$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{]t;\infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Proposition d'une approche pour l'ORSA d'un contrat de retraite

Frédéric PLANCHET

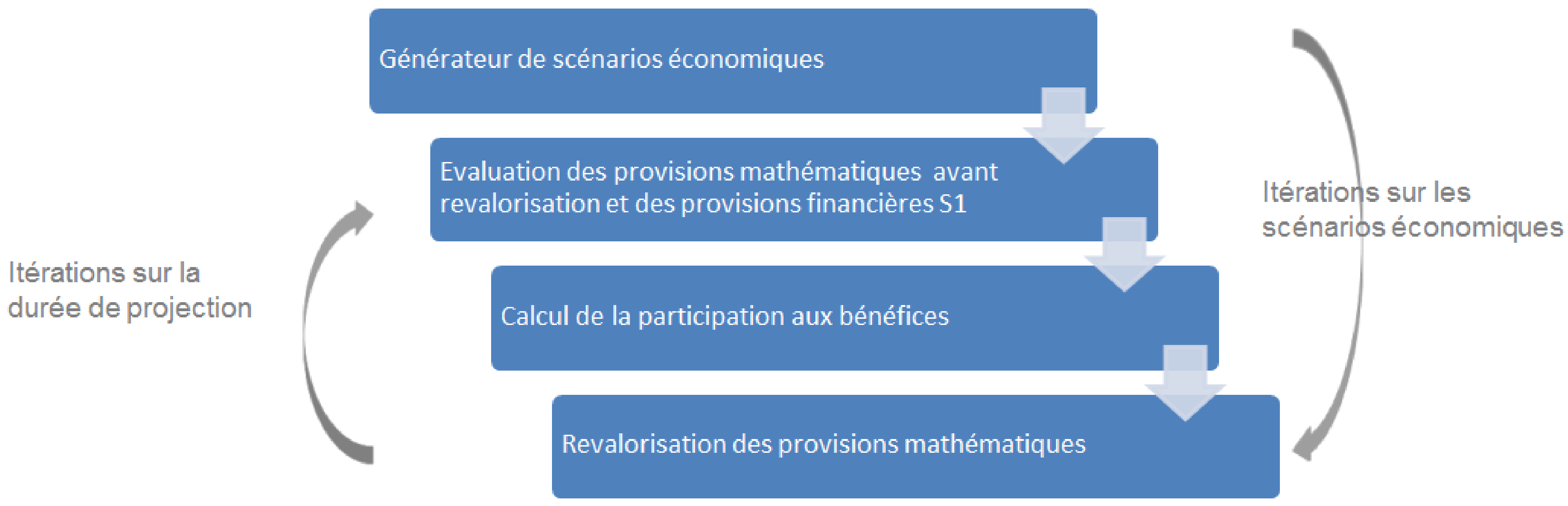
frederic@planchet.net

Montassar TAMMAR

montassar.tammar@primact.fr

- Dans le cadre de la mise en place du volet quantitatif de l'ORSA (*Own Risks Solvency Assessment*), un organisme assureur doit mettre en place des outils lui fournissant une vision prospective de sa solvabilité et, en particulier, des indications sur l'incertitude associée au niveau de la couverture des engagements réglementaires (en premier lieu du SCR).
- Il s'agit de fournir des informations sur la distribution de probabilité d'indicateurs clé associés au bilan économique, tels que la valeur de l'actif, du passif, du surplus, du SCR, *etc*. Cette distribution doit être calculée pour chaque année de projection sur un horizon de l'ordre de celui du plan stratégique, disons de 3 à 5 ans (*cf*. GUIBERT et *al*. [2012]).
- En présence de dispositif de participation aux bénéfices qui créent des interactions fortes entre l'actif et le passif, la modélisation de ces distributions s'avère délicate.

- En effet, le calcul des provisions techniques dans le cadre du pilier 1 s'effectue le plus souvent par simulations, ce qui conduit à une imbrication de simulations pour utiliser ces outils dans le cadre de l'ORSA (*cf*. BONNIN et *al*. [2014]).



- **Dès lors, il convient de proposer des approches plus efficaces d'un point de vue numérique, comme par exemple dans BONNIN et *al.* [2014] pour le cas des contrats d'épargne en euros.**

- **Au-delà des stricts aspects numériques, les études menées sur les erreurs de modèle en finance suggèrent qu'un modèle complexe, précis pour calculer un prix, n'est pas le plus efficace en termes de gestion des risques (en l'espèce de gestion d'une couverture) du fait de son manque de robustesse (voir par exemple l'étude fondatrice de BAKSHI et *al.* [1997]).**

- **Dans le cas d'un contrat de retraite, ses contraintes réglementaires et en particulier les règles de détermination de la revalorisation des prestations sont analogues à ce qui prévaut pour les contrats d'épargne. Toutefois, l'objectif de revalorisation d'un contrat de retraite est le plus souvent directement relié à l'inflation (*cf.* PLANCHET et THÉROND [2007]).**

Sommaire

Les risques financiers pris en compte

On utilise un marché financier qui généralise celui proposé dans BONNIN et *al.* [2010] et dont la logique est de projeter directement des structures de prix. Quatre facteurs de risque sont intégrés au modèle :

- les niveaux des taux,
- de l'inflation,
- des *spread* de crédit
- et le prix des actions.

Les approches retenues pour chacun de ces classes sont présentées ci-après (à l'exception du prix des actions, pour lequel le modèle classique de B&S est utilisé).

Le risque de taux

On retient comme modèle de référence le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d’échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]). Le taux zéro-coupon se décompose par hypothèse en :

$$R(t,\tau)=\mu_1+\mu_2\frac{1-\mathbf{exp}\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}}+\mu_3\left(\frac{1-\mathbf{exp}\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}}-\mathbf{exp}\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)$$

$$R(t,\tau)=r_0(t)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)+l(t)\left(1-\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)+c(t)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

La courbe initiale peut alors être déformée par la projection des facteurs de risque du modèle :

NB : ce modèle est un cas particulier de modèle de taux affine (*cf.* Christensen et *al.*)

$$dr_0(t)=\mu_r(r_\infty-r_t)dt+\sigma_r dW_r(t)$$
$$dl(t)=\mu_l(l_\infty-l_t)dt+\sigma_l dW_l(t)$$
$$dc(t)=\mu_c(c_\infty-c_t)dt+\sigma_c dW_c(t)$$

L’inflation

Dans une logique de parcimonie, l’inflation (mesurée par l’écart entre les structures par termes nominale et réelle) est intégrée *via* un unique paramètre supposé constant au cours du temps.

$$R_r(t,\tau) = R_r(t-1,\tau) + \beta \times \left(R_n(t,\tau) - R_n(t-1,\tau)\right)$$

Avec l’approximation de Fisher, on en déduit les anticipations d’inflation :

$$\left(1+R_n(t,\tau)\right)^{\tau} = \left(1+R_r(t,\tau)\right)^{\tau} \times \left(1+I(t,\tau)\right)^{\tau}$$

puis la dynamique du taux d’inflation instantané :

$$i_t = \frac{1+r_t}{1+R_r(t,1)} - 1$$

avec $R_r(t,1) = R_r(t-1,1) + \beta \times \left(r_t - r_{t-1}\right)$

Le risque de *spread*

Le *spread* considéré ici est celui du portefeuille, dont la composition est donc supposée relativement stable sur l'horizon de la projection pour l'ORSA. Il s'agit donc d'une vision agrégée des différents *spreads* par sous-jacent composant effectivement le portefeuille. L'approche simplifiée consiste à appliquer un abattement sur le prix issu du modèle pour les obligations nominales sans risque de défaut présenté ci-dessus. Formellement on utilise donc, pour une obligation de taux coupon γ et de nominal *N* le prix :

$$O_D\left(D,\gamma,N,t,T\right)=D\left(t\right)\times O\left(\gamma,N,t,T\right)$$

Le risque de *spread* est introduit dans le facteur de dépréciation *D* comme fonction du *spread* et de la sensibilité au risque de crédit du portefeuille (notée *d* et calibrée sur la base du portefeuille réel).

$$D\left(t\right)=D\left(s\left(t\right),s_0,\delta\right)=D_0\times\mathbf{exp}\left(-\delta\left(s\left(t\right)-s_0\right)\right)$$

$$ds\left(t\right)=k\times\left(s_\infty-s\left(t\right)\right)dt+\sigma_s dW_s\left(t\right)$$

Sommaire

- **L’approche proposée est décrite de manière détaillée dans**

  BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2014] « Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l’ORSA », *Les cahiers de recherche de l’ISFA*, n°2014.1.

- **Les risques financiers font l’objet d’une modélisation dans un cadre probabiliste**

  Dans un souci de simplification, on se limite dans le présent article à la prise en compte des facteurs de risque financiers (taux, *spread* et actions) sans considérer le risque de longévité (*cf*. JUILLARD et *al*. [2008]) ni le risque commercial (*cf*. GUIBERT et *al*. [2012]), qui sont deux autres risques majeurs pour ce type de contrat. Les cotisations futures seront donc supposées connues et certaines.

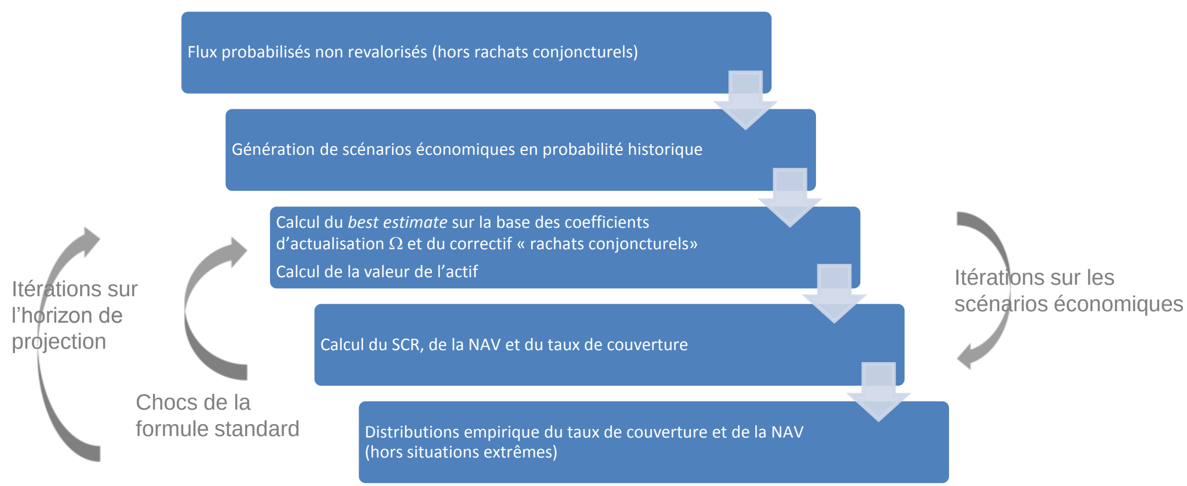
- **Les risques *business* et de longévité sont réintégrés dans l’ORSA ex-post *via* des scénarios (éventuellement non probabilisés).**

  Exemple : à partir des chiffres de Juillard et *al*. [2008] (*cf*. p.10), déduire que le quantile à 95 % pour la PM (à taux 0) représente 2,3 % de celle-ci. On en déduit que le besoin en capital au niveau de 99,5 % (niveau retenu par Solvabilité 2) est approximativement 2,3 % x 2,57 / 1,96 = 3,0 %.

  On se focalise dans la suite de la présentation sur les risques financiers.

Le modèle repose sur les composants suivants

- Un modèle de calcul des coefficients d'actualisation pour les prestations objet d'une revalorisation et pour les cotisations ;
- Un correctif global pour les rachats conjoncturels (pour les cotisants seulement) ;
- Un générateur de scénarios économiques en probabilité historique pour la projection des facteurs de risque financiers ;
- Le calcul du SCR à chaque date (formule standard).



Le calcul des provisions techniques : cadre

Le calcul de la provision *best estimate*, est effectué sur la base de déflateurs spécifiques, prenant en compte le mécanisme de revalorisation et un correctif pour mesurer l'impact de la possibilité de sortie anticipé d'un adhérent du régime.

A partir de l'expression générale de la somme des flux de trésorerie actualisés

$$\Lambda = \sum_{j \geq 1} \delta(j) \times \left(\left(1 + \tau_p\right) \times P_j^R - C_j \right)$$

on obtient l'expression suivante du *best estimate*

$$\begin{aligned} BE &= E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda) \\ &= \left(1 + \tau_P\right) \times \sum_{j \geq 1} E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j) \times P_j^R\right) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}\left(C_j\right) \end{aligned}$$

Le point délicat est la calcul de $E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j) \times P_j^R\right)$ qui nécessite la mise au point d'un modèle ALM.

Le calcul des provisions techniques : l'option de revalorisation

Les contrats incluent de retraite un taux technique et doivent donc être revalorisés au moins à ce taux. Cela implique que le coefficient de revalorisation des flux pour la période *k* associé à une génération de contrats aux taux technique *i* est, si ω désigne le taux de revalorisation avant taux technique, de la forme

$$1+\rho_k = 1+i+\left[\omega_k - i\right]^+$$

On fait l'hypothèse que l'objectif de revalorisation du régime est de servir au moins (une fraction de) l'inflation, ce qui conduit à l'expression suivante pour les prestations actualisées :

$$P_j^R = P_j \times \prod_{k=1}^{j}\left(1+\rho_k\right) = P_j \times \prod_{k=1}^{j}\left(1+i+\left[\lambda \times i_k - i\right]^+\right)$$

On exploite alors la forme particulière de l'inflation et le lien (fort) entre l'inflation et le taux sans risque nominal :

$$i_t = \frac{1+r_t}{1+R_r\left(t,1\right)} - 1 \approx \left(1+r_t\right)\times\left(1-R_r\left(t,1\right)\right)-1 \approx r_t - R_r\left(t,1\right)$$

Le calcul des provisions techniques : l'option de revalorisation

La valeur économique de la prestation actualisée s'exprime alors selon

$$E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j) \times P_j^R\right) = E^{P^a}\left(P_j\right) \times E^{Q^f}\left(\delta(j) \times \prod_{k=1}^{j}\left(1+\rho_k\right)\right) = E^{P^a}\left(P_j\right) \times E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j} \frac{1+\rho_k}{1+r_k}\right)$$

Tout se ramène donc à calculer le déflateur

$$\Omega(0,j) = E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j} \frac{1+\rho_k}{1+r_k}\right) = E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\left(1-\Delta_k\right)\right)$$

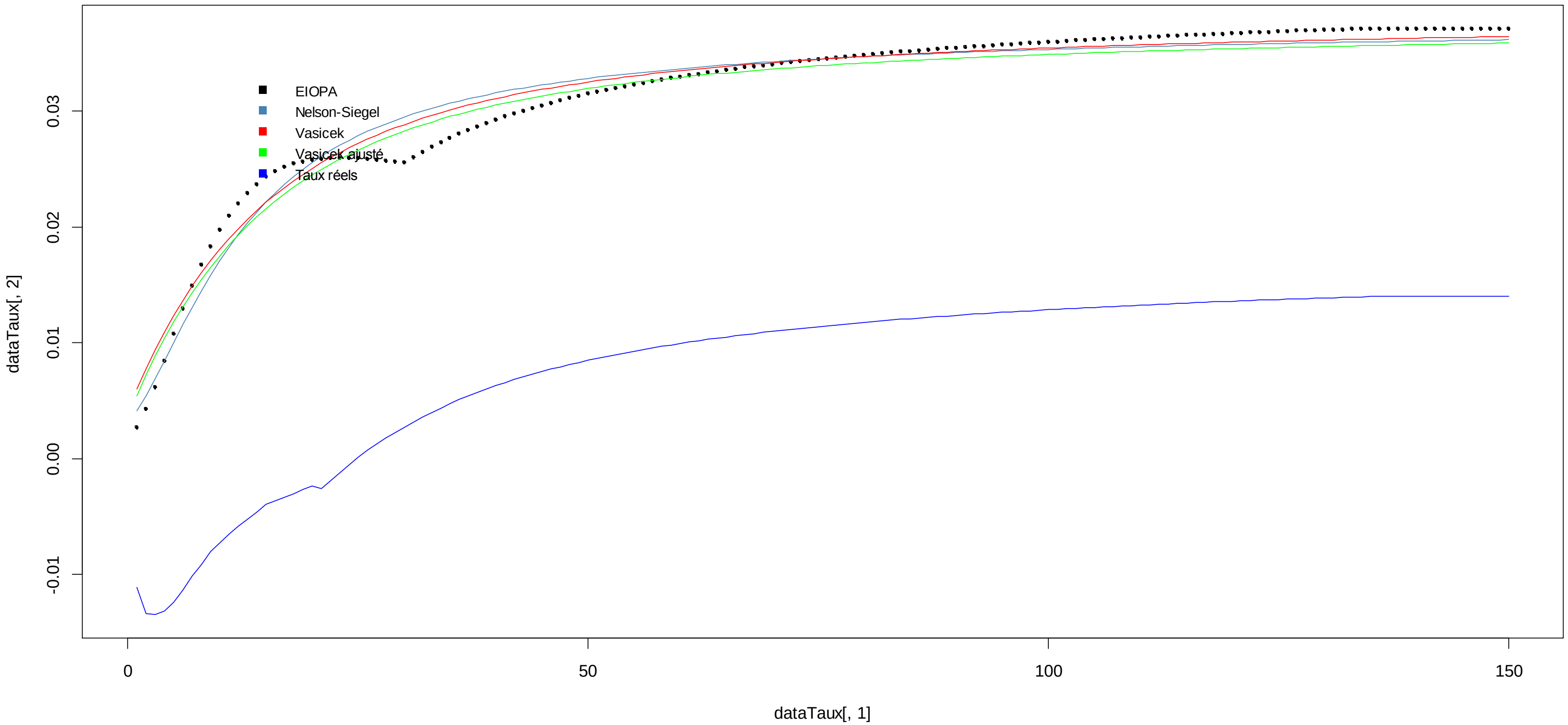
On utilise pour cela le fait que, dans le modèle d'inflation proposé, on peut écrire au premier ordre que

$$i_t \approx (1-\beta) r_t + \beta r_0 - R_r(0,1)$$

$$\Omega(0,j) = E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j} \frac{1+i+\left[\lambda(1-\beta) r_k + \lambda\beta r_0 - \lambda R_r(0,1) - i\right]^+}{1+r_k}\right)$$

Le calcul des provisions techniques : l'option de revalorisation

Le calcul du déflateur nécessite un modèle de projection « risque neutre » du taux court cohérent avec la courbe des taux. On peut par exemple retenir le modèle de Vasicek. Cela conduit à gérer différentes représentations de la courbe des taux en fonction des composants du modèle :



2. Le modèle

Le calcul des provisions techniques : l'option de revalorisation

Les interactions entre ces représentations sont les suivantes :

- La courbe initiale fournie par l'EIOPA est utilisée pour calibrer l'ajustement de la forme paramétrique de Nelson-Siegel ;
- Cette forme paramétrique est utilisée à chaque pas de projection pour calibrer le modèle de Vasicek à partir duquel sont projetés les taux courts utilisés pour le calcul des coefficients d'actualisation.

Dans ce contexte il est important d'assurer une certaine cohérence entre ces différentes représentations. Le calibrage est ainsi déterminé pour minimiser les écarts entre ces différentes courbes. Afin d'assurer la cohérence du calcul des valeurs actuelles entre la courbe initiale et la courbe issue du modèle de Vasicek, on corrige cette dernière pour assurer *ex-post* que la valeur actuelle des prestations non revalorisée soit identique avec les ZC de la courbe EIOPA et ces mêmes coefficients issus du modèle de Vasicek ; pour cela on ajoute un « *spread* d'ajustement » aux taux ZC issus du modèle de Vasicek. Ce *spread* est déterminé en 0 et supposé constant au cours de la projection

2. Le modèle

Le calcul des provisions techniques : l’option de revalorisation

Dans l’approche décrite ici, la loi des coefficients de revalorisation doit intégrer à la fois

- la dynamique des facteurs de risque « bruts » issus du marché
- l’effet d’atténuation des comptes sociaux et du cadre réglementaire qui construit le taux servi par filtrage du taux de marché.

Les paramètres de cette loi sont donc contraints par le fait que le *best estimate* issu du modèle doit coïncider avec celui issu des outils « pilier 1 » qui projettent effectivement la mécanique des comptes sociaux et donc le taux servi. De cette manière le coût de la contrainte règlementaire globale de participation aux bénéfices est bien pris en compte dans le modèle.

Le modèle proposé permet donc de prendre en compte toute politique de participation aux bénéfices équivalente en termes de risques à garantir, outre le taux technique, à une fonction affine du taux sans risque.

Le calcul des provisions techniques : l’option de rachat pour les cotisants

On fait ici l’hypothèse que les variables aléatoires Δ_j sont, sous une probabilité risque neutre, normales et indépendantes, ce qui conduit à écrire $\Delta_j = \Delta + \sigma_\Delta \times \varepsilon_j$ avec un bruit blanc gaussien. Cette hypothèse est justifiée par le fait qu’il s’agit de capter dans le modèle une variabilité de ce rendement relatif pour en mesurer les conséquences dans la valorisation des flux. En supposant alors que le taux de rachat global se décompose en la somme d’un taux de rachat structurel fixe et d’un correctif lié au niveau de la sous-performance, on est conduit à postuler que :

$$\mu_j = \mu + \beta \times \left(\Delta_j - \Delta\right) = \mu + \beta \times \sigma_\Delta \varepsilon_j$$

On cherche alors à mesurer l’impact de l’existence de ce mécanisme de rachats conjoncturels sur le best estimate d’un flux unitaire payé sans limite (une rente perpétuelle). La valeur économique des flux rachetés peut s’écrire simplement

$$VR(\beta) = E^{Q^f}\left(\sum_{j \geq 1} \mu_j \times \prod_{k=1}^{j-1} \left(1 - \mu_k\right)\left(1 - \Delta_k\right)\right)$$

Le calcul des provisions techniques : l'option de rachat pour les cotisants

On en déduit facilement que

$$VR(\beta) = \mu \times \sum_{j \geq 0} \left[(1-\mu)(1-\Delta) + \beta \times \sigma_{\Delta}^{2} \right]^{j} = \frac{\mu}{1 - \left((1-\mu)(1-\Delta) + \beta \times \sigma_{\Delta}^{2} \right)}$$

et comme $VR(0) = \dfrac{\mu}{1-(1-\mu)(1-\Delta)}$ on a finalement $VR(\beta) = \dfrac{VR(0)}{1 - VR(0)\dfrac{\beta \times \sigma_{\Delta}^{2}}{\mu}}$

qui fournit un correctif « pour un € de PM ».

On propose donc de corriger marginalement le niveau de la provision *best estimate* « hors rachats conjoncturels » en posant

$$BE_{P}(\beta) = \frac{1}{1 - \gamma \dfrac{\beta \times \sigma_{\Delta}^{2}}{\mu}} \times BE_{P}(0) \qquad \gamma = \frac{BE_{P}(0)}{PM}$$

Le calcul des provisions techniques : synthèse

En combinant les modèles de valorisation des deux options et en supposant que la marge pour risque est proportionnelle au *best estimate* de prestations, on obtient finalement l'expression générale suivante :

$$PT = \frac{\left(1+\tau_{RM}\right)\times\left(1+\tau_{P}\right)}{1-\gamma\dfrac{\beta\times\sigma_{\Delta}^{2}}{\mu}}\times\sum_{j\geq 1}\Omega\left(0,j\right)E^{P^{a}}\left(P_{j}\right)-\sum_{j\geq 1}P_{n}\left(0,j\right)E^{P^{a}}\left(C_{j}\right)$$

Le calcul de la provision s'effectue donc en deux temps , en supposant la détermination des flux hors revalorisation et hors rachats conjoncturels effectuée en amont :

- Calcul numérique des coefficients d'actualisation puis du *best estimate* hors rachats ;

- Ajustement *ex-post* de la valeur actualisée ainsi obtenue pour tenir compte de l'option de rachat lorsque celle-ci est présente (i.e. pour les cotisants uniquement).

Remarque : le traitement autonome de l'option de rachat *via* un modèle *ad'hoc* permet d'éviter le calcul de deux séries de déflateurs et améliore ainsi les performances du modèle.

La projection de l'actif

Dans le cadre de cette application, on considère que l'actif est constitué de parts de FCP composée d'actions et d'obligations. On considère 3 types d'obligations ZC (nominale sans risque, *corporate*, indexée inflation).

Chaque année de projection, en opérant des investissements / désinvestissements sur le portefeuille obligataire, on fait en sorte que la duration de ce dernier reste constante.

La valeur de l'actif est mise à jour à chaque année de projection agissant ainsi sur la valeur de marché de la part de FCP.

On tient compte des flux de trésorerie (cotisations à recevoir – prestations revalorisées à payer) en vendant / achetant des parts de FCP.

Le calcul du SCR

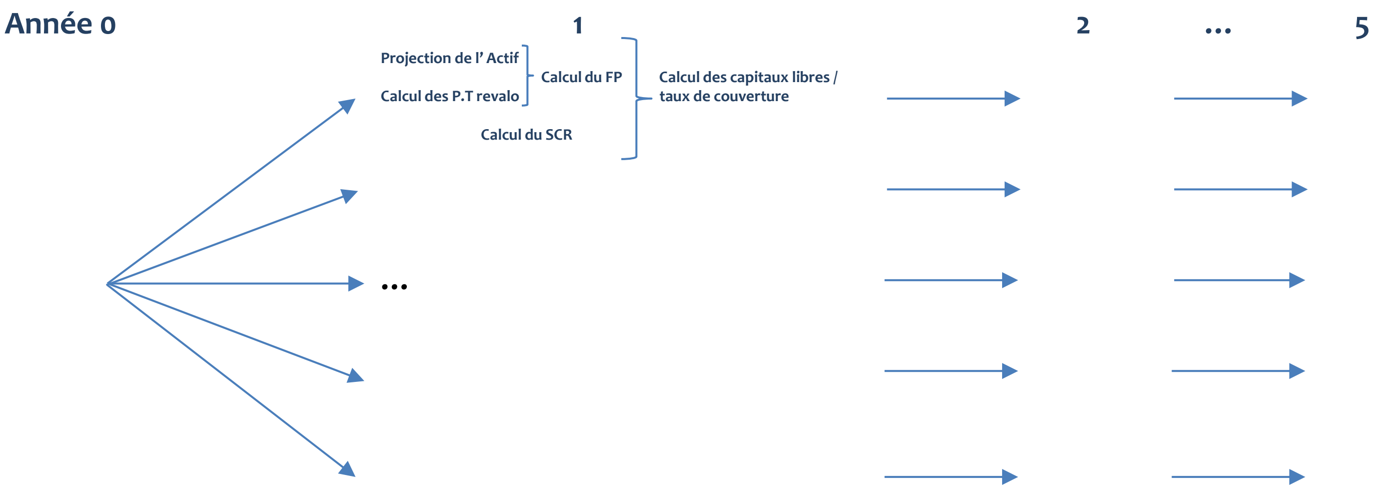
On utilise ici un calcul selon la formule standard qui s'appuie sur les spécifications techniques du LTGA du 28/12/2012. Le point essentiel consiste à recalculer conformément à la formule standard les SCR taux, *spread* et actions, de la manière suivante :

- taux : pour chaque couple (année de projection, scénario), on recalcule les coefficients d'actualisation avec la courbe de taux nominaux choquée vers le haut puis vers le bas ; on en déduit aussi les structures d'inflation et réelles choquées (par souci de cohérence avec le cadre de modélisation, un choc de taux entraîne un choc sur l'inflation) ;

- *spread* : c'est un simple choc sur la valeur de marché (VM) fonction de la notation (qui ne bouge pas) et de la duration : on calibre le choc en 0 et on l'applique à la valeur des obligations. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.

- actions : on applique un abattement de 22 % sur la valeur de marché. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.

La projection du bilan

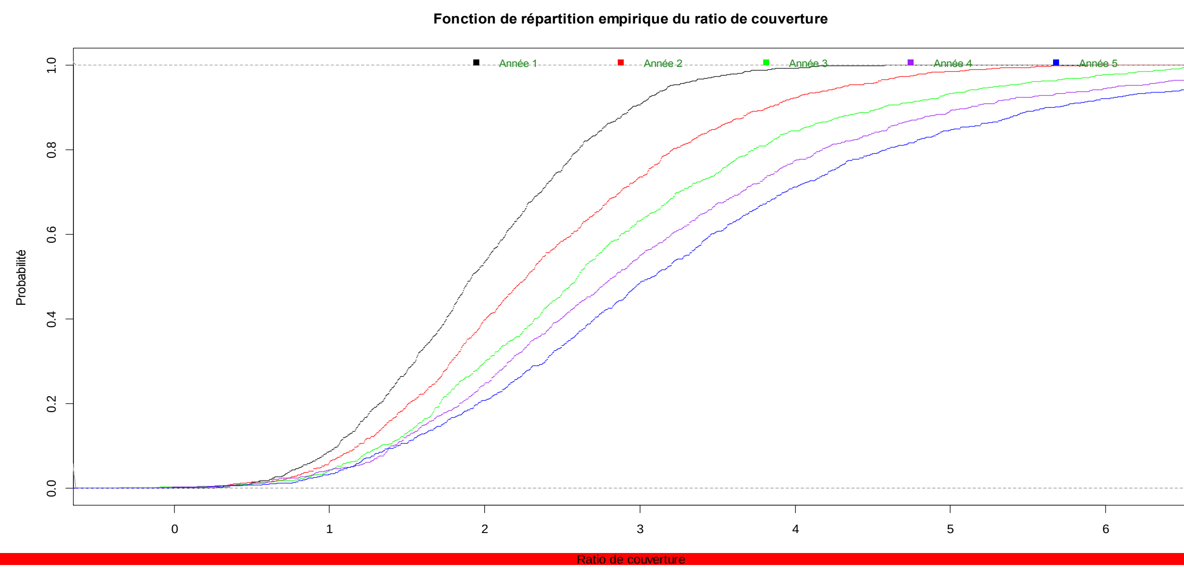


Ceci permet d'avoir une distribution empirique pour les différentes variables d'intérêt (Actif, BE, FP , SCR, TC, Klibre) sur les 5 années de projection.

Sommaire

On obtient typiquement les indicateurs suivants

```
Valeurs du bilan économique à la date des calculs (en M€)
   Fonds propres économiques :  270.9172  (valeur pilier 1= 278 )
   SCR :  377.1194  (valeur pilier 1= 358 )
   TC :  0.7183857  (valeur pilier 1= 0.7765363 )
ratio de couverture initial :  0.7183857
Taux de couverture de l'année  1
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.3691  0.8956  1.0240  1.0400  1.1780  2.0210
Taux de couverture de l'année  2
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.3206  0.8110  1.0550  1.0640  1.2930  2.3520
Taux de couverture de l'année  3
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.5301  0.7909  1.0840  1.0910  1.3870  2.5010
Taux de couverture de l'année  4
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.7500  0.8034  1.1600  1.1630  1.5020  2.7100
Taux de couverture de l'année  5
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.5640  0.9035  1.3040  1.2940  1.7190  3.0600
```



Conclusion

- **Le modèle permet la projection stochastique du bilan économique d'un organisme assureur portant des engagements de retraite. Le choix de la prise en compte des options implicites des contrats d'assurance et des rachats conjoncturels à l'aide d'approximations analytiques compatibles avec des formules fermées conduit à des performances compatibles avec les exigences opérationnelles de l'ORSA et à une meilleure intelligibilité des calculs et des résultats.**

- **Ce modèle a été mis en œuvre avec succès dans le cadre réel d'un organisme de retraite. Son calibrage doit s'appuyer, pour présenter le niveau de précision et de robustesse indispensable à tout calcul règlementaire tel que ceux attendus par l'ORSA, sur un bilan prudentiel établi en amont. En d'autres termes, ce modèle ne prétend pas se substituer aux modèles en vigueur pour estimer la juste valeur (*fair-value*) des contrats d'épargne ou de retraite mais se caler sur leurs résultats pour estimer des risques bilanciels sur des horizons pluriannuels d'une durée limitée (ici cinq années).**

Conclusion

- **L'approche présentée doit être complétée par une description des scénarios pour les risques *business* et de longévité.**
  - Pour le risque de longévité, calculer les engagements sur la base d'une table reflétant l'expérience du portefeuille constitue une première étape indispensable, sans laquelle il n'est pas utile d'aller plus loin.
  - Les scénarios sont *a priori* plus aisés à utiliser dans ce contexte qu'un modèle stochastique proprement dit.

- **Les évolutions envisageables du modèle peuvent être envisagées à deux niveaux**
  - Les corrélations entre les différents risques financiers peuvent être affinées.
  - La modélisation des actifs pourrait être enrichi par un processus de sauts sur les actifs de crédits, présentant un facteur commun plus ou moins corrélés avec la poche actions, pour permettre une prise en compte statistique du risque de concentration « émetteurs » à l'échelle de l'ensemble du portefeuille.

Références

- BAKSHI G., CAO C., CHEN Z. [1997] « Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models », *Journal of Finance*, Vol. 52, Issue 5.
- BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2014] « Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, n°2014.1.
- BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014] « Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA », *European Actuarial Journal*, doi: 10.1007/s13385-014-0086-z.
- BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°21.
- CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; RUDEBUSH G.D. [2010] « The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models », *Federal Reserve Bank of San Francisco*, WP n°2007-20.
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2012] « Measuring Uncertainty of Solvency Coverage Ratio in ORSA for Non-Life Insurance », *European Actuarial Journal*, 2:205-226, doi: 10.1007/s13385-012-0051-7.
- NELSON C.R., SIEGEL A.F. [1987] « Parsimonious modelling of yield curves », *Journal of Business*, 60, 473-489.
- PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.

Contact

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

Montassar TAMAR
montassar.tamar@primact.fr

PRIM'ACT
42 avenue de la Grande Armée
75017 Paris
+33-1-42-22-11-00

ISFA
50 avenue Tony Garnier
F - 69007 Lyon
+33-4-37-38-74-37

http://www.primact.fr
http://www.ressources-actuarielles.net
http://blog.ressources-actuarielles.net