PROBABILITE DE RUINE OU *VALUE AT RISK…* ET VOL PARIS-NICE[1]

Alain TOSETTI†
Commissaire contrôleur général

La ruine de l'assureur est d'une autre nature que la faillite d'une entreprise ordinaire à de nombreux égards

Le principal ici est que la défaillance d'une entreprise produisant un bien ou un service est généralement préjudiciable aux fournisseurs de l'entreprise (les clients ayant en général reçu le bien ou le service qu'ils ont payé), alors que la défaillance de l'assurance est préjudiciable d'abord à ses clients (l'assureur vend des promesses, en garantissant qu'il paiera certaines sommes dans certaines circonstances).

L'aptitude de l'assureur à payer ce qu'il a garanti de payer est si fondamentale que son contraire, la « ruine » de l' « assureur », est au centre de la théorie mathématique de l'assurance. Cette théorie gravite autour de la « probabilité » de la ruine précitée et indique comment rendre cette probabilité très petite par un tarif et une réassurance adaptés : diminuer la probabilité de ruine qui pilote les décisions de l'assureur.

La « ruine » de l'actuariat est entraînée par une perte qui dépasse les fonds propres et rend l'assureur « insolvable » au sens de la réglementation ; cette « insolvabilité » diffère notablement de la « cessation de paiement » qui préoccupe les entreprises ordinaires ; en effet l'assureur qui perd de l'argent, parce qu'il paye les sinistres et prestations longtemps après avoir encaissé les primes (en moyenne deux ans après en assurances non-vie), sera insolvable longtemps avant d'être en cessation de paiement.

Remarque : ce qui précède concerne surtout les assurances qui s'appelaient jadis les assurances « dommages » ou « accidents » et qui s'appellent désormais les assurances « non-vie » par opposition aux assurances qui s'appelaient et s'appellent encore « assurances vie ». L'assurance vie, du moins l'assurance vie à caractère d'épargne (c'est-à-dire en cas de survie) présente d'autres problèmes et relève d'une autre modélisation[2].

Il est vrai que la probabilité de ruine de la théorie de l'assurance (ou son équivalent, la « value *at risk* » en provenance du monde bancaire) est le point central de la théorie du risque… si le théorème de la limite centrale s'applique. Si ce n'est pas le cas, la probabilité de ruine peut induire en erreur.

---

1 Adapté de l'article « Assurance : comptabilité, réglementation, actuariat », Alain Tosetti et Thomas Béhar, Michel Fromenteau, Stéphane Ménart, 2ème édition, Economica 2002

2 L'assurance vie « en cas de décès » relève en revanche de notre propos : mais nul ne s'étonnera, sauf les juristes, de nous voir assimiler décès et non-vie.

BULLETIN FRANÇAIS D'ACTUARIAT, Vol. 6, N° 10, 2003, pp. 5-10

Le théorème de la limite centrale dit que la loi de la moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires de même loi tend vers une loi normale, si les variables sont indépendantes et si leur loi possède des moments des deux premiers ordres. Il s'étend au cas où les variables, sans être indépendantes ni avoir même loi , sont relatives à des risques ni « trop dépendants » ni « trop hétérogènes ».

Nous allons illustrer les deux idées qui précèdent méthodiquement, en prenant un exemple où la probabilité de ruine de l'assureur est une bonne information, puis un contre-exemple où elle ne l'est pas.

Comme *ex ante*, le résultat R de l'assureur est aléatoire (au sens juridique comme au sens du calcul des probabilités) : si ses fonds propres sont FP, la probabilité de ruine est par définition

$$\text{Probabilité de ruine} = P(R<-FP)\ .$$

Cette notion suffit, si les risques sont suffisamment « nombreux, homogènes, indépendants » : alors le résultat suit une loi normale et nous avons le sentiment, même sans calculs, qu'une ruine considérable est exclue.

a) Exemple

Prenons un assureur qui a garanti 1 Million d'Euros en cas de décès dans l'année qui vient à chacun de ses 100 000 assurés, dont chacun a 1 % de « chance » (ou plutôt une probabilité de 1 %) de décéder dans l'année.

Supposons que les primes (diminuées des frais de gestion et majorées par les produits financiers) lui permettent de faire face à 1 020 décès, et que les fonds propres soient de 100 Millions d'Euros, qu'il puisse donc faire face à 1 120 décès, le 1 121$^{\text{ème}}$ le ruinant.

Le calcul basé sur la loi des grands nombres et le théorème central limite montre que ce 1 121$^{\text{ème}}$ décès ne surviendra pas souvent, du moins sous les hypothèses usuelles et intuitives : si les décès des assurés sont « indépendants » (ce qui exclut que les assurés soient nombreux à travailler dans le même quartier ou la même usine,…), si l'assureur ne s'est pas trompé dans son tarif (c'est-à-dire si chaque assuré a bien 1 % de chances de décéder et pas plus),…

En effet ce calcul indique que, dans ces conditions, la ruine de l'assureur correspondant au 1 121$^{\text{ème}}$ décès (la perte dépassant les 100 M de fonds propres) surviendra moins d'une fois sur 10 000.

On se dispense usuellement d'aller plus loin dans le raisonnement, car l'intuition indique que si le nombre de décès dépasse 1 120 (si la perte dépasse les 100 M de fonds propres), ce ne sera pas de beaucoup : et le calcul confirme en effet dans ce cas, l'espérance du nombre de décès est de 1 128, et la perte de 108. En moyenne lorsque la faillite se produit il ne manque « que » 8 Millions à l'assureur qui est tenu de payer 1 128 Millions de sinistres.

b) Contre-exemple

Prenons un exemple **extrêmement** différent, conformément au titre de cet article.

Avant de prendre l'avion pour aller de Paris à Nice, je décide de devenir assureur et de garantir, à chacun des 400 autres passagers, moyennant une prime de 10 Euros par tête, un capital de 10 Millions d'Euros en cas de décès par crash de l'avion, événement qui a une chance sur un million de se produire.

Mon résultat sera alors

- presque certainement (sauf une fois sur un million), un bénéfice de 4 000 Euros finançant correctement mon voyage ;
- extrêmement rarement (une fois sur un million !), une perte, une perte qui d'ailleurs me ruine, ce dont probablement je n'aurai cure ayant par hypothèse pris l'avion.

Bien que ma probabilité de ruine soit négligeable et beaucoup plus petite que celle de maints assureurs dont le précédent, je ne suis pas un assureur mais un escroc : je n'ai à aucun moment eu la possibilité de payer le sinistre de 400 fois 10 Millions d'Euros que je garantis !

La probabilité de ruine doit ici être accompagnée d'une mesure de la grandeur de la ruine possible : ici, lorsque l'avion s'écrase, le résultat est une perte de 4 Milliards d'Euros moins les primes reçues, soit environ de 4 Milliards d'Euros, et dépasse mes fonds propres d'environ 4 Milliards d'Euros !

Il est vrai que la probabilité de ruine de l'assureur (ou son équivalent la « value *at risk* » en provenance du monde bancaire) est l'alpha et l'oméga de la théorie du risque **si** les conditions d'applications du théorème de la limite centrale sont remplies.

Mais dans d'autres cas, l'information qu'elle apporte est insuffisante, voire insuffisante au point d'induire en erreur ! Elle appelle alors un complément…. même si ce complément n'est pas toujours aussi facile à calculer que dans nos exemples.

Ces deux exemples comparaient en effet un « assureur » à probabilité de ruine petite <u>et</u> à ruine éventuelle de faible ampleur et un « escroc » à probabilité de ruine certes infime <u>mais</u>… à ruine éventuelle considérable. Ce faisant, nous ne visions nullement à dessiner une frontière réglementaire ou scientifique entre assureurs et escrocs.

Plus modestement, nous illustrions la nécessité de ne pas oublier l'environnement réel lorsqu'on utilise un modèle, car un modèle simplifie nécessairement la réalité de manière à permettre la décision. La probabilité de ruine joue pour l'assureur le rôle de l'altimètre pour le pilote : il est certes indispensable à ce dernier de savoir qu'il est à trois mille pieds au dessus du niveau de la mer ; mais il peut avoir besoin d'autres indications, et ce avec un degré d'urgence très différent selon que c'est la Méditerranée ou les Alpes qu'il tente de survoler !

MATHEMATIQUES ET ASSURANCES (I)

L'assureur vend des promesses, qui peuvent être d'un intérêt considérable pour celui qui les a achetées. Le refus ou l'impossibilité pour l'assureur de payer son dû à la date convenue pourrait en effet être lourd de conséquences :

- pour l'assuré dont l'effort d'épargne est annulé (assurance vie) ;
- pour l'assuré qui est laissé sans indemnité à la suite d'un important préjudice (assurance incendie) ;
- pour le tiers victime d'un accident (assurance auto).

En termes actuariels, trois types de problèmes se posent à l'assureur :

1. **En supposant qu'il ait tarifé parfaitement les risques qu'il assure, à la souscription d'un ensemble de contrats, *ex ante*, son résultat est aléatoire. Que peut-on dire de cet aléa ?**

   Quels sont ses risques de perte, voire de ruine ? A-t-il souscrit une réassurance adaptée ? …

   C'est l'objet de la théorie du risque, basée sur le calcul des probabilités, de chiffrer les réponses à ces questions.

   La théorie traditionnelle est basée sur la loi des grands nombres[3]
2. **Le tarif a été établi (par l'assureur lui-même ou par un groupement d'assureurs ou par une autorité publique) en appliquant certaines méthodes à certaines statistiques. Quelles incertitudes en résulte-t-il et quels sont les risques d'erreur les plus importants ?**

   La tarification fait appel à la science statistique dans toutes ses composantes : théorie de l'estimation, décorrélation des variables explicatives,…
3. **« *Ex post* », que déduire du résultat comptable de l'année ?**

   En particulier, le tarif pratiqué est-il de nature à conduire à l'insolvabilité ?

Ces calculs doivent s'inscrire dans le cadre comptable et réglementaire qui traite de ce que l'actuariat appelle « ruine » et la réglementation « insolvabilité » :

Faire des calculs sans connaître ce cadre, c'est comme jouer au bridge sans savoir comment on compte les points.

---

[3] Celle-ci dit qu'en multipliant le nombre d'assurés par 100, l'écart-type du résultat est multiplié par 10, et donc l'incertitude relative sur le résultat divisée par 10 (du moins si les sinistres sont indépendants et qu'ils ont une variance finie. C'est parce qu'ils sont censés comprendre ce que veut dire la phrase précédente que tant de polytechniciens sont recrutés en assurance.

Par exemple, supposons que sur un échantillon de 1 000 personnes 508 disent vouloir voter pour le présidentiable X : le calcul montre que, si l'échantillon est représentatif, 46 à 54 % de la population veut voter pour X, et que pour savoir si X est majoritaire… il suffit d'interroger un échantillon 100 fois plus grand !

MATHEMATIQUES ET ASSURANCES (II)

Dans les mathématiques actuellement utilisées, sinon par les assureurs eux-mêmes, du moins par les mémoires d'actuariat, on peut distinguer :

- l'étude de l'au-delà des frontières de la « loi des grands nombres » ;
- l'importation de concepts en provenance de l'univers de la finance.

Au-delà des frontières de la loi des grands nombres

Deux voies de recherche au-delà de la condition « les sinistres sont indépendants et ont une variance finie », qu'a tenté de refléter le présent article :

L'étude des sinistres qui ne sont pas indépendants

Notamment à l'aide d'un outil mathématique venu d'Outre-Atlantique après avoir pris naissance à Lyon : les copulas ou copules au nom évocateur d'un certain type de liaison….

La théorie des copules cherche par exemple à refléter le fait que deux branches d'assurances des entreprises telles que « dommages aux biens de l'entreprise » et « santé du personnel » sont a priori indépendantes, mais qu'un événement peut toutefois faire s'effondrer l'usine sur les ouvriers.

L'étude de sinistres qui n'ont pas une variance finie est celle des valeurs extrêmes :

La distribution que Pareto avait utilisée pour décrire un revenu national en grande partie accaparée par un petit nombre d'agents économiques s'adapte à la description d'une charge des sinistres occasionnée en grande partie par un petit nombre d'événements. La théorie des valeurs extrêmes cherche par exemple à refléter le fait que si la tempête de l'Europe de l'Ouest de 1990 était considérée par les statisticiens de l'époque comme un événement se produisant tous les 100 ans ou 200 ans, une tempête trois fois plus coûteuse n'en est pas moins survenue 9 ans plus tard.

L'importation depuis l'univers de la finance

L'importation d'outils mathématiques en provenance de cet univers est a priori fructueuse, sans être toutefois aussi dénuée de problèmes que le pensent certains.

Value at risk

L'importation de la *value at risk* chère aux financiers en supplément ou en remplacement de la probabilité de ruine ne pose pas de problème majeur.

Il revient en effet sensiblement au même de dire « il y a une chance sur dix mille que la perte dépasse les 10 M Euros de fonds propres » et « la *value at risk* au seuil de un sur dix mille est de 10 M Euros ».

Fair value

En revanche la recherche d'une norme comptable internationale (dont l'affaire Enron souligne la nécessité) fait grand cas de la *fair value* qui, opposée parfois au coût historique, parfois à une estimation jugée prudente, est un concept attractif.

Mais si la théorie de la *fair value* d'un actif, c'est-à-dire la valeur théorique qu'il aurait sur un marché de qualité, est suffisamment convaincante, la théorie de la *fair value* du passif de l'assureur apparaît encore balbutiante : par exemple tout assureur majore l'espérance des coûts d'une police d'un « chargement » pour tenir compte de la volatilité de ce coût.

Par exemple si on observe la méthode utilisée par les réassureurs on constate que la volatilité est parfois identifiée à la variance et parfois à l'écart-type ; or la variance est additive, ce qui n'est pas le cas de sa racine, l'écart-type : le prix de deux portefeuilles de 100 000 véhicules chacun est-il exactement égal ou sensiblement inférieur au double du prix d'un portefeuille (toutes considérations commerciales et frais de gestion mis à part) ? Il paraît difficile de fonder une valeur comptable théorique des passifs sans savoir comment répondre à cette question.

MATHEMATIQUES ET ASSURANCES (III)

Nous n'oublierons pas de rappeler toute la

microéconomie des marchés imparfaits

qui a trouvé sa source dans l'assurance, en particulier pour ce qui concerne l'asymétrie d'information entre l'acheteur et le vendeur.

Prenons l'exemple d'un assureur qui cherche à faire souscrire des conducteurs en sachant qu'ils ont en moyenne 10 % de chance d'avoir un sinistre. La moitié sont de bons conducteurs (5 % de chances d'avoir un sinistre), la moitié des mauvais (15 % de chances d'avoir un sinistre), l'assureur ne sait les distinguer a priori, alors que les assurés eux-mêmes ont conscience d'être de bons ou de mauvais conducteurs (par exemple parce qu'ils savent s'ils prennent de l'alcool avant de prendre le volant).

L'assureur qui propose un contrat et un tarif unique moyen risque d'avoir moins de bons conducteurs que prévu du fait de l'auto-assurance (ou du fait de la concurrence d'un assureur plus perspicace).

Mais la théorie lui propose parfois une solution, avec un contrat payant les sinistres intégralement et un contrat coûtant 100 euros de moins mais laissant à la charge de l'assuré une franchise de 1 000 Euros par sinistre : les mauvais assurés prendront le premier contrat (la franchise leur coûterait en moyenne 150), les bons assurés le second (car la franchise ne leur coûtera en moyenne que 50).