Construction de tables dœxpérience et mesure des risques associés

Février 2014 Version 1.0

Aymric Kamega *Actuaire*
aymric.kamega@univ-brest.fr

Préambule

En présence de données limitées, il apparaît qu'en cas de modélisation de l'hétérogénéité et de la mortalité future, la segmentation de la population (par sous-population dans le premier cas ou par année dans le second cas) conduit à favoriser l'émergence de certains risques systématiques dans les évaluations (calcul de provision, calcul de besoin en capital, etc.).

On rappelle ici les 5 sources d'incertitude associées à la modélisation de la mortalité :

- incertitude au titre du risque opérationnel ;

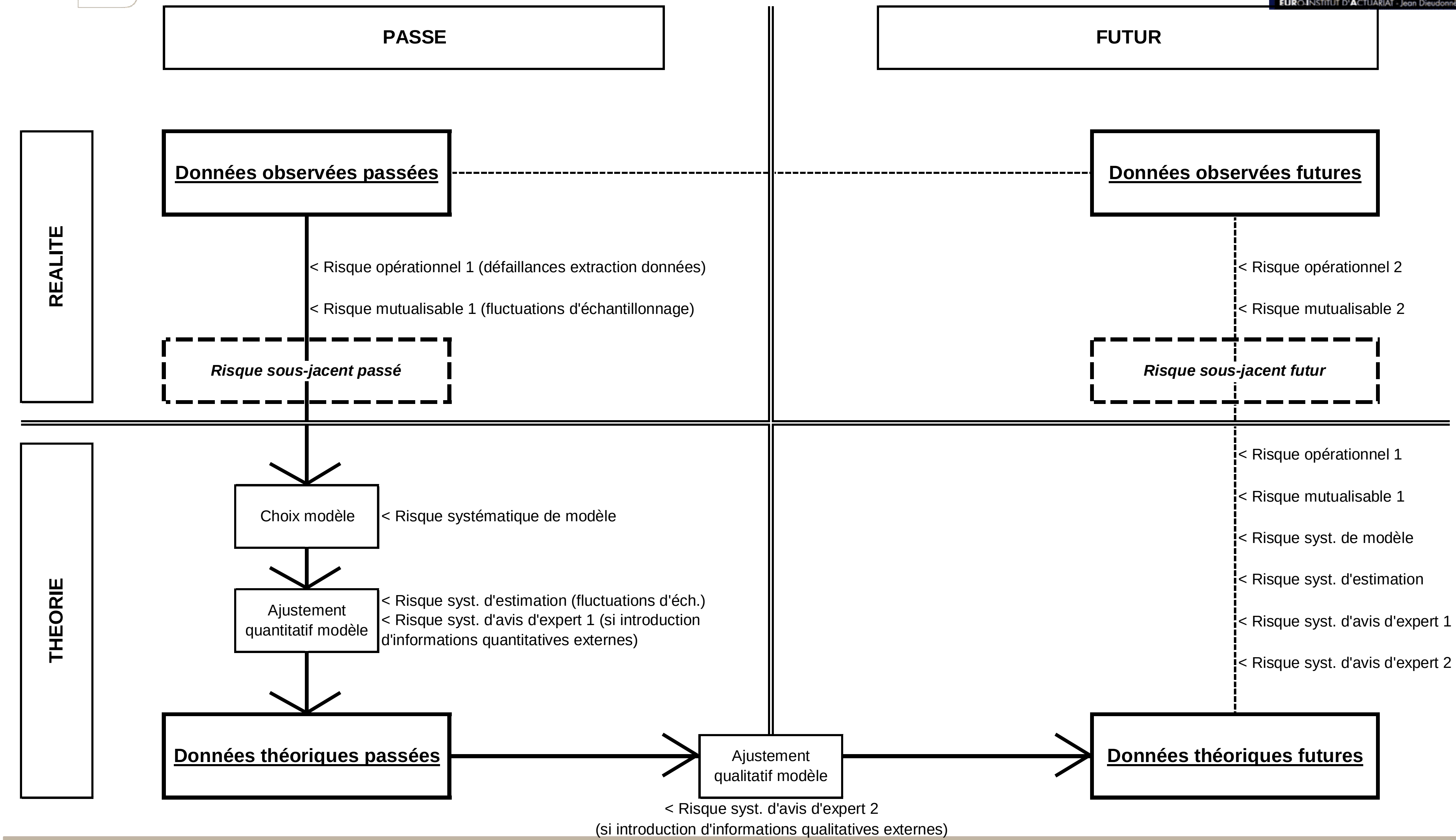
- incertitude au titre du risque mutualisable ;

- incertitude au titre du risque systématique de modèle ;

- incertitude au titre du risque systématique d'estimation ;

- incertitude au titre du risque systématique d'avis d'expert.

Préambule


PASSE
FUTUR
REALITE
THEORIE
Données observées passées
Données observées futures
< Risque opérationnel 1 (défaillances extraction données)
< Risque mutualisable 1 (fluctuations d'échantillonnage)
< Risque opérationnel 2
< Risque mutualisable 2
Risque sous-jacent passé
Risque sous-jacent futur
< Risque opérationnel 1
< Risque mutualisable 1
< Risque syst. de modèle
< Risque syst. d'estimation
< Risque syst. d'avis d'expert 1
< Risque syst. d'avis d'expert 2
Choix modèle
< Risque systématique de modèle
Ajustement quantitatif modèle
< Risque syst. d'estimation (fluctuations d'éch.)
< Risque syst. d'avis d'expert 1 (si introduction d'informations quantitatives externes)
Données théoriques passées
Ajustement qualitatif modèle
Données théoriques futures
< Risque syst. d'avis d'expert 2
(si introduction d'informations qualitatives externes)

SOMMAIRE

Construction de tables dôexpérience et mesure des risques associés

1. Tables du moment : taux bruts (Kaplan-Meier et Hoem) et taux ajustés (Brass)

2. Tables du moment : risque dôestimation en présence dôhétérogénéité (Cox et Lin&Yin)

3. Tables prospectives : risque dôavis dôexpert (Bongaarts)

4. Tables prospectives : risque dôestimation (Brass)

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Taux bruts de Hoem et mesure de l'incertitude

Avec la méthode de Hoem, on a (avec [α_i ; β_i] l'intervalle sur lequel l'assuré *i* est observé) :

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_i \left(\left[\alpha_i ; \beta_i \right] \cap \left] x ; x+1 \right] \right)} .$$

La mesure la plus directe de l'incertitude sur les estimateurs passe par la construction d'intervalles de confiance. Ces intervalles sont en général ponctuels (*ie* à un âge fixé). Avec l'estimateur des taux bruts de Hoem :

$$\hat{q}_x \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_x \left(1 - \hat{q}_x \right)}{R_x}} ,$$

où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite et α le niveau de confiance.

Cette mesure ne permet pas de disposer d'une indication globale, qui passe par la construction de bandes de confiance.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Fonction de survie de Kaplan-Meier et mesure de l'incertitude

On observe que les intervalles de confiance ponctuels pour l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie sont de la forme :

$$\hat{S}(x) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{S}(x)\gamma(x)$$

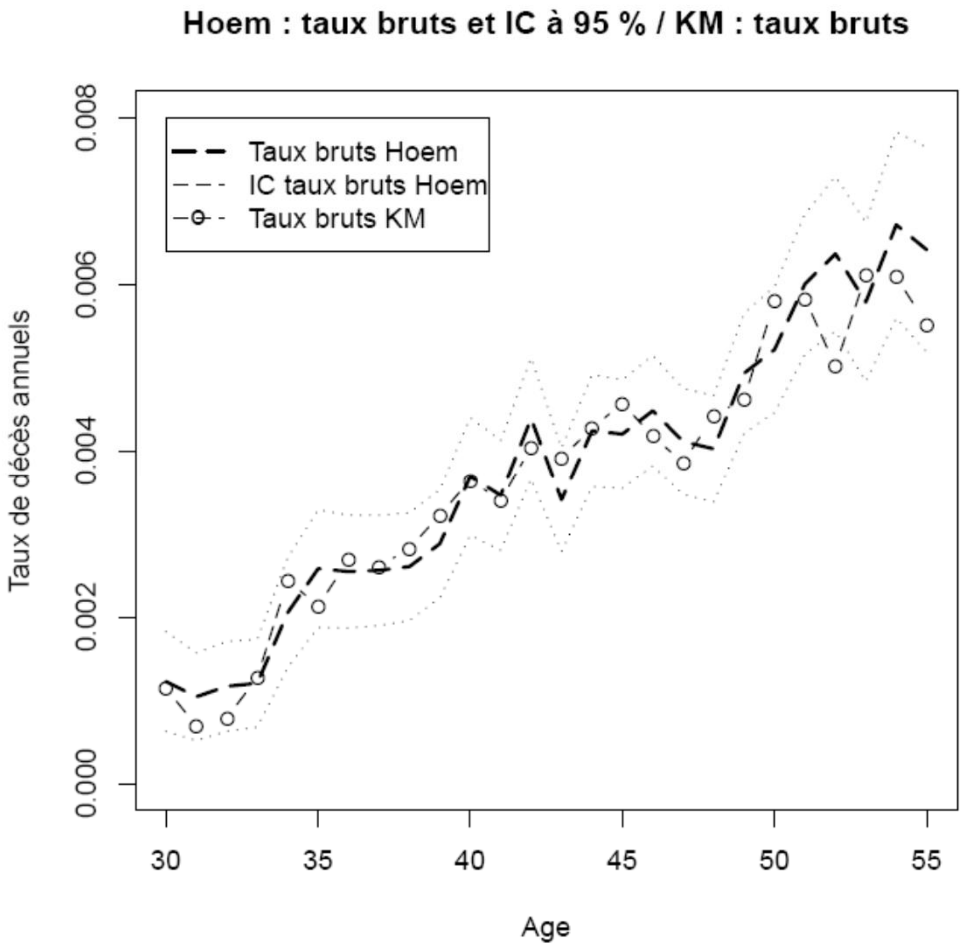
avec $\gamma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{x} \frac{d_i}{R_i(R_i - d_i)}}$, et Nair montre qu'en posant :

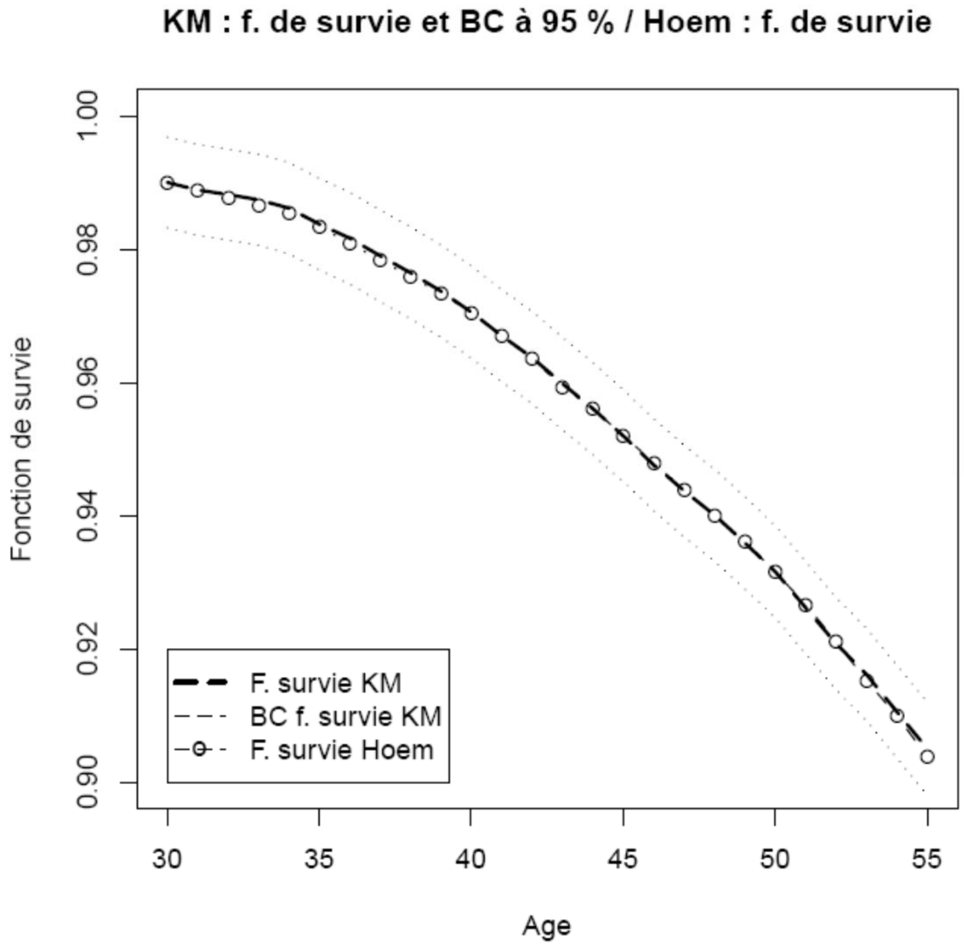
$$\hat{S}(x) \pm c_\alpha\left(a_{x_m}, a_{x_M}\right)\hat{S}(x)\gamma(x)$$

avec $a_X = \frac{p \times \gamma(X)^2}{1 + p \times \gamma(X)^2}$ pour un échantillon de taille *p*, on peut construire une bande de confiance (*cf*. Klein et Moeschberger [2005]). Les coefficients $c_\alpha\left(a_{x_m}, a_{x_M}\right)$ sont tabulés.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure de lõincertitude : intervalles et bandes de confiance





1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 1 : simulation directe des taux bruts

On considère un modèle de Brass, c'est-à-dire un modèle à référence externe tel que $y_x = a \times z_x + b + \varepsilon_x$, avec $y_x = \ln\left(\hat{q}_x / \left(1 - \hat{q}_x\right)\right)$ et $z_x = \ln\left(q_x^{ref} / \left(1 - q_x^{ref}\right)\right)$.

On cherche à présenter le risque d'estimation associé aux données uniquement. On suppose qu'il n'y a pas de risque de modèle. Deux approches peuvent être envisagées. Dans les deux cas, la technique de simulation retenue consiste à considérer une méthode de Monte-Carlo pour simuler la distribution d'une loi normale. Dans la première méthode on considère des taux bruts estimés selon l'approche de Hoem. On a alors :

$$Q_x \sim N\left(\hat{q}_x ; \sqrt{\frac{\hat{q}_x\left(1 - \hat{q}_x\right)}{R_x}}\right) .$$

Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 1 : simulation directe des taux bruts

On génère alors *k* simulations des taux bruts de décès selon cette loi, et pour chaque simulation *k*, on détermine une estimation des paramètres $\theta^k = \left(a^k, b^k\right)$.

On en déduit ensuite *k* réalisations des taux ajustés (on parle alors de taux simulés) :

$$q_x\left(\hat{\theta}^k\right) = \frac{\mathbf{exp}\left(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k\right)}{1 + \mathbf{exp}\left(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k\right)}.$$

Le risque d'estimation peut alors être mesuré par le coefficient $c\left(\psi_x\right) = \frac{\psi_x}{q_x\left(\hat{\theta}\right)}$, où $q_x\left(\hat{\theta}\right) = \frac{\mathbf{exp}\left(\hat{a} \times z_x + \hat{b}\right)}{1 + \mathbf{exp}\left(\hat{a} \times z_x + \hat{b}\right)}$ et $\psi_x = \sqrt{E\left[\left(q_x\left(\hat{\theta}^k\right) - q_x\left(\hat{\theta}\right)\right)^2\right]}$.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 2 : simulation des résidus

La seconde approche présentée pour mesurer le risque d’estimation s’appuie sur la simulation des résidus (de laquelle on déduit des réalisations de taux bruts, puis des réalisations de taux ajustés au titre des fluctuations d’échantillonnage – on parle alors de taux simulés –). Après avoir tester l’adéquation de la distribution des « vrais » résidus observés du modèle à la loi normale, on calcule empiriquement la moyenne et l’écart-type de la distribution des résidus puis on génère sur ces bases des erreurs aléatoires selon la loi normale. On a ainsi pour différents scénarios *k*,

$$y_x^k = \hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k \; .$$

Les « taux de décès bruts » associés aux *k* scénarios sont alors :

$$q_x^k = \frac{\mathbf{exp}\left(\hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k\right)}{1 + \mathbf{exp}\left(\hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k\right)} \quad .$$

Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 2 : simulation des résidus

Pour chaque scénario *k*, on calcule à partir de ces « taux bruts » une estimation des paramètres $\theta^k = \left(a^k, b^k\right)$.

On en déduit ensuite *k* réalisations des taux ajustés (on parle alors de taux simulés) :

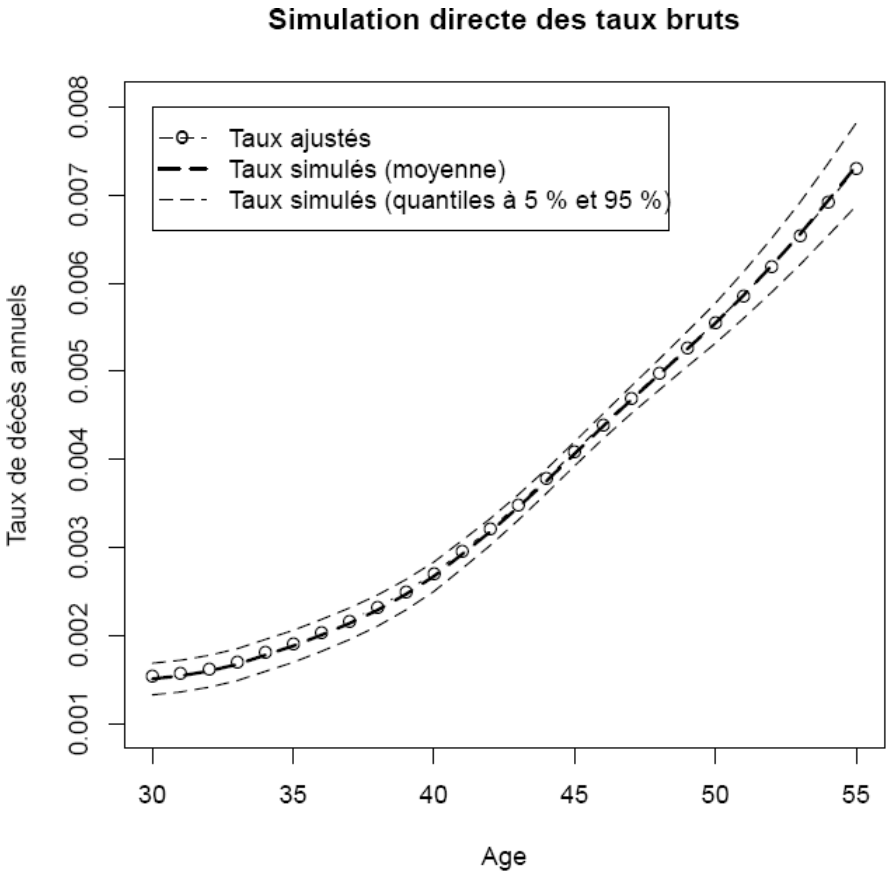
$$q_x^k\left(\hat{\theta}^k\right) = \frac{\exp\left(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k\right)}{1 + \exp\left(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k\right)} .$$

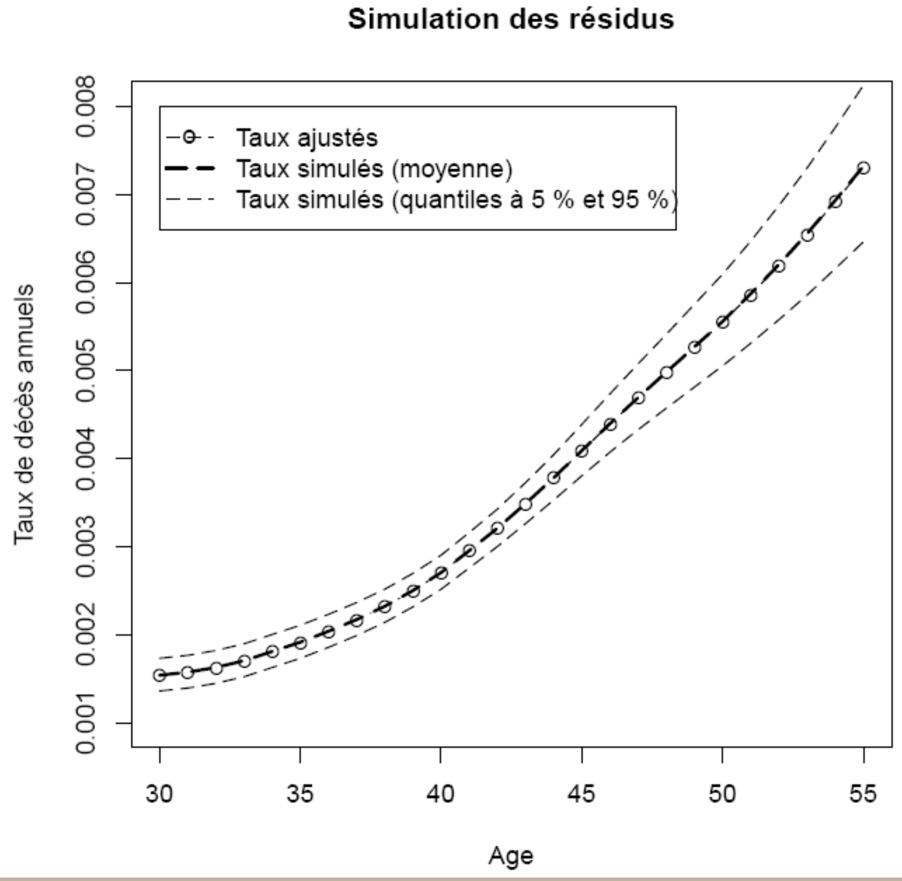
Le risque dḋestimation peut alors être mesuré par le coefficient $c\left(\psi_x\right) = \dfrac{\psi_x}{q_x\left(\hat{\theta}\right)}$.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les taux de décès ajustés

Illustration des taux de décès ajustés et simulés





Mesure sur les taux de décès ajustés

Illustration des mesures de risques d'estimation (moyenne)

Méthode de simulation des taux bruts (risque d'estimation)	Mesure du risque d'estimation (en % des taux ajustés)
Méthode 1 : simulation « directe » des taux bruts	4,07%
Méthode 2 : simulation des résidus	5,59%

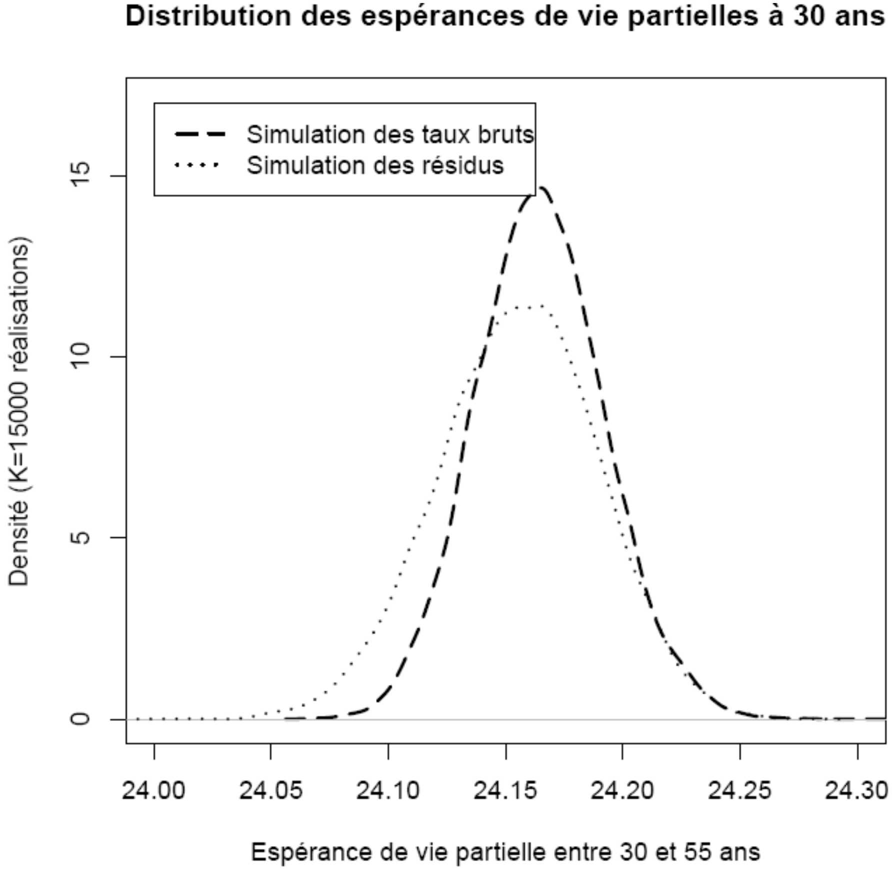
La mesure du risque d'estimation issue de la simulation des résidus majore en moyenne de plus de 35 % celle issue de la simulation directe des taux bruts (les résultats se basent sur 15 000 simulations). Ces écarts s'expliquent par les hypothèses retenues : la méthode de simulation des résidus repose largement sur l'hypothèse d'absence d'erreur de spécification du modèle, ce qui ne reflète pas la réalité (en pratique, il existe une erreur de spécification du modèle). Ainsi, pour cette méthode, les mesures de risque d'estimation présentées incluent également un risque de modèle.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les espérances de vie partielles

Pour comparer les tables de mortalité on cherche une fonctionnelle propre à chaque table qui lui associe un nombre positif. Lœspérance de vie est de ce point de vue une fonctionnelle naturelle.

Ce graphique présente, pour chaque méthode de simulation, les estimations des fonctions de densité des espérances de vie résiduelles (entre 30 et 55 ans) établies à partir des taux de décès simulés.



1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les provisions

On considère désormais des provisions relatives à des engagements temporaires au décès (sur *d* années) et évaluées à partir des taux de décès simulés (l'aléa sur les taux de décès utilisé ici est établi à partir de la **simulation directe des taux de décès bruts**).

On en déduit que le montant de la provision pour la réalisation *k* est :

$$L_0^k = \sum_{t=0}^{d-1} F_x^k(t) \times (1 + r_{t+1})^{-t-1/2} \text{ , avec : } F_x^k(t) = \begin{cases} C \times q_x\left(\hat{\theta}^k\right), t = 0 \\ C \times q_{x+t}\left(\hat{\theta}^k\right) \times \prod_{j=0}^{t-1}\left(1 - q_{x+j}\left(\hat{\theta}^k\right)\right), 1 \leq t < d \end{cases}$$

L'impact du risque d'estimation est alors $c(\Upsilon) = \frac{\Upsilon}{L_0}$, avec L_0 la provision calculée à partir de $q_x\left(\hat{\theta}\right)$ et $\Upsilon = \sqrt{E\left[\left(L_0^k - L_0\right)^2\right]}$.

On note enfin $\overline{L}_0 = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} L_0^j$ et on considère 15 000 scénarios de taux de décès.

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 5 ans

Statistique	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 8,12.10^{-3}$	$\overline{L}_0 = 7,98.10^{-3}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$6,53.10^{-3}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$7,12.10^{-3}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$8,82.10^{-3}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$9,29.10^{-3}$
Coefficient	Sans objet	$c(\Upsilon) = 6,64\ \%$

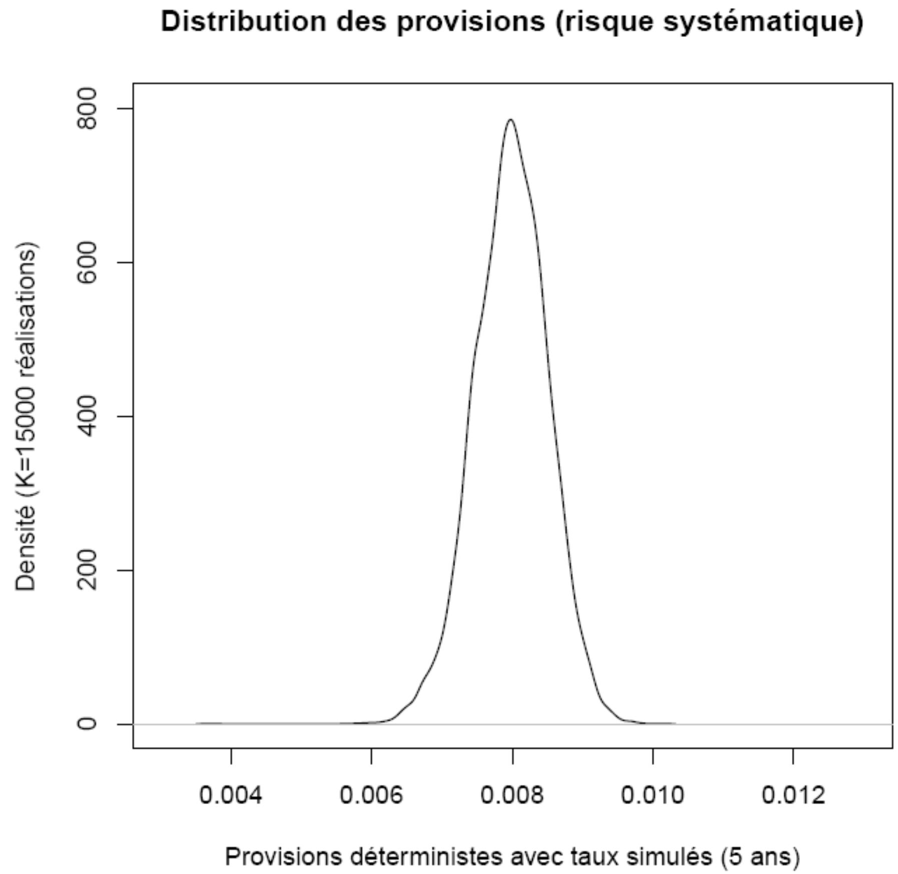
La prise en compte du risque systématique d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage impacte légèrement la provision (baisse de 1,7 %).

1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 5 ans

La dispersion de la distribution peut également être représentée par une estimation de la fonction de densité de la provision déterministe calculée à partir des taux simulés.



1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 20 ans

Statistique	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 3,83.10^{-2}$	$\overline{L}_0 = 3,80.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,48.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,60.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$3,99.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,08.10^{-2}$
Coefficient	Sans objet	$c(\Upsilon) = 3,18\ \%$

Dans ce cas, la prise en compte du risque systématique d'estimation impacte de manière plus limitée la provision calculée (baisse de 0,8 % désormais).

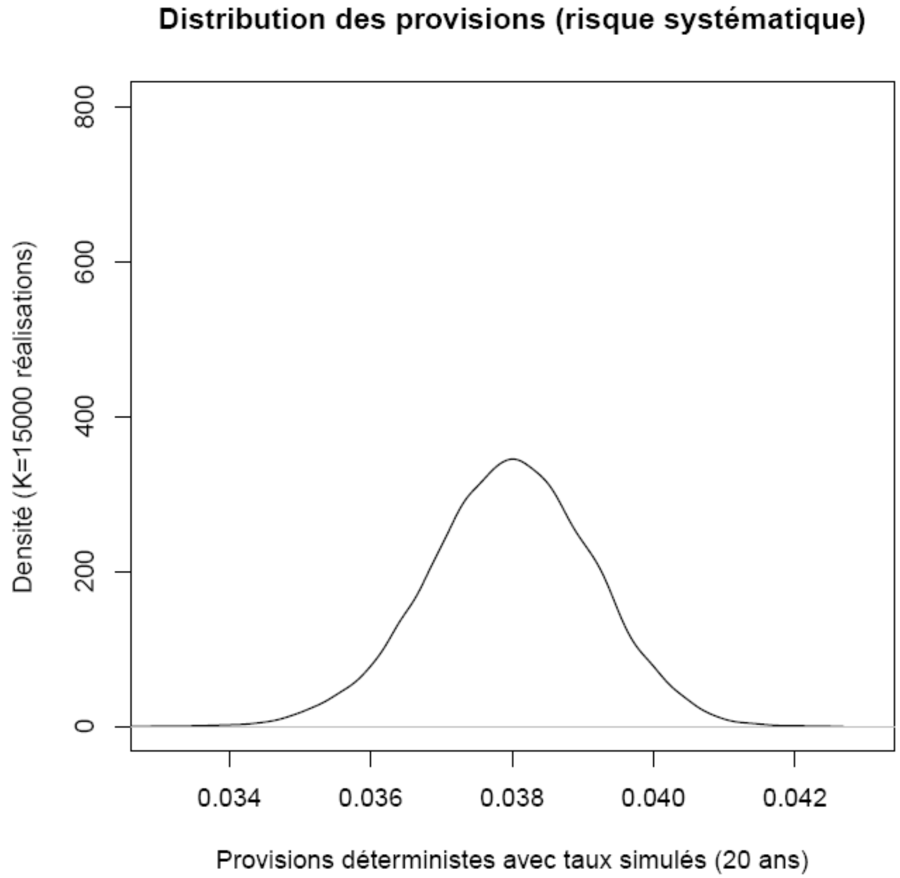
1. Tables du moment : taux bruts et taux ajustés

Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 20 ans

La dispersion de la distribution peut également être représentée par une estimation de la fonction de densité de la provision déterministe calculée à partir des taux simulés.

Lœchelle en ordonnée de ce graphique est identique à celle du graphique précédent sur la provision de 5 ans, et on note que le montant moyen de la provision est environ quatre fois supérieur à celui associé au graphique précédent.



SOMMAIRE

Construction de tables dôexpérience et mesure des risques associés

1. Tables du moment : taux bruts (Kaplan-Meier et Hoem) et taux ajustés (Brass)

2. Tables du moment : risque dôestimation en présence dôhétérogénéité (Cox et Lin&Yin)

3. Tables prospectives : risque dôavis dôexpert (Bongaarts)

4. Tables prospectives : risque dôestimation (Brass)

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Contexte

Dans le cadre du calcul du *best estimate*, il convient prendre en compte l'hétérogénéité du portefeuille.

En effet, avec une approche trop globale pour l'ensemble du portefeuille, on court le risque de n'être finalement *best estimate* sur aucune des sous-populations significatives composant le portefeuille et de voir la table devenir inadaptée dès que le portefeuille se déforme avec le temps.

Par exemple, en construisant une table de mortalité unisexe, la mortalité des hommes sera sous-estimée et celle des femmes surestimée et toute modification du *sex ratio* conduira à une inadéquation de la table avec le risque.

Quelle que soit la sophistication du modèle, la prise en compte de l'hétérogénéité conduit à segmenter la population d'expérience en sous-populations.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence dôhétérogénéité

Contexte

A contrario, une segmentation trop fine fait apparaître :

Å un risque dôestimation ;

Å un risque de modèle.

Le risque dôestimation et le risque de modèle sont des risques systématiques, donc potentiellement dangereux (car en plus dôintroduire de la volatilité dans la distribution de lôengagement , ils modifient la valeur du *best estimate*).

Une réflexion sôimpose alors sur le choix du niveau de segmentation optimal. La quantification du risque dôestimation associé à la construction de tables dôexpérience peut être un critère utile à cet effet.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Impact d'une réduction d'échantillon

Les illustrations de la partie 1 ont été réalisées à partir des données globales, qui incluent en pratique les données de trois pays, présentées dans le tableau ci-dessous (il s'agit de données sur les 30-55 ans).

Homme (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
CI	549 656	43,9 ans	0,40%	0,38%	0,41%
ML	12 114	42,5 ans	0,22%	0,14%	0,31%
TG	133 779	43,2 ans	0,42%	0,39%	0,46%
UEMOA (CI-ML-TG)	695 549	43,8 ans	0,40%	0,38%	0,41%

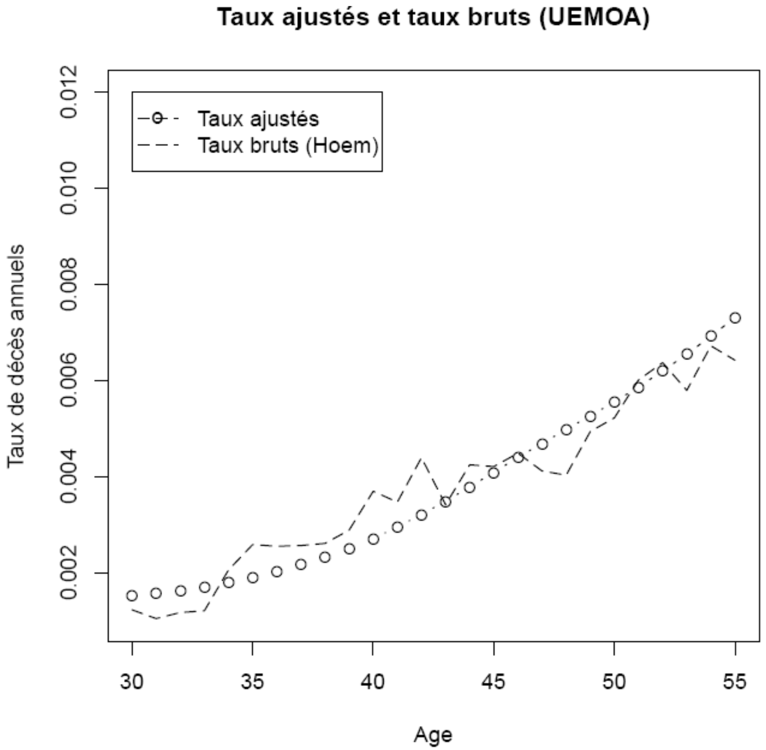
L'objectif ici est alors de présenter l'évolution du risque d'estimation lorsque l'on passe de l'échelle de la population globale à celle d'un pays.

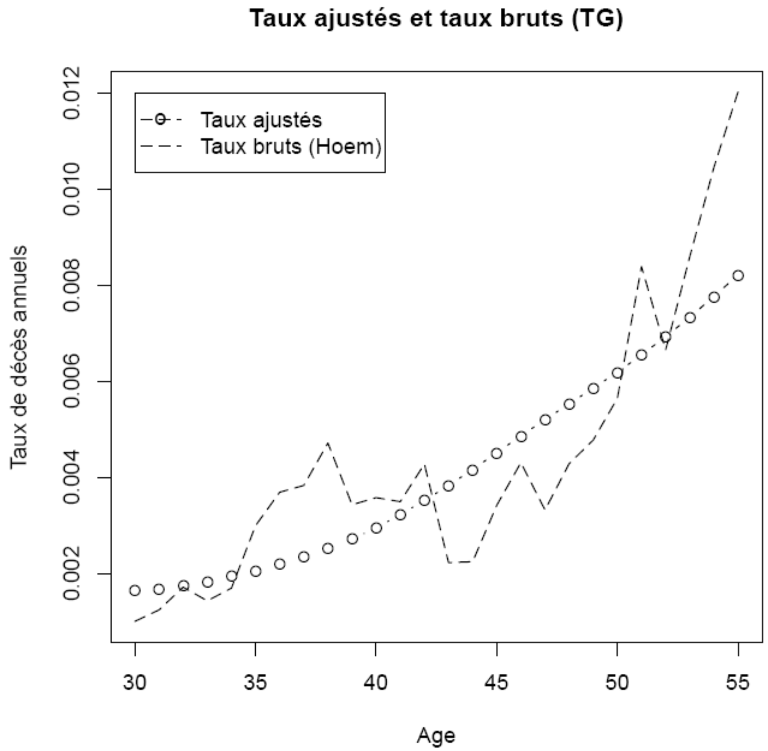
Le pays retenu pour cette illustration est le Togo (TG), pays intermédiaire entre la Côte d'Ivoire (CI) et le Mali (ML) en termes d'exposition au risque.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Impact d'une réduction d'échantillon

Les graphiques ci-dessous présentent les taux ajustés et les taux bruts pour les données de l'UEMOA et du Togo. Il y apparaît que les fluctuations d'échantillonnage sont logiquement plus importantes avec les données du Togo.



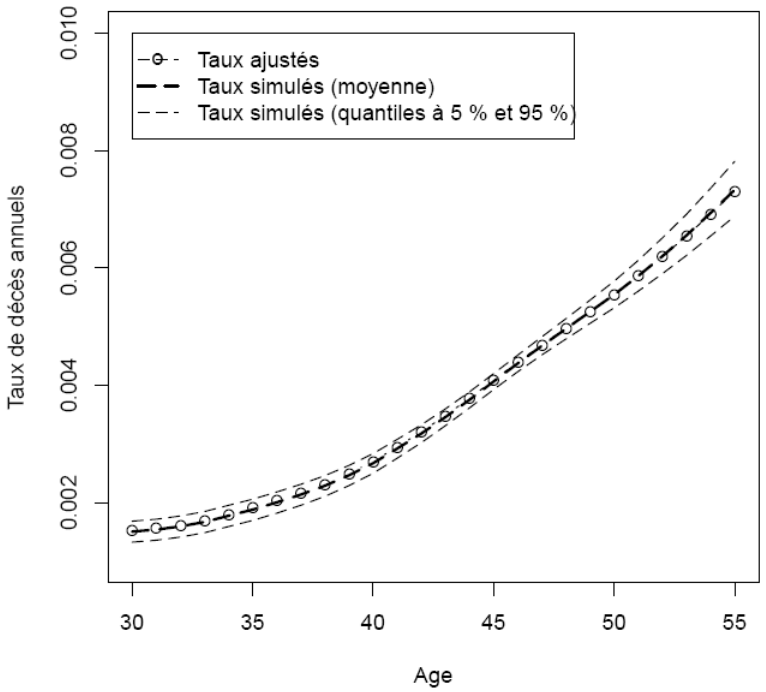


2. Tables du moment : risque d'estimation en présence dõhétérogénéité

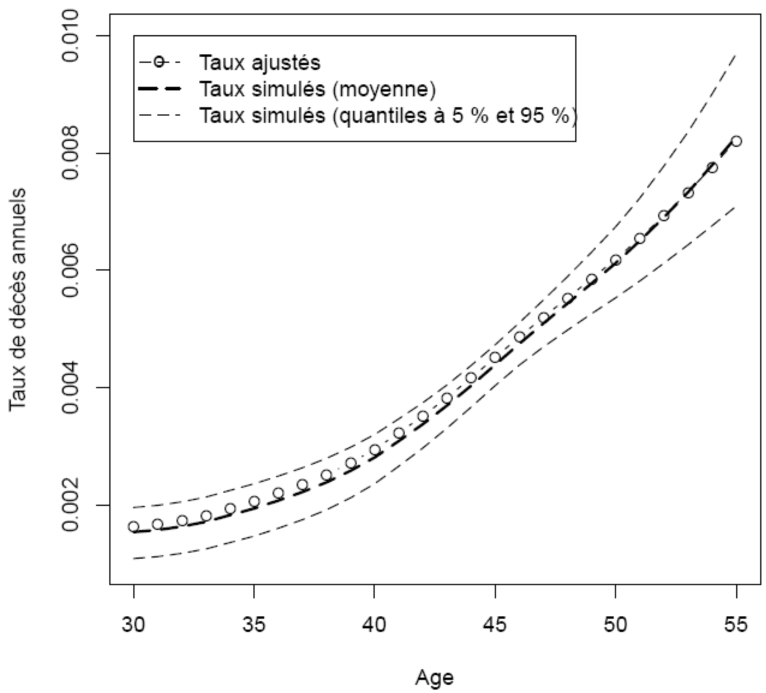
Impact dôune réduction dœchantillon

Les graphiques ci-dessous présentent les taux ajustés et les taux simulés pour les données de lôUEMOA et du Togo. Il ressort que la dispersion des taux de décès simulés à partir des données du Togo est logiquement plus importante.

Simulation directe des taux bruts (UEMOA)



Simulation directe des taux bruts (TG)



2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d’hétérogénéité

Impact d’une réduction d’échantillon

Pour quantifier l’écart de dispersion, le tableau ci-dessous présente une moyenne arithmétique du coefficient $c\left(\psi_x\right)$ pour tous les âges $x \in \left[x_m, x_M\right]$.

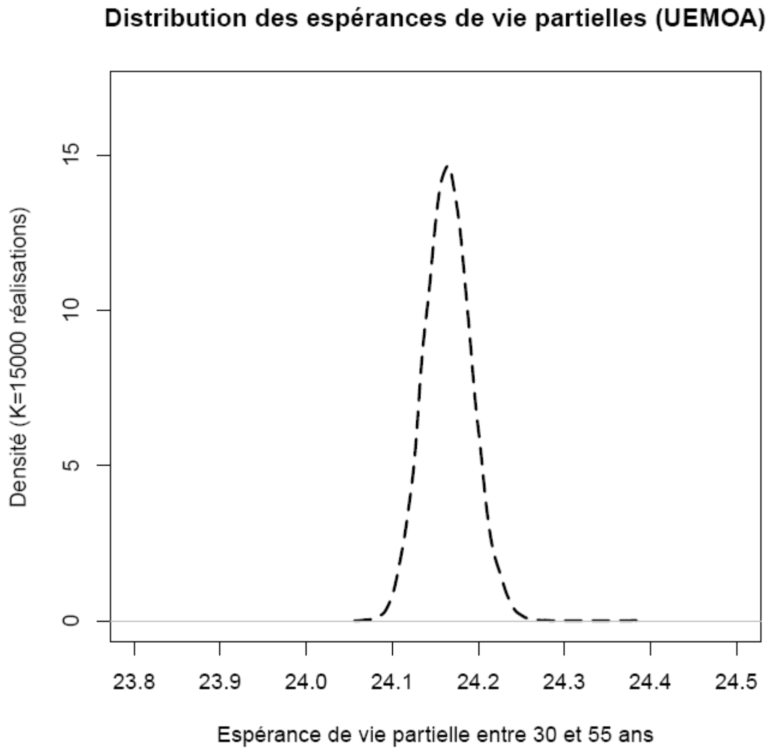
Population	Mesure du risque d’estimation (en % des taux ajustés)
UEMOA (CI-ML-TG)	4,07%
TG	10,03%

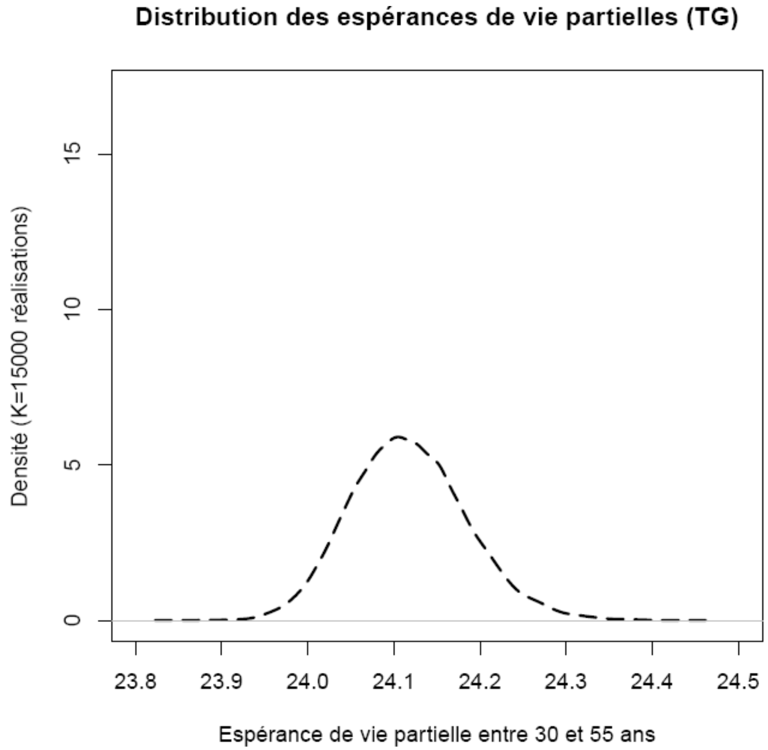
La moyenne du coefficient augmente de près de 150 %.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence dôhétérogénéité

Impact dôune réduction dôéchantillon

Dans la continuité des observations ci-dessus, il apparaît sur ces graphiques que la distribution de lôespérance de vie partielle issue de la population UEMOA présente une queue moins épaisse que celle issue de la population du Togo.





2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Impact d'une réduction d'échantillon

Impact sur les provisions (20 ans)

Statistique	UEMOA		TG	
	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 3{,}83.10^{-2}$	$\overline{L}_0 = 3{,}80.10^{-2}$	$L_0 = 4{,}18.10^{-2}$	$\overline{L}_0 = 4{,}02.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3{,}48.10^{-2}$	Sans objet	$3{,}17.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3{,}60.10^{-2}$	Sans objet	$3{,}53.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$3{,}99.10^{-2}$	Sans objet	$4{,}47.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4{,}08.10^{-2}$	Sans objet	$4{,}70.10^{-2}$
Coefficient	Sans objet	$c(\Upsilon) = 3{,}18\ \%$	Sans objet	$c(\Upsilon) = 7{,}91\ \%$

Avec les données du Togo, la prise en compte du risque systématique impacte significativement la provision calculée (baisse de 3,8 %), alors que l'impact est limité avec les données UEMOA (baisse de 0,8 %).

Choix du modèle d'hétérogénéité

La modélisation de l'hétérogénéité à partir de modélisations indépendantes de sous-populations n'est pas appropriée, et il faut donc construire un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables de manière plus globale.

Trois approches (au moins) sont possibles pour modéliser l'hétérogénéité :

- la première démarche consiste à modéliser le comportement de chaque sous-population de manière indépendante ;

- la deuxième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité observables à partir de variables explicatives ;

- la troisième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité inobservables.

Choix du modèle d’hétérogénéité

Modèles à variables explicatives et problèmes de dimension

Lorsqu’un phénomène peut être expliqué par plusieurs variables explicatives, on peut se tourner vers des régressions purement paramétriques. L’avantage est qu’on alors peut facilement trouver des estimateurs convergents, mais l’inconvénient est que ces modèles s’appuient sur de nombreuses hypothèses pour le comportement du phénomène observé et présentent donc un risque important de ne pas être fidèle aux données d’expérience.

Une alternative consiste à se tourner vers des régressions non paramétriques, qui ont l’avantage de s’appuyer sur un nombre limité d’hypothèses pour le comportement du phénomène observé. Ces modèles présentent toutefois un inconvénient connu sous le terme de fléau de la dimension (du mathématicien Richard Bellman), relatif à l’augmentation explosive du volume de données liée à l’ajout de dimensions supplémentaires dans un espace mathématique.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles *single-index* (SIM)

Il est donc nécessaire de réduire la dimension des modèles. La méthode qui est considérée ici est la méthode retenue par Lopez [2007] : il s'agit de la régression *single index*. Les modèles de régression *single index* (SIM) sont définis par :

$$m(z) = E(Y \mid Z = z) = f\left(\delta^T z\right),$$

où Y représente la variable à expliquer de dimension 1, Z les variables explicatives de dimension p, m une fonction inconnue $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, f une fonction de lien inconnue telle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\delta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ est un paramètre inconnu de dimension finie.

Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles de Cox et de Lin et Ying

Le modèle multiplicatif de Cox [1972] et le modèle additif de Lin et Ying [1994] sont des exemples de modèles de type SIM, dans lesquels les hypothèses ne portent pas sur l'espérance conditionnelle mais sur le taux de hasard instantané conditionnel :

- Cox : $$\lambda(t \mid Z = z) = \lambda_0(t) e^{\delta^T z}$$

- Lin et Ying : $$\lambda(t \mid Z = z) = \lambda_0(t) + \gamma^T z$$

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Modèle de Cox : ajustement

Lorsque l'on suppose qu'il ne se produit qu'un seul décès à chaque instant, Cox [1972] remarque que la contribution à la vraisemblance de la sortie au $i^{\text{ème}}$ instant est :

$$\exp\left\{\delta^T z_{(i)}\right\} \Big/ \sum_{j \in R_i} \exp\left\{\delta^T z_{j(i)}\right\} ,$$

où $z_{j(i)}$ représente les caractéristiques du $j^{\text{ème}}$ individu sous risque à l'instant de la sortie.

La vraisemblance partielle de Cox se calcule ainsi comme le produit de ces contributions, et la log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\delta) = \sum_{i=1}^{D} \delta^T z_{(i)} - \sum_{i=1}^{D} \ln\left(\sum_{j \in R_i} \exp\left\{\delta^T z_{j(i)}\right\} \right) .$$

Modèle de Cox : ajustement

Lorsque l'on suppose qu'il se produit plusieurs décès à chaque instant, Cox [1972] fournit une nouvelle spécification de son modèle multiplicatif dans un cas discret :

$$\frac{\lambda\left(t \mid Z=z\right)}{1-\lambda\left(t \mid Z=z\right)}=\frac{\lambda_0\left(t\right)}{1-\lambda_0\left(t\right)}e^{\delta^T z}.$$

Avec cette nouvelle spécification, la contribution à la vraisemblance des sorties au *i*ème instant s'écrit :

$$\mathbf{exp}\left\{\delta^T s_{(i)}\right\} \Big/ \sum_{j\in\left(R_i\,;\,d_i\right)} \mathbf{exp}\left\{\delta^T s_{j(i)}\right\},$$

où $s_{(i)}$ représente le nombre de sorties et la notation du dénominateur signifie que la somme est prise sur tous les ensembles d'individus bien distincts tirés dans R_i. La log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L\left(\delta\right)=\sum_{i=1}^{D}\delta^T s_{(i)}-\sum_{i=1}^{D}\mathbf{ln}\left(\sum_{j\in\left(R_i\,;\,d_i\right)}\mathbf{exp}\left\{\delta^T s_{j(i)}\right\}\right).$$

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Modèle de Cox : ajustement

Une des spécificités du risque décès est que la fréquence de survenance du risque est faible et que l'exposition au risque est relativement élevée. Dans ce cas le nombre de combinaisons possibles dans $\sum_{j \in (R_i ; d_i)} \mathbf{exp}\left\{\delta^T s_{j(i)}\right\}$ dans l'estimateur de Cox en présence d'*ex-aequo* est particulièrement important et limite la mise en œuvre (notamment dans le cadre de simulations, comme ici). On peut alors se tourner vers les approximations. En retenant celle de Breslow, la contribution à la vraisemblance est :

$$\mathbf{exp}\left\{\delta^T s_{(i)}\right\} \Big/ \left[\sum_{j \in R_i} \mathbf{exp}\left\{\delta^T z_{j(i)}\right\}\right]^{d_i}$$

et la log-vraisemblance est : $L(\delta) = \sum_{i=1}^{D} \delta^T s_{(i)} - \sum_{i=1}^{D} d_i \times \mathbf{ln}\left(\sum_{j \in R_i} \mathbf{exp}\left\{\delta^T z_{j(i)}\right\}\right)$.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Modèle de Cox : ajustement

En pratique, dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (sous-population de base ici) à partir du modèle à référence externe de Brass. À cet effet, les taux bruts sont estimés selon l'approche de Hoem et les taux de référence sont ceux des tables réglementaires françaises TH/TF00-02 (décès). Ces taux ajustés sont notés :

$$q_{x,CI}\left(\hat{\theta}\right), \text{ avec } \hat{\theta}=\left(\hat{a},\hat{b}\right).$$

Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Cox, par les relations suivantes (en retenant l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

$$q_{x,ML}\left(\hat{\theta};\hat{\delta}_{ML}\right)=1-\left(1-q_{x,CI}\left(\hat{\theta}\right)\right)^{\exp\left(\hat{\delta}_{ML}\right)} \qquad q_{x,TG}\left(\hat{\theta};\hat{\delta}_{TG}\right)=1-\left(1-q_{x,CI}\left(\hat{\theta}\right)\right)^{\exp\left(\hat{\delta}_{TG}\right)}$$

où $\hat{\delta}=\left(\hat{\delta}_{TG};\hat{\delta}_{ML}\right)$ est estimé par Cox.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Modèle de Lin et Ying : ajustement

Lin et Ying [1994] et Klein et Moeschberger [2005] montrent que l'estimation des coefficients du modèle s'effectue en calculant simplement :

$$\hat{\gamma} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

où :

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{D} \sum_{j \in R_i} \left(z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right)^T \left(z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right)$$

$$\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{D} \sum_{h} d_{i,h} \left(z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)} \right)$$

$$\bar{z}_{(i)} = \frac{1}{R_i} \sum_{j \in R_i} z_{j(i)}$$

Modèle de Lin et Ying : ajustement

Dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (pour mémoire il s'agit de la sous-population de base) comme précédemment.

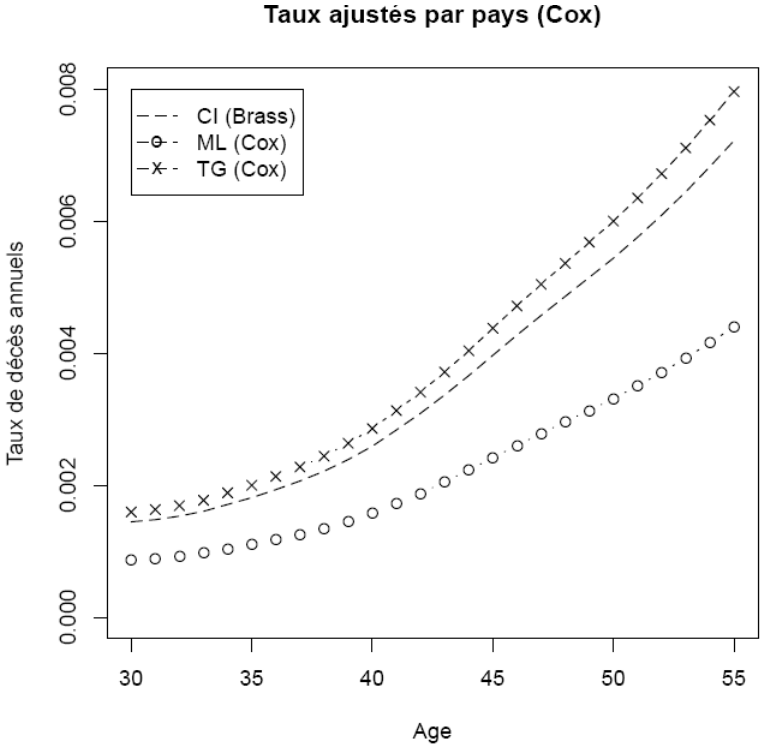
Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Lin et Ying, par la relation suivante (sous l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

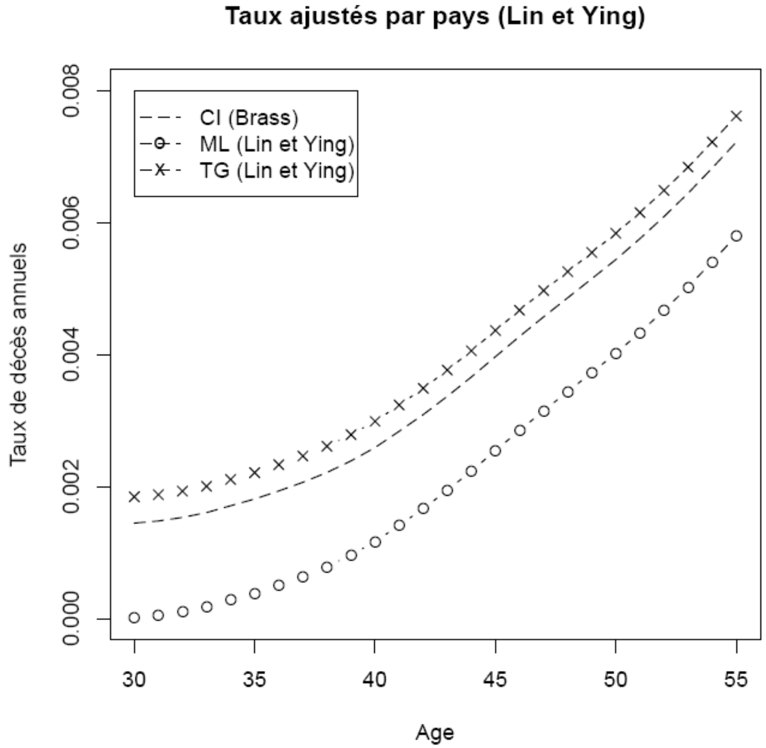
$$q_{x,ML}\left(\hat{\theta};\hat{\gamma}_{ML}\right)=1-\left(1-q_{x,CI}\left(\hat{\theta}\right)\right)\mathbf{exp}\left(-\hat{\gamma}_{ML}\right) \qquad q_{x,TG}\left(\hat{\theta};\hat{\gamma}_{TG}\right)=1-\left(1-q_{x,CI}\left(\hat{\theta}\right)\right)\mathbf{exp}\left(-\hat{\gamma}_{TG}\right)$$

où $\hat{\gamma}=\left(\hat{\gamma}_{TG};\hat{\gamma}_{ML}\right)$ sont les paramètres estimés du modèle de Lin et Ying.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Comparaison des ajustements et *backtesting*





Concernant les ajustements, il apparaît qu'avec le modèle multiplicatif de Cox, les différences absolues entre les pays augmentent significativement lorsque l'âge augmente, contrairement au modèle de Lin et Ying dans lequel les différences absolues sont constantes pour tous les âges.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Comparaison des ajustements et *backtesting*

Modèle global UEMOA - H (Brass global)			
Pays	Décès observés	Décès théoriques	Différence relative
Côte d'Ivoire	2 188	2 203	0,7%
Mali	27	44	63,8%
Togo	565	511	-9,6%

Modèles intégrant l'hétérogénéité (sans et avec fact. obs.)			
Pays (modèle)	Décès observés	Décès théoriques	Différence relative
Côte d'Ivoire (Brass)	2 188	2 144	-2,0%
Mali (Brass(*))	27	29	8,4%
Mali (Cox)		26	-3,2%
Mali (Lin et Ying)		26	-4,9%
Togo (Brass)	565	565	-0,1%
Togo (Cox)		548	-3,0%
Togo (Lin et Ying)		550	-2,7%

(*) avec convention pour le traitement des taux de décès bruts nuls.

Le 1er sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés sans tenir compte de l'hétérogénéité entre sous-populations. Le 2ème sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés avec des modèles intégrant l'hétérogénéité, soit à partir de modèles indépendants pour chaque sous-population (Brass), soit à partir de modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (Cox et Lin et Ying).

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence dôhétérogénéité

Évolution des risques dôestimation selon les modèles

Population	Modèle de Brass (approche 1)	Modèle de Cox (approche 2)	Modèle de Lin et Ying (approche 2)
Togo $c\left(\psi_{TG}\right)$	9,89 %	6,19 %	6,78 %

Lôutilisation du modèle de Brass (modèle indépendant pour chaque sous-population), conduit à un risque dôestimation supérieur à celui obtenu avec le modèle de Cox ou de Lin et Ying (modèles intégrant lôhétérogénéité à partir de facteurs observables). Les résultats se basent sur 1 000 simulations des taux.

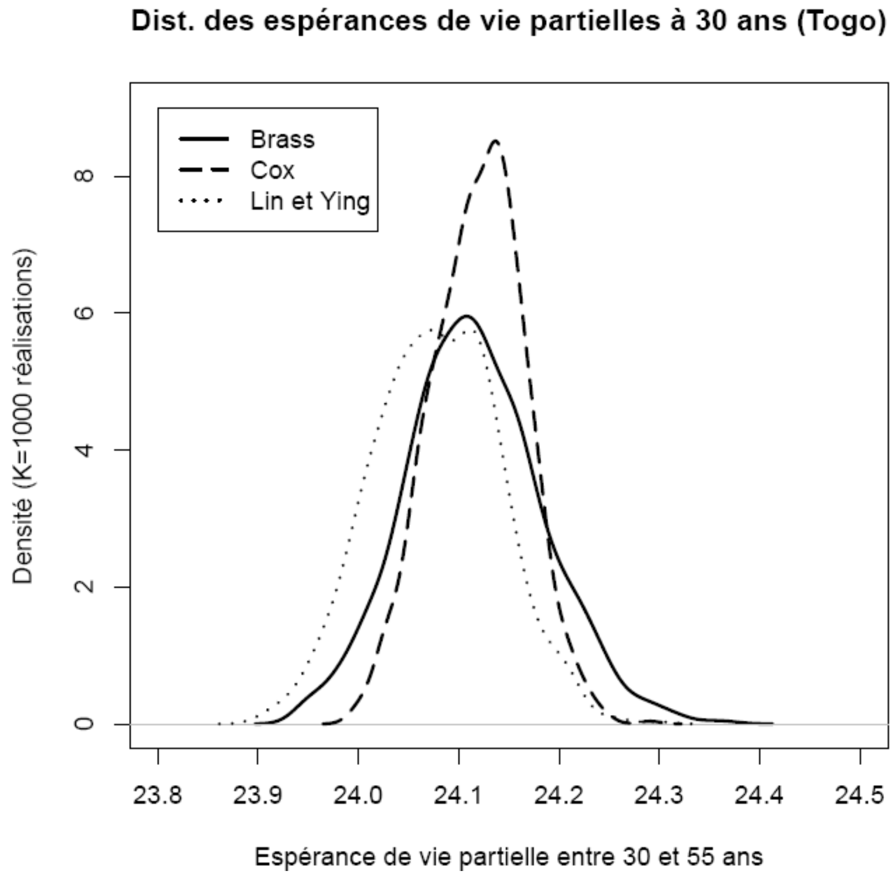
Par ailleurs, on note pour information que le risque dôestimation est dôautant plus important que la population présente une faible exposition. Ainsi par exemple, le risque dôestimation avec le modèle de Brass pour la Côte dôIvoire est égal à 4,73 %, et celui du Mali avec le modèle de Cox est égal à 22,27 %.

Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les espérances de vie partielles (Togo)

Dans la continuité des observations précédentes il apparaît que la distribution de l'espérance de vie partielle issue du modèle de Cox présente une queue moins épaisse que celle issue du modèle de Brass.

En d'autres termes, les tables de mortalité issues des taux simulés à partir du modèle multiplicatif intégrant l'hétérogénéité à l'aide de facteurs observables présentent une volatilité plus faible que celles issues des taux simulés à partir du modèle de Brass utilisé indépendamment pour chaque sous-population.



2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les provisions (Togo)

Statistique	Brass		Cox		Lin et Ying	
	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés
Moyenne	$4,18.10^{-2}$	$4,03.10^{-2}$	$4,06.10^{-2}$	$4,01.10^{-2}$	$4,22.10^{-2}$	$4,17.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,18.10^{-2}$	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,54.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,70.10^{-2}$	Sans objet	$3,74.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,34.10^{-2}$	Sans objet	$4,61.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,74.10^{-2}$	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,83.10^{-2}$
Coefficient $c(\Upsilon)$	Sans objet	$7,91\,\%$	Sans objet	$5,15\,\%$	Sans objet	$6,41\,\%$

Avec les données du Togo, la prise en compte du risque systématique diminue de 3,6 % la provision calculée lorsque l'on retient le modèle de Brass, alors que la baisse est de 1,2 % pour les modèles de Cox et de Lin et Ying.

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les provisions (Togo)

Les résultats illustrent une diminution de l'impact du risque d'estimation sur les provisions de plus de 50 % avec les modèles de la deuxième approche (Cox et Lin et Ying), par rapport à l'impact observé avec le modèle de la première approche (Brass). En outre, avec les modèles de la seconde approche, la mesure de risque d'estimation diminue de 20 à 35 %.

Néanmoins, dans notre exemple on note en parallèle que le poids du risque d'estimation dans les provisions est comparable au poids du risque de modèle (qui reflète l'évolution de la provision selon le choix de modèle).

Dans la recherche d'un modèle permettant de réduire le risque d'estimation, une attention particulière doit donc également être accordée aux conséquences en termes de risques de modèles.

SOMMAIRE

Construction de tables d'expérience et mesure des risques associés

1. Tables du moment : taux bruts (Kaplan-Meier et Hoem) et taux ajustés (Brass)

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité (Cox et Lin&Yin)

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert (Bongaarts)

4. Tables prospectives : risque d'estimation (Brass)

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Dans un contexte où le volume des données d'expérience est limité, les problématiques liées à l'estimation des paramètres et de la tendance future de la mortalité revêtent une importance particulière dans le choix du modèle.

En effet, d'une part, lors de l'ajustement des paramètres aux données il existe un risque que la valeur estimée diffère de la valeur correspondant au risque sous-jacent. Ce risque est directement lié aux fluctuations d'échantillonnage et est d'autant plus important que la taille de l'échantillon est petite.

D'autre part, la constitution de la tendance future pour la mortalité doit idéalement être le fruit de la combinaison d'un ajustement statistique aux données passées, et d'un ajustement par avis d'expert pour tenir compte du contexte futur. En pratique toutefois, en présence d'un faible volume de données, la dimension quantitative pour déterminer les tendances futures de la mortalité ne peut pas être intégrée car on ne dispose pas des tendances passées. Les tendances futures de mortalité sont alors complètement déterminées à partir d'une dimension qualitative.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d’expérience future

<u>Hétérogénéité et projection de la mortalité par cause</u>

La prise en compte des facteurs d’hétérogénéité :

- est nécessaire compte tenu du biais d’hétérogénéité (phénomène « mobile-stable ») ;

- est nécessaire car améliore l’intégration d’une dimension qualitative (distinction des facteurs d’hétérogénéité exogènes et endogènes) ;

- doit être appréciée en tenant compte notamment des problématiques de choix de segmentation optimale (*cf*. Planchet et Leroy [2009]) et de risque d’estimation (*cf*. Kamega et Planchet [2010] et Kamega et Planchet [2011]), qui peuvent conduire le modèle à devenir inadapté au fil du temps.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité dœxpérience future

<u>Hétérogénéité et projection de la mortalité par cause</u>

La prise en compte des causes de mortalité :

- peut être utile pour justifier les différences de mortalité entre sous-populations, même si le lien entre lœhétérogénéité et la mortalité par cause nœst pas simple ;

- permet de tenir compte facilement de la connaissance sur la science médicale, sur le comportement des individus ou sur les changements environnementaux ;

- est peu utilisée compte tenu de lœinsuffisance des données (cause de décès renseignée arbitraire, multi-causalité, interaction entre les risques de décèsé) ;

- engendre une dégradation de la qualité statistique des estimations.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d'expérience future

Projection par extrapolation des taux de décès

Extrapolation des taux par période ou par génération ?

Les projections toutes causes par génération présentent l'avantage de pouvoir facilement prendre en compte l'évolution des facteurs d'hétérogénéité exogènes sur la mortalité.

Cette approche présente toutefois une limite importante, qui porte sur les censures généralement observées dans les données pour les personnes nées au cours des 100 dernières années.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d'expérience future

<u>Projection par extrapolation des taux de décès</u>

Extrapolation des taux par période ou par génération ?

Ce problème n'apparaît pas dans les projections toutes causes <u>par période</u>, ce qui est un avantage pour cette méthode alternative. Un autre argument justifiant l'intérêt de la méthode de projection par période (aux dépens de la méthode par génération) est que l'effet période sur la mortalité est généralement plus fort que l'effet génération, comme le rappellent Booth et Tickle [2008].

L'approche par période présente toutefois un inconvénient significatif par rapport à l'approche par génération : la prise en compte d'une dimension qualitative dans les projections y est plus limitée.

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité dôexpérience future

Projection par extrapolation des taux de décès

Traitement de lôinterdépendance dans les extrapolations :

- dans le cadre dôextrapolation à partir de modèle paramétrique incluant plusieurs paramètres, une attention particulière doit être accordée au traitement de lôinterdépendance entre les paramètres (*cf*. Delwarde et Denuit [2006]) ;

- une réflexion sôimpose également sur lôinterdépendance entre les âges et entre les périodes en cas dôextrapolation. Aussi, dans leur article sur la dépendance cachée au sein du risque de longévité, Loisel et Serant [2007] apportent un éclairage sur la mesure et lôillustration de lôinterdépendance entre les âges et entre les périodes (à partir du calcul des « logitôs Deltas »).

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité dôexpérience future

Projection par avis dôexpert

Généralement, la méthode retenue à cet effet consiste à poser une contrainte sur le niveau de lôespérance de vie à une date future (à lôimage de ce qui est proposé dans Planchet [2007] sur la base du modèle de Lee-Carter).

Booth et Tickle [2008] présentent toutefois plusieurs démarches alternatives : avis dôexpert sur les tendances des taux de décès par causes (et par âge), avis dôexpert sur la vitesse de réduction des taux de mortalité par âge, etc.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité dôexpérience future

Projection par avis dôexpert

Lôapproche par avis dôexpert permet dôintégrer, au moins sur un plan qualitatif, la connaissance épidémiologique, démographique, environnementale, etc. dans les projections. En outre, elle présente également un intérêt particulier lorsque les données dôexpérience disponibles sont limitées.

Lôinconvénient de cette approche est sa subjectivité et son biais potentiel. Ainsi, Booth et Tickle [2008] rappellent que le conservatisme et les divergences dans les avis dôexpert ne permettent pas dôenvisager des projections de long terme avec cette méthode.

Quelques réflexions et quelques outils pour modéliser la mortalité d'expérience future

Fermeture de table

Quelle que soit l'approche retenue, la question du traitement de la mortalité aux grands âges se pose car au-delà de 90 ans, on dispose rarement de données de bonne qualité (du moins dans un contexte d'assurance).

Planchet et Thérond [2006] rappellent que la question de la fermeture de la table est importante dans le cas de la construction d'une table pour des provisionnements de rentes viagères, mais cette importance doit être relativisée si les rentiers d'âge très élevé sont en proportion modeste dans le portefeuille. En effet, les auteurs illustrent qu'en figeant les taux de décès de la table TH00-02 à 95 ans, l'impact sur la provision à 75 ans est inférieur à 1 % (3 % sur une provision à 85 ans). De même, Quashie et Denuit [2005] illustrent que l'écart entre deux méthodes de fermeture n'est significatif qu'à des âges très élevés.

Modèle de Lee-Carter : limites, extensions et alternatives

Présentation du modèle de Lee-Carter

La démarche de Lee-Carter consiste à estimer les taux de mortalité futurs à partir d'une extrapolation des tendances passées, après avoir décomposer la mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle. Il s'agit ainsi d'une projection à partir d'une extrapolation par période.

Le modèle s'écrit ainsi (*cf.* Lee [2000]) :

$$\ln\left(\mu_{x,t}\right) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

où $\boldsymbol{\alpha}_x$ s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln(\boldsymbol{\mu}_{x,t})$ au cours du temps, k_t représente l'évolution générale de la mortalité au cours du temps, $\boldsymbol{\beta}_x$ traduit la sensibilité (à l'échelle logarithmique) de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à k_t et $\varepsilon_{x,t} \sim N\left(0;\sigma_{\varepsilon}\right)$ représente l'erreur du modèle (sous l'hypothèse d'homoscédasticité).

Modèle de Lee-Carter : limites, extensions et alternatives

Limites, extensions et alternatives au modèle de Lee-Carter

Traitement de l'hétéroscédasticité :

- une première limite du modèle de Lee-Carter est l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs requise pour l'estimation par moindres carrés. En effet, cette condition est rarement vérifiée en pratique puisque la variance du logarithme du taux instantané de mortalité croît aux âges élevés, du fait notamment de la baisse des effectifs survivants à ces âges.

- pour pallier à cette limite, Brouhns et al. [2002] ont proposé une adaptation consistant à modéliser le nombre de décès à l'âge x durant l'année t à l'aide d'une loi de Poisson. Ils modélisent ainsi $D_{x,t}$, qui suit une loi de Poisson de paramètre $R_{x,t}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{x,t}$, où $R_{x,t}$ représente l'exposition au risque à l'âge x durant l'année t et $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,t} = \exp(\breve{U}_x + \text{ɓ}_x k_t)$.

Modèle de Lee-Carter : limites, extensions et alternatives

Limites, extensions et alternatives au modèle de Lee-Carter

Extension de la dimension temporelle :

- l'approche de Lee-Carter classique consiste à extrapoler dans le futur des tendances constatées dans le passé, en ne faisant intervenir qu'un seul paramètre temporel. Ainsi, l'approche de Lee-Carter dispose d'une dimension qualitative très limitée et peut en conséquence se révéler trop rigide dans certaines situations.

- Pour pallier cette limite, Renshaw et Haberman [2003] propose de rajouter une dimension temporelle au modèle de Lee-Carter classique pour projeter la mortalité. Le modèle s'écrit alors :

$$\ln\left(\mu_{x,t}\right) = \alpha_x + \beta_x^1 k_t^1 + \beta_x^2 k_t^2 + \varepsilon_{x,t}$$

Modèle de Lee-Carter : limites, extensions et alternatives

Limites, extensions et alternatives au modèle de Lee-Carter

Prise en compte de la génération :

- comme évoqué ci-dessus, l'approche de Lee-Carter classique présente une faible dimension qualitative et la prise en compte d'un avis d'expert dans l'évolution présumée de la mortalité est limitée. L'alternative de Renshaw et Haberman [2003] est une première approche pour limiter cette insuffisance.

- en complément, toujours afin d'améliorer la dimension qualitative, Renshaw et Haberman [2005] ont étendu le modèle de Lee-Carter classique afin de tenir compte d'un effet de génération. À cet effet, ils considèrent que l'expression des taux de décès instantanés s'écrit (il s'agit d'un modèle APC, la génération étant symbolisée par *z* = *t* - *x*) :

$$\mu_{x,t} = \exp\left(\alpha_x + \beta_x^0 \gamma_{t-x} + \beta_x^1 k_t\right)$$

Modèle de Lee-Carter : limites, extensions et alternatives

Limites, extensions et alternatives au modèle de Lee-Carter

Sensibilité à la mortalité au cours du temps, quelques alternatives à L-C :

- une autre limite importante du modèle de Lee-Carter est l'hypothèse que la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge *x* par rapport à k_t , notée β_x est constante au cours du temps. Cette hypothèse revient à considérer qu'à un âge donné, l'amélioration de la mortalité au cours du temps est la même, quelles que soient les dates de la période considérée.

- cette contrainte n'est pas vérifiée en pratique (*cf*. Bongaarts [2004]). L'approche de Bongaarts [2004], présentée ci-après, permet, entre autres, de relâcher cette contrainte.

Approche de Bongaarts : justification du choix

Présentation de lôapproche de Bongaarts

On considère ici le modèle logistique décalé de Bongaarts [2004] défini par :

$$\varepsilon_{x,t} = \frac{\text{Ŭ}_t e^{\text{ɓ}x}}{1+\text{Ŭ}_t e^{\text{ɓ}x}} + \text{ɔ}_t$$

où les paramètres α_t et ɔ_t sont dépendants du temps, et le paramètre ***ɓ*** est indépendant du temps.

Dans cette spécification des taux de décès instantanés, on reconnaît facilement une adaptation du modèle paramétrique proposé par Thatcher [1999] dans laquelle les taux de décès ne sont pas constants au cours du temps. On retrouve ainsi la dimension explicative du modèle.

Approche de Bongaarts : justification du choix

Présentation de l'approche de Bongaarts

Sur la base de ce modèle, Bongaarts [2004] propose une procédure en quatre étapes pour anticiper la mortalité future :

1) Calibrer, pour différentes périodes ou années passées *t*, le modèle de Thatcher (ajustement statistique) : $\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1+\alpha e^{\beta x}} + \gamma$

2) Fixer la valeur du paramètre β en considérant la moyenne de β_t , et déterminer à nouveau les séries pour les paramètres α_t et γ_t .

3) Extrapoler les paramètres α_t et γ_t obtenus dans l'étape 2.

4) En déduire une projection des taux de mortalité à partir du modèle de Bongaarts, sur la base du paramètre β et des paramètres extrapolés α_t et γ_t

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Approche de Bongaarts : justification du choix

Justification de lâapproche de Bongaarts

Lâapproche de Bongaarts :

- permet de ne pas majorer le nombre de paramètres du modèle de Lee-Carter classique ;

- est moins contrainte dans la dimension temporelle que le modèle de Lee-Carter classique ;

- considère que lâamélioration de la mortalité au cours du temps évolue dans le temps ;

- accorde une attention particulière à la modélisation de la mortalité aux grands âges ;

Approche de Bongaarts : justification du choix

Justification de l'approche de Bongaarts

- fournit une dimension qualitative à la modélisation, d'une part compte tenu de la forme paramétrique du modèle sous-jacent (modèle de Thatcher, avec un paramètre au titre de la mortalité environnementale, un paramètre au titre du niveau de mortalité et un paramètre au titre l'augmentation du risque de décès avec l'âge), et d'autre part compte tenu de la propriété de « décalage » du modèle de Bongaarts (qui permet d'interpréter l'évolution de la mortalité au cours du temps comme un décalage d'âge).

De surcroît, Bongaarts [2004] précise que son approche est adaptée à des populations pour lesquelles on ne dispose qu'une d'une (ou de très peu) d'année(s) d'historique. Dans ce cas, il indique que la projection des paramètres et se fait alors uniquement à partir d'hypothèses et que son approche devient de fait principalement qualitative.

Ajustement statistique

Ajustement par moindres carrés

On réalise l'approximation de la loi de $\hat{q}_x$ par une loi normale, et on cherche à minimiser :

$$\sum_x \frac{R_x}{\hat{q}_x\left(1-\hat{q}_x\right)}\left(q_x-\hat{q}_x\right)^2$$

Les quantités R_x et $\hat{q}_x$ étant observées, il reste à déterminer l'expression de q_x pour résoudre le problème de moindres carrés pondérés.

On considère à cet effet $q_x = 1-\exp\left(-\int_x^{x+1}\varepsilon_u du\right) = 1-\exp\left(-\int_x^{x+1}\left(\frac{\alpha e^{\beta u}}{1+\alpha e^{\beta u}}+\gamma\right)du\right)$

Après quelques calculs, on obtient :

$$q_x = 1-\exp(-\gamma)\left(\frac{\pi_x}{\pi_{x+1}}\right)^{1/\beta},$$

avec $\pi_u = 1+\alpha e^{\beta u}$.

Ajustement statistique

Ajustement par moindres carrés

Par ailleurs, l'algorithme utilisé pour l'estimation des paramètres ne converge vers la vraie valeur du paramètre qu'à condition de partir d'une valeur initiale assez proche de cette valeur. Une attention particulière doit ainsi être accordée à la détermination de valeurs initiales acceptables.

À cet effet, on s'appuie sur une propriété présentée dans Planchet et Thérond [2006], sous l'hypothèse que les taux suivent une loi de Makeham.

Après quelques calculs, on obtient : $\ln\left(q_x - q_{x+1}\right) \approx \ln\left(e^{\beta}\right) \times x + \ln\left(-\frac{\alpha}{\beta}\left(e^{\beta}-1\right)^2\right)$.

Les points sont donc alignés sur une droite de pente β. Il s'agit alors de réaliser une régression linéaire classique, par moindres carrés, pour en déduire des valeurs initiales pour les paramètres du modèle de Thatcher.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Ajustement par avis d'expert

Contexte

L'étape 1 de l'approche de Bongaarts préconise de réaliser l'ajustement statistique pour différentes années (ou périodes) passées. Toutefois, ici on considère des données limitées et insuffisantes et on considère un ajustement statistique pour une année (ou période) de référence uniquement. L'étape 2 de l'approche de Bongaarts relative au paramètre β_t est alors immédiate (puisqu'on a $\beta_t = \beta$).

La projection des paramètres γ_t et α_t pour l'étape 3 est ensuite réalisé par avis d'expert. À cet effet, on distingue la projection du paramètre γ_t et celle du paramètre α_t .

Pour le paramètre γ_t , représentant l'ajustement au titre de la mortalité environnementale, il sera supposé qu'il est constant. On a ainsi $\gamma_t = \gamma$.

Ajustement par avis d'expert

Ajustement du niveau de mortalité

Pour le paramètre α_t , représentant le niveau de mortalité, on se tourne vers une approche, qui consiste à utiliser l'espérance de vie générationnelle à une date future et à un âge pivot x donné.

Cette notion, notée $e_{x,t}$, est intuitivement plus aisée à intégrer et se calcule par :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} \left(1 - q_{x+k,t+k}\right).$$

En reprenant l'expression des q_x du modèle retenu, on obtient :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \exp\left(-\text{ɔ} h\right) \prod_{k=0}^{h-1} \left(\frac{\text{ɜ}_{x+k,t+k}}{\text{ɜ}_{x+1+k,t+k}}\right)^{1/\text{ɓ}}.$$

avec $\text{ɜ}_{u,t} = 1 + \text{Ŭ}_t e^{\text{ɓ} u}$.

Ajustement par avis dôexpert

Ajustement du niveau de mortalité

On pose ensuite une expression simple pour projeter α_t , en fonction de deux paramètres a_α et b_α :

- soit $\text{Ŭ}_t = a_{\text{Ŭ}} \times t + b_{\text{Ŭ}}$, si lôon anticipe une évolution linéaire du niveau de mortalité ;
- ou $\text{Ŭ}_t = \exp\left(a_{\text{Ŭ}} \times t + b_{\text{Ŭ}}\right)$, si lôon anticipe une évolution exponentielle du niveau de mortalité.

On en déduit alors facilement une expression de la forme $e_{x,t} = \text{ű}_{x,t}\left(a_{\text{Ŭ}}, b_{\text{Ŭ}}\right)$ pour lôespérance de vie générationnelle.

On se ramène au final à chercher $\vartheta = (a_\alpha\ ;\ b_\alpha)$ permettant de résoudre (avec $e_{x,t}$(expert) la valeur à dire dôexpert pour lôespérance de vie générationnelle) :

$$\underset{\left(a_{\text{Ŭ}}, b_{\text{Ŭ}}\right)}{Min}\left[\left(e_{x,t}\left(\text{expert}\right) - \text{ű}_{x,t}\left(a_{\text{Ŭ}}, b_{\text{Ŭ}}\right)\right)^2\right]$$

Ajustement par avis d’expert

<u>Ajustement du niveau de mortalité (choix de l’expression pour la projection du niveau de mortalité)</u>

D’un côté, si l’on anticipe que la baisse absolue du niveau de mortalité sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance linéaire.

Dans ce cas α_t s’exprime simplement par $\alpha_t = a_\alpha \times t + b_\alpha$ et on dispose alors d’une suite arithmétique de valeur initiale $\alpha_0 = b_\alpha$ et de raison a_α (avec a_α négatif).

La limite de cette approche est que pour des horizons de projection importants, α_t peut mathématiquement devenir négatif (ce qui n’est pas souhaitable en pratique).

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Ajustement par avis dôexpert

<u>Ajustement du niveau de mortalité (choix de lôexpression pour la projection du niveau de mortalité)</u>

Dôun autre côté, si lôon anticipe que côest plutôt la baisse relative du niveau de mortalité qui sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance exponentielle.

En effet, dans ce cas on considère une diminution de α_t proportionnelle à son niveau, et on pose donc $\frac{d\breve{U}_t}{dt} = a_{\breve{U}} \times \breve{U}_t$ (avec a_α négatif), soit $\breve{U}_t = \breve{U}_0 \times \exp\left(a_{\breve{U}} \times t\right)$.

Au final, on dispose ainsi dôune suite géométrique de valeur initiale α_0 et de raison exp(a_α), et en posant α_0 = exp(b_α), on a $\breve{U}_t = \exp\left(a_{\breve{U}} \times t + b_{\breve{U}}\right)$.

Cette expression présente lôavantage de rendre mathématiquement impossible lôobtention de niveaux de mortalité négatifs.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Résultats de lôajustement du modèle

Résultats de lôajustement statistique

Lôajustement statistique est réalisé au titre des points 1 et 2 de lôapproche de Bongaarts.

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
2003	163 755	43,7 ans	0,36%	0,33%	0,38%
2004	161 056	44,0 ans	0,40%	0,37%	0,43%
2005	125 797	44,4 ans	0,43%	0,40%	0,47%
2006	99 048	43,4 ans	0,42%	0,38%	0,46%
2003-2006	549 656	43,9 ans	0,40%	0,38%	0,41%

La faible profondeur des données (quatre année dôhistorique uniquement) et les fluctuations dôéchantillonnage associées à la taille de lôéchantillon ne permettent pas dôidentifier de tendance dans lôévolution de la mortalité au fil des années. Aussi, dans le cadre de cette étude, on considère une seule période dôobservation.

Résultats de lôajustement du modèle

Résultats de lôajustement statistique

Les résultats des estimations des paramètres sont présentés dans le tableau suivant. À titre dôinformation, les résultats des estimations de Bongaarts pour la population générale masculine (moyenne des estimations entre 1950 et 2000, *cf*. Bongaarts [2004]) sont également présentés pour la France et pour la moyenne de 14 pays industrialisés.

Période (t)	Alpha (α_t)	Beta (β_t)	Gamma (γ_t)
Valeur initiale (régression lin.)	*-1,89E-07*	*6,45E-02*	*3,58E-03*
Côte d'Ivoire, exp. 2003-2006	2,05E-04	6,45E-02	-3,07E-05
Bongaarts (France) (*)	*4,20E-05*	*1,01E-01*	*9,80E-04*
Bongaarts (14 pays indus.) (*)	*3,12E-05*	*1,05E-01*	*7,50E-04*

(*) Moyenne des valeurs moyennes obtenues entre 1950 et 2000 pour la population générale masculine (respectivement pour la France et pour 14 pays industrialisés, *cf*. Bongaarts [2004]).

Résultats de lôajustement du modèle

Résultats de lôajustement statistique

Pour illustrer lôadéquation de lôajustement aux taux bruts, le tableau ci-dessous compare les décès observés et les décès prédits théoriques (décès modélisés déduits des taux ajustés).

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Décès observés	Décès théoriques	Différences relatives	Décès théoriques (borne inf. à 95%)	Décès théoriques (borne sup. à 95%)	Taux décès moyen (décès observés)	Taux décès moyen (décès prédits)
30-39 ans	144 931	276	294	6,4%	260	327	0,19%	0,20%
40-44 ans	126 517	514	401	-21,9%	362	441	0,41%	0,32%
45-49 ans	149 578	672	650	-3,3%	600	699	0,45%	0,43%
50-55 ans	128 630	726	779	7,4%	725	834	0,56%	0,61%
Total	549 656	2 188	2 124	-2,9%	2 034	2 214	0,40%	0,39%

Au global, il apparaît un écart inférieur à 3 % entre les décès théoriques (prédits à partir des taux ajustés) et les décès observés.

EURIA EURO-INSTITUT D'ACTUARIAT - Jean Dieudonné

Résultats de l'ajustement du modèle

Résultats de l'ajustement par avis d'expert

Concernant le niveau de mortalité, on considère une décroissance exponentielle au fil des années. Pour mémoire, la projection du niveau de mortalité par avis d'expert est directement déduite de la valeur d'expert retenue pour l'espérance de vie générationnelle, à l'âge *x* et à la date *t*. Pour faciliter le choix de l'expert sur ce point, le tableau ci-après présente trois références à 30 ans (en considérant que la date initiale *t*=0 correspond à l'année 2006).

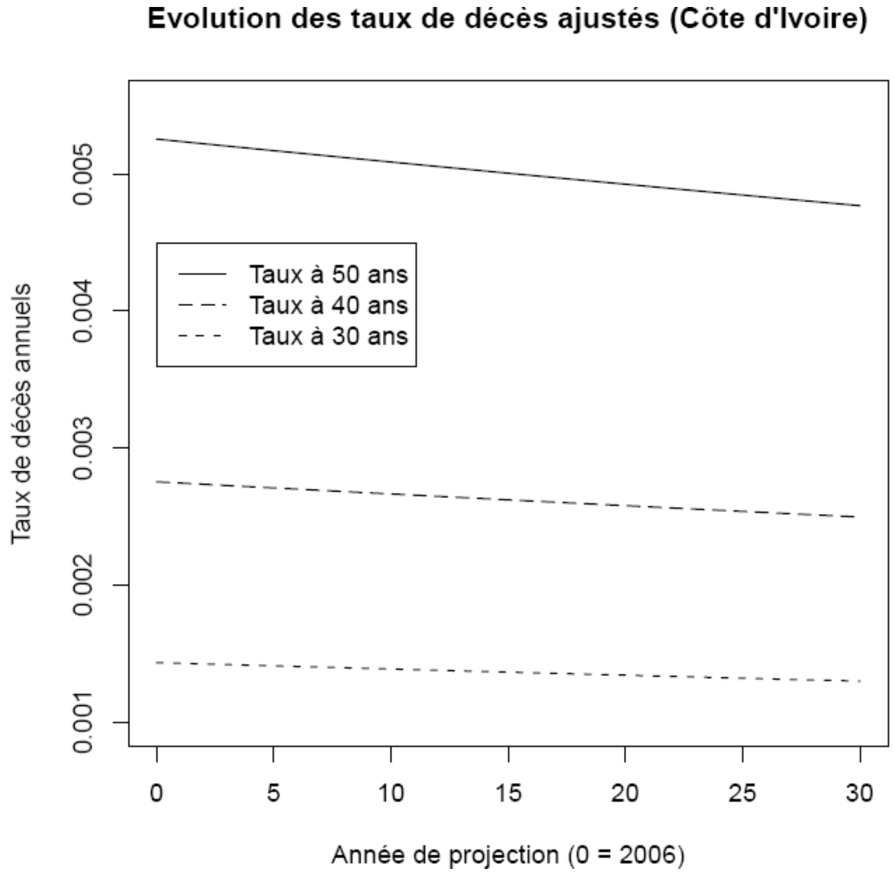
Espérance de vie générationnelle (Age = 30, Date/Année = 2006)	
Côte d'Ivoire (Table du moment sans évolution de l'espérance de vie, population assurée, années 2003-2006) (*)	51,4
TGH05 (Tables prospectives réglementaires en France, population assurée, générations 1900-2005)	60,6
INED H (Tables prospectives en France, population générale, générations 1897-1996)	54,0

(*) Dans ce cas il ne s'agit pas d'une espérance de vie générationnelle, mais d'une espérance de vie simple, ne prenant donc pas en compte l'évolution de la mortalité.

Résultats de lôajustement du modèle

Résultats de lôajustement par avis dôexpert

Sur la base dôun avis dôexpert pour lôespérance de vie égal à 53 ans (pour un âge pivot de 30 ans), on obtient lôévolution dans le temps suivante pour les taux de décès à différents âges (en lôoccurrence à 30 ans, 40 ans et 50 ans).



Sensibilité et mesure du risque de lôavis dôexpert

Cohérence des avis dôexpert (sensibilité au choix de lôâge pivot)

Pour apprécier la cohérence des avis dôexpert, on sollicite un avis dôexpert sur lôespérance de vie à différents âges pivots, et on étudie la cohérence des projections du niveau de mortalité qui en découlent. Dans le cadre de cette analyse, on considère que le paramètre représentant le niveau de mortalité suit une décroissance exponentielle.

Avis d'expert sur l'esp. de vie gén. 2006 (esp. de vie du moment issue de la table d'expérience)	a	b	alpha (décroissance exponentielle)			
			t=0	t=10	t=20	t=30
A 30 ans : 53 ans (51,4 ans)	-3,24E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,98E-04	1,92E-04	1,86E-04
A 40 ans : 43 ans (42,3 ans)	-1,88E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,01E-04	1,97E-04	1,94E-04
A 40 ans : 44 ans (42,3 ans)	-4,47E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,96E-04	1,87E-04	1,79E-04
A 50 ans : 34 ans (33,7 ans)	-1,07E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,03E-04	2,00E-04	1,98E-04
A 50 ans : 35 ans (33,7 ans)	-4,69E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,95E-04	1,86E-04	1,78E-04

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Sensibilité et mesure du risque de lôavis dôexpert

Risque dôavis dôexpert sur les provisions

Pour mesurer le risque dôavis dôexpert sur les provisions, on considère un régime de rentes en cours de service et une population de rentiers composée dôun seul individu de sexe masculin et âgé de 55 ans au 31/12/2009.

En pratique, il sôagit ici de présenter la provision *best estimate* dans plusieurs situations. À cet effet, on considère un scénario central dans lequel lôespérance de vie générationnelle à 30 ans est égale à 53 ans, le niveau de mortalité connaît une décroissance exponentielle et la table dôexpérience prospective construite se ferme à 105 ans (hypothèses dôavis dôexpert retenues jusquôalors dans ce travail).

Dans les scénarios alternatifs testés, on considère une évolution de ces hypothèses dôavis dôexpert.

3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert

Sensibilité et mesure du risque de l'avis d'expert

Risque d'avis d'expert sur les provisions

À la lecture de ce tableau, il apparaît plusieurs enseignements :

- une évolution d'un an de l'avis d'expert sur l'espérance de vie à 30 ans engendre une évolution d'environ 1 % de la provision ;
- le choix d'une décroissance linéaire aux dépens d'une décroissance exponentielle a un impact limité sur le montant de la provision ;
- le passage d'une fermeture de 105 ans à 120 ans a un impact limité sur la provision.

Avis d'expert sur l'esp. de vie gén. à 30 ans en 2006 / forme décroissance niveau mortalité / âge fermeture (estimation esp. de vie gén. théorique)	Provision *best estimate* au 31/12/2009 (homme âgé de 55 ans en 2009)	
	Provision *best estimate*	Ecart relatif avec (1)
52 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (52,00 ans)	20,40	-1,1%
53 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (53,00 ans) (1)	20,62	0,0%
53 ans / **décroiss. linéaire** / fermeture 105 ans (53,14 ans)	20,64	0,1%
53 ans / décroiss. expo. / **fermeture 120 ans** (53,00 ans)	20,61	0,0%
54 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (54,00 ans)	20,85	1,1%
57 ans / décroiss. expo. / fermeture 105 ans (57,00 ans)	21,53	4,4%

SOMMAIRE

Construction de tables d'expérience et mesure des risques associés

1. Tables du moment : taux bruts (Kaplan-Meier et Hoem) et taux ajustés (Brass)

2. Tables du moment : risque d'estimation en présence d'hétérogénéité (Cox et Lin&Yin)

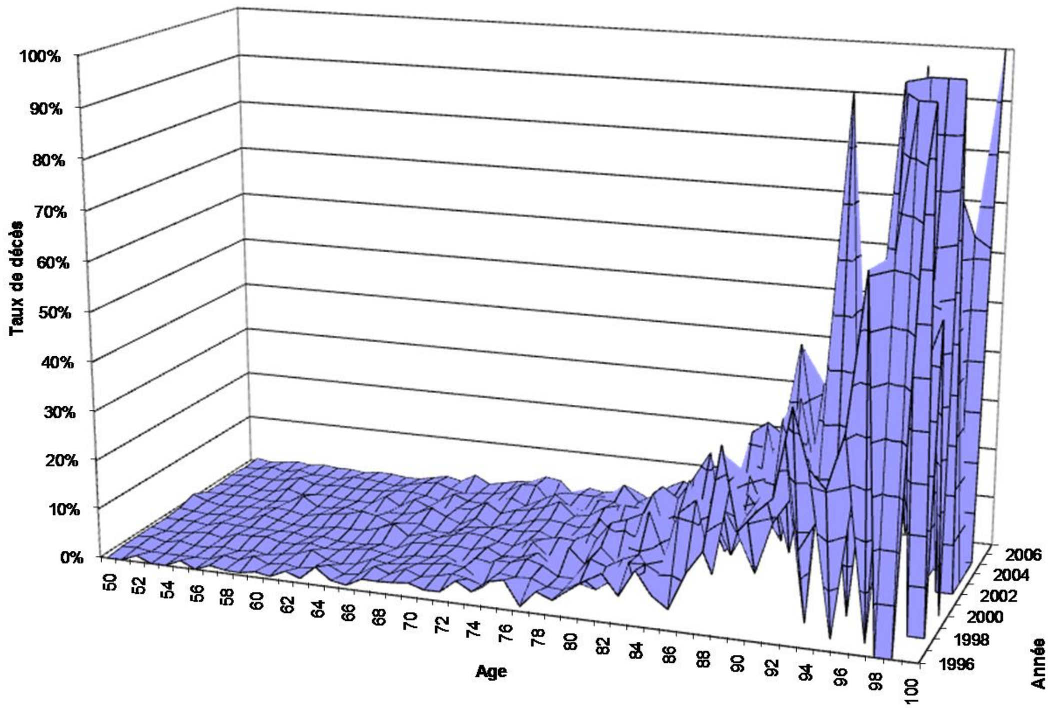
3. Tables prospectives : risque d'avis d'expert (Bongaarts)

4. Tables prospectives : risque d'estimation (Brass)

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Les données

On dispose de données relatives à un régime de retraite de 1996 à 2007 avec une exposition au risque concentrée sur la plage d'âge 50-100 ans. L'exposition annuelle globale est d'environ 20 000 années avec un *sex-ratio* de 40 %.



4. Tables prospectives : risque d'estimation

La méthode de construction

Aussi, il a été décidé de s'appuyer sur une référence externe et de construire les tables d'expérience H/F en positionnant la mortalité d'expérience par rapport à cette référence. Les tables réglementaires françaises TGH/F 05 ont été choisies comme référence, compte tenu du fait qu'elles décrivent la survie des rentiers de portefeuilles d'assureurs (*cf*. Planchet [2006]). L'ajustement est effectué sur les tables du moment reconstituées de 1996 à 2007.

Le modèle utilisé repose sur :

$$\ln\left(\frac{\hat{q}_{xt}}{1-\hat{q}_{xt}}\right) = a \times \ln\left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1-q_{xt}^{réf}}\right) + b + \varepsilon_{xt}$$

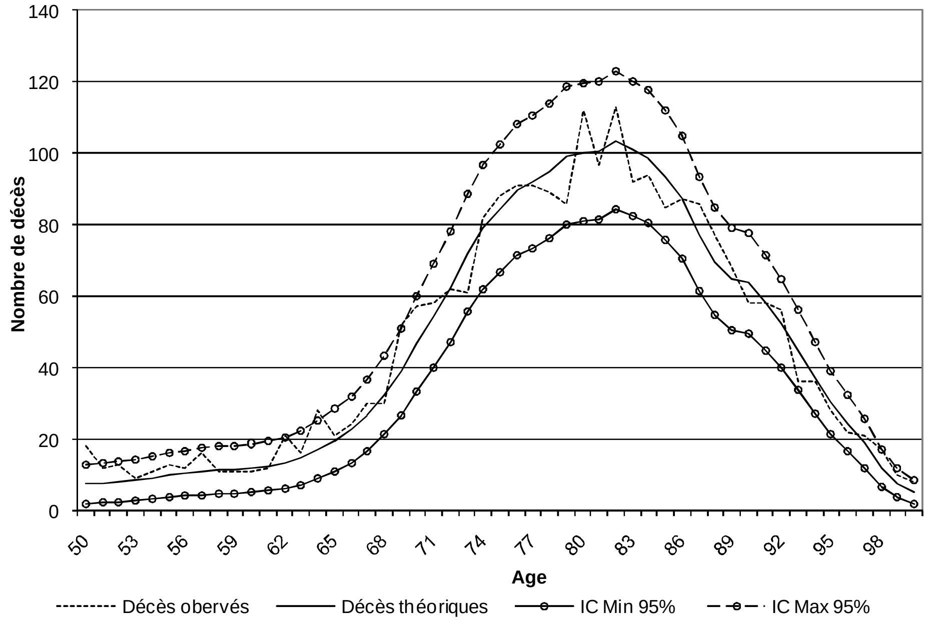
où l'on minimise

$$D = \sum_{x,t} R_{xt}\left(\hat{q}_{xt} - q_{xt}\right)^2$$

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Validation de la table construite

La table ainsi obtenue est classiquement validée en comparant les décès théoriques et observés âge par âge sur lensemble de la période dobservation. On obtient pour les hommes les résultats suivants :



Le niveau élevé des erreurs relatives sur les nombres de décès impose une attention particulière sur lanalyse des risques.

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Intervalles de confiance pour les taux bruts

On cherche ici dans un premier temps un intervalle de confiance pour q_{xt} (taux de décès théorique) à partir de $\hat{q}_{xt}$ (taux de décès observé), pour un âge x et une année t.

Pour mémoire on retient ici l'estimateur de taux bruts de Hoem, qui considère que les décès suivent une loi binomiale. L'expression approchée des bornes de l'intervalle de confiance ponctuel de à l'âge x est alors (pour une période t fixée) :

$$\hat{q}_{xt} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}\left(1-\hat{q}_{xt}\right)}{R_{xt}}}$$

Cette approximation de l'intervalle de confiance permet d'encadrer les taux de décès tel que (pour une période t fixée) :

$$P\left(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}\left(1-\hat{q}_{xt}\right)}{R_{xt}}},\ x = x_0 \right) = 1-\alpha$$

Bandes de confiance pour les taux bruts

On souhaite désormais encadrer les taux de décès simultanément sur tous les âges *x* dôune plage dôâges [x_0 ; x_0+n] pour une année *t*. Lôencadrement des taux de décès correspond donc désormais à une bande de confiance, et non plus à un intervalle de confiance ponctuel.

À cet effet, on sôappuie sur la méthode dôestimation de Sidak, qui repose sur le principe dôinflation du seuil du test lorsque le nombre de tests augmente (*cf*. par exemple Abdi [2007]).

Pour mémoire, une bande de confiance au niveau de confiance *1-Ŭ* sur la plage dôâges [x_0 ; x_0+n] peut être présentée comme une collection dôintervalles de confiance pour les différents âges x ɩ [x_0 ; x_0+n] construits de manière à avoir un intervalle simultané de probabilité égal à *1-Ŭ*.

Bandes de confiance pour les taux bruts

Soit donc $P\left(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm t\,\sigma\left(\hat{q}_{xt}\right),\ x = x_0\right) = 1-\alpha$ l'intervalle de probabilité de niveau 1-α pour q_{xt} à l'âge $x=x_0$ et pour une période t fixée.

La probabilité simultanée d'encadrer les taux de décès q_{xt} aux deux âges $x=x_0$ et $x=x_0+1$ est alors $(1-\alpha)^2$, en supposant l'encadrement indépendant sur ces deux âges.

En répétant l'opération de manière à inclure tous les âges de $[x_0 ; x_0+n]$, il apparaît alors, toujours sous l'hypothèse d'indépendance, que la probabilité simultanée d'encadrer les taux de décès q_{xt} pour les différents âges $x \in [x_0 ; x_0+n]$ est $(1-\alpha)^{n+1}$.

Sur ces bases, on peut ainsi construire une bande de confiance au seuil β sur la tranche d'âges $[x_0 ; x_0+n]$, en constituant des intervalles de confiance ponctuels pour chaque âge $x \in [x_0 ; x_0+n]$ au seuil :

$$\alpha = 1-\left(1-\beta\right)^{1/(n+1)}$$

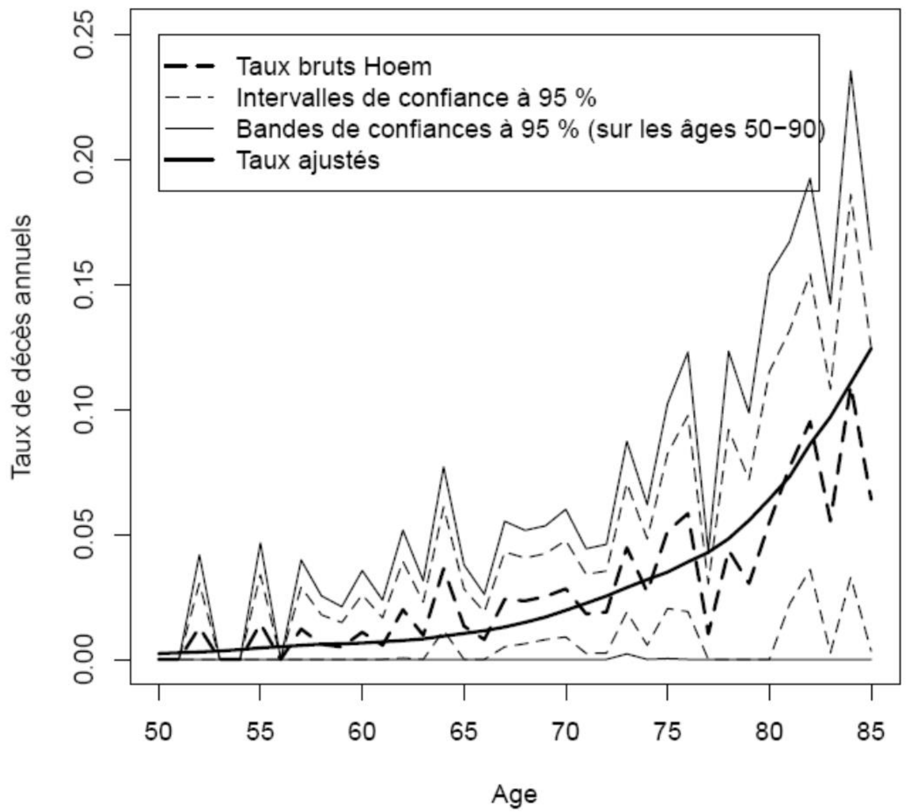
4. Tables prospectives : risque d'estimation

Bandes de confiance pour les taux bruts

Une approximation de la bande de confiance permettant d'encadrer simultanément les taux de décès sur tous les âges [x_0 ; x_0+n] est alors :

$$P\left(q_{xt} \in \hat{q}_{xt} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{q}_{xt}\left(1-\hat{q}_{xt}\right)}{R_{xt}}},\ \forall x \in \left[x_0, x_0+n\right] \right) = 1-\alpha$$

La figure ci-contre illustre les taux bruts, les intervalles de confiance, les bandes de confiance et les taux ajustés des hommes pour l'année 1996.



4. Tables prospectives : risque d'estimation

Ré-échantillonnage des taux ajustés

On cherche désormais à mesurer l'impact des fluctuations d'échantillonnage sur l'estimation des paramètres du modèle retenu pour ajuster les taux de décès. La démarche retenue à cet effet consiste, dans un premier temps, à ré-échantillonner les taux de décès bruts à partir de la méthode de simulation directe des taux présentée dans Kamega et Planchet [2010].

Le principe est de simuler des décès dans la loi binomiale $B\left(R_{xt};\hat{q}_{xt}\right)$ et d'en déduire des taux de décès simulés :

$$\hat{q}_{xt}^{k}=d_{xt}^{k}\Big/R_{xt}$$

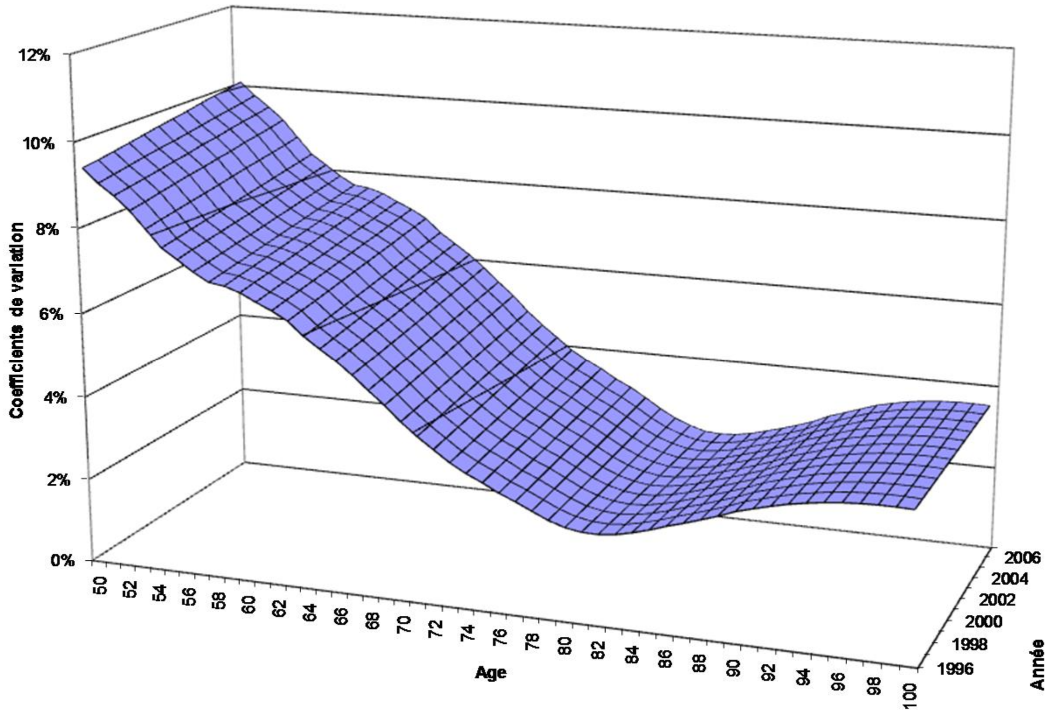
Sur cette base on détermine une nouvelle estimation du paramètre (*a*, *b*) dans le modèle de positionnement.

Ré-échantillonnage des taux ajustés

On construit ainsi des taux ajustés simulés (avec 5 000 tirages) ; le coefficient de variation de ces taux simulés a l'allure suivante :

$$y_{xt}^{k} = \hat{a}^{k} \ln\left(\frac{q_{xt}^{réf}}{1-q_{xt}^{réf}}\right) + \hat{b}^{k}$$

$$q_{xt}^{k} = \frac{\exp\left(y_{xt}^{k}\right)}{1+\exp\left(y_{xt}^{k}\right)}$$



Encadrement de la table dôexpérience

Sur la base de ces taux ré-échantillonnés on souhaite construire un encadrement de la table ajustée.

Lôapproche retenue à cet effet consiste à considérer une fonctionnelle propre à chaque table de mortalité qui lui associe un nombre positif, puis à lui déterminer un intervalle de confiance pour cette fonctionnelle.

Lôespérance de vie générationnelle est de ce point de vue un choix naturel :

$$EV_{xt|n} = \sum_{h=1}^{n} \prod_{u=0}^{h-1} \left(1 - q_{x+u,t+u}\right)$$

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Encadrement de la table dôexpérience

On procède alors de la manière suivante, en cherchant deux bornes telles que :

$$P\left(EV_{xt}^{i} < EV_{xt}^{k} \le EV_{xt}^{s}, x = x_0\right) = 1 - \alpha$$

Les bornes sont alors calculées de manière empirique :

$$EV_{xt}^{i} = \mathbf{inf}\left\{EV_{xt}^{g} \in \left[EV_{xt}^{1}, \ldots, EV_{xt}^{K}\right] \mid P\left(EV_{xt}^{k} \le EV_{xt}^{g}\right) \ge \alpha/2, x = x_0\right\}$$

$$EV_{xt}^{s} = \mathbf{inf}\left\{EV_{xt}^{g} \in \left[EV_{xt}^{1}, \ldots, EV_{xt}^{K}\right] \mid P\left(EV_{xt}^{k} \le EV_{xt}^{g}\right) \ge 1 - \alpha/2, x = x_0\right\}$$

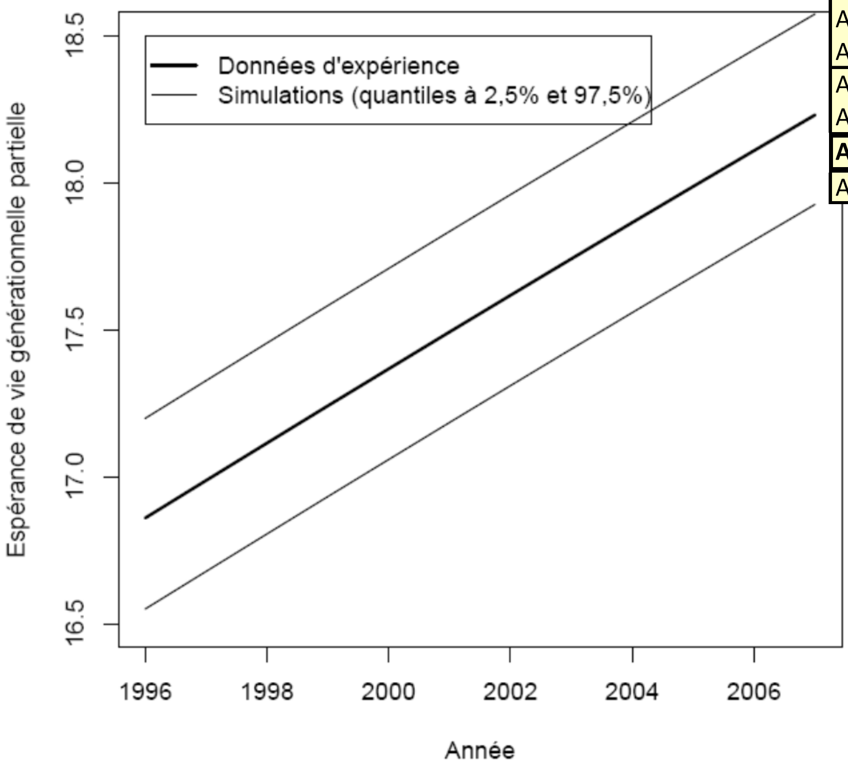
Dans la suite on retient comme âge de référence 67 ans et on considère les EV jusquôà 95 ans.

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Intervalles de confiance sur les EV partielles et les provisions

On a typiquement :

Esp, de vie gén, partielle (pour t=1996)	Données d'expérience (1)	Simulations à partir des données d'expérience			
		Quantile à 2,5% (2)	Ecart relatif (2)/(1)-1	Quantile à 97,5% (3)	Ecart relatif (3)/(1)-1
Age: 50 / Age fin: 90	32,7	32,2	-1,6%	33,3	1,7%
Age: 60 / Age fin: 90	22,7	22,3	-1,7%	23,1	1,9%
Age: 67 / Age fin: 90	16,1	15,8	-1,7%	16,4	1,9%
Age: 70 / Age fin: 90	13,5	13,2	-1,7%	13,7	1,8%
Age: 50 / Age fin: 95	33,9	33,3	-1,7%	34,5	1,9%
Age: 60 / Age fin: 95	23,6	23,2	-1,8%	24,0	2,0%
Age: 67 / Age fin: 95	**16,9**	**16,5**	**-1,8%**	**17,2**	**2,0%**
Age: 70 / Age fin: 95	14,2	13,9	-1,9%	14,5	2,0%



Sur les EV partielles, on note des écarts d'environ 2 % relativement stables en fonction des âges de référence retenus.

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Besoin en capital

On se place dans le cadre du dispositif européen Solvabilité 2, dans lequel on cherche le montant de capital dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5 %.

On considère le sous-risque de longévité du risque de souscription vie, qui pour mémoire représente le *risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d’assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau, l’évolution tendancielle ou la volatilité des taux de mortalité, lorsqu’une baisse de ces taux entraîne une augmentation de la valeur des engagements d’assurance*.

En particulier, on compare le capital requis au titre du risque de longévité et évalué à partir de l’approche standard (premier cas) au capital requis au titre du risque d’estimation des tables de mortalité prospectives lié aux fluctuations d’échantillonnage (second cas).

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Besoin en capital

Le calcul dans le cadre standard est direct (abattement de 20% sur les taux conditionnels de décès).

Le calcul dans le cadre du modèle interne utilise le cadre proposé dans Guibert et al. [2010] qui conduit à

$$\text{Capital\_MIP}_0 \approx \frac{\dfrac{VaR_{99,5\%}(\chi)}{L_0} - 1}{1 + \alpha\left(D_0 - \dfrac{VaR_{99,5\%}(\chi)}{L_0}(D_0 - 1)\right)} L_0$$

avec $\chi = \dfrac{\tilde{P}_1 + \tilde{L}_1}{1 + \tilde{R}_1}$

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Besoin en capital

On obtient les résultats suivants, pour le modèle standard :

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (FS - Longévité) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	316	6,7%

puis pour le modèle interne partiel :

Provision - D. d'expérience (1)	Charge capital (MIP - Risque estimation) (2)	Poids de la charge de capital (2)/(1)
4 752	92	1,9%

Il apparaît que la charge de capital au titre du risque d'estimation lié aux fluctuations d'échantillonnage, qui se limite ainsi principalement à un risque de volatilité des taux de décès ajustés, représente environ 2 % de la provision *best estimate*. Aussi, il ressort que la charge de capital au titre du seul risque d'estimation représente environ 30 % de la charge de capital au titre du risque de longévité prévue par la formule standard du QIS5.

Impact du choix de la référence

La table d’expérience est construite par positionnement par rapport à une référence. Il est souhaitable que les résultats dépendent assez peu de la référence choisie.

Les tables de référence retenues sont les TGH/F 05. Ces tables sont construites à partir de données d’expérience et ont elles-mêmes été obtenues à partir d’un positionnement par rapport aux tables de la population générale française de 1962 à 2000.

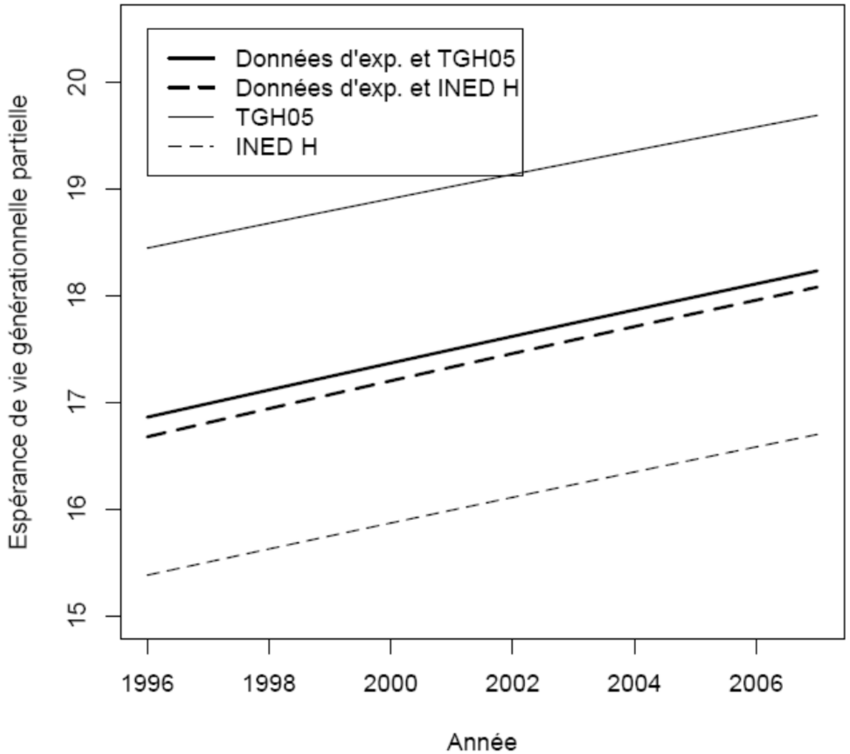
On compare l’ajustement du modèle à partir de deux jeux de tables de référence différents : d’une part à partir des tables de la population assurée (tables prospectives réglementaires TGH/F 05), et d’autre part à partir des tables de la population générale française (tables prospectives de l’INED).

4. Tables prospectives : risque d'estimation

Impact du choix de la référence

L'impact est d'environ 1% de l'EV partielle, soit la moitié du risque d'estimation au titre des fluctuations d'échantillonnage.

Esp. de vie gén. partielle (pour t=1996) Age: 67 / Age fin: 95		Ecart relatif avec (1)
Données d'expérience / Positionnement table population assurée (TGH05) (1)	16,9	0,0%
Quantile à 2,5% (simulations et positionnement TGH05)	16,5	-1,8%
Quantile à 97,5% (simulations et positionnement TGH05)	17,2	2,0%
Données d'expérience / Positionnement table population générale (INED H)	16,7	-1,1%
Table population assurée (TGH05)	18,4	9,4%
Table population générale (INED H)	15,4	-8,8%



Références (extrait)

Abdi H. [2007] « Bonferroni and Sidak corrections for multiple comparisons », *N. J. Salkind (ed.). Encyclopedia of Measurement and Statistics*, Thousand Oaks, CA: Sage.

Booth H., Tickle L. [2008] « Mortality modeling and forecasting: A review of methods », *The Australian Demographic and Social Research Institute, WP3*.

Bongaarts J. [2004] « Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projections Methods », *Population Council, WP192*.

Cox D. R. [1972] « Regression Models and Life-Tables », *Journal of the Royal Society. Series B (Methodological), Vol. 34, No. 2*.

Delwarde A., Denuit M. [2006] « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.

Guibert Q., Planchet F., Juillard M. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français dôActuariat*, Vol. 10, No. 20.

Kamega A., Planchet F. [2010], « Mesure du risque dôestimation associé à une table dôexpérience », *Cahiers de recherche de lôISFA, WP2136.*

Kamega A., Planchet F. [2011], « Hétérogénéité : mesure du risque dôestimation dans le cas dôune modélisation intégrant des facteurs observables », *Bulletin Français dôActuariat, Vol. 11, No. 21.*

Kamega A., Planchet F. [2012], « Actuariat et assurance vie en Afrique subsaharienne francophone ï Outils dôanalyse de la mortalité », *Seddita.*

Klein J. P., Moeschberger M. L. [2005] « Survival Analysis ï Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer, 2nd edition*.

Lee R. [2000], « The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications », *North American Actuarial Journal, Vol. 4, No. 1.*

Lin D. Y., Ying Z. [1994] « Semiparametric analysis of the additive risk model », *Biometrika, n. 81*.

Planchet F. [2007], « Prospective models of mortality with forced drift ï Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress.*

Planchet F., Kamega A. [2013], « Construction dôune table de mortalité prospective pour un régime de rentes : prise en compte du risque dôestimation », *Bulletin Français dôActuariat*, Vol. 13, No. 25.

Planchet F., Kamega A. [2012], « Mortalité prospective en cas de petits échantillons : modélisation à partir dôinformations externes en utilisant lôapproche de Bongaarts », *Assurance et gestion des risques, Vol. 80 (2).*

Planchet F., Leroy G. [2009] « Quel niveau de segmentation pertinent ? », *La Tribune de lôAssurance, n. 142*.

Thatcher A. R. [1999] « The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age », *Journal of the Royal Statistical Society, 162*.

Martinussen T., Scheike T. H. [2006] « Dynamic Regression Models for Survival Data », *Springer*.

Planchet F., Thérond P. [2006] « Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles », *Economica* (2ème édition).

Références complémentaires

Tous les codes R associés aux supports suivants sont disponibles en libre accès sur :

www.ressources-actuarielles.net

en se référant aux articles scientifiques suivants (cf. références bibliographiques) :
- pour la section 1 : Kamega et Planchet [2010],
- pour la section 2 : Kamega et Planchet [2011],
- pour la section 3 : Planchet et Kamega [2012],
- pour la section 4 : Planchet et Kamega [2013].

Des outils complémentaires R sont par ailleurs également disponibles sur :

http://www.ressources-actuarielles.net/r

Enfin, toutes les spécifications techniques présentées ici sont détaillées dans l'ouvrage Kamega et Planchet [2012].

Contacts

Frédéric Planchet

frederic.planchet@univ-lyon1.fr

Aymric Kamega

aymric.kamega@univ-brest.fr

EURIA

Université de Bretagne Occidentale

6 avenue le Gorgeu

CS 93837

29238 Brest Cedex 3

Tél : +33-2-98-01-66-55

http://www.ressources-actuarielles.net

http://blog.ressources-actuarielles.net

http://afrique.ressources-actuarielles.net