multipériodique. En raisonnant de proche en proche, l'estimation intiale du besoin en capital donne les résultats suivants:

$$SCR_\alpha^{Multi}(X_{10} \mid X_0) = 28.26$$
$$SCR_\alpha^{Mono}(X_0) = 14.05$$

$SCR_\alpha^{Multi}(X_{10} \mid X_0)$ et $SCR_\alpha^{Mono}(X_0)$ sont les besoins en capitaux pour faire face aux engagements de l'assureur jusqu'à extinction de ceux-ci en l'absence d'un facteur d'actualisation. Pour avoir la valeur de la RM, il conviendrait de multiplier cette valeur par 6% (coût du capital retenu dans le QIS4). Ainsi, la RM dans un cadre multipériodique serait de 1.69 tandis que pour le cas monopériodique de 0.84.

Sur la Figure 4 ci-dessous, est représentée la différence entre les deux approches en fonction du nombre d'années restantes jusqu'à l'extinction des engagements.

Au début de l'horizon en t=0, l'échéance est à 10 ans. La mesure de risque multipériodique requiert un besoin en capital deux fois plus important que celui observé avec la méthode proposée pour la RM. Le ratio tombe à 156% en t=3 (il reste à ce moment là, 7 années jusqu'à l'extinction des engagements). En t=9 (autrement dit l'échéance est à un an), les deux approches donnent les mêmes résultats.

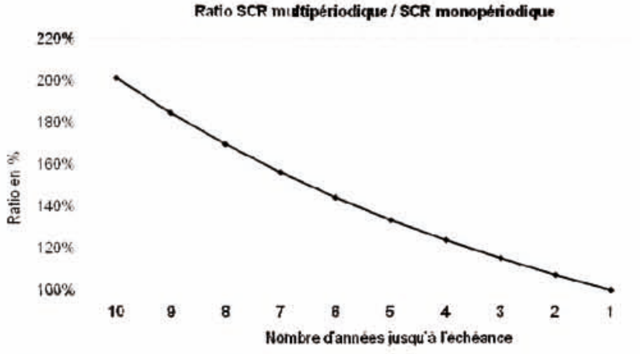

Figure 4 : Comparaison entre la RM multipériodique et monopériodique en fonction du nombre d'années jusqu'à l'échéance.

La fonction est décroissante ce qui signifie que plus l'échéance est lointaine plus il faut immobiliser de capital dans le cas de la mesure de risque multipériodique.

Cette approche offre plusieurs avantages sur la mesure de risque monopériodique:

- Elle permet de faire face à d'éventuelles insuffisances de capital et ainsi évite de procéder à une augmentation de capital.
- En se fondant sur les spécifications du régulateur pour le calcul de la RM du risque non-vie, il est possible de déterminer une formule fermée pour l'application de cette mesure de risque dynamique, ce qui permettrait son implémentation dans le cadre d'une formule standard.

Plusieurs difficultés doivent être mentionnées:

- L'implémentation de cette méthode est directe pour certaines distributions (dans un cadre univarié). Son application sur tous les risques d'une compagnie nécessite d'avoir recours à un modèle interne qui emploie des techniques de simulations imbriquées (voir [13]).
- La hausse des exigences en capital induit par cette méthode est importante pour les exemples qui ont été présentés. Son utilisation dans le cadre d'une formule standard nécessitera une analyse approfondie du régulateur quant à la distribution qu'il conviendra d'utiliser ainsi que ses paramètres.

4. CONCLUSION

Un horizon aussi court que celui spécifié par Solvabilité 2 amène à des conséquences importantes pour la stratégie d'une compagnie d'assurance et pour la supervision effectuée par le régulateur.

Une entreprise qui cherchera à optimiser son rendement en capital ne va-t-elle pas privilégier des stratégies qui seront peut-être gagnantes à court terme mais qui seront défavorables aux assurés à long terme ?

Est-ce qu'une compagnie pourra attendre de voir les résultats d'une décision qui mettra plusieurs mois à s'appliquer? Dans l'exemple d'une décision de politique tarifaire an assurance automobile qui se fait un an à l'avance, le délai de mise en application de la nouvelle stratégie commerciale prend du temps puisqu'il faut que les polices soient renouvelées. Ainsi, une hausse des tarifs décidée en juin N-1, sera appliquée progressivement au cours de l'année N. Si la fréquence de mise à jour du calcul du besoin en capital est décidé semestriellement par le régulateur, évaluer l'impact de cette décision avant que toutes les polices concernées ne soient impactés n'aura pas de sens et pourrait remettre en cause cette décision ou amputer le capital disponible. Pour faire face à ce problème d'arbitrage entre court et long terme, l'assureur devra puiser dans son excédent de couverture, et ainsi détenir plus de capital que celui qui est demandé par la réforme.

L'horizon temporel décidé par Solvabilité 2 se concilie difficilement avec la réalité managériale d'une compagnie d'assurance.

L'horizon de solvabilité des assureurs à horizon 1 an est pertinent dès lors que le secteur est soumis à une crise systémique telle que celle survenue sur les marchés financiers au second semestre 2008, ainsi conscient des difficultés rencontrées, le régulateur peut demander une mise à jour de l'estimation du besoin en capital à tous les acteurs du marché et réagir rapidement si des problèmes de capitalisation apparaissent. Dans le cadre d'évènements majeurs (crise financière, tempête, ...), l'optique court terme est justifié.

A l'inverse lorsqu'un assureur, de manière isolé, éprouvera des difficultés financières, le régulateur ne connaîtra ces difficultés que lorsqu'il mettra à jour le calcul du SCR. Un problème spécifique à un assureur passera inaperçu pour le régulateur tant que sa faillite ne menace pas le système économique (constat déjà valable avec le système actuel).

Il appartiendra au régulateur de trouver un équilibre entre la fréquence du calcul du besoin en capital et la réalité opérationnelle d'un assureur.

5. REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche a été financé par AonBenfield dans le cadre d'une convention CIFRE. L'auteur remercie Jean Paul Laurent, Stéphane Loisel et Emmanuel Le Floc'h pour leurs commentaires et suggestions qui ont permis d'améliorer ce travail.

6. REFERENCES

[1] ACAM. Orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques. Technical report, ACAM, 2008.

[2] AISAM ACME. Study on non-life long tail liabilities. Technical report, AISAM - ACME, 2007.

[3] P. ARTZNER, F. DELBAEN, JM. EBER, and D. HEATH. Coherent measures of risks. *Mathematical Finance*, 9:203--228, October 1999.

[4] P. ARTZNER, F. DELBAEN, JM. EBER, D. HEATH, and H. KU. Coherent multiperiod risk adjusted values and bellmann's principle. *Annals of operationnal research*, 152:5--22, 2007.

[5] C. BURGERT and L. RUSCHENDORF. Consistent risk measure for portfolio vector. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38:289--297, 2006.

[6] CEIOPS. Qis4 - technical specifications. Technical report, CEIOPS, 2008.

[7] CEIOPS. Cp - 42 risk margin. Technical report, CEIOPS, 2009.

[8] CEIOPS. Cp - 56 draf ceiops advice for level 2 implementing measure on solvency 2: article 118 to 124, tests and standards for internal model approval. Technical report, CEIOPS, 2009.

[9] CEIOPS. Cp - 73 article 128 calibration of the mcr. Technical report, CEIOPS, 2009.

[10] M. CRUZ. *The Solvency 2 handbook*. RiskBooks, 2009.

[11] J. CVITANIC and I. KARATZAS. On dynamic measures of risk. *Finance and stochastics*, 3:451--482, 1999.

[12] K. DETLEFSEN and G. SCANDOLO. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. *Electronic journal of probability*, 11:57--106, 2006.

[13] L. DEVINEAU and S. LOISEL. Construction d'un algorithm d'accélération pour le calcul du capital économique dans solvabilité 2. *preprint*, 2009.

[14] European-Commission. Directive of the european parliament and of the council on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance solveny ii. Directive, European Commission, 2007.

[15] H. FOLLMER and A. SCHIED. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6:429--447, 2002.

[16] H. GERBER and E. SHIU. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2:48--72, 1998.

[17] M. HARDY and J. WIRCH. The iterated cte - a dynamic risk measure. *preprint*, 2004.

[18] G. HASLIP. Risk assessment. *The actuary*, pages 28--30, December 2008.

[19] D. HEATH and H. KU. Pareto equilibria with coherent measures of risk. *Mathematical finance*, pages 163--172, 2004.

[20] S. LINDSET and SA. PERSSON. Continuous monitoring: lokk before you leap. *preprint*, 2009.

[21] JP. MORGAN. Risk metrics - technical document. Technical report, JP. Morgan, 1996.

[22] P. PICARD and C. LEFÈVRE. The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:58--69, 1997.

[23] P. PICARD and S. LOISEL. On finite time ruin probabilities for classical ruin models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:41--60, 2008.

[24] F. RIEDEL. Dynamic coherent risk measure. *Stochastic processes and their application*, 112:185--200, 2004.

[25] T. WANG. A class of dynamic risk measures. *preprint*, 2000.