UN CADRE DE REFERENCE POUR UN MODELE INTERNE PARTIEL EN ASSURANCE DE PERSONNES

APPLICATION A UN CONTRAT DE RENTES VIAGERES

Frédéric PLANCHET [1]
Quentin GUIBERT [2]
Marc JUILLARD [2]
ISFA - Laboratoire SAF[3] - Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1
WINTER & Associés[4]

Résumé : Cet article propose un cadre général pour construire un modèle interne ou un modèle interne partiel dans un contexte d'assurance de personnes. Sa contribution consiste à montrer que dans ce contexte, du fait du caractère gaussien des engagements conditionnellement aux facteurs de risque systématique, il est possible d'obtenir des expressions des valeurs de référence (best estimate, marge pour risque et SCR) dans le cadre d'une approche mêlant calculs analytiques et simulation qui s'avère particulièrement efficace en termes de mise en œuvre.

1. INTRODUCTION

La mise en place du cadre technique imposé par la réforme Solvabilité 2 conduit à repenser les logiques de provisionnement utilisées jusqu'alors en assurance de personnes (*cf.* PLANCHET [2009]). A une logique de choix d'hypothèses prudentes pour l'actualisation et la probabilisation des flux de prestations futures, le régulateur a substitué une logique d'explicitation des marges pour risque en retenant un calcul fondé sur l'ajout au niveau du *best estimate* des provisions une marge pour risque.

Le calcul de la marge pour risque étant effectué dans une logique de coût du capital immobilisé se trouve de fait étroitement associé à la détermination du capital de solvabilité (*cf.* GUIBERT [2010]).

---

[1] Frédéric Planchet est Professeur à l'ISFA et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : fplanchet@winter-associes.fr.
[2] Marc Juillard et Quentin Guibert sont actuaires consultants chez WINTER & Associés
[3] Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France
[4] WINTER & Associés 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon - France

Ainsi, la mise en place d'un référentiel de calcul des provisions sur un portefeuille d'assurance de personnes conduit à devoir construire les processus de calcul permettant potentiellement d'élargir le champ d'application du dispositif à la mise en place d'un modèle interne partiel pour le risque de souscription, voire d'un modèle interne.

En substituant une logique de prise en compte de manière implicite des risques d'un contrat d'assurance, *via* le choix d'hypothèses prudentes, par une logique de calcul basée sur une prise en compte explicite de l'ensemble des risques du contrat[1], la réforme prudentielle Solvabilité 2 a profondément complexifié les pratiques actuarielles (*cf.* PLANCHET [2009]). Confronté à cette contrainte, le premier réflexe des organismes d'assurance a été de mettre en place des algorithmes de simulation lourds et complexes, fournissant la plupart du temps un résultat peu auditable et surtout peu exploitable (point en totale opposition avec les préconisations développées par le CEIOPS dans le *consultation paper* n°26). En effet, aussi précis et documentés que soient les algorithmes, ils présentent un temps de traitement relativement long empêchant une utilisation fréquente.

Or ce dernier point est en total opposition avec le principe même de la réforme, cette dernière ayant pour but d'inciter les assureurs à mieux connaître leurs risques[2] d'assurance (*cf. consultation paper* n°13). En effet, au-delà du calcul du *SCR* et des fonds propres de base, Solvabilité 2 doit permettre aux assureurs d'orienter leur politique de management (allocation d'actifs, couverture de nouveaux risque,…) afin de mieux maîtriser leurs risques. Ce dernier point ne pouvant être atteint par la seule application de la formule standard, le développement de modèles internes simplifiées semble nécessaire. Ainsi, comme le stipule la directive solvabilité 2, « chaque entreprise d'assurance et de réassurance devrait procéder régulièrement à l'évaluation de son besoin global de solvabilité, en tant que partie intégrante de sa stratégie commerciale et compte tenu de son profil de risque spécifique (évaluation interne des risques et de la solvabilité). Cette évaluation ne requiert pas le développement d'un modèle interne, ni ne sert à calculer des exigences en capital différentes du capital de solvabilité requis ou du minimum de capital requis. Les résultats de chaque évaluation devraient être communiqués à l'autorité de contrôle parmi les informations à fournir aux fins du contrôle ».

A ce stade, il convient de remarquer qu'une compagnie ne souhaitant pas développer un modèle interne mais voulant calculer de manière exacte ses fonds propres de base se

[1] *Via* le calcul d'un *best estimate* des flux de trésorerie futurs et d'une marge pour risque.
[2] Nous entendons par là l'ensemble des risques y compris financiers.

trouve confrontée au calcul de sa marge pour risque. Or l'approche par quantile développée sous le QIS3 ayant été abandonnée au profit de l'approche coût du capital, un calcul rigoureux de la marge pour risque oblige de projeter jusqu'à l'extinction du portefeuille l'ensemble des *SCR* futurs (ce calcul s'avérant rapidement infaisable comme le reconnaît le CEIOPS dans le *consultation paper* n°76),

Partant de ce constat, nous avons cherché à développer un processus de calcul basé sur des formules analytiques (cette méthode étant recommandée par le CEIOPS dans le *consultation paper* n°26 afin valoriser les risques liés au passif) et utilisant aux mieux l'ensemble des *proxies*[1] proposés par le CEIOPS, l'idée étant de proposer une méthode alternative à celles basées sur la simulation dans la simulation (utilisée par exemple par GORDY et JUNEJA [2008]). Ce processus permet *in fine* de calculer de manière simplifiée le *SCR* et les provisions techniques dans l'optique de réaliser des tests de sensibilité ou des analyses de profit (lors de la création d'un nouveau produit par exemple). L'article se focalisant sur les risques d'assurance, la problématique liée au risque opérationnel n'est pas abordée (le besoin en capital associé à ce risque pouvant être calculé par application de la formule standard).

De manière plus précise, la présente étude montre qu'une approximation du *SCR* et de la provision technique d'un contrat d'assurance de personne peut être obtenue sur la base de la connaissance des risques systématiques[2] et des moments conditionnels[3] d'ordre 1 et 2 de la distribution des flux de trésorerie.

Il convient également de souligner que le relâchement de certaines hypothèses de calculs (*via* le recours à la simulation par exemple) permet de retenir le processus décrit ci-après dans le cadre de la mise en place d'un modèle interne partiel.

Le présent article est organisé de la manière suivante : dans une première partie on présente d'un point de vue formel le cadre de travail proposé et la seconde partie est consacrée à un exemple d'application dans le cas d'un contrat de rentes viagères.

2. UNE EQUATION GENERALE POUR LE SCR

L'analyse d'un bilan simplifié permet de déterminer une équation implicite vérifiée par le *SCR* ; une fois cette équation obtenue, une hypothèse de proportionnalité du capital

[1] Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se référer aux spécifications techniques du QIS4 ainsi qu'aux *consultation papers* relatifs aux textes de niveau 2.
[2] Connaissance basée sur des calculs empiriques ou analytiques.
[3] Moments conditionnels aux risques systématiques.

requis par rapport au niveau du *best estimate* permet d'obtenir une expression directe du *SCR* en fonction de la distribution d'une variable faisant intervenir les interactions actif / passif.

2.1 Analyse du bilan et expression générale

On s'intéresse donc dans une première étape à l'analyse du bilan simplifié de l'assureur, qui se présente de la manière suivante à la date t :

BILAN en t

A_t	E_t
	L_t

où :

- A_t : la valeur de marché de l'actif en t ;
- L_t : la valeur de marché du passif en t.

Il évolue selon la dynamique suivante :

$$A_{t+1} = A_t \times \left(1 + R_{t+1}\right) - F_{t+1} + C_{t+1}$$
$$L_{t+1} = BEL_{t+1} + RM_{t+1}$$
$$E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1}$$

où :

- R_{t+1} : le rendement (aléatoire) des actifs incluant les coupons entre t et $t+1$;
- F_{t+1} : les prestations et les frais versés (aléatoires) entre t et $t+1$;
- C_{t+1} : les cotisations perçues (aléatoires) entre t et $t+1$.

On peut toutefois observer que sauf exception les cotisations futures ne sont pas prises en compte dans le calcul, effectué dans une logique de *run-off*, et que donc on a en général $C_{t+1} = 0$, hypothèse que l'on supposera donc vérifiée dans la suite. Dans le dispositif Solvabilité 2, le critère de calcul du *SCR* est le contrôle de la probabilité de ruine à un an, ce qui conduit à devoir respecter la condition $P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) \geq 99,5\%$.

En pratique, à la date initiale, une partie des fonds propres de l'entité correspond au capital requis et l'autre partie reste disponible (*Free Surplus*) :

BILAN en 0

	FS_0
A_0	$SCR = E_0 - FS_0$
	L_0

Pour le calcul du *SCR*, on ne s'intéresse qu'à la partie basse du bilan (c'est-à-dire à la fraction de l'actif en représentation des engagements), ce qui revient à se placer dans la situation où $FS_0 = 0$. Or, on peut écrire en fonction des équations ci-dessus et en supposant pour simplifier que $C_1 = 0$:

$$A_1 - L_1 = A_0(1+R_1) - F_1 - L_1 = (SCR + L_0)(1+R_1) - F_1 - L_1 .$$

On en titre que $\frac{A_1 - L_1}{1+R_1} = (SCR + L_0) - \frac{F_1 + L_1}{1+R_1}$ ce qui conduit à observer que :

$$P(A_1 - L_1 \geq 0) = P\left(SCR \geq \frac{F_1 + L_1}{1+R_1} - L_0\right)$$

et donc la condition limite $P(A_1 - L_1 \geq 0) = 99{,}5\%$ impose que *SCR* satisfasse l'égalité :

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) - L_0 .$$

Ainsi, conditionnellement à l'information relative à l'évolution de l'actif, on se ramène à calculer la loi de $Z = F_1 + L_1$. On peut observer qu'on compare les charges à un an actualisées au taux de rendement du portefeuille $\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}$ à l'engagement initial $L_0 = E(\Lambda_0) + RM_0$. $\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}$ peut être interprété comme l'engagement économique, compte tenu de l'allocation d'actifs effectuée (*cf.* PLANCHET et THEROND [2005]). On peut noter que pour le calcul de la *VaR*, la règle de l'horizon d'un an conduit à remplacer Λ_0 par $\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}$.

2.2 Simplification de la marge pour risque

L'expression ci-dessous doit être explicitée car le *SCR* intervient également dans le terme L_0 au travers de la marge pour risque. Comme $L_0 = BEL_0 + RM_0$ et que la marge pour risque est de la forme $RM_0 = \alpha \sum_t E(SCR_t) \times e^{-rt}$, en utilisant l'approximation $RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR$, avec D_0 la duration de l'engagement, soit $D_0 = \frac{\sum_{t \geq 0} t \times E(F_t) \times e^{-rt}}{\sum_{t \geq 0} E(F_t) \times e^{-rt}}$ on obtient que :

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - BEL_0 - \alpha \times D_0 \times SCR$$

et on en déduit finalement que :

$$SCR = \frac{1}{1 + \alpha \times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - BEL_0\right).$$

Il reste à justifier l'approximation $RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR$; pour cela on fait l'hypothèse que le *SCR* à chaque date est proportionnel au *best estimate*, soit $SCR_t = k \times BEL_t$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} RM_0 &= \alpha \times k \times \sum_t E(BEL_t) \times e^{-rt} = \alpha \times k \times \sum_t E\left(\sum_{u \geq t} E_t(F_u) \times e^{-r(u-t)}\right) \times e^{-rt} \\ &= \alpha \times k \times \sum_t \left(\sum_{u \geq t} E(F_u) \times e^{-ru}\right) \end{aligned}$$

Comme, par inversion des sommations, $\sum_t \left(\sum_{u \geq t} E(F_u) \times e^{-ru} \right) = \sum_u uE(F_u) e^{-ru} = D_0 \times BEL_0$ on trouve que :

$$RM_0 = \alpha \times k \times D_0 \times BEL_0 .$$

Mais comme par définition de *k*, on a en $t = 0$ $k = \frac{SCR}{BEL_0}$ on obtient bien finalement :

$$RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR .$$

On peut noter que l'hypothèse de proportionnalité $SCR_t = k \times BEL_t$ est identique à la logique de détermination de la marge de solvabilité des engagements en assurance vie dans le référentiel Solvabilité 1, l'exigence de marge étant exprimée sous la forme d'un pourcentage de la provision mathématique. L'expérience passée lui confère donc une certaine légitimité dans sa capacité à conduire à des résultats cohérents. On dispose donc maintenant d'une expression générale :

$$SCR = \frac{1}{1 + \alpha \times D_0} \left(VaR_{99,5\%} \left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1} \right) - BEL_0 \right)$$

dans laquelle interviennent les variables aléatoires $Z = F_1 + L_1$ et R_1 associées respectivement à la charge des engagements à un an et au rendement du portefeuille d'actifs. Ces variables peuvent ne pas être indépendantes, par exemple dans le cas où il existe un dispositif de participation aux bénéfices.

On doit encore toutefois observer que la constante $k = \frac{SCR_t}{BEL_t} = \frac{SCR}{BEL_0}$ intervient dans la marge pour risque contribuant à L_1. On a en effet $RM_1 = \alpha \times D_1 \times SCR_1$, ce qui conduit finalement à $RM_1 = \alpha \times k \times D_1 \times BEL_1$ et donc à l'expression suivante de la provision à la date $t = 1$ (qui est donc une variable aléatoire) :

$$L_1 = BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1) ,$$

puis

$$Z = F_1 + BEL_1 \times (1 + \alpha \times k \times D_1)$$

Dans les développements ci-dessus, on vient d'établir que :

$$\chi=\frac{F_1+L_1}{1+R_1}=\frac{F_1+BEL_1\times\left(1+\alpha\times k\times D_1\right)}{1+R_1}$$

avec $k=\frac{SCR}{BEL_0}$; en reportant cette expression dans l'égalité :

$$SCR=\frac{1}{1+\alpha\times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+L_1}{1+R_1}\right)-BEL_0\right)$$

on trouve finalement que :

$$SCR=\frac{1}{1+\alpha\times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+BEL_1\times\left(1+\alpha\times\frac{SCR}{BEL_0}\times D_1\right)}{1+R_1}\right)-BEL_0\right).$$

Cette équation est une équation implicite en la variable *SCR* dont la forme n'est pas simple. On peut donc chercher à la simplifier pour obtenir une expression explicite du besoin en capital. Le terme correctif $1+\alpha\times k\times D_1$ qui est en toute rigueur une variable aléatoire (vu de $t=0$) peut être approché par la constante $c=1+\alpha\times k\times\left(D_0-1\right)$; cette constante est par ailleurs supérieure à un et on majore donc (légèrement) *Z* en considérant $Z_c=c\times\left(F_1+BEL_1\right)$. On en déduit que :

$$VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+L_1}{1+R_1}\right)\approx c\times VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+BEL_1}{1+R_1}\right)$$

l'approximation étant prudente. En reportant dans l'équation implicite satisfaite par *SCR*, on en déduit que :

$$SCR=\frac{1}{1+\alpha\times D_0}\left(\left(1+\alpha\times\frac{SCR}{BEL_0}\times\left(D_0-1\right)\right)VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1+BEL_1}{1+R_1}\right)-BEL_0\right)$$

ce qui conduit après quelques calculs à l'expression :

$$SCR=\frac{\frac{VaR_{99,5\%}\left(\chi\right)}{BEL_0}-1}{1+\alpha\times\left(D_0-\frac{VaR_{99,5\%}\left(\chi\right)}{BEL_0}\left(D_0-1\right)\right)}BEL_0$$

avec $\chi = \frac{F_1 + BEL_1}{1+R_1}$. $\tau = \frac{VaR_{99,5\%}(\chi)}{BEL_0}$ s'interprète comme le "taux de chargement" des engagements requis pour le contrôle de la ruine au niveau choisi.

On a en fonction de cette variable :

$$SCR = \frac{\tau - 1}{1 + \alpha \times \left(D_0 - \tau\left(D_0 - 1\right)\right)} BEL_0 .$$

On est ainsi ramené au calcul des quantiles de la loi de la variable aléatoire $\chi = \frac{F_1 + BEL_1}{1+R_1}$. En fonction du contexte, et notamment de l'existence ou non d'une clause de participation aux bénéfices, les deux termes de χ peuvent être ou non indépendants. On montre dans la suite que la complexité du problème dépend finalement assez peu de cette dépendance, le point crucial étant de déterminer la loi de $F_1 + BEL_1$ conditionnellement à l'ensemble des facteurs de risques systématiques, que ceux-ci soient de nature financière ou pas.

3. CALCUL DES QUANTILES DE χ

On se propose de fournir des solutions au calcul des quantiles de $\chi = \frac{F_1 + BEL_1}{1+R_1}$ avec deux approches distinctes :

- dans un premier temps on s'appuie sur la normalité asymptotique du passif ;
- dans un second temps on cherchera plutôt une loi ajustable raisonnablement qui permette un calcul explicite, suivant en cela la démarche de DEELSTRA et JANSSEN [1998].

3.1 Approche asymptotique

On considère dans un premier temps que l'engagement n'est soumis à aucun risque systématique. Dans le cas d'un contexte en assurance de personnes avec des individus $i \in I$, la somme des prestations actualisées de $i \in I$ étant une variable aléatoire X_i, on note $I_1 \subset I$ l'ensemble aléatoire des individus encore présents en $t = 1$.La valeur actualisée des prestations futures s'écrit alors :

$$\Lambda = e^{-r} F_1 + \sum_{i \in I_1} X_i$$

$\Lambda = \sum_{i \in I} X_i$ peut être approchée par une loi normale. On pose $\Lambda_1 = \sum_{i \in I_1} X_i^+(1)$ où on a noté $X_i^+(1) = X_i \left| i \in I_1 \right.$. Conditionnellement à $I_1 \subset I$, cette variable est également approximativement gaussienne. Cela permet d'écrire :

$$E\left(e^{u\Lambda_1}\right) = E\left(E\left(e^{u\Lambda_1} \left| I_1 \right.\right)\right) \approx E\left(e^{uE(\Lambda_1|I_1) + \frac{u^2}{2}V(\Lambda_1|I_1)}\right)$$

et donc :

$$E\left(e^{u\Lambda_1}\right) \approx \sum_{I_1 \subset I} P(I_1) e^{uE(\Lambda_1|I_1) + \frac{u^2}{2}V(\Lambda_1|I_1)}$$

où $P(I_1)$ est la probabilité de réalisation de l'ensemble I_1 ce qui montre que Λ_1 n'est pas gaussienne et que sa loi est un mélange de lois normales décrit par l'équation ci-dessus.

3.1.1 *Résolution dans le cas général*

On peut toutefois raisonnablement, à la date $t = 0$, approximer $F_1 + BEL_1 = F_1 + E_1(\Lambda_1)$ par $e^r \Lambda = F_1 + \sum_{i \in I_1} e^r X_i$ qui est distribué selon une loi normale. En effet, en posant $\Delta = F_1 + E_1(\Lambda_1) - e^r \Lambda = \sum_{i \in I_1} E_1\left(X_i^+(1)\right) - \sum_{i \in I_1} e^r X_i$, comme par définition de $X_i^+(1)$, $\sum_{i \in I_1} E_1\left(X_i^+(1)\right) - \sum_{i \in I_1} e^r X_i = \sum_{i \in I_1}\left(E_1\left(e^r X_i\right) - e^r X_i\right)$, Δ est l'écart entre une variable et son espérance conditionnelle et est donc de variance minimale. Cela légitime l'approximation proposée, au sens de la norme L^2.

A ce stade on a donc prouvé qu'il était possible d'approcher la loi de $Z_1 = F_1 + BEL_1$ par la loi normale de $e^r \Lambda$. Plus précisément on doit calculer, en utilisant l'approximation gaussienne justifiée ci-dessus et en supposant $\frac{1}{1+R_1} = e^{-r_1}$:

$$\pi(x) = P\left(\frac{F_1 + BEL_1}{1+R_1} \le x\right) \approx P\left(e^{r-r_1} \times \Lambda \le x\right)$$

ce qui conduit à l'expression :

$$\pi(x) \approx P\left(\Lambda \le x \times e^{r_1 - r}\right) = E_{r_1} \Phi\left(\frac{x \times e^{r_1 - r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right)$$

et finalement :

$$\pi(x) \approx \int \Phi\left(\frac{x \times e^{u-r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right) f_{r_1}(u)\,du \,.$$

L'équation donnant *SCR* est $\pi(x) = 0{,}995$, qui nécessite une résolution numérique par des techniques de type Newton-Raphson. La prise en compte du risque de marché, au travers de r_1, rend donc impossible l'obtention de formules fermées, même dans le cas de rendements gaussiens ; en effet, si r_1 est gaussienne de paramètres (μ_1, σ_1^2) alors on a :

$$\pi(x) \approx \int \Phi\left(\frac{x \times e^{u-r} - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)}\right) \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) du \,.$$

Avec le changement de variable :

$$r + \ln\left[\frac{1}{x}\left(E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)\right)\right] = u \;\; ; \;\; \frac{\sigma(\Lambda)}{E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)} dv = du$$

on obtient :

$$\pi(x) \approx \sigma(\Lambda) \int \frac{\phi(v)}{E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r + \ln\left[\frac{1}{x}\left(E(\Lambda) + v\sigma(\Lambda)\right)\right] - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) dv$$

Le calcul numérique de cette intégrale est possible, mais la résolution de $\pi(x) = 0{,}995$ n'admet pas de solution explicite.

3.1.2 Cas particulier de l'absence de risque financier

Dans le cas limite où il n'y a pas de risque financier et $r_1 = r$, on a simplement $\tau = 1 + u_{99,5\%} \times \frac{\sigma(\Lambda)}{BEL_0}$ et alors le capital réglementaire est de la forme :

$$SCR = \frac{u_{99,5\%} \times cv_0}{1 + \alpha \times \left(1 - u_{99,5\%} \times cv_0 \times D_0\right)} BEL_0$$

avec $cv_0 = \frac{\sigma(\Lambda)}{BEL_0}$ le coefficient de variation du portefeuille. On peut observer que ce coefficient est petit car il décroit en $N^{-1/2}$ avec *N* la taille du portefeuille.

Ce cas particulier est important, il correspond à la mise en place d'un modèle interne partiel pour le risque de souscription. On vient en fait de montrer que, en assurance de personne, lorsque l'ensemble des risques sont bien restitués dans le calcul du *best estimate*, les éléments clé de mesure du risque de souscription s'obtiennent simplement :

$$BEL_0 = E(\Lambda),$$

$$SCR = \frac{u_{99,5\%} \times cv_0}{1+\alpha \times \left(1-u_{99,5\%} \times cv_0 \times D_0\right)} BEL_0 ,$$

$$RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR .$$

Ainsi, dans ce cas, le calcul du *best estimate* permet de trouver les deux autres éléments requis, la marge pour risque et le capital de solvabilité.

3.2 Prise en compte de facteurs de risque systématiques

L'approximation gaussienne effectuée ci-dessus n'est valide qu'en présence d'individus indépendants et de flux futurs uniformément bornés. Si un facteur de risque systématique est introduit, les résultats établis restent valides conditionnellement à ce facteur et l'obtention d'une expression explicite pour le *SCR* n'est plus possible, même dans les cas simples.

En effet, soit $Z = f(X,Y)$ avec $Z|Y$ gaussienne, on a :

$$P(Z \le q) = \mathrm{E}\, P\left(f(X,Y) \le q | Y\right) = \int \Phi\left(\frac{q-\mu(y)}{\sigma(y)}\right) F_Y(dy)$$

et donc la résolution de l'équation en q $P(Z \le q) = \alpha$ n'est pas simple. On peut noter que le risque financier est un cas particulier de risque systématique. En pratique, la résolution de l'équation ci-dessus est possible par des méthodes de simulation de type Monte Carlo. En effet, on peut simuler le facteur de risque Y et calculer :

$$P(Z \le q) \approx \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \Phi\left(\frac{q-\mu(y_k)}{\sigma(y_k)}\right)$$

puis résoudre numériquement $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \Phi\left(\frac{q-\mu(y_k)}{\sigma(y_k)}\right) = \alpha$. Une fois déterminé, un estimateur $\widehat{q}_\alpha$ du *SCR*, la marge pour risque reste calculée *via* $RM_0 = \alpha \times D_0 \times SCR$.

3.3 Approximation log-normale

Pour éviter le recours à la résolution d'une équation dont les termes ont été obtenus par simulation des facteurs de risque systématiques, on peut rechercher une formule analytique dans un contexte simplifié, dans une logique de recherche de *proxy* capable de fournir simplement une maîtrise des ordres de grandeur sous-jacents. On peut déterminer une formule approchée pour $VaR_{99,5\%}(\chi)$ en supposant que $\frac{1}{1+R_1}=e^{-r_1}$ est une variable log-normale (ce qui revient à supposer que le taux de rendement instantané est gaussien, hypothèse souvent retenue en pratique et qui, bien que souvent contestée, peut apparaître justifiable, *cf.* ROSA [1977]), en supposant également la log-normalité de F_1+BEL_1, la variable $\chi=\frac{F_1+BEL_1}{1+R_1}$ est alors également log-normale et on a $VaR_p(\chi)=\exp\left(m+u_p\times\sigma\right)$. Supposer la log-normalité de χ revient à faire une hypothèse forte sur l'interaction entre les facteurs de risque systématiques et la charge actualisée conditionnelle à ces facteurs, qui on l'a vu est approximativement gaussienne.

Sous cette hypothèse, on a finalement l'expression simple du *SCR* :

$$SCR=\frac{\exp\left(m+u_{99,5\%}\times\sigma\right)-BEL_0}{1+\alpha\times\left(D_0-\frac{\exp\left(m+u_{99,5\%}\times\sigma\right)}{BEL_0}\left(D_0-1\right)\right)}$$

avec $m=E\left(\ln\left(\frac{F_1+BEL_1}{1+R_1}\right)\right)$ et $\sigma^2=V\left(\ln\left(\frac{F_1+BEL_1}{1+R_1}\right)\right)$.

Du point de vue pratique, le calcul des moments de $Z_1=F_1+BEL_1$ nécessite simplement une simulation du passif sur un an, BEL_1 pouvant être calculé simplement conditionnellement à la connaissance des individus présents (à risque) en $t=1$. On dispose donc d'une formule simple pour le calcul du *SCR* (et par conséquent de la marge pour risque qui lui est par hypothèse proportionnel) dans ce contexte.

On peut généraliser ce raisonnement en supposant que le passif et l'actif sont des exponentielles de lois stables, ce qui ramène au calcul du quantile d'une loi stable.

4. APPLICATION A UN REGIME DE RENTES VIAGERES

La présente partie décrit les modalités de construction d'un modèle interne partiel adapté à un régime de rentes viagères. Le développement une telle approche est motivée par la nécessité de quantifier au mieux l'exigence de fonds propres imposée par les risques spécifiques qui affectent l'entité.

4.1 Présentation du régime

Le régime de rentes viagères étudié et repris de l'exemple utilisé dans GUIBERT [2010] est un régime de retraite supplémentaire d'entreprise à prestations définies transféré auprès d'un organisme assureur et géré de manière isolée du reste de son activité au sein d'un fonds cantonné. Rappelons que la mise en place d'un tel dispositif au sein d'une entreprise conduit le souscripteur à provisionner (comptabilisation selon la norme IAS19) l'engagement promis à l'égard des actifs et des allocataires du régime. Le mécanisme de transfert de l'engagement vers un organisme assureur permet d'alléger la charge du souscripteur généralement en phase de restitution, ce qui impose au premier d'analyser avec précision les risques qui lui sont transmis.

4.1.1 Nature des engagements

Au départ de chaque salarié de l'entreprise à la retraite, le régime étudié prévoit le versement, d'une pension viagère, dont le montant dépend des droits acquis par l'intéressé au cours de sa carrière, complétée d'une allocation supplémentaire de réversion à destination du conjoint survivant.

Pendant la phase de constitution de la rente, l'employeur cotise à un fonds de manière à pouvoir honorer son engagement vis-à-vis du salarié. Au départ à la retraite fixé à 61 ans, il verse à l'assureur le capital constitutif de la rente en fonction des conditions de transformation en rente applicables.

Pour des raisons de simplification, on suppose le turnover et le taux de croissance des salaires nuls. En pratique, ces éléments sont caractérisés par le biais de tables fonction de l'ancienneté ou de l'âge déterminées sur la base de données propres à l'entité. La retraite de réversion est versée à partir du décès de l'assuré allocataire sans condition d'âge pour les réversataires.

Par ailleurs, le contrat intègre deux garanties supplémentaires. D'une part, les revalorisations versées aux allocataires sont par convention issues de décisions discrétionnaires indépendantes des résultats techniques et financiers. De cette manière, la problématique associée à l'évaluation d'options de participation aux bénéfices ne se pose pas. En revanche, le contrat prévoit une revalorisation des prestations servies chaque année au niveau de l'inflation, caractérisée par l'indice des prix à la consommation. Grâce à ce dispositif toute évolution défavorable de l'inflation par rapport aux revalorisations anticipées par le tarif est à la charge de l'assureur.

D'autre part, le régime est assorti d'une garantie sur la table de mortalité. Elle permet de transférer vers l'assureur le risque inhérent à l'aléa viager qui pèse habituellement sur l'employeur pendant la phase de constitution. Ainsi, le souscripteur est couvert contre toute dérive de la mortalité du groupe assuré. L'assureur s'engage alors à tarifer le contrat sur la base d'une table de mortalité définie contractuellement. Ainsi, il supporte le coût d'une dérive de la mortalité ou d'un éventuel changement de table.

L'intégration de ces garanties (décrites par ailleurs dans PLANCHET et JOUAHRI [2008]) impose de considérer l'ensemble de la population des assurés, et non plus seulement les seuls allocataires. On considère que les droits des actifs sont figés (pas d'acquisition de droits futurs) à la date d'évaluation.

Enfin, on considère la mise en place d'un traité de réassurance en quote part de taux de cession 50 %.

4.1.2 Population couverte

Le régime de retraite étudié couvre une population d'assurés, en groupe fermé, constituée :

- de salariés encore en activité à la date d'évaluation, appelés « actifs » ;
- de retraités, appelés « allocataires ».

Dans le cadre de cette étude, une information tête par tête est disponible pour le groupe des assurés ce qui permet de travailler directement sur une population non agrégée. Les caractéristiques de cette population sont décrites par les tableaux suivants :

Actif	***Effectif***	***Age moyen***
Homme	2 044	51,87
Femme	2 669	52,48
Total	4 713	52,21

Allocataire	*Effectif*	*Age moyen*
Homme	1 115	71,47
Femme	1 632	72,57
Total	2 747	72,12

Les figures suivantes présentent les flux de prestations espérées et actualisées versées aux actifs et aux allocataires (sans revalorisation) :

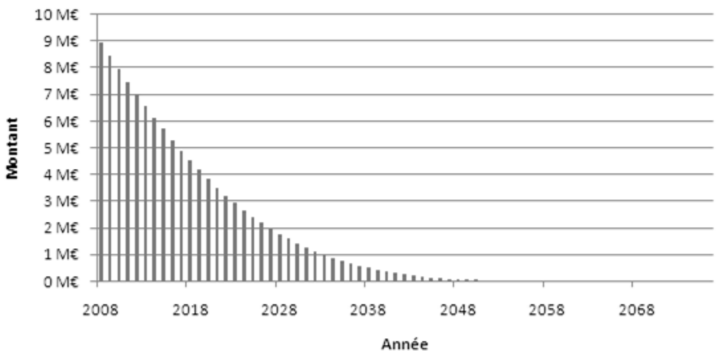

Figure 1 - Flux de prestations espérées et actualisées des allocataires

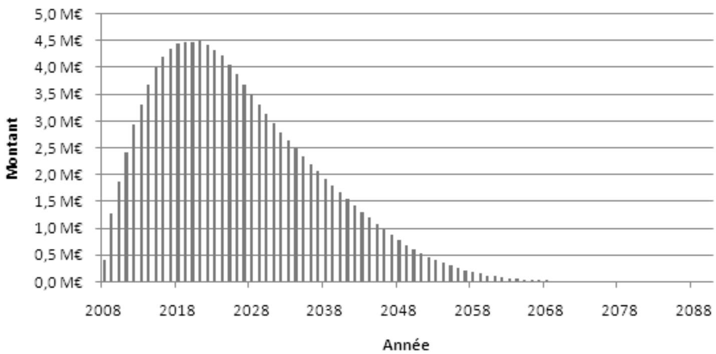

Figure 2 - Flux de prestations espérées et actualisées des actifs

4.1.3 Allocation d'actifs

A la date des calculs, les actifs du fonds cantonnés sont répartis de la manière suivante (en valeur comptable) :

- ✓ 90 % d'obligations ;
- ✓ 10 % d'actions.

On suppose dans la suite que ces actifs sont parfaitement liquides. Par ailleurs, les problématiques de détermination d'un critère optimal d'allocations stratégiques d'actifs ne sont pas abordées dans cette étude. Ces aspects étant néanmoins essentiels dans le contrôle de la probabilité de ruine, le lecteur intéressé pourra trouver dans PLANCHET et THEROND [2008] une démarche appropriée pour répondre à cette problématique.

4.2 Analyse et modélisation des facteurs de risques

L'identification des facteurs de risques est une étape indispensable à la bonne maîtrise de ces derniers et par ricochet à la maîtrise de la solvabilité de l'entité. La présente partie permet de reprendre les principaux facteurs de risques susceptibles de nuire à la bonne marche du régime, l'objet de cette présentation n'étant pas de décrire de manière exhaustive tous les formes de risques adverses à l'entité mais seulement celles dont la survenance est réaliste et les effets quantifiables. Par ailleurs, la modélisation des risques nécessite de distinguer les sources d'incertitude selon leur caractère mutualisable ou systématique.

4.2.1 Risques économique et financier

Le choix d'un modèle d'actifs est un élément délicat dans la mise en place d'un modèle interne. Il doit en effet être accompagné d'une analyse méthodique des risques impactant l'assureur afin d'identifier les informations susceptibles d'être utilisées pour caractériser les risques et pour alimenter le modèle.

Dans le cadre de l'évaluation *market consistent* des différents postes du bilan, le modèle d'actifs utilisé doit s'inscrire dans une logique de long terme et respecter les équilibres macro-économiques tout en prenant en compte les variations à court terme de la valeur des actifs. L'inflation, compte tenu de son importance dans la réalisation de ces équilibres et de son rôle dans les dispositifs de revalorisation des pensions, doit faire l'objet d'une attention particulière.

Par la suite, une approche dérivée du modèle intégré d'AHLGRIM et AL. [2005] est retenue afin de répondre à cette problématique. La spécification et le calibrage de ce modèle n'étant pas l'objet de cette étude, le lecteur intéressé pourra se reporter à GUIBERT [2010] pour plus de précisions sur ces éléments. Ce modèle permet notamment de spécifier :

- les taux d'intérêts réels et nominaux ainsi que le prix des zéro-coupon associés ;
- l'inflation utilisée à la fois pour la revalorisation des prestations et des frais ;
- le rendement des actions ;
- le risque de *spread*.

L'expression des grandeurs économiques telles que le prix des zéro-coupon est régie par des formules fermées. Ainsi, l'évaluation de ces quantités est directe à n'importe quelle date t conditionnellement à l'information disponible à cette date, ce qui permet d'éluder les problématiques liées à la simulation dans la simulation à l'actif.

4.2.2 Risques biométriques

Un régime de retraite est soumis à une incertitude relative à la durée de vie de son portefeuille. En particulier, le risque de longévité prend une place d'autant plus importante que s'allonge la durée de vie humaine. La gestion de cet aléa nécessite de considérer à la fois sa part mutualisable, caractérisée par les fluctuations d'échantillonnage observées autour de la table d'expérience reflétant le niveau de mortalité moyen, et les risques systématiques impactant cette même table[1]. Ces derniers ne sont pas modélisés par ailleurs, l'ajout de facteurs de risques systématiques supplémentaires ne venant pas modifier l'expression des quantités utiles à la spécification du modèle mais simplement augmenter le nombre de facteurs de risque dans les simulations primaires.

Dans cette étude, la table d'expérience retenue pour valoriser les engagements *best estimate* est la table réglementaire TGH/F 05 pendant quinze ans puis cette même table abattue de 3 % au-delà.

4.3 Calcul du capital requis

Le calcul du capital requis *SCR* nécessite la projection et l'évaluation du bilan à un an de l'assureur. Ainsi, conditionnellement à l'information disponible à cette date, les

[1] *Cf.* pour une présentation de ces risques : http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2009/11/prendre-en-compte-les-chocs-syst%C3%A9matiques-li%C3%A9s-%C3%A0-la-mortalit%C3%A9.html

différents postes doivent être valorisés de manière *market consistent*. A travers cet exemple, un modèle interne partiel simplifié est développé et on montre qu'à travers une approche « semi-analytique », l'expression des différentes grandeurs de références que sont le *best estimate*, la marge pour risque et le *SCR* sont obtenues de manière explicite. Ainsi, la démarche pour construire le modèle interne partiel peut être décomposée en cinq étapes principales :

- **Etape 1** : Génération des *scénarii* économiques (valeur des actions, des taux courts, des taux longs, des taux d'inflation, etc.) à horizon un an ;
- **Etape 2** : Détermination du rendement de l'actifs et évaluation des zéro-coupon et des coefficients de revalorisation vus de $t=1$ pour chaque tirage du faisceau de trajectoires générées ;
- **Etape 3** : Evaluation des moments d'ordre 1 et 2, conditionnels à chaque état du monde, de la variable aléatoire χ afin de caractériser sa loi conditionnelle ;
- **Etape 4** : Détermination de la fonction de répartition et de la densité de la loi de χ ;
- **Etape 5** : Calcul du quantile à 99,5 % de χ puis calcul du *SCR*.

4.3.1 Expression du bilan à la date d'inventaire

Dans le contexte de cette application, on a :

$$\Lambda = \sum_{t\geq 0}\left(F_t - C_t\right)\times\frac{IPC_t}{IPC_0}\times\mathbf{exp}\left(\int_0^t -r_s^{nom}ds\right)$$

où IPC_t représente l'indice des prix à la consommation à la date t et r_t^{nom} le taux d'intérêt nominal continu à la date t. La revalorisation des prestations au niveau de l'inflation revient à considérer une actualisation au niveau du taux d'intérêt réel. En effet, en considérant, l'expression du rapport des indices des prix $\frac{IPC_t}{IPC_0}=\mathbf{exp}\left(\int_0^t q_s ds\right)$ où q_t représente la taux d'inflation instantané à la date t et le fait que le taux d'intérêt nominal r_t^{nom} s'écrit $r_t^{nom}=q_t+r_t$ en fonction du taux d'intérêt réel r_t et du taux d'inflation, l'engagement s'écrit :

$$\Lambda = \sum_{t \geq 0} \left(F_t - C_t \right) \times \mathbf{exp}\left(\int_0^t -r_s ds \right)$$

En faisant l'hypothèse d'indépendance entre l'évolution de la mortalité et celle des taux d'intérêt, il vient l'expression de $BEL_0 = E(\Lambda)$:

$$BEL_0 = \sum_{t \geq 0} E\left(F_t - C_t \right) \times E\left(\mathbf{exp}\left(\int_0^t -r_s ds \right) \right)$$

La quantité $E\left(\mathbf{exp}\left(\int_0^t -r_s ds \right) \right)$ correspondant à la valeur d'un zéro coupon (taux réel) à la date d'inventaire et de maturité t que l'on note $B(0,t)$.

4.3.2 Expression du SCR

Conformément à l'approche décrite en 2.2, la simplification de la marge pour risque est opérée pour calculer le *SCR*, cette grandeur étant une variable aléatoire non indépendante de BEL_1, nous avons vue que son expression n'était pas simple *a priori*. On prend dans la suite l'approximation :

$$SCR = \frac{\frac{VaR_{99,5\%}(\chi)}{BEL_0} - 1}{1 + \alpha \times \left(D_0 - \frac{VaR_{99,5\%}(\chi)}{BEL_0} (D_0 - 1) \right)} BEL_0$$

4.3.3 Expression de la variable χ

L'approche développée pour évaluer le besoin en capital *SCR* requis par les risques modélisés nécessite le calcul des quantiles de la variable $\chi = \frac{F_1 + BEL_1}{1 + R_1}$, conformément à ce qui est décrit en 2.2.

En notant Y est une variable synthétique représentant l'ensemble des risques systématiques économiques et financiers, on remarque que la variable $\chi | Y$ est asymptotiquement gaussienne puisque soumise au seul risque mutualisable de mortalité. Cette variable ne dépend que de la population d'individus survivants à la date $t = 1$ dont la composition est aléatoire et varie selon la survie des individus qui la compose. Sa convergence vers une loi normale est assurée par l'indépendance des individus et par le caractère uniformément borné des montants considérés. Par conséquent, la loi de $\chi | Y$ est déterminable par la connaissance de ses moments. Dans le cas de la population considérée initialement avec des individus $i \in I$ et en notant $I_1 \subset I$ l'ensemble aléatoire des individus encore présents en $t=1$, la valeur actualisée des prestations futures vues de $t=1$ s'écrit alors avec les mêmes notations qu'en 3.1 :

$$\Lambda_1 = \sum_{i \in I_1} X_i^+(1)$$

En supposant que les cotisations perçues sont nuls pour simplifier l'expression des calculs, la variable $X_i^+(1)$ s'écrit pour $i \in I_1$ en fonction du montant de sa rente f_i (connue à la date d'inventaire) et de sa durée de survie résiduelle à l'âge x_i+1 notée T_{x_i+1} :

$$\begin{aligned} X_i^+(1) &= \sum_{t \geq 1} f_i \times \frac{IPC_1}{IPC_0} \times \frac{IPC_t}{IPC_1} \times \mathbf{exp}\left(\int_1^t -r_s^{nom} ds \right) \times 1_{\{T_{x_i+1} > t\}} \\ &= \frac{IPC_1}{IPC_0} \times \sum_{t \geq 1} f_i \times \mathbf{exp}\left(\int_1^t -r_s ds \right) \times 1_{\{T_{x_i+1} > t\}} \end{aligned}$$

A la date $t=1$, le *best estimate* s'écrit $BEL_1 = E_1(\Lambda_1)$ et $F_1 = \sum_{i \in I_1} f_i \times \frac{IPC_1}{IPC_0}$. A présent, considérons le calcul de ces grandeurs conditionnellement à l'ensemble des facteurs de risques systématiques $Y=y$. Il vient alors $BEL_1(y) = E_1(\Lambda_1 \mid Y=y)$ avec :

$$\begin{aligned} E_1(\Lambda_1 \mid Y=y) &= E_1\left(\sum_{i \in I_1} X_i^+(1) \mid Y=y \right) \\ &= \sum_{i \in I_1} E_1\left(X_i^+(1) \mid Y=y \right) \end{aligned}$$

et $F_1(y) = \sum_{i \in I_1} f_i \times \frac{IPC_1}{IPC_0}(y)$.

Par indépendance entre l'évolution de la mortalité et des taux d'intérêts, on obtient pour $i \in I_1$:

$$\begin{aligned} E_1\left(X_i^+(1) \mid Y=y \right) &= \frac{IPC_1}{IPC_0}(y) \times E_1\left(\sum_{t \geq 1} f_i \times \mathbf{exp}\left(\int_1^t -r_s ds \right) \times 1_{\{T_{x_i+1} > t\}} \mid Y=y \right) \\ &= \frac{IPC_1}{IPC_0}(y) \times \sum_{t \geq 1} E\left(1_{\{T_{x_i+1} > t\}} \right) \times E_1\left(\mathbf{exp}\left(\int_1^t -r_s ds \right) \mid Y=y \right) \\ &= \frac{IPC_1}{IPC_0}(y) \times \sum_{t \geq 1} E\left(1_{\{T_{x_i+1} > t\}} \right) \times B(1,t)(y) \end{aligned}$$

Ainsi, conditionnellement à $Y=y$, $\chi(y)=\dfrac{F_1(y)+BEL_1(y)}{1+R_1(y)}$ est asymptotiquement gaussienne. Il s'agit pour la caractériser de calculer ses moments, conditionnellement à $Y=y$, les expressions de l'espérance $\mu(y)$ et de la variance $\sigma^2(y)$ étant alors immédiates sous l'hypothèse d'indépendance entre les individus et en remarquant que l'ensemble aléatoire I_1 est déterminée par la survie T_{x_i} à un an des individus $i\in I$ présent à la date d'inventaire :

$$\mu(y)=\frac{\sum_{i\in I}\left(f_i+E_1\left(X_i^+(1)\,|\,Y=y\right)\right)\times E\left(1_{\{T_{x_i}>1\}}\right)\times\frac{IPC_1}{IPC_0}(y)}{1+R_1(y)}$$

$$\sigma^2(y)=\frac{\sum_{i\in I}\left(f_i+E_1\left(X_i^+(1)\,|\,Y=y\right)\right)^2\times V\left(1_{\{T_{x_i}>1\}}\right)\times\left(\frac{IPC_1}{IPC_0}(y)\right)^2}{\left(1+R_1(y)\right)^2}$$

Dès lors la loi de χ peut être caractérisée par l'expression suivante :

$$P(\chi\leq q)\underset{|I|\to+\infty}{\to}\int\Phi\left(\frac{q-\mu(y)}{\sigma(y)}\right)F_Y(dy)$$

En pratique, l'approximation de cette quantité est obtenue *via* la génération de *scénarii* économiques ce qui grâce aux techniques de type Monte Carlo permet d'obtenir :

$$P(\chi\leq q)\approx\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Phi\left(\frac{q-\mu(y_k)}{\sigma(y_k)}\right)$$

4.4 Résultats de la simulation

A la date d'inventaire, l'évaluation du bilan permet de définir les postes suivants, le *SCR* étant calculé par la suite le montant de *Free Surplus* et de marge pour risque n'est pas déterminable initialement :

BILAN en 0 (en M€)

	FS_0 ?
	SCR ?
$A_0 = 193,9$	RM_0 ?
	$BEL_0 = 138,42$

L'actif initial est composé des titres financiers valorisés en *fair value*. La valeur comptable de l'actif est 164,8 M€ (15 % de plus values latentes). La duration de l'engagement du passif est estimée à 12,14 ans.

Dans le cadre de l'exemple étudié, un nombre de $K = 10\,000$ simulations ont été réalisées afin de projeter la situation économique de l'entité à horizon un an. A partir de là, l'évaluation des différents postes du bilan à cette date est réalisée pour chaque *scénario* simulé. Le graphique suivant fournit la distribution et la fonction de répartition des rendements ainsi générés :

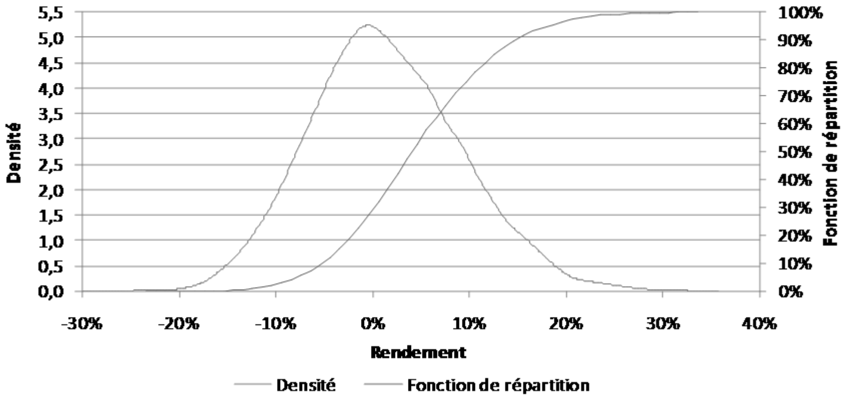

Figure 3 - Densité et fonction de répartition du rendement de l'actif

Indicateur	***Estimation***
Moyenne	1,40%
Médiane	1,09%
Ecart type	7,82 %
Kurtosis	7,34%
Skewness	26,99 %

Dès lors, pour chaque trajectoire de risque systématique, la variable χ est calculée, l'évaluation du *best estimate* étant réalisée à partir des conditions économiques et financières valables dans chaque état du monde à la date $t = 1$.

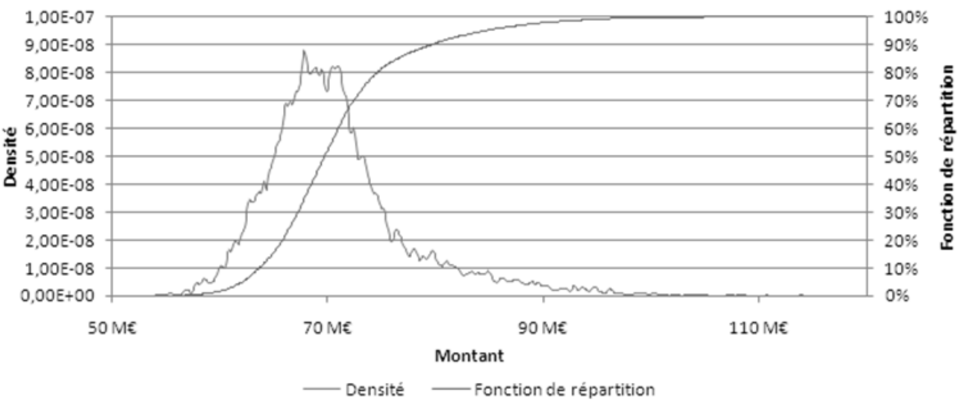

Figure 4 - Densité et fonction de répartition de χ

Indicateur	***Estimation (en M€)***
Moyenne	70,79
Médiane	69,69
Ecart type	7,00
Kurtosis	61,84 %
Skewness	56,80 %

Cette distribution est caractérisée par une queue de distribution épaisse ce qui se traduit par une « dangerosité » importante. Elle peut être mesurée par son coefficient de variation empirique, rapport de l'écart type et de la moyenne empirique qui vaut 9,89 %.

Le niveau de risque global peut être apprécié en utilisant la variance de χ et en décomposant les parts relatives aux risques systématiques (financiers) et de mortalité. En effet, en conditionnant par les risques systématiques *Y*, l'équation de décomposition de la variance conduit à l'égalité suivante :

$$V(\chi)=E\left(V(\chi\mid Y)\right)+V\left(E(\chi\mid Y)\right)$$

Le terme de gauche de l'expression ci-dessus représente le risque mutualisable de mortalité et le second quantifie le risque associé aux aléas systématiques. Ces indicateurs sont calculés empiriquement grâce à leur estimateur sans biais et convergent.

$$\begin{cases} E\left(V(\chi\mid Y)\right)=\dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sigma^2(y_k) \\ V\left(E(\chi\mid Y)\right)=\dfrac{1}{K-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\left(\mu(y_k)-\dfrac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mu(y_k)\right)^2 \end{cases}$$

Indicateur	***Part de la variance totale***
$E\left(V(\chi\mid Y)\right)$	2,32 %
$V\left(E(\chi\mid Y)\right)$	97,68 %

La part du risque mutualisable est relativement modeste (2,32 % de la variance globale), preuve de la bonne mutualisation du portefeuille. Dans le cas présent, la prise en compte de cette source d'aléas affecte donc assez peu la ruine à un an.

A présent, le *SCR* propre au régime est estimé. Le quantile à 99,5 % de la variable χ est égal à 97,17 M€. Sans prise en compte de la marge pour risque, une charge en capital relative à l'ensemble des risques modélisés dans le cadre du modèle interne partiel de 27,46 M€ doit être constituée. L'intégration de la marge pour risque, variant avec le niveau de coût du capital α , génère un besoin en capital repris dans le graphique suivant :

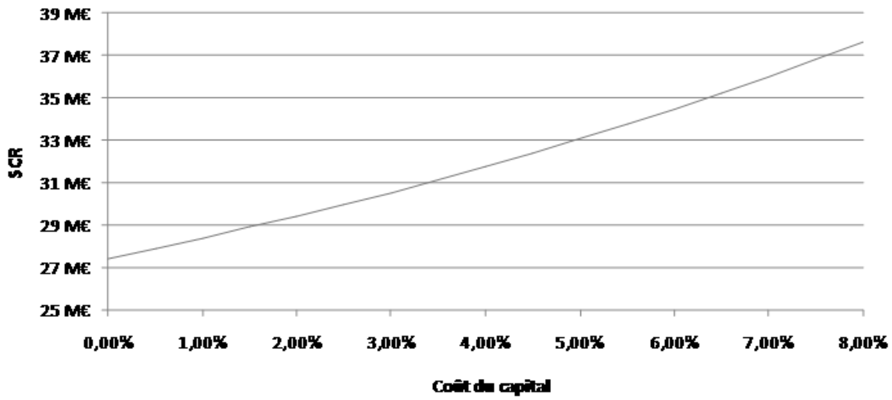

Figure 5 - Evolution du SCR en fonction du coût du capital

L’évolution du *SCR* en fonction du coût du capital permet de quantifier l’impact de la marge pour risque. Cette dernière tient compte de l’ensemble des facteurs de risques systématiques simulés et notamment des aléas financiers. La démarche adoptée n’est pas neutre car elle conduit à considérer pour la marge pour risque la même exposition que le *best estimate*. Ainsi, pour un coût du capital $\alpha = 6\%$, le *SCR* vaut 34,46 M€ soit un surcoût induit par les aléas qui pèsent sur la marge pour risque à un an de près de 7 M€. A la date d’inventaire, la marge pour risque estimée selon la méthode du coût du capital vaut 25,09 M€.

4.5 Comparaison avec les résultats approche « formule standard » et solvabilité 1

A titre indicatif, cette partie présente les résultats obtenus en appliquant l’approche « formule standard », conformément aux spécifications du QIS4 (*cf.* CEIOPS [2008]). On note que l’évaluation des besoins en capital relatifs aux facteurs de risques non pris en charge dans le modèle interne partiel est réalisée en appliquant la démarche préconisée dans le QIS4. Pour rendre les résultats comparables, la marge pour risque est recalculée en excluant le risque de marché.

Référentiel (en M€)	***Best estimate***	***Marge pour risque***	***Provision technique***	***exigence de marge de solvabilité***	***Fonds propres de base(*)***	***FP de base /SCR***
Solvabilité 1	0	0	150,80	5,13	14,03	2,73
Solvabilité 2 – Approche « formule standard »	138,42	9,83	148,25	22,70	45,67	2,01
Solvabilité 2 – Approche « modèle interne partiel »	138,42	9,83	148,25	30,83	45,67	1,48

(*) Evalués selon les règles comptables propres à chaque référentiel.

Dans l'approche « modèle interne partiel », le besoin en fonds propres s'élève à 30,83 M€ ce qui laisse un *free surplus* de 14,84 M€ (le capital alloué représentant 179,08 M€) à la disposition de l'entité contre 22,97 M€ dans l'approche « formule standard » (pour un capital alloué de 170,94 M€). La charge en capital relative à l'ensemble des facteurs de risques modélisés est supérieure à celle issue de l'approche « formule standard ». Cette augmentation s'explique d'une part par la prise en compte du risque associé à la revalorisation des pensions, non intégrée dans l'approche « formule standard » et par une démarche plus prudente pour analyser le risque action. Par ailleurs, le processus développé pour intégrer le risque mutualisable, *via* une méthode analytique, fournit une plus grande finesse à l'estimation réalisée, même si au global il ne pèse que très peu sur la solvabilité. *In fine*, ces deux évaluations indiquent une forte sensibilité du *SCR* aux risques de marché, l'engagement long associé à un régime de retraite étant fortement dépend des risques de taux, de *spread* et incidemment du dispositif de revalorisation mis en place, d'où l'intérêt de mêler les problématiques de réduction de la probabilité de ruine et d'allocation stratégique d'actifs.

En norme française, les actifs financiers sont évalués en valeur comptable et les provisions techniques sont calculées sur la base d'un taux technique égal à 60 % du TME. Le capital alloué est alors de 155,93 M€, conduisant à un capital disponible présentant une valeur de marché de 37,99 M€ (8,9 en valeur comptable et 29,09 de plus values latentes), fortement supérieur à celui estimé dans le référentiel Solvabilité 2. Le montant des provisions techniques dans le référentiel actuel est relativement proche de celui constitué dans le référentiel Solvabilité 2. *A contrario*, l'exigence de marge, proportionnelle au montant des provisions, ne semble suffisante que pour couvrir les risques de souscription, une partie des risques de marché étant en fait intégrée dans le principe de prudence des provisions techniques.

On note toutefois au global, une dégradation relativement forte du ratio de couverture des engagements, qui passe de 2,7 en Solvabilité 1 à 1,5 dans le modèle interne partiel, ceci étant en accord à ce que l'on peut constater pour d'autres types de contrats.

5. CONCLUSION

Dans le cas d’un modèle interne, le calcul du *SCR* est la plupart du temps effectué par l’application des techniques de simulation dans les simulations, particulièrement coûteuses en termes de temps de traitement. Si des méthodes d’optimisation sont utilisables (*cf.* DEVINEAU et LOISEL [2009]) cette technique suppose de calculer d’une manière approchée la marge pour risque à 1 an.

Partant du constat que la marge pour risque ne peut être calculée suivant l’approche coût du capital, le présent travail a montré que le *SCR* et les provisions techniques d’un contrat d’assurance de personne peuvent être obtenus sur la base de la connaissance des risques systématiques[1] et des moments conditionnels[2] d’ordre 1 et 2 de la distribution des flux de trésorerie.

Par application des mécaniques de calculs analytiques, le recours à la simulation s’en trouve fortement limité réduisant de ce fait les temps de calcul de manière drastique. Au-delà de la simple considération du temps de calcul, en se focalisant sur l’analyse de la loi des risques, le processus présenté dans cette étude permet aux organismes assureurs de mieux maîtriser leurs risques et de mesurer l’impact de chaque hypothèse dans l’évolution du *SCR*. Ainsi, outre le fait de proposer une méthode de calcul du *SCR* efficace, ce travail se positionne dans une optique d’analyse de la politique de gestion des risques d’assurance en vue de le contrôler. On notera que le présent travail montre que la clé du calcul du *SCR* se situe non pas au niveau de la projection des trajectoires des flux de trésorerie (propre à la mécanique de simulation dans les simulations) mais dans la détermination de tables d'expérience et de la capacité à modéliser de manière opérationnelle le risque systématique associé au choix de ces tables.

L’approximation de la marge pour risque étant l’un des points essentiels de la

[1] Connaissance basée sur des calculs empiriques ou analytiques.
[2] Moments conditionnels aux risques systématiques.

méthode décrite dans ce papier, il convient de noter que dans le cas de contrats à passif longs, un calcul rigoureux de la marge pour risque est en pratique irréalisable. En effet, de par la relation de récurrence reliant le *SCR* à la marge pour risque, ce calcul nécessite de modéliser l'ensemble des *SCR* par récurrence inverse de l'extinction du contrat jusqu'à sa création. De ce fait, la marge pour risque est évaluée sur la base de la connaissance du *SCR* d'une manière relativement semblable à l'approche par quantiles[1] (mais en perdant le lien direct avec le risque du contrat).

De plus, il convient de remarquer que l'approche coût du capital préconisée par le CEIOPS est relativement arbitraire. Tout d'abord, le CEIOPS introduit cette dernière *via* la notion de valeur de transfert des provisions techniques. Or le *best estimate* et les *SCR* ne sont pas établis sur la base de données de marché mais sur des données propres à la compagnie (la problématique des frais étant le point crucial). Il est d'ailleurs opportun de se demander si un calcul basé sur des données de marché pourrait être *best estimate* (il paraît délicat de créer des lois d'expérience de marché présentant un niveau de finesse adéquat pour l'ensemble des portefeuilles du marché français). Donc le calcul apparaît ici peu conforme au principe même de la valeur de transfert.

Enfin, en raison du faible nombre de transferts de portefeuille sur le marché français, il est particulièrement délicat d'ajuster les paramètres de marché de la formule du coût du capital.

Cette réserve faite sur la pertinence de l'utilisation d'une approche coût du capital pour le calcul de la marge pour risque, le présent travail a permis de proposer une structure relativement générale pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. Cette structure repose sur l'hypothèse que le capital requis est proportionnel au *best estimate*, ce qui peut apparaître assez contraignant, mais constitue une simplification incontournable pour prendre en compte la logique de coût du capital sous-jacente à Solvabilité 2. Le modèle proposé s'adapte aisément au contexte d'une évaluation par quantile de la marge pour risque, qui serait du point de vue de la rigueur de la modélisation préférable à l'approche actuellement en vigueur dans le cadre de Solvabilité 2.

---

[1] Et plus particulièrement dans le cas d'une approximation gaussienne.

BIBLIOGRAPHIE

AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. [2005] Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society 92.* (http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf).

CEIOPS [2008] QIS4 Technical Specifications. MARKT/2505/08. CEIOPS (http://www.ceiops.eu).

DEELSTRA G., JANSSEN J. [1998] « Interaction Between Asset Liability Management and Risk Theory », *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, vol. 14, 295-307.

DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] « Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des 'simulations dans les simulations' pour le calcul du capital économique Solvabilité II », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°17.

GORDY M.B., JUNEJA S. [2008] « Nested Simulation in Portfolio Risk Measurement » *Finance and Economics Discussion Series*, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.

GUIBERT Q. [2010] « Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire », ISFA, Mémoire d'actuariat.

PLANCHET F. [2009] « Provisionnement *best estimate* et risque arrêt de travail. », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°140 du 01/10/2009.

PLANCHET F. JOUAHRI A. [2008] « Assurer la pérennité du niveau de vie des retraités dans un régime de retraite collective : les garanties de rendement avec montage inflation sont-elles la solution ? », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°128 du 01/10/2008.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005] « Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie : présentation et mise en œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité 2 », *Bulletin français d'actuariat*, Vol. 7 n°13.

PLANCHET F.,THEROND P.E. [2008] « Rentes en cours de service : un nouveau critère d'allocation d'actifs », *Bulletin français d'actuariat,* Vol. 9 n°17.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques*, Paris : Economica.

ROSA J.J. [1977] « Réponse aux commentaires de M Mouillart », Revue Economique, Vol. 28, n°2, pp290-295.

SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, 1990.