

**MODELES FINANCIERS ET ANALYSES DE RISQUE
DYNAMIQUES EN ASSURANCE**



Support de cours 2007-2008

**Dépendance stochastique
Introduction à la théorie des copules**

Frédéric PLANCHET

SOMMAIRE

1. Modéliser la dépendance	4
1.1. Les situations de dépendance	4
1.2. Exemple introductif.....	4
2. Copules, lois conjointes et dépendance.....	5
2.1. Rappels et notations	5
2.2. Définitions et résultats de base.....	5
2.3. Exemples de copules	9
2.4. Les copules archimédiennes.....	11
2.5. Mesures de dépendance.....	12
3. Inférence statistique	14
3.1. Estimation non paramétrique	14
3.1.1. Rappel : fonction de répartition empirique	14
3.1.2. Copule empirique	15
3.1.3. Identification d'une copule archimédienne	16
3.2. Estimation paramétrique et semi-paramétrique.....	16
3.2.1. Méthode des moments.....	16
3.2.2. Maximum de vraisemblance	17
3.2.3. Méthode « IFM ».....	17
4. Copules et valeurs extrêmes	18
5. Copules et simulation	18
5.1. La méthode des distributions.....	19
5.2. La méthode des distributions conditionnelles	19
5.2.1. Présentation générale.....	19
5.2.2. Cas particulier des copules archimédiennes.....	21
5.3. Les méthodes adaptées spécifiquement à une copule	21
6. Application des copules en assurance.....	21
6.1. Mesure du capital sous risque	21
6.2. Application aux processus de diffusion	22
6.3. La méthode NORTA (« Normal to anything »)	22

PREAMBULE

Le concept de copule a été introduit par Abe Sklar en 1959, comme solution d'un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet dans le cadre des espaces métriques aléatoires (travaux avec Berthold Schweizer).

Ce concept est resté longtemps très peu utilisé en statistique ; on peut toutefois citer :

- ✓ Les travaux de Kimeldorf et Sampson sur la dépendance (1975)
- ✓ Les recherches de Paul Deheuvels (fin des années 70).

L'étude systématique des copules débute dans le milieu des années 1980 avec Christian Genest et son équipe.

L'article fondateur est : C. Genest & R. J. MacKay [1986]. *The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals*. *The American Statistician*, 40, 280-283.

Depuis, de nombreux développements statistiques ont été menés par C. Genest et ses coauteurs (R.J. MacKay, L.-P. Rivest, P. Capéraà, A.-L. Fougères, K. Ghoudi, B. Rémillard).

Les copules sont devenues un outil de base dans la modélisation des distributions multivariées en finance et en assurance.

Le présent document est une introduction à la théorie des copules, il en présente de manière succincte les principales définitions et outils.

La bibliographie fournit les principales références utiles pour approfondir ce sujet.

1. Modéliser la dépendance

1.1. Les situations de dépendance

De nombreuses situations nécessitent de prendre en compte la dépendance stochastique entre variables aléatoires :

- gestion des risques systématiques ;
- tarification : calcul des marges pour risque ;
- réassurance ;
- agrégation de capitaux ;
- phénomènes dynamiques
- ...

1.2. Exemple introductif

On s'intéresse à la prise en compte de la dépendance entre différentes durées de survie. On suppose pour cela que les durées observées, T_1, \dots, T_n sont indépendantes conditionnellement à θ et que les marginales (conditionnelles) sont de la forme $S_i(t|\theta) = B_i(t)^\theta$; on en déduit directement l'expression de la fonction de survie conjointe :

$$S(t_1, \dots, t_n) = E \left[\left(B_1(t_1) \dots B_n(t_n) \right)^\theta \right].$$

Dans ce cas le paramètre de fragilité s'interprète comme un élément exogène qui modifie le comportement de l'ensemble des individus. En général la fonction de survie de base est identique pour tous les individus et on a :

$$S(t_1, \dots, t_n) = E \left[\prod_{i=1}^n B(t_i)^\theta \right].$$

Mais comme $B(t) = \exp(-H(t))$ où H est la fonction de hasard cumulée de référence, cette expression se met sous la forme :

$$S(t_1, \dots, t_n) = E \left[\exp \left(-\theta \sum_{i=1}^n H(t_i) \right) \right].$$

On reconnaît dans le membre de droite la transformée de Laplace de la variable θ au point $\sum_{i=1}^n H(t_i)$.

Lorsque θ est distribué selon une loi stable de paramètre α (c'est à dire que la transformée de Laplace de θ est $E(\exp(-x\theta)) = \exp(-x^\alpha)$) on obtient le modèle de Hougaard (cf.

HOUGAARD [2000]) avec la fonction de survie conjointe

$$S(t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln S(t_i))^{1/\alpha} \right]^\alpha \right\}.$$

On note que la loi conjointe est de la forme $C(S_1, \dots, S_n)$ avec :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^{1/\alpha} \right]^\alpha \right\}.$$

Cette décomposition de la loi jointe est en fait générale et la fonction C s'appelle une copule. L'exemple ci-dessus fait intervenir la copule de Hougaard¹. Dans le cas général, le calcul explicite de la copule est toutefois rarement possible car il nécessite l'inversion des fonctions de répartition des marginales.

2. Copules, lois conjointes et dépendance

2.1. Rappels et notations

Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , alors par définition $F(x) = P(X \leq x)$; la fonction F est continue à droite avec des limites à gauche ; on définit alors l'inverse généralisée de F en posant $F^{-1}(y) = \inf(x / F(x) \geq y)$.

La variable $U = F(X)$ est distribuée selon une loi uniforme sur $[0,1]$, puisque $P(U \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = u$.

2.2. Définitions et résultats de base

Une copule en dimension n est une fonction C définie sur $[0,1]^n$ et à valeurs dans $[0,1]$ possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & C_n(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u \\ \checkmark \quad & \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 (-1)^{k_1 + \dots + k_n} C(u_1^{k_1}, \dots, u_n^{k_n}) \geq 0 \end{aligned}$$

pour tous $u^1 = (u_1^1, \dots, u_n^1)$ et $u^2 = (u_1^2, \dots, u_n^2)$ tels que $u_i^1 \leq u_i^2$. Cette condition s'interprète en disant que le C -volume de l'hypercube $[x, y]$ de $[0,1]^n$ est positif quel que soit l'hypercube, le C -volume étant défini par :

¹ Si le paramètre de mélange est distribué selon une loi gamma on obtient la copule de Clayton.

$$V_c([x, y]) = \sum \varepsilon(z) C(z_1, \dots, z_n)$$

la somme étant étendue à tous les sommets de l'hypercube, et la fonction $\varepsilon(z)$ valant 1 si un nombre pair de sommets ont une valeur de x et -1 sinon. Il s'agit d'une propriété de « croissance » de la copule. On dit que la fonction C est « super modulaire ».

Il résulte directement de la définition d'une copule que C est une fonction de répartition d'un vecteur dont les composantes sont uniformes. En effet, la condition

$$\sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 (-1)^{k_1 + \dots + k_n} C(u_1^{k_1}, \dots, u_n^{k_n}) \geq 0$$

exprime le fait que $P(u_1^1 \leq X_1 \leq u_1^2, \dots, u_n^1 \leq X_n \leq u_n^2) \geq 0$ en se souvenant que $C(u_1, \dots, u_n) = P(X_1 \leq u_1, \dots, X_n \leq u_n)$.

De plus, si on se donne des distributions réelles univariées F_1, \dots, F_n , alors $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ est la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire dont les lois marginales sont les lois F_1, \dots, F_n . Cela est la conséquence directe que pour toute v.a. X de fonction de répartition F , $U = F(X)$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple n°1 : soit $F(x, y) = (1 - e^{-x} - e^{-y})^{-1}$ la distribution logistique bivariée de Gumbel ; par intégration on trouve que les lois marginales sont identiques, de fonction de répartition $F_X(x) = (1 - e^{-x})^{-1}$; cette fonction est aisément inversible et on en déduit que :

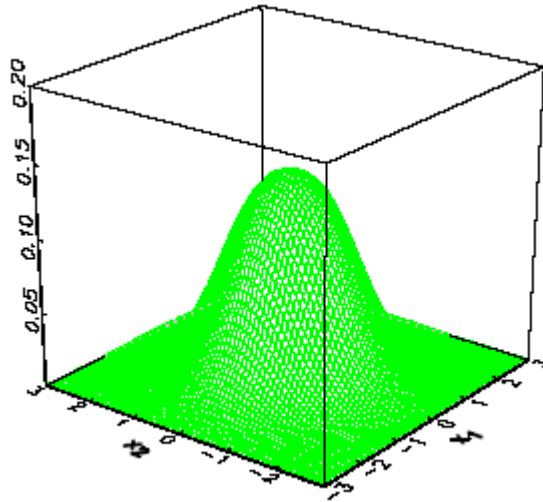
$$C(u, v) = F(F_X^{-1}(u), F_X^{-1}(v)) = \frac{uv}{u + v - uv}$$

Exemple n°2 : utilisation de la copule cubique avec des marginales gaussiennes.

La copule cubique est définie pour $-1 \leq \alpha \leq 2$ par :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \alpha u_1 (u_1 - 1) (2u_1 - 1) u_2 (u_2 - 1) (2u_2 - 1).$$

Avec des marginales gaussiennes, on obtient la fonction de répartition suivante :



La copule cubique présente la particularité suivante : si les marginales sont continues et symétriques, leur coefficient de corrélation est nul, alors qu'elles ne sont pas indépendantes. On peut ainsi aisément construire des distributions à marginales non corrélées dépendantes².

Les copules apparaissent ainsi être un outil naturel pour construire des distributions multivariées. De plus, lorsque les distributions marginales sont suffisamment régulières on a le théorème de représentation suivant :

Théorème de Sklar ([1959]) : Si F est une distribution de dimension n dont les lois marginales F_1, \dots, F_n sont continues, alors il existe une copule unique telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Remarque : lorsque les marginales ne sont pas continues, il est toujours possible de définir une copule, mais celle-ci n'est plus unique et de ce fait perd beaucoup de son intérêt. En effet, on peut toujours poser :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

avec les « inverses généralisées » des marginales : $F_j^{-1}(u) = \inf \{t / F_j(t) \geq u\}$ (ces fonctions sont également appelées fonctions quantiles empiriques).

Ce résultat est important en pratique pour les applications à l'assurance et à la finance, car il indique que l'analyse d'une problématique multivariée peut être décomposée en deux étapes :

- ✓ l'identification des distributions marginales,
- ✓ l'analyse de la structure de dépendance entre les composantes.

Le théorème de Sklar fournit ainsi une représentation canonique d'une distribution multivariée, via la donnée des distributions marginales et de la structure de dépendance.

² Voir également la section 2.3

Deux fonctions particulières jouent un rôle important dans l'analyse des copules, les bornes de Fréchet ; on pose par définition :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\right) \text{ et } C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$$

On a pour toute copule C et tout u dans $[0, 1]^n$:

$$C^-(u) \leq C(u) \leq C^+(u)$$

La majoration est la conséquence directe de $C_n(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$; la borne supérieure est atteinte avec le vecteur (U, \dots, U) où la v.a. suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Cela prouve que la fonction $C^+(\cdot)$ est une copule. Ce résultat reste valable à une transformation strictement croissante des composantes près ; on parle alors de variables comonotoniques.

En dimension 2, la borne inférieure est atteinte avec le couple $(U, 1-U)$; on parle alors de variable anti-comonotoniques. En dimension supérieure à 2 la fonction $C^-(\cdot)$ n'est pas une copule.

La situation d'indépendance des marginales est associée à une copule particulière, la copule $C^1(\cdot)$, définie par $C^1(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i$.

Remarque : si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire et h_1, \dots, h_n sont des fonctions strictement croissantes, alors $h(X) = (h_1(X_1), \dots, h_n(X_n))$ a la même copule que X .

Démonstration : comme les fonctions h sont strictement croissantes elles sont inversibles et :

$$P(h_1(X_1) \leq x_1, \dots, h_n(X_n) \leq x_n) = P(X_1 \leq h_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq h_n^{-1}(x_n))$$

donc $P(h_1(X_1) \leq x_1, \dots, h_n(X_n) \leq x_n) = C(F_{X_1}(h_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_n}(h_n^{-1}(x_n)))$, et on conclut par unicité de la décomposition copule (en remarquant que la transformation affecte uniquement les marginales dont la loi devient $F_{h(X_i)} = F_{X_i} \circ h_i^{-1}$).

On peut observer que lorsque le modèle est décrit par la fonction de survie $S(t) = 1 - F(t)$, la description de la structure de dépendance est peu modifiée. Plus précisément, en notant $C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$, on trouve que $S(t_1, t_2) = C^*(S_1(t_1), S_2(t_2))$, ce qui est la conséquence immédiate du fait que $C^*(u, v) = C_{(1-u, 1-v)}(u, v)$.

Etant donné un vecteur (X, Y) dont la structure de dépendance est définie par la copule C ; on se donne une fonction $\phi: R^2 \rightarrow R$ que l'on suppose super modulaire. On note (X^-, Y^-)

(resp. (X^+, Y^+)) la version anti-comonotone (resp. comonotone) du couple (X, Y) . On peut alors encadrer $E(\phi(X, Y))$ de la manière suivante :

Inégalité de Tchen ([1981]) : On a $E(\phi(X^-, Y^-)) \leq E(\phi(X, Y)) \leq E(\phi(X^+, Y^+))$

L'inégalité de Tchen est une conséquence directe de l'existence des bornes de Fréchet :

$$C^-(u, v) = \mathbf{max}(u + v - 1, 0) \leq C(u) \leq C^+(u) = \mathbf{min}(u, v).$$

Cette inégalité est utile pour obtenir des bornes tarifaires, par exemple dans le cadre d'un traité en « stop loss » en observant que $\phi(x, y) = (x + y - d)^+$ est super modulaire. On peut également l'appliquer au cas d'une rente viagère sur 2 têtes, pour laquelle on a avec les notations usuelles de l'assurance vie :

$$a_{xy} = \sum_{k \geq 1} v^k P(T_x > k, T_y > k) = \sum_{k \geq 1} v^k {}_k p_{xy}$$

En notant $a_{xy}^- = \sum_{k \geq 1} v^k \mathbf{max}({}_k p_x + {}_k p_y - 1, 0)$ et $a_{xy}^+ = \sum_{k \geq 1} v^k \mathbf{min}({}_k p_x, {}_k p_y)$ on a l'inégalité :

$$a_{xy}^- \leq a_{xy} \leq a_{xy}^+.$$

En effet $a_{xy} = \sum_{k \geq 1} v^k C({}_k p_x, {}_k p_y)$ et il suffit ici d'appliquer les bornes de Fréchet pour la copule C . Cette approche est parfois utilisée pour modéliser la surmortalité observée de la seconde tête au décès de la première : on observe en effet une surmortalité pendant une période de l'ordre de 5 ans lorsque la première tête décède. Dans ce cas particulier, on peut éviter le recours aux copules en modélisant la probabilité de survie de la seconde tête conditionnellement au décès de la première, en posant par exemple :

$$q_{y+h|T_x} = q_{y+h} \times \left(1 + \beta e^{-\alpha(h-T_x)^+}\right).$$

Le calibrage des paramètres est ici plus intuitif qu'avec une copule : β représente le choc initial et α est simplement relié à la durée pendant laquelle on observe la surmortalité.

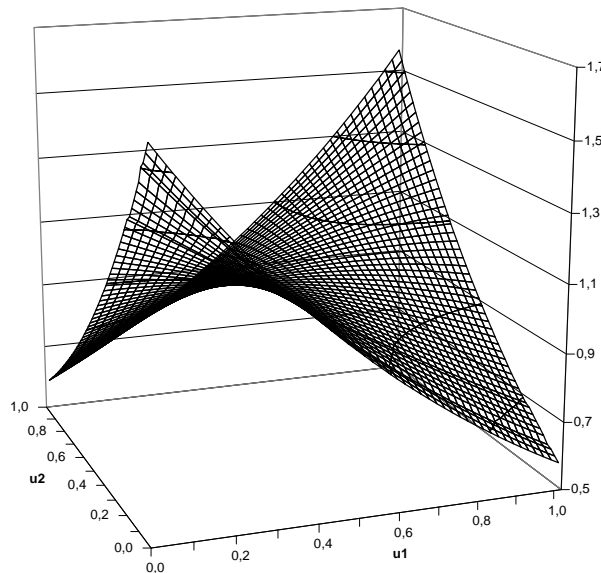
2.3. Exemples de copules

Il existe un grand nombre de copules adaptées à différentes situations ; toute répartition associée à un vecteur dont les marginales sont uniformes sur $[0, 1]$ définit une copule.

Toutefois, quelques formes particulières sont souvent utilisées en pratique du fait de leur simplicité de mise en œuvre. On peut notamment citer les exemples ci-après :

Nom	Copule
Gaussienne ³	$C(u_1, \dots, u_n, \rho) = \Phi_\rho(N^{-1}(u_1), \dots, N^{-1}(u_n))$
Clayton	$C(u, v, \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$
Franck	$C(u, v, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$
Gumbel	$C(u, v, \theta) = \exp \left(- \left[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right]^{1/\theta} \right)$

La densité de la copule de Franck de paramètre 1 se présente de la manière suivante :



Dans le cas de la copule de Franck, on peut remarquer qu'on retrouve l'indépendance comme cas limite en faisant tendre θ vers 0. De plus, la copule de Franck est positivement ordonnée en fonction de θ (au sens où la copule de Franck de paramètre θ_1 est supérieure à la copule de Franck de paramètre θ_2 si $\theta_1 \geq \theta_2$). Enfin, la borne inférieure (resp. supérieure) de Fréchet est obtenue comme cas limite lorsque $\theta \rightarrow -\infty$ (resp. $\theta \rightarrow +\infty$). Ces propriétés sont intéressantes puisqu'en faisant varier un unique paramètre, cette copule couvre l'ensemble des degrés de dépendance possibles.

On a des propriétés analogues avec la copule gaussienne lorsque l'on fait varier le coefficient de corrélation de -1 à $+1$.

On peut illustrer avec une copule simple le fait (classique) que la non corrélation peut être, dès lors que l'on est plus dans le cas gaussien, observée dans des situations de forte dépendance entre les variables.

³ Φ_ρ est la distribution normale multivariée de matrice de corrélations ρ .

Il suffit de considérer la copule suivante :

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1 & 0 \leq u_1 \leq \frac{u_2}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{u_2}{2} & 0 \leq \frac{u_2}{2} \leq u_1 \leq 1 - \frac{u_2}{2} \\ u_1 + u_2 - 1 & \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{u_2}{2} \leq u_1 \leq 1 \end{cases}$$

alors on vérifie que $\text{cov}(U_1, U_2) = 0$ et pourtant $P(U_2 = 1 - |2U_1 - 1|) = 1$, ce qui signifie que si on connaît la valeur prise par U_1 alors on connaît presque sûrement celle prise par U_2 .

Enfin, on peut mentionner que si h est une fonction strictement croissante et dérivable et C une copule alors $C_h(u, v) = h^{-1}(C(h(u), h(v)))$ définit une copule.

2.4. Les copules archimédiennes

La notion de copule archimédienne regroupe un certain nombre de copules ci-dessus (Clayton, Gumbel, Franck); l'idée d'une copule archimédienne de générateur φ est que la transformation $\omega(u) = \exp(-\varphi(u))$ appliquée aux marginales « rend les composantes indépendantes » :

$$\omega(C(u_1, \dots, u_n)) = \prod_{i=1}^n \omega(u_i)$$

Définition : copule archimédienne

La copule archimédienne de générateur φ est définie par l'égalité :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$$

dès lors que $\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \leq \varphi(0)$, et $C(u_1, \dots, u_n) = 0$ sinon. Le générateur doit être choisi de classe C^2 de sorte que $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(u) \leq 0$ et $\varphi''(u) > 0$.

Les copules archimédiennes peuvent être également définies via un conditionnement par une « variable de structure », Z ; à cet effet, on se donne une v.a. positive Z telle que :

- ✓ la transformée de Laplace de Z est $\psi = \varphi^{-1}$
- ✓ conditionnellement à Z les v.a. X_i sont indépendantes

$$\checkmark \quad P(X_i \leq x | Z) = \omega(F_{X_i}(x))^Z \quad 4$$

alors la copule du vecteur (X_1, \dots, X_n) est $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$. L'idée importante ici est que, via un conditionnement, on retrouve la situation d'indépendance.

Démonstration : par définition de la copule :

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_n}(X_n) \leq u_n) = E\left[P\left[\left(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_n}(X_n) \leq u_n\right) | Z\right]\right]$$

mais on a l'identité $E[\mathbf{exp}(-\varphi(u)Z)] = \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$ et, conditionnellement à Z les v.a. X_i sont indépendantes et de part la forme des distributions conditionnelles :

$$C(u_1, \dots, u_n) = E\left[\prod_{i=1}^n \omega(u_i)^Z\right] = E\left[\mathbf{exp}\left(-Z \sum_{i=1}^n \varphi(u_i)\right)\right] = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$$

En particulier, la copule $C^\perp(\cdot)$ est archimédienne, de générateur $-\ln(u)$, qui est un cas limite de copule de Gumbel ; en effet, la copule de Gumbel est archimédienne de générateur $(-\ln(u))^\theta$, avec $\theta \geq 1$. Les copules de Clayton et de Franck sont également archimédiennes :

Copule	Générateur
Indépendance	$-\ln(u)$
Clayton	$u^{-\theta} - 1, \theta \geq 0$
Franck	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \theta \neq 0$
Gumbel	$(-\ln(u))^\theta, \theta \geq 1$

2.5. Mesures de dépendance⁵

Il existe en statistique un certain nombre de grandeurs proposées par leurs auteurs comme des mesures de la dépendance entre deux variables aléatoires.

⁴ Cette transformation définit une fonction de répartition car la fonction φ est décroissante

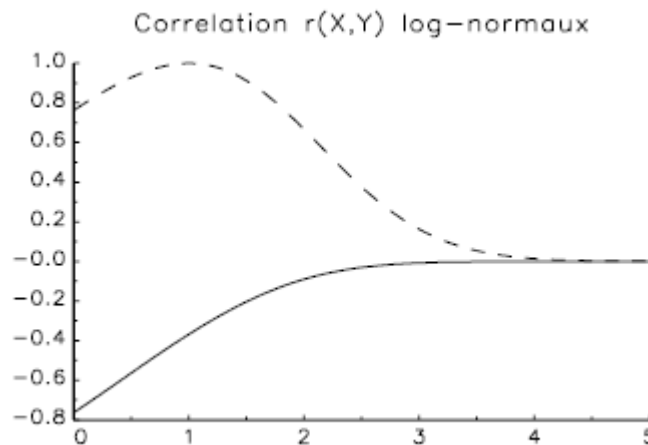
⁵ La notion de mesure de dépendance est définie de manière rigoureuse dans Nelsen [1999].

Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, défini par $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ est la

mesure la plus connue. Ce coefficient est une mesure très imparfaite de la dépendance. Il ne peut se mettre sous une forme ne faisant intervenir que la copule, les marginales restent présentes dans l'expression : ce coefficient n'est donc pas une mesure de dépendance. Il n'intègre que la composante linéaire de la dépendance, au sens où $r(X, Y) = \pm 1$ si et seulement si $Y = a \times X + b$. Au surplus, pour les marginales fixées, toutes les valeurs comprises entre -1 et +1 ne sont pas atteignables. En effet, d'après l'inégalité de Tchen :

$$\frac{\text{cov}(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(1-U))}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \leq r(X, Y) \leq \frac{\text{cov}(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U))}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Par exemple avec des lois log-normale $X \sim LN(0, 1)$ et $Y \sim LN(0, \sigma^2)$, l'ensemble des valeurs possibles de r en fonction de σ a l'allure suivante :



Le ρ de Spearman⁶, défini comme étant le coefficient de corrélation de Pearson calculé sur les rangs des deux variables élimine par construction l'effet de dépendance aux lois marginales.

Le τ de Kendall $\tau(X, Y) = E(F_X(X)F_Y(Y)) - 1$ ne dépend également pas des marginales ; on peut montrer qu'il est égal à la probabilité de concordance des rangs⁷ moins la probabilité de discordance des rangs.

Comme dans le cas du coefficient de corrélation linéaire, le fait que $\tau = 0$ ou $\rho = 0$ n'implique pas que les variables X et Y soient indépendantes. Ainsi une distribution construite avec la copule cubique (cf. 2.2) et des marginales symétriques conduit à des coefficients nuls alors que les variables ne sont pas indépendantes par construction.

Enfin, on peut citer l'indice de Gini qui est une mesure d'équirépartition de deux échantillons associée à la structure de dépendance du couple. Les expressions de ces 3 mesures sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

⁶ Spearman était psychologue.

⁷ La concordance correspond à la situation dans laquelle si $x_i \leq x_j$ alors $y_i \leq y_j$.

Indice	Expression usuelle	Expression copule
Rho de Spearman ⁸	$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$	$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3$
Tau de Kendall ⁹	$\tau = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$	$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$
Indice de Gini ¹⁰	$\gamma = \frac{\sum_{i,j=1}^n x_i - x_j }{2\mu n^2}$	$\gamma = 2 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 + u_2 - 1 - u_1 - u_2) dC(u_1, u_2)$

Dans le cas d'une copule archimédienne, on peut vérifier que le Tau de Kendall s'obtient simplement à l'aide du générateur de la copule, selon la formule :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du$$

Ces coefficients se calculent explicitement dans le cas des copules les plus courantes. Par exemple pour la copule de Gumbel on a $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$, pour la copule de Frank

$$\tau = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ et pour la copule gaussienne } \tau = \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\rho).$$

3. Inférence statistique

En pratique lors de la mise en œuvre d'un modèle intégrant des copules il convient d'être capable d'estimer la structure de dépendance, à partir des données disponibles. Les méthodes d'inférence statistique utilisées sont des déclinaisons de méthodes standards, paramétriques ou non paramétriques selon le cas.

3.1. Estimation non paramétrique

3.1.1. Rappel : fonction de répartition empirique

Le cadre général de l'estimation non paramétrique d'une loi marginale s'appuie sur la fonction de répartition empirique, définie par :

$$F_K(x) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I(x_i \leq x)$$

⁸ Le d_i de la formule représente la différence des rangs de l'individu i dans chacun des classements.

⁹ R est la somme sur tous les individus du nombre de paires concordantes.

¹⁰ μ désigne l'espérance de la distribution.

pour un n -échantillon (x_1, \dots, x_K) de la loi F .

En dimension n , si on se donne $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ un K -échantillon du vecteur (de dimension n) X , on peut généraliser l'expression de la fonction de répartition empirique en posant :

$$F_K(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K 1_{\{x_1^i \leq x_1, \dots, x_n^i \leq x_n\}}$$

Cet estimateur conduit à un estimateur non paramétrique naturel d'une copule :

3.1.2. Copule empirique

Soit comme ci-dessus $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ un K -échantillon du vecteur (de dimension n) X . En observant (voir section 2.2 ci-dessus) que $C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$ on introduit la notion de copule empirique à partir des versions empiriques des fonctions de répartition de cette expression :

$$C_K(u_1, \dots, u_n) = F_K(F_{1,K}^{-1}(u_1), \dots, F_{n,K}^{-1}(u_n))$$

avec $F_{j,K}^{-1}(u) = \inf \{t / F_{j,K}(t) \geq u\}$. Cette notion a été introduite par Deheuvels [1979].

Remarque¹¹ : C est la fonction de répartition d'un vecteur dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$; cette propriété n'est plus vraie pour C_K qui est, conditionnellement aux observations, la distribution d'un vecteur dont les marges sont réparties uniformément sur l'ensemble discret $\left\{0, \frac{1}{K}, \dots, \frac{K-1}{K}\right\}$. Il suffit donc de connaître les valeurs de la copule empirique en ces points discrets ; on a en particulier le lien avec les statistiques d'ordre suivant :

$$C_K\left(\frac{k_1}{K}, \dots, \frac{k_n}{K}\right) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K 1_{\{x_1^k \leq x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^k \leq x_n^{(k_n)}\}}$$

Cette expression peut être également écrite à partir des rangs des observations (ce qui est intuitif, puisque la copule est invariante par toute transformation croissante des marginales) :

$$C_K\left(\frac{k_1}{K}, \dots, \frac{k_n}{K}\right) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K 1_{\{r_1^k \leq k_1, \dots, r_n^k \leq k_n\}}$$

Deheuvels [1979] a obtenu des résultats asymptotiques sur C_K et $K^{-1/2}(C_K - C)$. Les copules empiriques sont notamment utiles pour fournir des estimateurs non paramétriques de mesures de dépendance. Par exemple on peut ainsi proposer l'estimateur suivant du ρ de Spearman :

¹¹ Voir Deheuvels, Peccati et Yor [2004] pour des résultats asymptotiques sur les copules empiriques.

$$\hat{\rho} = \frac{12}{K^2 - 1} \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \left(\hat{C} \left(\frac{k_1}{K}, \frac{k_2}{K} \right) - \frac{k_1 k_2}{K^2} \right)$$

3.1.3. Identification d'une copule archimédienne

Dans le cas d'une copule archimédienne, la copule est entièrement définie par son générateur ; on remarque alors que si $K(u) = P(C(U_1, U_2) \leq u)$ on a $K(u) = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}$.

Démonstration : par définition d'une copule archimédienne $K(u) = P(\varphi^{-1}(\varphi(U_1) + \varphi(U_2)) \leq u)$; or la loi conditionnelle de se calcule à partir de la copule :

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\partial C}{\partial u_1}(u_1, u_2)$$

La fonction K est liée au τ de Kendall par $\tau = 4 \int_0^1 (1 - K(u)) du - 1$.

Démonstration : d'après 2.5 ci-dessus on a $\tau = 4E(C(U_1, U_2)) - 1$ et le résultat en découle par définition de K , fonction de répartition de $C(U_1, U_2)$.

3.2. Estimation paramétrique et semi-paramétrique

On se place ici dans le cas où la distribution conjointe dépend d'un paramètre, que l'on cherche à estimer.

3.2.1. Méthode des moments

Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance ; l'estimateur des moments de la mesure de dépendance considérée est alors simplement obtenu en égalant l'expression paramétrique (analytique) de la mesure avec un estimateur non paramétrique de cette même mesure.

Par exemple, pour le tau de Kendall, on a $\hat{\tau} = \frac{c-d}{c+d}$ avec c (resp. d) le nombre de paires concordantes (resp. discordantes) dans l'échantillon. Donc pour une copule de Gumbel l'expression $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ conduit à l'estimateur des moments $\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}}$.

3.2.2. Maximum de vraisemblance

De l'égalité $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ on déduit par dérivation l'expression de la densité du vecteur (X_1, \dots, X_n) :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

où $c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$ désigne la densité de la copule. L'expression de la log-vraisemblance de l'échantillon $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{1 \leq k \leq K}$ s'en déduit immédiatement :

$$l(\theta) = \sum_{k=1}^K \ln \left(c(F_1(x_1^k; \theta), \dots, F_n(x_n^k; \theta); \theta) \right) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n f_i(x_i^k; \theta)$$

Il reste maximiser cette expression en θ , ce qui peut s'avérer en pratique fastidieux.

3.2.3. Méthode « IFM »

Cette méthode, proposée par Shih et Louis [1995] consiste à « découper » le problème d'estimation en deux étapes successives :

- ✓ l'estimation des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_n$ des marginales,
- ✓ l'estimation du paramètre θ_c de la copule.

Le paramètre θ de la section 3.2.2 ci-dessus est donc décomposé sous la forme $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_c)$ et on commence par déterminer les estimateurs EMV des paramètres des marginales, soit :

$$\hat{\theta}_i = \mathbf{arg\,max}_{\theta_i} \sum_{k=1}^K f_i(x_i^k; \theta_i)$$

On « injecte » alors ces estimateurs dans la partie « copule » de la log-vraisemblance, ce qui conduit à :

$$\hat{\theta}_c = \mathbf{arg\,max}_{\theta_c} \sum_{k=1}^K \ln \left(c(F_1(x_1^k; \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^k; \hat{\theta}_n); \theta_c) \right)$$

D'autres procédures peuvent être imaginées, comme par exemple l'estimation non paramétrique des marginales suivi d'un maximum de vraisemblance pour le paramètre de la copule (procédure « omnibus » de Genest et al., [1995] ou Shih et Louis, [1995]).

4. Copules et valeurs extrêmes

Définition : Copule de valeurs extrêmes (ou copule EV)¹²

Une copule de valeurs extrêmes est par définition une copule vérifiant, pour tout $\lambda > 0$:

$$C(u_1^\lambda, \dots, u_n^\lambda) = [C(u_1, \dots, u_n)]^\lambda$$

On peut vérifier par exemple qu'une copule de Gumbel possède cette propriété. Le lien entre la théorie des copules et les valeurs extrêmes est donné par le théorème suivant :

Théorème : si $X_p^{(p)} = \max_{1 \leq i \leq p} X_i$ désigne le maximum d'un échantillon de taille p , et si on a n échantillons et des constantes de normalisation telles que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P \left(\frac{X_{p,1}^{(p)} - a_{p,1}}{b_{p,1}} \leq x_1, \dots, \frac{X_{p,n}^{(p)} - a_{p,n}}{b_{p,n}} \leq x_n \right) = F(x_1, \dots, x_n)$$

alors la copule associée à la représentation canonique de F est une copule de valeurs extrêmes.

Définition : dépendance de queue

On dit qu'une copule bivariable présente de la dépendance de queue si $\exists \lambda \in]0, 1]$ tel que :

$$\lambda(u) = \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} \xrightarrow{u \rightarrow 1} \lambda$$

avec la fonction $\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$ de survie conjointe. L'idée de ce quotient est de mesurer la probabilité que U dépasse le seuil u sachant que V l'a dépassé :

$$\lambda(u) = P(U > u | V > u)$$

Cette notion est importante dans l'étude de la dépendance asymptotique entre deux variables aléatoires. Elle permet en effet de mesurer le niveau de dépendance dans les valeurs extrêmes, grandes (upper tail dependence) ou petites (lower tail dependence).

5. Copules et simulation

Les copules fournissent un cadre d'analyse bien adapté à la « fabrication » de distributions conjointes possédant une structure de dépendance donnée. En effet, soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance fixée ; on peut remplacer les lois

¹² Capéraà, Fougères et Genest [2000] ont introduit la notion de « copule archimax » qui englobe les copules archimédiennes et les copules EV.

marginales gaussiennes par d'autres lois (par exemple pour tenir compte d'un caractère leptocurtique affirmé des observations) tout en conservant la même structure de dépendance.

Pour simuler des réalisations d'un vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ à partir de la décomposition « copule » de F , il faut être capable de simuler des réalisations d'un vecteur U ayant des marginales uniformes et dont la distribution est la copule C , puisqu'on a l'égalité en loi :

$$X = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_n^{-1}(U_n))$$

La suite de ce document illustre quelques méthodes qui permettent de mener à bien cette tâche.

5.1. La méthode des distributions

On suppose que l'on se trouve dans une situation où la loi conjointe de X est plus facile à simuler directement que la copule C ; c'est par exemple le cas de la copule gaussienne : un vecteur gaussien de dimension n est aisé à simuler (via la décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance), alors que la copule gaussienne n'est pas simple à simuler directement.

La méthode consiste à simuler des réalisations de X (de loi F) et à appliquer ensuite la transformation $U = (F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$.

5.2. La méthode des distributions conditionnelles

5.2.1. Présentation générale

On se donne¹³ (U_1, U_2) un vecteur dont la distribution est C ; on simule (v_1, v_2) uniformes et indépendantes. On pose alors $u_1 = v_1$, puis $u_2 = C_{u_1}^{-1}(v_2)$ avec $C_{u_1}(u_2) = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1)$.

Cette expression se calcule à partir de la copule C :

$$C_{2|1}(u_1, u_2) = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\partial C}{\partial u_1}(u_1, u_2)$$

Démonstration : on écrit

$$P(U_2 \leq u_2 | u_1 \leq U_1 \leq u_1 + h) = \frac{P(U_1 \leq u_1 + h, U_2 \leq u_2) - P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)}{P(U_1 \leq u_1 + h) - P(U_1 \leq u_1)}$$

(qui est simplement une application de la formule $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$); cette expression s'écrit à l'aide de la copule :

¹³ Cette méthode s'étend sans difficulté en dimension n

$$P(U_2 \leq u_2 | u_1 \leq U_1 \leq u_1 + h) = \frac{(C(u_1 + h, u_2) - C(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)) / h}{(C(u_1 + h, 1) - C(u_1, 1)) / h}$$

On remarque alors que puisque les marginales sont uniformes alors $C(u, 1) = u$ et donc le dénominateur de la fraction est égal à 1 ; on fait alors tendre h vers 0 pour obtenir le résultat.

Toutefois en pratique il n'est en général pas aisé d'inverser la fonction conditionnelle.

Exemple n°1 : copule de Franck

Dans le cas de la copule de Franck la méthode des distributions conditionnelles peut être mise en œuvre simplement. L'expression de cette copule est :

$$C(u, v, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$$

On en déduit que $C_{2|1}(u, v) = \frac{\exp(-\theta u)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1 + (\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}$ et on peut alors inverser cette équation (en résolvant l'équation en x $C_{2|1}(u, x) = v$) pour obtenir :

$$C_{2|1}^{-1}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{v(\exp(-\theta) - 1)}{v + (1 - v)\exp(-\theta u)} \right)$$

La simulation peut donc être mise en œuvre simplement.

Exemple n°2 : copule de Gumbel

Cette copule (appelée aussi copule de Gumbel-Hougaard, du fait de son apparition naturelle dans certains modèles de durée de fragilité) a pour expression :

$$C(u, v, \theta) = \exp \left(- \left[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right]^{1/\theta} \right)$$

et on en déduit l'expression de la distribution conditionnelle :

$$C_{2|1}(u, v, \theta) = \frac{1}{u} \left[1 + \left(\frac{\ln(v)}{\ln(u)} \right)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta} - 1} \exp \left(- \left[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right]^{1/\theta} \right)$$

L'inversion de cette expression n'est pas aisée, et on aura ici recours à des méthodes numériques.

5.2.2. Cas particulier des copules archimédiennes

Dans le cas particulier d'une copule archimédienne, la distribution conditionnelle s'exprime à l'aide du générateur de la copule et conduit à :

$$u_2 = \varphi^{-1} \left(\varphi \left(\varphi^{-1} \left(\varphi \left(\frac{v_1}{v_2} \right) \right) \right) - \varphi(v_1) \right)$$

5.3. Les méthodes adaptées spécifiquement à une copule

Comme pour la simulation de loi univariées, des méthodes « ad hoc » adaptées à une copule particulière peuvent être élaborées; par exemple pour la copule de Clayton¹⁴ :

$$C(u, v, \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

on peut utiliser l'algorithme suivant:

- ✓ simuler x_1 et x_2 2 réalisations indépendantes de d'une loi exponentielle de paramètre 1.
- ✓ simuler une réalisation x issue d'une v.a. de loi $\Gamma(1, \theta)$
- ✓ prendre :

$$u_2 = \left(1 + \frac{x_2}{x} \right)^{-\theta} \text{ et } u_1 = \left(1 + \frac{x_1}{x} \right)^{-\theta}$$

6. Application des copules en assurance

6.1. Mesure du capital sous risque

Les copules interviennent directement dans l'agrégation de risques lorsque la mesure de risque choisie est la VaR. En effet :

$$VaR(X_i, \alpha) = F_{X_i}^{-1}(\alpha)$$

Et donc dans le cas de 2 risques comme par définition d'une copule :

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_{x_1+x_2 \leq x} dC(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

On voit que la VaR de la somme dépend des distributions marginales et de la copule. Les VaR s'ajoutent si la copule est la borne supérieure de Fréchet. En effet, dans ce cas le vecteur peut

¹⁴ Cet algorithme est proposé par Devroye [1986]

se mettre sous la forme $(F_1^{-1}(F_1(X_1)), \dots, F_n^{-1}(F_1(X_1)))$, et en posant $\omega(x) = x + F_2^{-1}(F_1(x))$ on trouve que :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(X_1 + X_2 \leq VaR_\alpha(X_1 + X_2)) = P(\{\omega(X_1) \leq VaR_\alpha(X_1 + X_2)\}) \\ &= F_1(\omega^{-1}(VaR_\alpha(X_1 + X_2))) \end{aligned}$$

On en déduit que $VaR_\alpha(X_1 + X_2) = \omega(F_1^{-1}(\alpha))$, puis :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X_1 + X_2) &= F_1^{-1}(\alpha) + F_2^{-1}(F_1(F_1^{-1}(\alpha))) \\ &= F_1^{-1}(\alpha) + F_2^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

6.2. Application aux processus de diffusion

Les copules sont également utilisées pour analyser les structures de dépendance dans les processus de diffusion. La copule brownienne a ainsi été introduite par Darsow, Nguyen et Olesen [1992].

L'intérêt de cette approche est de permettre de construire de nouveaux processus avec une structure de dépendance connue mais des marginales différentes (ex.: mouvement brownien à marginales « student » pour épaissir les queues de distribution).

C'est une alternative à l'introduction de processus à sauts.

6.3. La méthode NORTA (« Normal to anything »)

L'objectif est ici de simuler un vecteur (X_1, \dots, X_d) dont on connaît les marginales, et en respectant des corrélations fixées. On suppose sans perte de généralité que les v.a. X_i sont centrées et réduites.

L'idée est de considérer que la structure de dépendance du vecteur (X_1, \dots, X_d) est décrite par une copule normale, c'est à dire que l'on considère que la loi conjointe de (X_1, \dots, X_d) est décrite par $(X_1, \dots, X_d) = (F_1^{-1}(N(Y_1)), \dots, F_d^{-1}(N(Y_d)))$ avec (Y_1, \dots, Y_d) un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance Σ_Y et N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Chacune des variables Y_i est également réduite, de sorte que Σ_Y est en fait une matrice de corrélation avec des un sur la diagonale et définie entièrement par la donnée des $\frac{d(d-1)}{2}$ termes en dessous.

On doit alors choisir Σ_Y de sorte que l'on retrouve la matrice Σ_X en calculant les corrélations des v.a. (X_1, \dots, X_d) . Plus précisément, si on note ρ_{ij} le terme générique de Σ_X , comme les variables sont centrées et réduites on a $\rho_{ij} = E[X_i X_j]$. On note r_{ij} le terme générique de Σ_Y ; r_{ij} est le coefficient de corrélation entre Y_i et Y_j , pour $i < j$. On a alors une relation de la forme $\rho_{ij} = \omega_{ij}(r_{ij})$ avec :

$$\omega_{ij}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i^{-1}(N(y_i)) F_j^{-1}(N(y_j)) h(r, y_i, y_j) dy_i dy_j,$$

la fonction h étant la densité d'un vecteur gaussien bi-dimensionnel :

$$h(r, x, y) = \frac{1}{2\pi(1-r)} \exp\left[\frac{x^2 + y^2 - 2rxy}{2(1-r)}\right].$$

On obtient ainsi $\frac{d(d-1)}{2}$ équations indépendantes les unes des autres en r_{ij} . On notera qu'il est préférable d'imposer comme donnée de base la matrice de corrélation des rangs, c'est à dire la matrice de corrélation du vecteur $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ car on obtient alors une expression analytique de r_{ij} :

$$r_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\pi \rho_{ij}^u}{6}\right).$$

Cela découle directement de ce que dans l'intégrale définissant ω_{ij} les marginales F_i sont remplacées par l'identité. Dès que $d > 2$ il se peut que le problème n'ait pas de solution, c'est à dire que la matrice de coefficients r_{ij} ainsi obtenue ne soit pas semi-définie positive ; on peut alors chercher la matrice semi-définie positive la plus proche possible de Σ_Y , au sens d'une norme sur l'espace des matrices.

Bibliographie

- DEHEUVELS P. [1978], *Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 23, 1-36
- DEHEUVELS P. [1979a], *Propriétés d'existence et propriétés topologiques des fonctions de dépendance avec applications à la convergence des types pour des lois multivariées*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série 1, 288, 145-148
- DEHEUVELS P. [1979b], *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés — Un test non paramétrique d'indépendance*, Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences – 5e Série, 65, 274-292
- GENEST C., MACKAY R. J. [1986]. *The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals*. The American Statistician, 40, 280-283.
- JOE H. [1997]. *Multivariate models and dependence concepts*, Monographs on Statistics and Applied probability, 73, Chapman & Hall, London.
- NELSEN R.B. [1999]. *An introduction to Copulas.*, Lecture Notes in Statistics, 139, Springer Verlag, New-York.
- SCHWEIZER B., SKLAR A. [1958] *Espaces métriques aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 247, 2092-2094.
- SCHWEIZER B. [1991] *Thirty years of copula*, Advances in probability distributions with given marginals: beyond the copulas, ed. by G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti, Mathematics and its applications, v. 67, Kluwer Academic Publishers, 13-50.
- SKLAR A. [1959], *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231