APPROXIMATIONS COMONOTONES POUR LA VALEUR D'UNE OPTION D'ACHAT EUROPEENNE EN PRESENCE DE DIVIDENDES DISCRETS

Pierre-Alain PATARD [1*]

Jean-Claude AUGROS [2*]

Résumé : Les auteurs appliquent les résultats de la théorie actuarielle des risques comonotones pour construire trois formules fermées qui approchent la valeur d'une option d'achat Européenne en présence de dividendes discrets. Les expressions du Delta et du Gamma associés aux approximations proposées sont alors calculés explicitement. Enfin, des tests numériques montrent que les formules obtenues estiment la valeur, le Delta et le Gamma de l'option, avec une précision accrue par rapport à différentes approximations existantes.**Keywords:** stochastic loss reserving, complementary loss ratio method, ultimate claim, conditional mean square error of prediction, claims development result, claims experience prior accident years.

Mots-Clefs : Dividendes discrets, Black-Scholes, formule fermée, transformée Stop-Loss, somme de variables lognormales dépendantes, risques comonotones, ordre convexe.

Abstract : The authors apply the actuarial results of the comonotonic theory to derive three closed-form approximations for the value of a European call written on a stock paying discrete cash dividends. They show that the Delta and the Gamma associated with each approximation can be calculated in an explicitly form. Numerical tests are performed to show that the new formulas obtained in this paper approximate the option's value, the Delta and the Gamma with a higher degree of accuracy than other existing approximations.

Keywords: Discrete cash dividends, Black-Scholes, closed-formula, Stop-Loss transform, sum of dependent lognormal variables, comonotonic risks, convex order.

---

[1] Pierre-Alain Patard est actuaire de l'Institut de Science Financière et d'Assurances, Université Claude Bernard Lyon 1, 50 Avenue Tony Garnier, 69366 Lyon Cedex 7 et Co-Responsable de la Gestion Quantitative chez CMCIC-Asset Management, 4 rue Gaillon, 75002 Paris. Contact : pierrealain.patard@free.fr

[2] Jean-Claude Augros est Directeur de l'Institut de Science Financière et d'Assurances, Université Claude Bernard Lyon 1, 50 Avenue Tony Garnier, 69366 Lyon Cedex 7 et Professeur de Finance à l'Université Claude Bernard Lyon 1. Contact : jean-claude.augros@adm.univ-lyon1.fr

* Les auteurs remercient Frédéric Planchet (l'éditeur) et le relecteur anonyme pour leurs remarques constructives sur le fond et la forme de ce document. Les idées et les opinions exprimées dans ce document sont celles des auteurs et ne reflètent pas nécessairement la position de CMCIC-Asset Management ou de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

1. INTRODUCTION

Les actions procurent deux types de revenus à leurs détenteurs : la plus-value, matérialisée par la différence positive entre l'achat et la vente de titres, et le dividende qui représente la part des bénéfices (ou des réserves) de l'entreprise versée avec une certaine fréquence (trimestrielle, semestrielle, annuelle ou irrégulière) aux actionnaires. Le dividende est un moyen pour une société de rémunérer et de fidéliser les investisseurs qui ont pris le risque de participer au capital sur le long terme. Lors de la distribution d'un dividende, le cours de bourse de l'action chute d'un montant égal au dividende unitaire mis en paiement par la société, et l'actionnaire est crédité de ce même montant. En conséquence, le versement d'un dividende ne modifie pas la richesse globale de l'actionnaire. En revanche, la valeur d'une option sur action est modifiée par les versements de dividendes au cours de la vie du produit, car son payoff final ne dépend que de l'évolution (ou du niveau) du cours de bourse. Il est donc nécessaire de tenir compte des dividendes dans les modèles de marché utilisés pour évaluer les produits dérivés écrits sur des actions ou des indices boursiers.

Dans la littérature académique, la question des dividendes est généralement résolue en introduisant un taux de dividende déterministe, continu (Merton 1973) ou discret (Björk 2004), dans le terme de dérive du processus de prix du sous-jacent, ce qui revient à considérer que les montants de dividendes futurs sont proportionnels au cours de l'actif. Cette approche, initiée par Merton simultanément aux travaux de Black et Scholes (1973), était à l'origine un artifice calculatoire permettant d'incorporer les dividendes futurs dans le modèle de Black et Scholes tout en préservant l'hypothèse d'une diffusion lognormale des prix futurs du sous-jacent, hypothèse fondamentale sur laquelle repose l'existence des formules analytiques pour la valeur et les paramètres de couverture des options Européennes.

Dans la réalité des marchés financiers, les dates de distribution et les montants de dividendes futurs sont connus plusieurs mois à l'avance, de sorte que les intervenants (traders, market-makers, gérants de fonds) préfèrent raisonner, non pas en termes de taux de dividende, mais plutôt en termes de montants de dividende distribués à des dates discrètes, ce qui revient à introduire des sauts déterministes dans le processus de prix, chaque saut représentant une distribution de dividende. Supposons que l'actif détache m dividendes (notés $D_1, \ldots, D_m$) aux dates discrètes $t_1, \ldots, t_m$ dans la période $]0, T[$. Une méthode naturelle pour incorporer cette chronique de dividendes discrets dans l'évolution des cours consiste à supposer que le processus de prix chute d'un montant égal au dividende mis en paiement aux dates t_i et qu'il suit un mouvement Brownien géométrique entre deux dividendes consécutifs. Autrement dit, les prix futurs de l'actif évoluent sous la probabilité risque-neutre Q selon l'équation différentielle stochastique suivante (Frishling 2002) :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t - \sum_{i=1}^{m} D_i \delta\left(t - t_i\right), \quad S_0 > 0, \tag{1.1}$$

où $r \geq 0$ et $\sigma > 0$ désignent respectivement le taux sans risque dans l'économie du produit et la volatilité du sous-jacent (supposés constants), (W_t) est un mouvement Brownien standard sous la mesure Q et $\delta(.)$ est la mesure de Dirac en 0. Ce modèle donne une représentation réaliste du comportement des prix ; par contre, il ne permet pas d'évaluer facilement les options vanilles de type Européen. En effet, on peut démontrer que le cours de l'actif à la date d'échéance de l'option, i.e. S_T, est une combinaison linéaire de variables aléatoires lognormales. La loi lognormale ne possédant aucune propriété d'additivité, la distribution de S_T n'admet pas de forme explicite et, dans ces conditions, on ne sait pas résoudre analytiquement la formule générale d'évaluation d'un call Européen d'échéance T et de strike K :

$$C = \mathrm{e}^{-rT}\, \mathrm{E}(S_T - K)^+, \quad (x)^+ := \max(x, 0), \tag{1.2}$$

où $\mathrm{E}(.)$ désigne l'opérateur espérance sous la mesure risque-neutre Q. Dans ce cas, la valeur de l'option doit être estimée par une méthode d'intégration numérique telle que la méthode de Monte Carlo, qui nécessite un temps de calcul d'autant plus important que l'on souhaite obtenir un résultat précis. Malgré cet inconvénient, le modèle défini par (1.1) reste un choix privilégié pour les praticiens. C'est pourquoi les spécialistes ont développé différentes formules pour approcher la valeur des options vanilles sans devoir implémenter une résolution numérique lourde.

La plupart des approximations proposées dans la littérature consistent à appliquer la formule de Black et Scholes (1973) et Merton (1973) pour les options Européennes en l'absence de dividende, mais en modifiant certains paramètres en fonction de la chronique des dividendes futurs. Black (1975, p. 41) suggère de corriger le cours initial S_0 d'un montant égal à la valeur actuelle des dividendes futurs. Cette approche a l'avantage d'être simple, mais elle sous-estime les prix des calls Européens de manière systématique et conduit à des erreurs significatives (Frishling 2002, Haug 2007). Dans une série de publications datant du début des années 2000, certains auteurs ont envisagé la possibilité d'améliorer l'approche de Black jugée insatisfaisante. Beneder et Vorst (2001) puis Bos, Gairat et Shepeleva (2003) combinent l'ajustement proposé par Black avec une correction du paramètre de volatilité σ, tandis que Bos et Vandermark (2002) corrigent simultanément le cours initial S_0 et le prix d'exercice K par des sommes pondérées des dividendes futurs actualisés. Dans l'ensemble, les formules obtenues par ces différents procédés donnent des résultats plus précis que l'ajustement envisagé par Black, mais étant donné qu'elles reposent essentiellement sur des considérations empiriques, elles peuvent conduire à des prix arbitrables ou trop éloignés des prix observés et ne permettent pas de contrôler l'erreur commise. Partant de cette observation, Haug, Haug et Lewis (2003) ont proposé un cadre d'analyse rigoureux pour le traitement des options en présence de dividendes discrets. Leur approche repose sur une modélisation consistante de la dynamique des cours qui intègre la politique de dividende de la firme. Cependant, elle ne permet pas d'obtenir des formules analytiques fermées pour les options Européennes et les auteurs donnent un algorithme permettant d'approcher la valeur cherchée par des intégrations numériques successives. Ce point restreint, selon nous, la portée opérationnelle du modèle.

Cet article s'inscrit dans un contexte où les approximations existantes ne constituent que des solutions partiellement satisfaisantes du traitement des options Européennes en présence de dividendes discrets et notre objectif est d'obtenir, par des raisonnements mathématiques rigoureux, une formule fermée qui permette (i) d'approcher la valeur de l'option avec une précision accrue par rapport aux méthodes discutées auparavant et (ii) de déterminer les sensibilités de l'option par rapport au sous-jacent (i.e. le Delta et le Gamma) sous une forme explicite, ce dernier point n'étant pratiquement jamais abordé par les concepteurs des modèles existants. Nous supposons que la dynamique du sous-jacent est définie par (1.1) et, sous cette hypothèse, nous montrons que le problème initial consistant à résoudre l'équation (1.2) revient à calculer la transformée stop-loss d'une somme de variables aléatoires lognormales dépendantes. Nous pouvons alors appliquer les résultats de la théorie actuarielle des risques comonotones pour établir des bornes déterministes qui encadrent la valeur de l'option (voir Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas et Vyncke 2002a, 2002b ou Vanduffel 2005) puis, en combinant ces bornes selon un procédé suggéré par Vyncke, Goovaerts et Dhaene (2004), nous obtenons une nouvelle approximation particulièrement précise.

Notre travail est organisé selon le schéma suivant : dans la section 2, nous rappelons quelques résultats de la théorie des risques comonotones nécessaires pour mener notre étude, puis nous les utilisons pour approcher les transformées stop-loss d'une somme de variables aléatoires lognormales dépendantes. Dans la section 3, nous transformons le problème initial pour pouvoir appliquer les formules de la section précédente et obtenir ainsi trois approximations analytiques pour la valeur du call Européen. Nous démontrons par ailleurs des formules fermées pour le Delta et le Gamma associés à chacune des approximations proposées. Dans la section 4, nous présentons succinctement quatre approximations proposées dans la littérature pour le prix d'un call Européen en présence de dividendes discrets et nous démontrons les formules analytiques du Delta et du Gamma dans ces approximations. Dans la section 5, nous testons numériquement les approximations construites dans ce travail et nous comparons leur précision avec celle des approximations classiques. La conclusion de l'article est donnée dans la section 6.

2. ENCADREMENTS COMONOTONES D’UNE SOMME DE VARIABLES LOGNORMALES DEPENDANTES

Dans cette section, nous rappelons comment approcher la distribution d’une somme de variables lognormales dépendantes par la théorie des risques comonotones.

On considère une somme X de variables aléatoires lognormales dépendantes :

$$X := \sum_{i=1}^{s} X_i = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{Y_i}, \tag{1.3}$$

où $(Y_1, \ldots, Y_s)$ est un vecteur gaussien multivarié. On ne connaît pas de formule analytique pour la fonction de répartition d'une somme de variable lognormales et il n'est pas possible d'établir une formule fermée pour la quantité

$$P_X(d) := \mathrm{E}(d - X)^+ = \int_0^d F_X(x)dx, \tag{1.4}$$

appelée transformée (ou prime) stop-loss de type put de X au seuil $d \in \mathbb{R}_+^*$. Les méthodes de simulation numérique type Monte Carlo permettent d'approcher $P_X(d)$ avec une précision arbitraire, mais les temps de calcul deviennent rédhibitoires lorsque le nombre de simulations augmente. Pour cette raison, la méthode d'identification des moments, plus rapide, est très utilisée en pratique : le principe est d'approcher la distribution de X par une loi lognormale (Dufresne 1990) ou une loi inverse-gamma (Milevsky 1997) dont les deux premiers moments coïncident avec ceux de X. Plus récemment, Kaas *et al.* (2000) puis Dhaene *et al.* (2002a, 2002b) ont proposé une méthode générale pour encadrer (au sens de l'ordre convexe) une somme de variables aléatoires quelconques par des sommes comonotones pour lesquelles on sait déterminer facilement les transformées stop-loss. Lorsque les composantes de la somme considérée sont lognormales, cette approche s'avère nettement plus précise que la méthode d'identification des moments (cf. Vanduffel, Dhaene, Goovaerts et Kaas 2003 ou Vanduffel, Hoedemakers et Dhaene 2005). C'est cette solution que nous avons choisi d'exploiter dans ce travail.

2.1 Approximations comonotones : rappels

Le concept d'ordre convexe est l'élément central de la théorie des risques comonotones : on dit que deux variables aléatoires réelles *X* et *Y* sont ordonnées au sens de l'ordre convexe et l'on note $X \leq_{cx} Y$, si $\mathrm{E}(X-d)^{+} \leq \mathrm{E}(Y-d)^{+}$ et $\mathrm{E}(d-X)^{+} \leq \mathrm{E}(d-Y)^{+}$ pour tout $d \in \mathbb{R}$. Cela signifie que *X* présente des queues de distribution moins épaisses que *Y*, i.e. *X* est moins "risquée" que *Y*. On peut démontrer que $X \leq_{cx} Y$ implique toujours $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$.

Considérons la variable $X = X_1 + \cdots + X_s$ où les X_i sont éventuellement dépendantes. Alors, pour toute variable $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et toute variable Z indépendante de U, on a l'encadrement suivant :

$$X^l := \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(X_i \mid Z) \leq_{cx} X \leq_{cx} \sum_{i=1}^{s} F_i^{-1}(U) =: X^u, \qquad (1.5)$$

où $\mathrm{E}(\cdot \mid Z)$ désigne l'opérateur "espérance conditionnelle sachant Z" et F_i^{-1} est la fonction quantile de X_i (i.e. l'inverse de sa fonction de répartition F_i). La relation d'ordre convexe impliquant $\mathrm{E}(d-X^l)^{+} \leq \mathrm{E}(d-X)^{+} \leq \mathrm{E}(d-X^u)^{+}$, il suffit de calculer la prime stop-loss de chaque borne, pour obtenir un encadrement de la prime stop-loss de X. Par construction, X^u est une somme comonotone, donc $\mathrm{E}(d-X^u)^{+}$ s'évalue facilement[1]. Par contre, X^l n'est pas nécessairement une somme comonotone mais, dans certains cas, on peut identifier des variables Z qui permettent d'obtenir la propriété de comonotonie pour cette borne et l'on peut alors évaluer simplement $\mathrm{E}(d-X^l)^{+}$.

[1] Cf. Annexe A pour une revue des propriétés des sommes comonotones utilisées dans ce travail.

2.2 Application aux sommes de variables lognormales

Revenons au cas où la somme X est définie par (2.1). On suppose que les composantes de X sont positivement corrélées ; on note $\mu_i = \mathrm{E}(Y_i)$, $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \geq 0$ et $\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = \mathrm{Var}(Y_i)$. Pour une démonstration et une étude approfondie des formules et résultats énoncés dans la suite, nous invitons le lecteur à consulter Kaas *et al.* (2000), Vanduffel, Hoedemakers et Dhaene (2005) ou Vanduffel *et al.* (2007).

Borne supérieure

En utilisant le fait que les X_i sont lognormales, on obtient la formule suivante pour la borne comonotone supérieure :

$$X^u = \sum_{i=1}^{s} F_i^{-1}(U) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(U)}, \tag{1.6}$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard. La prime stop-loss de type put de X^u, notée P_u, est obtenue en appliquant la formule (A.3) :

$$P_u(d) := \mathrm{E}(d - X^u)^+ = d\, F_u(d) - \sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\, \Phi\Big(\Phi^{-1}(F_u(d)) - \sigma_i\Big), \tag{1.7}$$

où F_u, la fonction de répartition de X^u, est solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(F_u(x))} = x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.8}$$

Cette dernière formule résultant d'une application directe de (A.2).

Borne inférieure

Choisissons Z comme une combinaison linéaire des Y_i, i.e. $Z = \sum_{i=1}^{s} \beta_i Y_i$. Sous cette hypothèse, la borne inférieure s'écrit :

$$X^l = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{Y_i} \mid Z) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \frac{1}{2}(1-\eta_i^2)\sigma_i^2 + \eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(V)}, \tag{1.9}$$

où l'on a posé $V := \Phi^{-1}((Z - \mu_Z) / \sigma_Z) \sim \mathcal{U}(0,1)$ et

$$\eta_i := \mathrm{Cor}(Y_i, Z) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_i, Z)}{\sigma_i \sigma_Z} = \frac{\sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_Z}. \tag{1.10}$$

Vanduffel *et al.* (2005) ou Vanduffel *et al.* (2007) démontrent que les coefficients β_i optimaux sont ceux qui maximisent la variance de X^l ; ils sont définis par $\beta_i = \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i^2/2}$.

Comme $\beta_i \geq 0$ (par construction) et $\sigma_{ij} \geq 0$ (par hypothèse), on vérifie immédiatement que la formule (2.8) implique $\eta_i \geq 0$. Alors les fonctions $v \to \mathrm{e}^{\mu_i + \frac{1}{2}(1-\eta_i^2)\sigma_i^2 + \eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(v)}$ sont les quantiles de variables lognormales ; i.e. X^l est une somme comonotone de variables lognormales. Pour obtenir sa transformées stop-loss de type put P_l et sa fonction de répartition F_l, il suffit de faire $\mu_i \to \mu_i + \frac{1}{2}(1-\eta_i^2)\sigma_i^2$ et $\sigma_i \to \eta_i \sigma_i$ dans les équations (2.5) et (2.6) :

$$P_l(d) := \mathrm{E}(d - X^l)^+ = d\, F_l(d) - \sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \sigma_i^2/2}\, \Phi\Big(\Phi^{-1}(F_l(d)) - \eta_i \sigma_i\Big), \quad (1.11)$$

et F_l est définie implicitement sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\sum_{i=1}^{s} \mathrm{e}^{\mu_i + \frac{1}{2}(1-\eta_i^2)\sigma_i^2 + \eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(F_l(x))} = x. \quad (1.12)$$

3. APPROXIMATIONS COMONOTONES DU PRIX D'UN CALL EUROPEEN

Dans cette section, nous appliquons les résultats du paragraphe 2.2 pour approcher la valeur d'un call Européen lorsque le sous-jacent suit la dynamique (1.1).

3.1 Le prix du call comme la tranformée stop-loss de type put d'une somme de variables lognormales, corrélées positivement

Lorsque la dynamique du sous-jacent est définie par (1.1), Frishling (2002) démontre que le cours de l'actif à l'échéance de l'option est une combinaison linéaire de variables lognormales :

$$S_T = S_0 \mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma W_T} - \sum_{i=1}^{m} D_i \mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)(T-t_i) + \sigma(W_T - W_i)} \quad (1.13)$$

où W_i est une notation abrégée pour W_{t_i}. Le payoff final du call actualisé s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-rT}(S_T - K)^+ &= \left(S_0\, \mathrm{e}^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2} - \sum_{i=1}^{m} D_i\, \mathrm{e}^{\sigma(W_T - W_i) - rt_i - \sigma^2 (T - t_i)/2} - \mathrm{e}^{-rT}\, K \right)^+ \\ &= \mathrm{e}^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2} \left(S_0 - \sum_{i=1}^{m} D_i\, \mathrm{e}^{(\sigma^2/2 - r)t_i - \sigma W_i} - K\, \mathrm{e}^{(\sigma^2/2 - r)T - \sigma W_T} \right)^+ \\ &= \xi_T (S_0 - X_T)^+, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\xi_T := \mathrm{e}^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2}, \qquad X_T := \sum_{i=1}^{m} D_i\, \mathrm{e}^{(\sigma^2/2 - r)t_i - \sigma W_i} + K\, \mathrm{e}^{(\sigma^2/2 - r)T - \sigma W_T}. \quad (1.14)$$

Avec ces notations, la valeur du call devient :

$$C = \mathrm{E}[\xi_T (S_0 - X_T)^+] \quad (1.15)$$

La variable aléatoire ξ_T est strictement positive et elle vérifie $\mathrm{E}(\xi_T) = 1$; c'est donc la densité de Radon-Nikodym d'une mesure $\tilde{Q}$ équivalente à Q et l'on peut écrire :

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} = \xi_T = \mathrm{e}^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2}. \quad (1.16)$$

Dans ces conditions on a :

$$C = \mathrm{E}\left[\frac{d\tilde{Q}}{dQ} (S_0 - X_T)^+ \right] = \tilde{\mathrm{E}}(S_0 - X_T)^+ := P_{X_T}(S_0). \quad (1.17)$$

La valeur du call Européen C s'exprime donc comme la transformée stop-loss de type put au seuil S_0 de la variable X_T sous la nouvelle mesure $\tilde{Q}$.

D'après le théorème de Girsanov, le processus de terme général $\tilde{W}_t := W_t - \sigma t$ est un $\tilde{Q}$-mouvement Brownien standard. Pour obtenir la loi de X_T sous $\tilde{Q}$, il suffit de faire apparaître $\tilde{W}$ dans (1.14) :

$$X_T = \sum_{i=1}^{m} D_i\, \mathrm{e}^{-(r + \sigma^2/2)t_i - \sigma \tilde{W}_i} + K\, \mathrm{e}^{-(r + \sigma^2/2)T - \sigma \tilde{W}_T}. \quad (1.18)$$

La variable alternative X_T est donc de la forme $\sum_{i=1}^{m+1} \mathrm{e}^{Y_i}$ où $(Y_1, \ldots, Y_{m+1})$ est un vecteur gaussien (sous $\tilde{Q}$) d'espérances :

$$\mu_i := \begin{cases} \ln(D_i) - (r + \sigma^2 / 2)t_i & \text{si} \quad 1 \le i \le m \\ \ln(K) - (r + \sigma^2 / 2)T & \text{si} \quad i = m + 1 \end{cases}, \tag{1.19}$$

et de covariances définies par la relation :

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \min(t_i, t_j). \tag{1.20}$$

Nous avons donc démontré que la valeur du call est la transformée stop-loss de la somme de $m+1$ variables lognormales dépendantes et corrélées positivement, ce qui permet d'appliquer les résultats du paragraphe 2.2.

3.2 Construction des bornes comonotones

On peut construire deux sommes comonotones notées X_T^l et X_T^u, telles que :

$$X_T^l \le_{cx} X_T \le_{cx} X_T^u \quad \Rightarrow \quad P_T^l(d) := \mathrm{E}(d - X_T^l)^+ \le C \le \mathrm{E}(d - X_T^u)^+ =: P_T^u(d).$$

Borne comonotone supérieure : approximation CUB[1]

La borne supérieure est obtenue en injectant les paramètres de notre problème dans (2.4) :

$$X_T^u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mathrm{e}^{\sigma_i \Phi^{-1}(U) - \sigma_i^2/2}, \quad U \sim \mathcal{U}(0,1) \tag{1.21}$$

Les paramètres α_i et σ_i sont définis par :

$$\alpha_i = \begin{cases} D_i \, \mathrm{e}^{-rt_i} & \text{si} \quad 1 \le i \le m \\ K \, \mathrm{e}^{-rT} & \text{si} \quad i = m + 1 \end{cases}, \quad \sigma_i = \begin{cases} \sigma\sqrt{t_i} & \text{si} \quad 1 \le i \le m \\ \sigma\sqrt{T} & \text{si} \quad i = m + 1 \end{cases}. \tag{1.22}$$

La fonction de répartition associée, notée F_T^u, est donnée par l'équation (2.6) :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, \mathrm{e}^{\sigma_i \Phi^{-1}(F_T^u(x)) - \sigma_i^2/2} = x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.23}$$

La transformée stop-loss de X_T^u est donnée par (2.5) :

$$P_T^u(S_0) = S_0 \, F_T^u(S_0) - \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, \Phi(\Phi^{-1}(F_T^u(S_0)) - \sigma_i). \tag{1.24}$$

Borne comonotone inférieure : approximation CLB[2]

La borne inférieure s'obtient à partir de (2.7) :

---

[1] CUB est l'abbréviation de Comonotonic Upper Bound.
[2] CLB est l'abbréviation de Comonotonic Lower Bound.

$$X_T^l = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, e^{\eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(V) - \eta_i^2 \sigma_i^2 / 2}, \quad V \sim \mathcal{U}(0,1). \tag{1.25}$$

Les coefficients η_i sont obtenus à partir de la formule (2.8) :

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \min\left(t_i, t_j\right)}{\sqrt{t_i \sum_{j,k=1}^{m+1} \alpha_j \alpha_k \min\left(t_j, t_k\right)}}, \quad 1 \le i \le m+1.$$

La fonction de répartition F_T^l est donnée par (2.10) :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, e^{\eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(F_T^l(x)) - \eta_i^2 \sigma_i^2 / 2} = x, \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.26}$$

Enfin, X_T^l étant comonotone, la transformée stop-loss de X_T^l est donnée par (2.9) :

$$P_T^l(S_0) = S_0 \, F_T^l(S_0) - \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, \Phi(\Phi^{-1}(P_T^l(S_0)) - \eta_i \sigma_i). \tag{1.27}$$

Notons enfin que, par définition de la relation $\le_{cx}$, les variables X_T, X_T^l et X_T^u ont la même espérance, donnée par la formule (cf. annexe B pour une démonstration) :

$$\tilde{\mathrm{E}}(X_T) = \tilde{\mathrm{E}}(X_T^u) = \tilde{\mathrm{E}}(X_T^l) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \tag{1.28}$$

3.3 Une nouvelle approximation basée sur les moments : approximation MBA[1]

Nous allons à présent construire une nouvelle approximation de la loi de X_T en nous appuyant sur les raisonnements de Vyncke *et al.* (2004). L'idée est de définir une nouvelle variable aléatoire X_T^m de fonction de répartition :

$$F_T^m := \lambda F_T^l + (1-\lambda) F_T^u, \quad 0 \le \lambda \le 1. \tag{1.29}$$

Par construction, la variable ainsi construite vérifie :

$$\mathrm{E}(X_T^m) = \mathrm{E}(X_T), \quad \mathrm{Var}(X_T^m) = \lambda \mathrm{Var}(X_T^l) + (1-\lambda)\mathrm{Var}(X_T^u). \tag{1.30}$$

L'approximation optimale est obtenue en imposant l'égalité des moments d'ordre 2, i.e. $\mathrm{Var}(X_T^m) = \mathrm{Var}(X_T)$. D'après (3.17), l'égalité est réalisée lorsque :

[1] MBA est l'abbréviation de Moment Based Approximation.

$$\lambda = \frac{\mathrm{Var}(X_T) - \mathrm{Var}(X_T^l)}{\mathrm{Var}(X_T^u) - \mathrm{Var}(X_T^l)} := \lambda_T. \tag{1.31}$$

Notons que $0 \leq \lambda_T \leq 1$ car la relation $\leq_{cx}$ implique $\mathrm{Var}(X_T^l) \leq \mathrm{Var}(X_T) \leq \mathrm{Var}(X_T^u)$.

Par ailleurs, les variances des variables X_T, X_T^l et X_T^u sont données par :

$$\mathrm{Var}(X_T) = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_i\alpha_j(\mathrm{e}^{\sigma_{ij}} - 1), \tag{1.32}$$

$$\mathrm{Var}(X_T^l) = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_i\alpha_j(\mathrm{e}^{\sigma_i\sigma_j\eta_i\eta_j} - 1), \tag{1.33}$$

$$\mathrm{Var}(X_T^u) = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_i\alpha_j(\mathrm{e}^{\sigma_i\sigma_j} - 1). \tag{1.34}$$

Une démonstration succincte de ces formules est donnée à l'annexe B.

Nous supposons dorénavant que λ est défini par (3.18). Par définition de X_T^m, la transformée stop-loss de type put de cette nouvelle variable au seuil S_0 s'écrit :

$$P_T^m(S_0) := \mathrm{E}(S_0 - X_T^m)^+ = \lambda_T P_T^l(S_0) + (1 - \lambda_T)P_T^u(S_0) \tag{1.35}$$

Une conséquence de cette égalité est l'encadrement $P_T^l(S_0) \leq P_T^m(S_0) \leq P_T^u(S_0)$, ce qui implique $\left|C - P_T^m(S_0)\right| \leq P_T^u(S_0) - P_T^l(S_0)$. Cela prouve que $P_T^m(S_0)$ est une nouvelle approximation du prix de call cherché. De plus, X_T^m a été construite de manière à ce que ses deux premiers moments coïncident avec ceux de la variable originale X_T. On peut donc supposer que $P_T^m(S_0)$ constitue une bonne approximation du prix de l'option.

3.4 Calcul du Delta et du Gamma

Les approximations proposées dans ce travail sont de la forme suivante $C \simeq P_T^*$, où * désigne indifféremment "l", "u" ou "m". On peut donc obtenir une forme générale pour le Delta et le Gamma de l'option en remplaçant "l", "u" et "m" par * :

$$\Delta_T^* := \partial_{S_0} C \simeq \partial_{S_0} P_T^*(S_0), \quad \Gamma_T^* := \partial_{S_0}^2 C \simeq \partial_{S_0}^2 P_T^*(S_0),$$

où ∂_{S_0} et $\partial^2_{S_0}$ désignent les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à S_0.

Pour calculer ces dérivées, nous écrivons $P_T^*(S_0)$ en utilisant la formule (2.2) :

$$P_T^*(S_0) = \int_0^{S_0} F_T^*(z)dz,$$

où F_T^* est la fonction de répartition de la variable approchante X_T^*.

Par construction, les variables X_T^l, X_T^u et X_T^m ne dépendent pas du cours à l'origine S_0. Alors, la fonction F_T^* est indépendante de S_0 et l'on peut dériver l'intégrale précédente par rapport à sa borne supérieure :

$$\Delta_T^* = \partial_{S_0} P_T^*(S_0) = F_T^*(S_0), \quad \Gamma_T^* = \partial^2_{S_0} P_T^*(S_0) = f_T^*(S_0),$$

où f_T^* est la densité de probabilité de la variable X_T^*.

Le calcul du Delta associé à chaque approximation ne comporte aucune difficulté, car les équations (1.23), (1.26) et (1.29) permettent d'évaluer directement les fonctions de répartition des variables X_T^l, X_T^u et X_T^m.

Nous allons maintenant déterminer la densité de probabilité de f_T^u (donc le Gamma) de la borne supérieure X_T^u. En dérivant les deux membres de l'équation (1.23) en $x = S_0$ il vient :

$$1 = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\alpha_i \sigma_i \, e^{\sigma_i \Phi^{-1}(F_T^u(S_0)) - \sigma_i^2/2} f_T^u(S_0)}{\Phi'(\Phi^{-1}(F_T^u(S_0)))}.$$

En isolant le terme $f_T^u(S_0)$ et en remplaçant Φ' par φ (la densité de la loi normale standard) on obtient :

$$f_T^u(S_0) = \frac{\varphi \circ \Phi^{-1}(F_T^u(S_0))}{\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \sigma_i \, e^{\sigma_i \Phi^{-1}(F_T^u(S_0)) - \sigma_i^2/2}} = \Gamma_T^u(S_0). \tag{1.36}$$

Un raisonnement analogue nous permet de déterminer $\Gamma_T^l(S_0)$ à partir de (3.13) :

$$\Gamma_T^l(S_0) = \frac{\varphi \circ \Phi^{-1}(F_T^l(S_0))}{\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \eta_i \sigma_i \, e^{\eta_i \sigma_i \Phi^{-1}(F_T^l(S_0)) - \eta_i^2 \sigma_i^2/2}} = f_T^l(S_0). \tag{1.37}$$

Enfin, $\Gamma_T^m(S_0)$ est obtenu en dérivant (3.15) membre à membre :

$$\Gamma_T^m(S_0) = \lambda_T \Gamma_T^l(S_0) + (1 - \lambda_T)\Gamma_T^u(S_0). \tag{1.38}$$

Notons que, dans le cas où les dividendes sont tous nuls (i.e. $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$), les formules établies pour la valeur et pour les Grecques sont identiques aux formules (B.3) pour le modèle de Black et Scholes en l'absence de dividende.

Les trois approximations comonotones construites dans ce travail présentent un avantage calculatoire par rapport aux méthodes présentées dans l'annexe A. En effet, nous avons non seulement obtenu des formules théoriques pour estimer la valeur de l'option, mais nous avons aussi montré que ces formules permettaient de calculer le Delta et le Gamma sous une forme explicite.

4. APPROXIMATIONS CLASSIQUES POUR LE PRIX D'UN CALL EUROPEEN EN PRESENCE DE DIVIDENDES DISCRETS

Nous présentons à présent quatre approximations proposées dans la littérature et fréquemment utilisées par les praticiens lorsqu'ils souhaitent évaluer un call Européen en présence de dividendes discrets. Ces approximations reposent toutes sur le même principe : l'idée est d'appliquer la formule de Black et Scholes (1973) pour une option Européenne sur un sous-jacent qui ne détache pas de dividende, mais en modifiant certains paramètres en fonction de la chronique de dividendes futurs. On distingue deux familles d'approximations :

- les approximations reposant sur un ajustement simultané du cours spot et du strike (Black 1975 ; Bos et Vandermark 2002),
- les approximations reposant sur un ajustement simultané du cours spot et de la volatilité (Beneder et Vorst 2001 ; Bos, Gairat et Shepeleva 2003).

Les coefficients ajustés sont obtenus, soit à partir de considérations empiriques, soit à partir de raisonnements mathématiques. Pour chaque famille d'approximation, nous énonçons les formules générales permettant de calculer le Delta et le Gamma de l'option en fonction des dérivées du prix Black-Scholes et des dérivées des paramètres modifiés du modèle.

4.1 Approximations basées sur un ajustement du cours spot et du strike

Les approximations présentées dans ce paragraphe sont de la forme :

$$C \simeq C_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \sigma, \tilde{K}, r, T) \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_0 := S_0 - \frown{D} \ \text{ et } \ \tilde{K} := K + \breve{D}. \tag{4.1}$$

Les quantités $\frown{D}$ et $\breve{D}$ dépendent uniquement de la chronique de dividendes et du taux d'intérêt. De plus, elles vérifient $\frown{D} + \breve{D} = \sum_{i=1}^{m} D_i \mathrm{e}^{-rt_i}$, i.e. la somme des deux termes correcteurs coïncide avec la valeur actualisée des dividendes futurs. Le Delta et le Gamma de l'option admettent l'expression suivante :

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S_0} = \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \sigma, \tilde{K}, r, T), \quad \Gamma := \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \Gamma_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \sigma, \tilde{K}, r, T), \quad (4.2)$$

où Δ_{BS} et Γ_{BS} désignent le Delta et le Gamma d'un call dans le modèle de Black-Scholes en l'absence de dividende (cf. annexe C pour une démonstration).

Approximation "B75" (Black, 1975)

Black (1975) propose de corriger le cours du sous-jacent de la valeur actuelle des dividendes futurs attendus et de laisser le strike inchangé, ce qui revient à choisir $\widehat{D} = \sum_{i=1}^{m} D_i \mathrm{e}^{-rt_i}$ et $\breve{D} = 0$. Cette approximation sous-estime les prix des calls de manière systématique.

Approximation "BoV02" (Bos et Vandermark, 2002)

Bos et Vandermark (2002) posent :

$$\widehat{D} = \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i}{T} D_i \, \mathrm{e}^{-rt_i}, \quad \breve{D} = \sum_{i=1}^{m} \frac{T - t_i}{T} D_i \, \mathrm{e}^{-rt_i}. \quad (4.3)$$

Par construction, $\widehat{D}$ donne un poids plus important aux dividendes proches de la maturité T de l'option, tandis que $\breve{D}$ surpondère les dividendes proches de la date d'évaluation. Cette approximation réduit les biais d'évaluation de manière significative par rapport au modèle de Black (1975). Toutefois, lorsque les dividendes deviennent arbitrairement élevés elle peut conduire à des erreurs non négligeables.

4.2 Approximations basées sur un ajustement du cours spot et de la volatilité

L'autre famille d'approximations considérée dans ce travail consiste à effectuer l'ajustement B75 sur le cours spot et à modifier simultanément le paramètre de volatilité du sous-jacent :

$$C \simeq C_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T), \quad (4.4)$$

où $\tilde{S}_0 := S_0 - \sum_{i=1}^{m} D_i \mathrm{e}^{-rt_i}$ et $\tilde{\sigma}$ est une fonction de S_0, de la chronique de dividendes et des autres paramètres du problème. Le Delta de l'option est donné par la formule :

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S_0} = \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} v_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T). \quad (4.5)$$

Le Gamma de l'option admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma := \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} &= \Gamma_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} \upsilon_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) \\ &+ 2\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} \kappa_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2 \vartheta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Les quantités υ_{BS}, κ_{BS} et ϑ_{BS} désignent respectivement le Véga, le Vanna et le Volga d'un call Européen dans le modèle de Black-Scholes en l'absence de dividende et sont données par les formules (B.4), (B.5) et (B.6). Une démonstration des relations (4.5) et (4.6) est donnée à l'annexe C.

Approximation "BV01" (Beneder et Vorst, 2001)

Beneder et Vorst (2001) proposent d'utiliser la volatilité modifiée suivante :

$$\tilde{\sigma} := \sigma \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{t_i - t_{i-1}}{T} \left(\frac{S_0}{S_0 - \bar{D}_i} \right)^2 + \frac{T - t_m}{T} \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \bar{D}_i := \sum_{k=1}^{m} D_k \mathrm{e}^{-rt_k}. \tag{4.7}$$

Cette approche s'avère plus performante que l'approximation B75. Cependant, la formule (4.7) est basée sur des considérations empiriques, de sorte qu'il n'est pas possible de garantir la précision des résultats dans toutes les situations que l'on peut rencontrer. En dérivant deux fois (4.7) par rapport à S_0, on obtient tous calculs faits :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} = \frac{-\sigma^2}{\tilde{\sigma}} \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i - t_{i-1}}{T} \frac{S_0 \bar{D}_i}{(S_0 - \bar{D}_i)^3}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \left(\sigma^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{t_i - t_{i-1}}{T} \frac{\bar{D}_i (2S_0 + \bar{D}_i)}{(S_0 - \bar{D}_i)^4} - \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} \right)^2 \right) \tag{4.8}$$

Approximation "BGS03" (Bos, Gairat et Shepeleva, 2003)

En appliquant la méthode des perturbations, Bos, Gairat et Shepeleva (2003) obtiennent l'expression suivante pour la variance modifiée :

$$\tilde{\sigma}^2 := \sigma^2 + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2T}}\, \Psi(s, a, b) \tag{4.9}$$

où $\Psi(s, a, b)$ est définie par la relation (B.7) avec

$$s := \ln(\tilde{S}_0), \quad a := \frac{s - \ln(K) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \quad b := a + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \tag{4.10}$$

Selon Haug *et al.* (2003), cette formule donne des résultats précis dans la plupart des situations rencontrées. Par contre, elle peut conduire à des erreurs significatives lorsque les dividendes sont trop nombreux ou trop élevés. Les dérivées première et seconde de la volatilité sont données par :

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial S_0} = \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\Psi'_{S_0}, \quad \frac{\partial^2\tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} = \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}^2}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\left[\Psi''_{S_0} - \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}(\Psi'_{S_0})^2\right], \tag{4.11}$$

Les notations Ψ'_{S_0} et Ψ''_{S_0} désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de Ψ par rapport à S_0. Une démonstration de la formule (4.11) est donnée à l'annexe C.

5. APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans cette section, nous procédons à des tests numériques afin de comparer les performances des trois approximations comonotones proposées dans cet article (CUB, CLB et MBA) avec celles des quatre approximations de la littérature présentées dans la section précédente (B75, BoV02, BV01 et BGS03).

Le principe des tests est le suivant. Nous construisons un jeu de $N = 45$ calls Européens de paramètres différents qui reflètent les configurations de marché envisageables. Pour chaque option de l'échantillon (indicée par $i = 1, \dots, N$),

- nous estimons par la méthode de Quasi-Monte Carlo (notée QMC) une valeur étalon du prix (C_i^{QMC}), du Delta (Δ_i^{QMC}) et du Gamma (Γ_i^{QMC}),
- nous calculons avec chacune des sept approximations envisagées une valeur approchée du prix (C_i^{Approx}), du Delta (Δ_i^{Approx}) et du Gamma (Γ_i^{Approx}).

Pour chaque méthode d'approximation et chaque quantité étudiée (prix, Delta ou Gamma), nous pouvons alors déterminer la moyenne des erreurs relatives prises en valeur absolue :

$$\text{Err}(X, \text{Approx}) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{X_i^{\text{Approx}}}{X_i^{\text{QMC}}} - 1\right| \quad \text{avec} \quad X = C, \Delta \text{ ou } \Gamma. \tag{5.1}$$

En comparant les quantités précédentes pour chaque approximation, nous serons en mesure : (i) de quantifier l'ordre de grandeur de l'erreur commise avec chaque méthode et (ii) d'identifier l'approximation qu'il est préférable d'utiliser pour calculer le prix et les Grecques (Delta et Gamma) d'une option Européenne en présence de dividendes discrets.

5.1 Construction du jeu de données

On prend $S_0 = 100$ pour l'ensemble des tests et l'on considère 3 calls Européens de strikes respectifs $K = 50$ (call dans la monnaie), $K = 100$ (call à la monnaie) et $K = 150$ (call en dehors de la monnaie). Ces données étant fixées une fois pour toute, on construit alors 5 jeux d'options, en faisant varier l'un des 5 paramètres suivants (volatilité, taux sans risque, montants de dividendes, dates et nombre de dividendes, maturité de l'option), les autres étant supposés constants. Pour chaque jeu d'options, nous considérons trois valeurs distinctes pour le paramètre qui varie, il y a donc 9 options par jeu (3 strikes × 3 valeurs du paramètre), soit 45 options au total. Par ailleurs, dans chaque scénario, nous indiquons le taux de dividendes q, équivalent à la chronique de dividendes discrets qui a été choisie. Ce taux synthétise toute l'information sur la masse de dividendes détachée par le sous-jacent durant la vie de l'option. Pour le calculer, il suffit d'égaliser le prix forward du sous-jacent dans le modèle à dividendes discrets avec le prix forward dans le modèle à dividendes continus, soit :

$$\mathrm{E}(S_T) = S_0 \, \mathrm{e}^{rT} - \sum_{i=1}^{m} D_i \, \mathrm{e}^{r(T-t_i)} = S_0 \, \mathrm{e}^{(r-q)T} \Leftrightarrow q = -\frac{1}{T} \ln\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{S_0} \mathrm{e}^{-rt_i}\right). \quad (5.2)$$

Nous présentons les jeux d'options ci-dessous[1] ; les valeurs obtenues pour le prix, le Delta et le Gamma des options de chaque jeu sont donnés à l'annexe D.

Jeu d'options n°1 : modification de la volatilité

Le taux sans risque et la maturité sont fixés aux valeurs suivantes : $r = 4\%$, $T = 1$. Le titre détache trois dividendes aux instants {0.05, 0.62, 0.75} de montants respectifs {0.4746, 2.6962, 0.8421}, soit un taux de dividende continu équivalent de l'ordre de 4%. La volatilité σ prend successivement les valeurs {20%, 40%, 60%}.

Jeu d'options n°2 : modification du taux sans risque

La volatilité est fixée à $\sigma = 30\%$, la maturité de l'option et la chronique de dividendes sont inchangées par rapport au jeu d'options précédent. Nous envisageons trois situations pour r :

- taux d'intérêts nuls ($r = 0\%$) ; le taux de dividendes équivalent est $q = 4.1\%$,
- taux d'intérêts moyens ($r = 3.5\%$) ; le taux de dividendes équivalent est

[1] Pour chaque scénario, les chroniques de dividendes ont été générées avec un algorithme qui détermine les dates et les montants de dividendes "au hasard" connaissant q et T, ce qui signifie que les résultats des tests ne peuvent être imputés au choix de la chronique de dividendes.

$q = 4.01\%$,

- taux d'intérêts élevés ($r = 7\%$) ; le taux de dividendes équivalent est $q = 3.93\%$.

Jeu d'options n°3 : modification des montants de dividendes

Le taux sans risque, la maturité et la volatilité sont les suivants : $r = 3\%$, $T = 1$, $\sigma = 30\%$. Le titre détache trois dividendes par durant la période aux instants {0.24, 0.44, 0.98}. Nous envisageons trois scénarios pour les montants de dividendes :

- dividendes égaux à {0.2649, 0.2267, 0.5235}, soit un taux de dividende $q = 1\%$,
- dividendes égaux à {1.9055, 0.8161, 2.2448}, soit un taux de dividende $q = 5\%$,
- dividendes égaux à {2.2439, 5.1903, 1.2944}, soit un taux de dividende $q = 9\%$.

Jeu d'options n°4 : modification du nombre et des dates de dividendes

Le taux sans risque, la maturité et la volatilité sont fixés aux valeurs suivantes : $r = 3\%$, $T = 1$, $\sigma = 30\%$. Les dates, le nombre et les montants de dividendes sont ajustés de manière à maintenir un taux de dividendes constant, égal à 5%. Les scénarios envisagés sont les suivants :

- le titre détache $m = 2$ dividendes aux instants {0.28, 0.77} de montants {1.8799, 3.0833},
- le titre détache $m = 5$ dividendes aux instants {0.06, 0.36, 0.46, 0.69, 0.93} de montants respectifs {0.4958, 1.4167, 0.6567, 1.1520, 1.2386}.
- le titre détache $m = 10$ dividendes aux instants {0.09, 0.16, 0.19, 0.28, 0.34, 0.38, 0.54, 0.64, 0.72, 0.90} de montants respectifs {0.4839, 0.4027, 0.2353, 0.4759, 0.3562, 0.2780, 0.8104, 0.5324, 0.4584, 0.9166}.

Jeu d'options n°5 : modification de la maturité de l'option

Le taux sans risque et la volatilité sont fixés aux valeurs suivantes : $r = 3\%$, $\sigma = 30\%$. La maturité prend trois valeurs distinctes : $T = 0.5$, $T = 1$ et $T = 2$. Pour chaque maturité choisie, nous avons déterminé la chronique de dividendes de manière à ce que le taux de dividendes soit égal à 5%. Les chroniques de dividendes utilisées sont données ci-desssous :

- pour $T = 0.5$, les dates de dividendes sont {0.17, 0.30, 0.39} et les montants associés sont {1.0754, 0.8328, 0.5805},

- pour $T=1$, les dates de dividendes sont {0.25, 0.63, 0.87} et les montants associés sont {1.4203, 2.1176, 1.4262},
- pour $T=2$, les dates de dividendes sont {0.46, 1.55, 1.81} et les montants associés sont {2.5701, 5.5319, 1.7957}.

5.2 Estimation des valeurs étalons par la méthode de Quasi-Monte Carlo

Accélération de la convergence. On ne dispose pas de formules analytiques de référence pour calculer le prix, le Delta et le Gamma d'un call Européen en présence de dividendes discrets. Pour cette raison, nous avons choisi d'estimer ces quantités par une méthode de simulation numérique. Nous avons retenu l'approche dite de Quasi-Monte Carlo qui permet d'accélérer la convergence par rapport à la méthode de Monte Carlo classique, notamment lorsque la dimension d'intégration est faible (Glasserman 2004), ce qui est le cas dans notre exemple[1].

Afin de réduire la variance de l'estimateur du prix, nous évaluons le put Européen de mêmes caractéristiques que le call considéré, puis nous déduisons le prix du call en appliquant la relation de parité call-put (Lapeyre, Pardoux et Sentis 1998). Le Delta est obtenu par la méthode de différenciation des trajectoires et le Gamma est calculé en appliquant la méthode du ratio de log-vraisemblance à l'estimateur du Delta[2]. Cette approche est plus efficace qu'une approximation directe des dérivées du prix de l'option par la méthode des différences finies qui induit des problèmes de convergence importants (Glasserman 2004).

Eléments d'implémentation. L'estimateur QMC du prix de l'option est basé sur une simulation directe du prix du sous-jacent à partir de la formule (1.13). Les trajectoires Browniennes du sous-jacent sont obtenues par la méthode incrémentale décrite en détail dans Glasserman (2004). Les accroissements gaussiens du mouvement Brownien sont construits en appliquant la méthode d'inversion numérique de Wichura (1988) aux sorties du générateur quasi-aléatoire proposé par Niederreiter (1972). L'implémentation de ces méthodes numériques a été réalisée en C++.

Chaque estimation est basée sur 1 milliard de simulations réalisées sur un PC équipé d'un processeur Intel Pentium IV cadencé à 3.20GhZ, de 1Go de RAM et de Microsoft

---

[1] En effet, la dimension d'intégration est $m+1$ où m désigne le nombre de dividendes détachés par le sous-jacent au cours de la vie de l'option. Dans la pratique, une action peut détacher jusqu'à 4 dividendes par an (fréquence trimestrielle). Pour les besoins des tests, nous avons augmenté le nombre de dividendes jusqu'à $m=10$.

[2] Pour une présentation détaillée des méthodes évoquées nous renvoyons le lecteur à Su et Randall (2008).

Windows XP. Le délai moyen pour obtenir une estimation du triplet (prix, Delta, Gamma) est de 1 h 15mn, soit un temps total de 56.5 heures environ pour calculer l'ensemble des 45 triplets étalons.

5.3 Résultats des tests

Le tableau ci-dessous donne les erreurs moyennes sur le prix, le Delta et le Gamma pour chaque approximation (3 premières lignes). La 4$^{\text{ème}}$ ligne, intitulée "ErrMoy ", correspond à la moyenne des trois lignes précédentes. Il s'agit en quelque sorte d'une mesure d'erreur globale pour une approximation donnée. La 5$^{\text{ème}}$ ligne du tableau fait apparaître le Gain de chaque approximation par rapport à la méthode B75 qui est défini par :

$$\text{Gain/B75:=}\frac{\text{Moy. Err(B75)}}{\text{Moy. Err(Approx)}}.$$

Cette quantité mesure le facteur de réduction de l'erreur induit par une des approximations par rapport à la méthode B75 qui est assurément la plus utilisée par les praticiens. Plus le Gain est élevé, meilleure est l'approximation considérée. La dernière ligne du tableau indique le rang de chaque approximation, déterminé sur la base de la moyenne des erreurs observées. Sur chaque ligne, nous avons mis en caractère gras le nombre correspondant à l'approximation la plus performante pour le critère considéré (erreur la plus faible, gain le plus élevé, meilleur rang).

Approx.	B75	BV01	BoV02	BGS03	CUB	CLB	MBA
Err(C)	4.02E-02	4.25E-03	2.21E-03	1.26E-04	1.07E-02	7.36E-06	**4.44E-06**
Err(Δ)	2.87E-02	3.22E-03	1.75E-03	1.00E-04	8.09E-03	**9.59E-06**	1.17E-05
Err(Γ)	6.30E-02	9.21E-03	3.69E-03	3.16E-04	1.91E-02	**3.59E-05**	4.36E-05
ErrMoy	4.39E-02	5.56E-03	2.55E-03	1.81E-04	1.26E-02	**1.76E-05**	1.99E-05
Gain/B75	1.00	7.90	17.23	243.08	3.47	**2496.79**	2208.82
Rang	7	5	4	3	6	**1**	2

Pour chaque approximation considérée, on constate que l'ordre de grandeur de l'erreur mesurée est sensiblement le même que l'on considère le prix, le Delta ou le Gamma. La moyenne des erreurs mesurées (ligne 4) est donc un bon indicateur de la performance globale de chaque méthode.

Une comparaison des données de la ligne 4 permet de répartir les approximations testées dans quatre groupes distincts correspondants à différents seuils de précision : (1) les approximations B75 (Black 1975) et CUB (borne comonotone supérieure), pour lesquelles l'erreur moyenne est supérieure à 1%, (2) les approximations BV01 (Beneder et Vorst 2001) et BoV02 (Bos et Vandermark 2002), pour lesquelles l'erreur moyenne appartient à l'intervalle (0.1%, 1%), (3) l'approximation BGS03 (Bos, Gairat et Shepeleva, 2003) dont l'erreur moyenne se situe dans l'intervalle (0.01%, 0.1%) et (4) les approximations comonotones CLB (Comonotonic Lower Bound) et MBA (Moment Based Approximation), dont l'erreur moyenne est très inférieure au seuil de 0.01%.

L'approximation B75 se classe dernière du comparatif avec une erreur moyenne de 4.39%. La borne comonotone supérieure (CLB) s'avère légèrement plus performante puisque l'erreur commise vaut 1.26%, soit une amélioration de la précision d'un facteur 3.47. Avec une erreur moyenne de 0.921%, la méthode BV01 occupe la cinquième place du comparatif. Elle permet de réduire l'incertitude d'un facteur 7.9, ce qui signifie qu'elle est pratiquement 8 fois plus précise que la méthode B75. L'approximation BoV02 s'avère environ deux fois plus précise que l'approximation BV01, puisque l'erreur commise est 0.556% soit un facteur d'amélioration de 17.23 par rapport à la méthode B75.

La méthode BGS03 apporte une amélioration évidente en termes de précision par rapport aux approximations envisagées précédemment. En effet; l'erreur commise vaut 0.0181% << 0.1% et l'incertitude par rapport à la méthode B75 est réduite d'un facteur 243.08. Ce gain en terme de performance provient sans doute du fait que Bos *et al.* (2003) ont construit leur approximation en s'appuyant sur des raisonnements mathématiques rigoureux et non sur des considérations empiriques.

Les méthodes CLB et MBA donnent des résultats extrêmement proches en termes de précision. L'erreur commise avec la méthode MBA est 0.00199%, ce qui correspond à une amélioration d'un facteur 2208.82 de la précision des calculs. L'approximation CLB est légèrement plus précise que l'approximation MBA ; l'erreur commise est 0.00176%, soit une réduction d'un facteur 2496.79 par rapport à l'erreur commise avec la méthode B75. En pratique, étant donné la grande proximité et la grande précision des résultats obtenus avec ces deux méthodes (de l'ordre du millième de pourcent), on pourra utiliser indifféremment l'approximation CLB ou l'approximation MBA.

Toutefois, si l'on tient compte de l'effort calculatoire supplémentaire induit pour évaluer la formule (1.35), on peut considérer que la méthode CLB est la solution la plus efficace pour approcher la valeur, le Delta et le Gamma d'un call Européen en présence de dividendes discrets.

6. CONCLUSION

L'intégration des dividendes dans les modèles de marché utilisés pour évaluer et couvrir les produits optionnels sur action(s) est un problème délicat, notamment lorsque les dates et les montants des dividendes futurs sont connus à l'avance. Dans ce cas, la dynamique du sous-jacent est un processus à sauts déterministes et il n'est plus possible d'obtenir des formules fermées pour la valeur et les paramètres de couverture des options Européennes, comme c'est le cas lorsque les dividendes sont supposés proportionnels au cours du sous-jacent. Il faut alors traiter le problème par une méthode numérique telle que la méthode de Monte Carlo. Une telle approche est particulièrement consommatrice en temps de calcul, ce qui est difficilement envisageable pour une mise en œuvre opérationnelle. Les spécialistes ont donc développé différentes formules d'approximation pour évaluer les options Européennes en présence de dividendes discrets. La plupart des solutions existantes sont construites à partir de considérations empiriques et consistent à modifier en fonction de la chronique des dividendes futurs les paramètres de la formule originale de Black, Scholes et Merton pour les options Européennes en l'absence de dividende, mais elles conduisent à des résultats biaisés avec des niveaux d'erreur parfois élevés.

Dans ce travail, nous avons proposé trois nouvelles formules d'approximation du prix d'un call Européen en présence de dividendes discrets en nous appuyant sur les résultats de la théorie actuarielle des risques comonotones. La démarche adoptée se décompose en trois étapes : (i) tout d'abord, nous avons écrit la valeur de l'option comme la transformée stop-loss d'une somme de variables aléatoires lognormales dépendantes, ensuite (ii) nous avons encadré (au sens de l'ordre convexe) la variable précédente par deux sommes comonotones de variables lognormales, enfin (iii) nous avons déterminé les primes stop-loss des deux bornes sous une forme explicite. Par construction, les formules établies dans la dernière étape du raisonnement encadrent la valeur de l'option. Nous les avons appelées approximation CLB (Comonotonic Lower Bound) et approximation CUB (Comonotonic Upper Bound). Par ailleurs, en combinant les fonctions de répartition de ces bornes, nous avons construit une nouvelle approximation appelée MBA (Moment Based Approximation) qui possède la même espérance et la même variance que la variable initiale. En dérivant les formules d'approximation comonotones, nous avons pu déterminer le Delta et le Gamma de l'option sous une forme explicite. L'existence de formules fermées pour les paramètres de couverture de l'option permet d'envisager l'utilisation des formules de l'article non seulement pour évaluer, mais aussi pour répliquer les payoffs optionnels.

Les tests mis en œuvre ont démontré que les approximations comonotones CLB et MBA permettent d'évaluer la valeur d'une option d'achat Européenne, mais aussi son Delta et son Gamma avec une erreur relative voisine de 0.002%, ce qui est nettement meilleur que les résultats obtenus avec les autres approximations pour lesquelles l'erreur relative est supérieure à 0.01% et peut dépasser le seuil de 1% pour les plus mauvaises d'entres-elles.

RÉFÉRENCES

BJÖRK T. (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Second Edition, Oxford University Press.

BLACK F. (1975), "Fact and Fantasy In The Use of Options", *Financial Analysts Journal*, pp. 36-72.

BLACK F., SCHOLES M. (1973), "The Pricing of Options And Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 36-72.

BENEDER R., VORST T. (2001), "Options on Dividend Paying Stocks", Proceedings of the International Conference on Mathematical Finance, Shanghai.

BOS M., VANDERMARK S. (2002), "Finessing fixed dividends", *Risk Magazine*, Vol. 9, pp. 157-158.

BOS R., GAIRAT A., SHEPELEVA A. (2003), "Dealing with discrete dividends", *Risk Magazine*, Vol. 1, pp. 109-112.

DHAENE J., DENUIT M., GOOVAERTS M.J., KAAS R., VYNCKE D. (2002a), "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory", *Insurance: Mathematics And Economics*, 31(1), pp. 3-33.

DHAENE J., DENUIT M., GOOVAERTS M.J., KAAS R., VYNCKE D. (2002b), "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications", *Insurance: Mathematics And Economics*, 31(2), pp. 133-161.

DUFRESNE D. (1990),"The Distribution of a Perpetuity with Applications to Risk Theory and Pension Funding", *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 9, pp. 39-79.

FRISHLING V. (2002), "A discrete question", *Risk Magazine*, Vol. 15, pp. 115-116.

GLASSERMAN P. (2004), *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer.

HAUG E. G., HAUG J., LEWIS A. (2003), "Back to Basics: a New Approach to the Discrete Dividend Problem", *Wilmott Magazine*, pp. 37-47.

HAUG E. G. (2007), *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, Second Edition, McGraw-Hill.

HULL J. (2003), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Fifth Edition, Prentice Hall.

JÄCKEL P. (2002),

KAAS R., DHAENE J., GOOVAERTS M.J. (2000), "Upper and lower bounds for sums of random variables", *Insurance: Mathematics And Economics*, 27, pp. 151-158.

LAPEYRE B., PARDOUX E., SENTIS R. (1998), *Méthodes de Monte Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, Mathématiques & Applications 29, Springer.

LECOUTRE J.-P. (1998), *Statistiques et probabilités*, Dunod.

MERTON R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal Of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141-183.

MILEVSKY M. A. (1997), "The Present Value of a Stochastic Perpetuity and the Gamma Distribution", *Insurance: Mathematics And Economics*, 20(3), pp. 243-250.

NIEDERREITER H. (1972), "On a number theoretical integration method", *Aequationes Mathematicae*, 8, pp. 304-311.

SU Q., RANDALL C. (2008), "General Monte Carlo Greeks in Practice", *Wilmott Magazine*.

VANDUFFEL S. (2005), "Comonotonicity: From risk measurement to risk management", PhD Thesis, University of Amsterdam.

VANDUFFEL S., CHEN X., DHAENE J., GOOVAERTS M., HENRARD L., KAAS R. (2007), "Optimal Approximations for Risk Measures of Sums of Lognormals based on Conditional Expectations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, to be published.

VANDUFFEL S., DHAENE J., GOOVAERTS M., KAAS R. (2003), "The hurdlerace problem", *Insurance: Mathematics And Economics*, 33(2), pp. 405-413.

VANDUFFEL S., HOEDEMAKERS T., DHAENE J. (2005), "Comparing approximations for sums of non-independent lognormal random variables", *North American Actuarial Journal*, Vol. 9(4), pp. 71-82.

VYNCKE D., GOOVAERTS M., DHAENE J. (2004), "An accurate analytical approximation for the price of a European-style arithmetic Asian option", *Finance*, Vol. 25, pp. 121-139.

WICHURA M.J. (1988), "Algorithm AS241: The Percentage Points of the Normal Distribution", *Applied Statistics*, 37, pp. 477-484.

A. SOMMES COMONOTONES

On rappelle que des variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_s$, de fonctions de répartitions respectives $F_1, \dots, F_s$ sont comonotones si $(X_1, \dots, X_s) \sim (F_1^{-1}(U), \dots, F_s^{-1}(U))$ où U suit une loi uniforme sur (0,1). Le symbole "~" signifie "a même loi que" et F_i^{-1} désigne la fonction quantile de X_i. Dans ce cas, la somme $X^c := X_1 + \cdots + X_s$ est appelée somme comonotone.

Les sommes comonotones possèdent trois propriétés remarquables que nous énonçons ci-dessous et dont on peut trouver les démonstrations dans Dhaene *et al.* (2002a) ou Vanduffel (2005).

P1) La fonction quantile $F_{X^c}^{-1}$ de X^c est donnée par la formule :

$$F_{X^c}^{-1}(u) = \sum_{i=1}^{s} F_i^{-1}(u), \quad 0 < u < 1. \tag{A.1}$$

P2) La fonction de répartition F_{X^c} de X^c est entièrement déterminée par la relation :

$$F_{X^c}^{-1}(F_{X^c}(x)) = x \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} F_i^{-1}(F_{X^c}(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

P3) Les transformées stop-loss de X^c sont données par la formule :

$$\mathrm{E}(X^c - d)^+ = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(F_i^{-1}(U) - d_i)^+ \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(d - X^c)^+ = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{E}(d_i - F_i^{-1}(U))^+, \tag{A.3}$$

où $d_i := F_i^{-1}(F_{X^c}(d))$. Notons que (A.2) implique $d_1 + \cdots + d_s = d$.

La transformée stop-loss (de type call ou put) d'une somme comonotone est donc égale à la somme des transformées stop-loss de ses composantes évaluées en des seuils d_i spécifiques. Rappelons que ce résultat n’est pas vrai pour une somme de variables aléatoires quelconques. En effet, les fonctions $x \to (x - d)^+$ et $x \to (d - x)^+$ ne sont pas des fonctions linéaires de la variable x, ce qui implique que la transformation stop-loss n'est pas un opérateur linéaire sur l'ensemble des variables aléatoires réelles.

B. CALCUL DES MOMENTS DES BORNES CONVEXES

Formule (3.16)

Par définition de l’ordre convexe, on a immédiatement l’égalité $\tilde{\mathrm{E}}(X_T) = \tilde{\mathrm{E}}(X_T^u) = \tilde{\mathrm{E}}(X_T^l)$.

Prenons l’espérance des deux membres de l’équation (3.6) :

$$\tilde{\mathrm{E}}(X_T) = \sum_{i=1}^{m} D_i \tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{e}^{-(r+\sigma^2/2)t_i - \sigma \tilde{W}_i}) + K\tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{e}^{-(r+\sigma^2/2)T - \sigma \tilde{W}_T}) = \sum_{i=1}^{m} D_i \,\mathrm{e}^{-rt_i} + K\,\mathrm{e}^{-rT} = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i,$$

où les α_i sont définis par (3.10). Cela établit la formule annoncée.

Formules (3.19), (3.20), (3.21)

En écrivant X_T sous la forme $X_T = \sum_{i=1}^{m+1} \mathrm{e}^{Y_i}$ il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_T) = \tilde{\mathrm{E}}(X_T^2) - \tilde{\mathrm{E}}^2(X_T) &= \sum_{i,j=1}^{m+1} \tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{e}^{Y_i+Y_j}) - \left(\sum_{i=1}^{m+1} \tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{e}^{Y_i})\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{m+1} \mathrm{e}^{\mu_i+\mu_j+\sigma_i^2/2+\sigma_j^2/2+\sigma_{ij}} - \left(\sum_{i=1}^{m+1} \mathrm{e}^{\mu_i+\sigma_i^2/2}\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{m+1} \mathrm{e}^{\mu_i+\mu_j+\sigma_i^2/2+\sigma_j^2/2}(\mathrm{e}^{\sigma_{ij}} - 1).\end{aligned}$$

Il ne reste qu’à remplacer les μ_i et σ_i par leurs valeurs données aux équations (3.7) et (3.10) pour obtenir la formule souhaitée (3.19). Les formules (3.20) et (3.21) s’obtiennent par un calcul en tout point analogue.

C. DEMONSTRATIONS DES RESULTATS DE LA SECTION 4

C.1 Formule de Black, Scholes et Merton (1973) en l'absence de dividende

La valeur d'un call Européen en l'absence de dividende est donnée par la formule de Black et Scholes (1973) et Merton (1973) :

$$C_{\mathrm{BS}}(S_0, \sigma, r, K, T) = S_0 \Phi(D^+) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(D^-), \tag{B.1}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard et

$$D^{\pm} = \frac{\ln\left(S_0 / K\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}. \tag{B.2}$$

Le Delta et le Gamma de l'option sont donnés par les formules :

$$\Delta_{\mathrm{BS}} := \frac{\partial C_{\mathrm{BS}}}{\partial S_0} = \Phi(D^+), \quad \Gamma_{\mathrm{BS}} := \frac{\partial^2 C_{\mathrm{BS}}}{\partial S_0^2} = \frac{\varphi(D^+)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}, \tag{B.3}$$

où $\varphi(x) := e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ est la densité de la loi normale standard.

Le Véga (noté v_{BS}) est la sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité :

$$v_{\mathrm{BS}} := \frac{\partial C_{\mathrm{BS}}}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T}\, \varphi(D^+), \tag{B.4}$$

Le Vanna (noté κ_{BS}) est la sensibilité du Véga par rapport au sous-jacent ou encore la sensibilité du Delta par rapport à la volatilité :

$$\kappa_{\mathrm{BS}} := \frac{\partial v_{\mathrm{BS}}}{\partial S_0} = \frac{\partial^2 C_{\mathrm{BS}}}{\partial S_0 \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta_{\mathrm{BS}}}{\partial \sigma} = -\frac{D^-}{\sigma} \varphi(D^+). \tag{B.5}$$

Le Volga (noté ϑ_{BS}) désigne la sensibilité du Véga par rapport à la volatilité :

$$\vartheta_{\mathrm{BS}} := \frac{\partial v_{\mathrm{BS}}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 C_{\mathrm{BS}}}{\partial \sigma^2} = \frac{S_0 \sqrt{T} D^+ D^-}{\sigma} \varphi(D^+). \tag{B.6}$$

C.2 Démonstration des formules générales pour le Delta et le Gamma des approximations

Formule (4.2)

En utilisant le théorème d'une fonction composée multivariée, on a :

$$\Delta := \frac{\partial C}{\partial S_0} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial S_0} \frac{\partial C_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{S}_0} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial S_0} \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \sigma, \tilde{K}, r, T) = \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \sigma, \tilde{K}, r, T).$$

La dernière égalité provient du fait que $\tilde{S}_0 := S_0 - \widehat{D}$ avec $\widehat{D}$ indépendant de S_0. En dérivant la formule obtenue par rapport à S_0 on obtient la formule annoncée pour le Gamma.

Formules (4.5) et (4.6)

On rappelle que $C \simeq C_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T)$ avec $\tilde{S}_0 := S_0 - \sum_{i=1}^m D_i \mathrm{e}^{-rt_i}$ et $\tilde{\sigma}$ est une fonction de S_0, de la chronique de dividendes et des autres paramètres du problème. Pour démontrer (4.5), on dérive l'identité précédente par rapport à S_0. En utilisant le fait $\partial_{S_0} \tilde{S}_0 = 1$, il vient :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_0} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial S_0}\frac{\partial C_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{S}_0} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\frac{\partial C_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{\sigma}} = \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} v_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T).$$

On obtient (4.6) en dérivant l'expression précédente par rapport à S_0 :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \Delta_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} v_{\mathrm{BS}}(\tilde{S}_0, \tilde{\sigma}, K, r, T) \\
&= \frac{\partial \Delta_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{S}_0} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\frac{\partial \Delta_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{\sigma}} + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} v_{\mathrm{BS}} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\frac{\partial v_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{S}_0} + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2 \frac{\partial v_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{\sigma}} \\
&= \Gamma_{\mathrm{BS}} + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} v_{\mathrm{BS}} + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\left(\frac{\partial \Delta_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{\sigma}} + \frac{\partial v_{\mathrm{BS}}}{\partial \tilde{S}_0}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2 \vartheta_{\mathrm{BS}} \\
&= \Gamma_{\mathrm{BS}} + \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} v_{\mathrm{BS}} + 2\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\kappa_{\mathrm{BS}} + \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2 \vartheta_{\mathrm{BS}}.
\end{aligned}$$

C.3 Modèle "BGS03" (Bos, Gairat et Shepeleva, 2003)

La quantité $\Psi(s,a,b)$ est définie par :

$$\Psi(s,a,b) := A_1(a,s)\,\Theta_1(a) + A_2(b,s)\,\Theta_2(b), \tag{B.7}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1 &:= 4\,\mathrm{e}^{a^2/2-s}, \quad A_2 := \mathrm{e}^{b^2/2-2s}, \\
\Theta_1 &:= \sum_{i=1}^{m} D_i\,\mathrm{e}^{-rt_i}\left(\Phi(a) - \Phi\left(a - \frac{\sigma t_i}{\sqrt{T}}\right)\right), \\
\Theta_2 &:= \sum_{i,j=1}^{m} D_i D_j\,\mathrm{e}^{-r(t_i+t_j)}\left(\Phi(b) - \Phi\left(b - \frac{2\sigma \min(t_i,t_j)}{\sqrt{T}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Démonstration de la formule (4.11)

Pour obtenir l'égalité de gauche de la relation (4.11), il suffit de dériver (4.9) membre à membre par rapport à S_0 :

$$2\tilde{\sigma}\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\,\Psi'_{S_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial S_0} = \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\,\Psi'_{S_0},$$

avec $\Psi'_{S_0} := \sum_{i=1}^{2}(A'_i\Theta_i + A_i\Theta'_i)$; les notations A'_i et Θ'_i désignant les dérivées première des fonctions A_i et Θ_i par rapport à S_0.

L'égalité de droite de (4.11), s'obtient en dérivant une seconde fois par rapport à S_0 :

$$2\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2 + 2\tilde{\sigma}\frac{\partial^2\tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\Psi''_{S_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\tilde{\sigma}}{\partial S_0^2} = \frac{1}{2\tilde{\sigma}}\left[\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\Psi''_{S_0} - 2\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial S_0}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2\tilde{\sigma}}\left[\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\Psi''_{S_0} - 2\left(\frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\Psi'_{S_0}\right)^2\right]$$
$$= \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\left[\Psi''_{S_0} - \frac{\sigma}{2\tilde{\sigma}^2}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}(\Psi'_{S_0})^2\right],$$

où $\Psi''_{S_0} := \sum_{i=1}^{2}(A''_i\Theta_i + 2A'_i\Theta'_i + A_i\Theta''_i)$.

Dérivées des fonctions A_1 et A_2

En utilisant (4.10), on a immédiatement :

$$\frac{ds}{dS_0} = \frac{1}{\tilde{S}_0}, \quad \frac{da}{dS_0} = \frac{db}{dS_0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}\,\tilde{S}_0} \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_0 = S_0 - \sum_{i=1}^{m} D_i \mathrm{e}^{-rt_i}.$$

On en déduit les dérivées successives de A_1 :

$$A'_1 = \frac{da}{dS_0}\frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{ds}{dS_0}\frac{\partial A_1}{\partial s} = \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} - 1\right)\frac{A_1}{\tilde{S}_0}$$
$$A''_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{da}{dS_0}\frac{A_1}{\tilde{S}_0} - \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} - 1\right)\frac{A_1}{\tilde{S}_0^2} + \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} - 1\right)\frac{A'_1}{\tilde{S}_0}$$
$$= \left(\frac{1+a^2}{\sigma^2 T} - \frac{3a}{\sigma\sqrt{T}} + 2\right)\frac{A_1}{\tilde{S}_0^2}$$

En procédant de la même manière pour A_2, on obtient après simplification :

$$A'_2 = \left(\frac{b}{\sigma\sqrt{T}} - 2\right)\frac{A_2}{\tilde{S}_0}, \quad A''_2 = \left(\frac{1+b^2}{\sigma^2 T} - \frac{5b}{\sigma\sqrt{T}} + 6\right)\frac{A_2}{\tilde{S}_0^2}$$

Dérivées des fonctions Θ_1 et Θ_2

Les dérivées premières Θ_1 et Θ_2 s'évaluent très simplement:

$$\Theta_1' = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}\tilde{S}_0}\sum_{i=1}^{m} D_i \,\mathrm{e}^{-rt_i}\left(\varphi(a) - \varphi\left(a - \frac{\sigma t_i}{\sqrt{T}}\right)\right),$$

$$\Theta_2' = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}\tilde{S}_0}\sum_{i,j=1}^{m} D_i D_j \,\mathrm{e}^{-r(t_i+t_j)}\left(\varphi(b) - \varphi\left(b - \frac{2\sigma\min(t_i,t_j)}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

La dérivée seconde de Θ_1 s'obtient de la manière suivante :

$$\tilde{S}_0\Theta_1' = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{m} D_i \,\mathrm{e}^{-rt_i}\left(\varphi(a) - \varphi\left(a - \frac{\sigma t_i}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \Theta_1' + \tilde{S}_0\Theta_1'' = \frac{1}{\sigma^2 T\tilde{S}_0}\sum_{i=1}^{m} D_i \,\mathrm{e}^{-rt_i}\left(\varphi'(a) - \varphi'\left(a - \frac{\sigma t_i}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \Theta_1'' = \frac{1}{\sigma^2 T\tilde{S}_0^2}\sum_{i=1}^{m} D_i \,\mathrm{e}^{-rt_i}\left(\varphi'(a) - \varphi'\left(a - \frac{\sigma t_i}{\sqrt{T}}\right)\right) - \frac{\Theta_1'}{\tilde{S}_0}.$$

En appliquant le même procédé à la fonction Θ_2 , il vient :

$$\Theta_2'' = \frac{1}{\sigma^2 T\tilde{S}_0^2}\sum_{i,j=1}^{m} D_i D_j \,\mathrm{e}^{-r(t_i+t_j)}\left(\varphi'(b) - \varphi'\left(b - \frac{2\sigma\min(t_i,t_j)}{\sqrt{T}}\right)\right) - \frac{\Theta_2'}{\tilde{S}_0}.$$

D. RESULTATS DES SIMULATIONS NUMERIQUES

Jeu d'options n°1 : modification de la volatilité

Approximation du Prix									
σ	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
20%	50	48.04089818	48.04041367	48.04077498	48.04097004	48.04089371	48.04109318	48.04089722	48.04089729
	100	7.83492893	7.65325230	7.83320230	7.83385472	7.83492108	7.88310415	7.83492520	7.83493434
	150	0.21098498	0.18492922	0.21453955	0.20915287	0.21106498	0.21742294	0.21098293	0.21098376
40%	50	48.56722114	48.49116075	48.54897738	48.57695930	48.56665996	48.59326733	48.56716014	48.56719871
	100	15.59234519	15.23039897	15.58481433	15.58980827	15.59228257	15.68826490	15.59231218	15.59238753
	150	4.00703109	3.77222900	4.03500716	3.99081348	4.00770425	4.06289526	4.00699713	4.00702700
60%	50	50.72555413	50.47060572	50.66153149	50.75645105	50.72363655	50.80998435	50.72532528	50.72562228
	100	23.19708098	22.65763183	23.17582097	23.19231032	23.19688167	23.33988583	23.19696175	23.19722846
	150	10.71036633	10.24780287	10.75555993	10.67802786	10.71161047	10.81960479	10.71024631	10.71038522

Approximation du Delta									
σ	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
20%	50	0.99973285	0.99981858	0.99975258	0.99972154	0.99973333	0.99969967	0.99973274	0.99973272
	100	0.53950525	0.53982857	0.53889279	0.53982856	0.53948938	0.53958053	0.53950466	0.53950468
	150	0.02960390	0.02696965	0.02985206	0.02946255	0.02960887	0.03025725	0.02960355	0.02960364
40%	50	0.96990839	0.97337382	0.97050665	0.96966466	0.96992956	0.96884686	0.96990984	0.96990827
	100	0.57861582	0.57926007	0.57741838	0.57926006	0.57858738	0.57876905	0.57861774	0.57861786
	150	0.21351474	0.20791935	0.21329272	0.21348832	0.21350810	0.21499108	0.21351593	0.21351672
60%	50	0.92182426	0.92719940	0.92244096	0.92179632	0.92185054	0.92038478	0.92182447	0.92181942
	100	0.61696325	0.61791166	0.61522216	0.61791165	0.61691650	0.61718750	0.61696164	0.61696206
	150	0.35795432	0.35354225	0.35669453	0.35833335	0.35791918	0.35931909	0.35795388	0.35795561

Approximation du Gamma									
σ	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
20%	50	0.00005085	0.00003600	0.00004777	0.00005246	0.00005075	0.00005624	0.00005084	0.00005084
	100	0.02018123	0.02065761	0.02019610	0.02018137	0.02018218	0.02005740	0.02018157	0.02018154
	150	0.00341144	0.00324072	0.00341470	0.00340781	0.00341151	0.00345482	0.00341147	0.00341147
40%	50	0.00174609	0.00160311	0.00173588	0.00174566	0.00174575	0.00178332	0.00174620	0.00174625
	100	0.00994444	0.01017503	0.00996931	0.00994045	0.00994593	0.00988226	0.00994472	0.00994467
	150	0.00737722	0.00745522	0.00733896	0.00739716	0.00737679	0.00736607	0.00737740	0.00737739
60%	50	0.00249436	0.00240032	0.00251079	0.00247648	0.00249481	0.00250919	0.00249434	0.00249439
	100	0.00647099	0.00661587	0.00650540	0.00646335	0.00647251	0.00642865	0.00647072	0.00647064
	150	0.00631164	0.00644864	0.00628913	0.00632996	0.00631192	0.00628454	0.00631172	0.00631168

Jeu d'options n°2 : modification du taux sans risque

Approximation du Prix									
r	*K*	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.0%	50	46.12105879	46.09545989	46.11524770	46.12420991	46.12087715	46.12998348	46.12104127	46.12104847
	100	10.06436717	9.78573435	10.06416871	10.06069357	10.06443284	10.13705788	10.06435230	10.06438340
	150	1.17734934	1.07523516	1.19199831	1.16966799	1.17768842	1.20159692	1.17733659	1.17734365
3.5%	50	47.88212340	47.86292053	47.87754201	47.88467262	47.88198111	47.88897269	47.88210914	47.88211473
	100	11.51240152	11.23924679	11.50897608	11.51042854	11.51238727	11.58467089	11.51238929	11.51242055
	150	1.49618976	1.37902427	1.51137835	1.48800083	1.49654418	1.52430466	1.49618017	1.49618844
7.0%	50	49.59293679	49.57872831	49.58938193	49.59496416	49.59282630	49.59812227	49.59292452	49.59292879
	100	13.06693865	12.80284344	13.06052981	13.06662829	13.06684804	13.13782123	13.06692581	13.06695680
	150	1.88182938	1.74924569	1.89721573	1.87326789	1.88218602	1.91398300	1.88181738	1.88182695

Approximation du Delta									
r	*K*	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.0%	50	0.98801125	0.98993643	0.98836410	0.98784470	0.98802300	0.98739136	0.98801196	0.98801146
	100	0.50616866	0.50537708	0.50521618	0.50664058	0.50614239	0.50660772	0.50616684	0.50616703
	150	0.09539150	0.09043655	0.09568735	0.09517561	0.09539354	0.09660941	0.09538805	0.09538841
3.5%	50	0.99120482	0.99272583	0.99150450	0.99105722	0.99121448	0.99070183	0.99120523	0.99120482
	100	0.55255087	0.55287982	0.55163338	0.55303546	0.55252809	0.55270566	0.55255121	0.55255128
	150	0.11670235	0.11149617	0.11691751	0.11652367	0.11670691	0.11800907	0.11670342	0.11670381
7.0%	50	0.99362590	0.99480883	0.99387560	0.99349926	0.99363447	0.99322517	0.99362690	0.99362657
	100	0.59822588	0.59960986	0.59737744	0.59870211	0.59820608	0.59810008	0.59822703	0.59822698
	150	0.14119193	0.13583759	0.14130518	0.14105762	0.14119504	0.14256102	0.14119387	0.14119428

Approximation du Gamma									
r	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.0%	50	0.00106502	0.00093068	0.00104810	0.00107085	0.00106442	0.00110404	0.00106501	0.00106504
	100	0.01352047	0.01385277	0.01352733	0.01352425	0.01352067	0.01343561	0.01352003	0.01352000
	150	0.00572891	0.00565963	0.00570692	0.00573836	0.00572916	0.00575143	0.00572965	0.00572966
3.5%	50	0.00081300	0.00069946	0.00079655	0.00081928	0.00081237	0.00084702	0.00081293	0.00081296
	100	0.01340478	0.01372063	0.01342219	0.01340257	0.01340509	0.01332080	0.01340421	0.01340417
	150	0.00662890	0.00658788	0.00660121	0.00664094	0.00662856	0.00664482	0.00662913	0.00662914
7.0%	50	0.00061215	0.00051834	0.00059694	0.00061854	0.00061162	0.00064124	0.00061213	0.00061215
	100	0.01310924	0.01339767	0.01313706	0.01310256	0.01311084	0.01303066	0.01310976	0.01310973
	150	0.00756626	0.00755934	0.00753396	0.00758080	0.00756551	0.00757413	0.00756614	0.00756614

Jeu d'options n°3 : modification des montants de dividendes

Approximation du Prix									
q	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
1%	50	50.54729157	50.54268993	50.54598376	50.54758334	50.54728838	50.54817924	50.54729045	50.54729060
	100	12.77234552	12.69397915	12.77092730	12.77246974	12.77234270	12.78671123	12.77234695	12.77234817
	150	1.71600569	1.68001994	1.72161842	1.71484642	1.71602269	1.72247104	1.71600585	1.71600622
5%	50	46.71782994	46.68779211	46.70916785	46.71992235	46.71772386	46.72553407	46.71780583	46.71781291
	100	10.87280419	10.52107069	10.86778063	10.87141864	10.87278096	10.95249563	10.87279801	10.87283616
	150	1.37204943	1.23349075	1.39389247	1.36611878	1.37241954	1.40382016	1.37203066	1.37204097
9%	50	43.04800252	42.99519090	43.03601688	43.05506202	43.04724423	43.07598689	43.04783068	43.04789485
	100	9.11293421	8.63065485	9.10843396	9.10096752	9.11325228	9.30761794	9.11286194	9.11310539
	150	1.06139678	0.89335010	1.08168148	1.04454977	1.06272386	1.12772608	1.06127422	1.06133137

Approximation du Delta									
q	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
1%	50	0.99388351	0.99425048	0.99397143	0.99386492	0.99388399	0.99381372	0.99388379	0.99388378
	100	0.58552475	0.58576537	0.58520698	0.58559168	0.58552372	0.58548851	0.58552456	0.58552455
	150	0.12971604	0.12821172	0.12978798	0.12969800	0.12971664	0.12998988	0.12971661	0.12971663
5%	50	0.98936816	0.99166318	0.98990749	0.98924931	0.98937595	0.98880228	0.98936882	0.98936830
	100	0.53363685	0.53320767	0.53221684	0.53399572	0.53361454	0.53376633	0.53363724	0.53363731
	150	0.10885598	0.10236064	0.10922297	0.10872269	0.10885807	0.11031407	0.10885529	0.10885576
9%	50	0.98411149	0.98810453	0.98483593	0.98376806	0.98416101	0.98218354	0.98411771	0.98411330
	100	0.48232010	0.48006036	0.48081255	0.48332395	0.48222251	0.48364832	0.48232237	0.48232403
	150	0.08919617	0.08052447	0.08960978	0.08868951	0.08921657	0.09258853	0.08919471	0.08919763

Approximation du Gamma									
q	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
1%	50	0.00057902	0.00055121	0.00057393	0.00058000	0.00057897	0.00058422	0.00057898	0.00057898
	100	0.01303573	0.01312013	0.01304313	0.01303454	0.01303575	0.01302013	0.01303569	0.01303569
	150	0.00706184	0.00705430	0.00705152	0.00706384	0.00706184	0.00706348	0.00706187	0.00706187
5%	50	0.00096000	0.00079646	0.00093278	0.00096492	0.00095950	0.00099834	0.00096000	0.00096004
	100	0.01351164	0.01393141	0.01353157	0.01351085	0.01351276	0.01341929	0.01351164	0.01351160
	150	0.00632939	0.00625533	0.00629093	0.00633796	0.00632880	0.00634543	0.00632943	0.00632944
9%	50	0.00140744	0.00113056	0.00137367	0.00141575	0.00140498	0.00152565	0.00140748	0.00140775
	100	0.01390800	0.01453224	0.01391909	0.01392516	0.01391047	0.01367055	0.01390769	0.01390740
	150	0.00559358	0.00544907	0.00555893	0.00561167	0.00559164	0.00565424	0.00559384	0.00559390

Jeu d'options n°4 : modification du nombre et des dates de dividendes

Approximation du Prix									
m	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
2	50	46.71541403	46.68771719	46.70847178	46.71861439	46.71519799	46.72508347	46.71539172	46.71539997
	100	10.86217018	10.52103040	10.85834094	10.85915982	10.86218288	10.95411369	10.86215896	10.86220067
	150	1.37053129	1.23348301	1.38941227	1.36137772	1.37103376	1.40536741	1.37051238	1.37052315
5	50	46.71438942	46.68777429	46.70755736	46.71734854	46.71420728	46.72362468	46.71436723	46.71437449
	100	10.84834155	10.52106111	10.84360224	10.84599171	10.84834907	10.93861518	10.84833625	10.84837374
	150	1.36459464	1.23348891	1.38240554	1.35628001	1.36504180	1.39915182	1.36457657	1.36458633
10	50	46.71034156	46.68766167	46.70486937	46.71333824	46.71017952	46.72025285	46.71031898	46.71032670
	100	10.80879851	10.52100055	10.80394678	10.80646332	10.80882918	10.91034498	10.80881870	10.80886042
	150	1.34965430	1.23347728	1.36367529	1.34105941	1.35003771	1.38899705	1.34961373	1.34962473

Approximation du Delta									
m	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
2	50	0.98951603	0.99166312	0.98995573	0.98933877	0.98953088	0.98881936	0.98951708	0.98951649
	100	0.53341992	0.53320662	0.53221598	0.53396801	0.53338599	0.53370166	0.53341956	0.53341969
	150	0.10871919	0.10236017	0.10902557	0.10850112	0.10872459	0.11036479	0.10871912	0.10871963
5	50	0.98960081	0.99166316	0.99003539	0.98943511	0.98961413	0.98893063	0.98960242	0.98960190
	100	0.53343518	0.53320742	0.53227720	0.53393989	0.53340566	0.53367947	0.53343532	0.53343542
	150	0.10845864	0.10236053	0.10874491	0.10826259	0.10846220	0.11008168	0.10845750	0.10845796
10	50	0.98989036	0.99166307	0.99024429	0.98972026	0.98990248	0.98916146	0.98989209	0.98989153
	100	0.53333588	0.53320584	0.53239640	0.53385156	0.53330123	0.53355891	0.53332825	0.53332834
	150	0.10775133	0.10235982	0.10796990	0.10754708	0.10775314	0.10958989	0.10774884	0.10774936

Approximation du Gamma									
m	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
2	50	0.00095200	0.00079646	0.00092932	0.00095893	0.00095118	0.00099804	0.00095199	0.00095203
	100	0.01352450	0.01393143	0.01354279	0.01352510	0.01352572	0.01341738	0.01352449	0.01352444
	150	0.00632288	0.00625532	0.00628938	0.00633531	0.00632209	0.00634442	0.00632290	0.00632291
5	50	0.00094561	0.00079646	0.00092314	0.00095245	0.00094500	0.00099051	0.00094571	0.00094574
	100	0.01354075	0.01393142	0.01355885	0.01354051	0.01354173	0.01343527	0.01354059	0.01354055
	150	0.00632075	0.00625533	0.00628873	0.00633245	0.00632018	0.00634141	0.00632091	0.00632092
10	50	0.00092610	0.00079647	0.00090717	0.00093317	0.00092541	0.00097560	0.00092606	0.00092610
	100	0.01358785	0.01393144	0.01360326	0.01358684	0.01358813	0.01346825	0.01358710	0.01358705
	150	0.00631128	0.00625531	0.00628558	0.00632372	0.00631107	0.00633409	0.00631175	0.00631176

Jeu d'options n°5 : modification de la maturité de l'option

Approximation du Prix									
T	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.5	50	48.27849566	48.27789985	48.27836811	48.27859514	48.27849278	48.27877716	48.27849512	48.27849520
	100	7.90977203	7.79890296	7.90917200	7.90914275	7.90977435	7.94848931	7.90977185	7.90977764
	150	0.25856371	0.24041435	0.26078883	0.25708757	0.25860419	0.26439302	0.25856448	0.25856506
1	50	46.71570084	46.68768599	46.70863279	46.71892428	46.71548346	46.72533295	46.71567834	46.71568606
	100	10.86534978	10.52101363	10.86123513	10.86252997	10.86536173	10.95646249	10.86534008	10.86537894
	150	1.37176484	1.23347979	1.39079303	1.36268548	1.37227379	1.40621207	1.37174943	1.37175945
2	50	44.46206310	44.12479500	44.36629890	44.48548041	44.45796910	44.54304083	44.46183466	44.46201438
	100	14.78596534	13.73259528	14.76345193	14.77236107	14.78600270	14.98964050	14.78587070	14.78612684
	150	4.23844760	3.57806129	4.33480623	4.20225954	4.24267682	4.36108453	4.23832546	4.23843304

Approximation du Delta									
T	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.5	50	0.99946766	0.99956020	0.99948558	0.99945417	0.99946801	0.99942543	0.99946766	0.99946765
	100	0.52351051	0.52349417	0.52317786	0.52374111	0.52350571	0.52363133	0.52351194	0.52351196
	150	0.03363510	0.03198021	0.03377372	0.03353361	0.03363663	0.03417362	0.03363439	0.03363445
1	50	0.98949314	0.99166309	0.98994048	0.98931396	0.98950800	0.98879962	0.98949410	0.98949354
	100	0.53342712	0.53320618	0.53221139	0.53397498	0.53339424	0.53371156	0.53342805	0.53342817
	150	0.10877892	0.10235997	0.10908440	0.10856221	0.10878257	0.11040565	0.10877710	0.10877757
2	50	0.94722590	0.96008003	0.94953605	0.94695180	0.94734837	0.94458565	0.94722918	0.94722333
	100	0.54798250	0.54690753	0.54373170	0.54926284	0.54780397	0.54864792	0.54798589	0.54798672
	150	0.21698255	0.20106072	0.21608591	0.21688825	0.21691822	0.21999976	0.21697859	0.21698123

Approximation du Gamma									
T	K	**QMC**	**B75**	**BV01**	**BoV02**	**BGS03**	**CUB**	**CLB**	**MBA**
0.5	50	0.00009022	0.00007627	0.00008784	0.00009193	0.00009018	0.00009633	0.00009023	0.00009023
	100	0.01899369	0.01924896	0.01899896	0.01899381	0.01899383	0.01890525	0.01899364	0.01899363
	150	0.00355971	0.00346737	0.00356048	0.00355799	0.00355966	0.00359100	0.00355966	0.00355967
1	50	0.00095353	0.00079646	0.00093044	0.00096059	0.00095270	0.00099930	0.00095352	0.00095356
	100	0.01352067	0.01393143	0.01353943	0.01352116	0.01352202	0.01341463	0.01352078	0.01352074
	150	0.00632384	0.00625531	0.00628973	0.00633603	0.00632281	0.00634502	0.00632362	0.00632363
2	50	0.00265425	0.00224110	0.00265353	0.00263506	0.00265398	0.00271920	0.00265436	0.00265450
	100	0.00964831	0.01032018	0.00971167	0.00964998	0.00965634	0.00952574	0.00964830	0.00964815
	150	0.00711935	0.00731596	0.00699725	0.00715831	0.00711688	0.00709260	0.00711923	0.00711920