INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES

Support de cours 2023-2024

Modèles de mortalité stochastiques

Frédéric PLANCHET

Version 5.3

Décembre 2023

SOMMAIRE

1. Introduction

La modélisation de la mortalité est classiquement effectuée *via* une spécification du taux de hasard $\mu(x,t)$, en fonction de l'âge x et de l'année courante t : $\mu(x,t)$ est le taux instantané de décès à la date t pour un individu d'âge x à cette date. La connaissance de ce taux permet en effet de calculer la probabilité de survie entre t et T $(t<T)$ d'un individu d'âge x en t :

$$S(x,t,T) = \mathbf{exp}\left(-\int_t^T \mu(x+u-t,u)\,du\right)$$

Dans le cas particulier où $\mu(x,t)$ ne dépend que de l'âge, on retrouve l'expression classique[1] $S(x,t,T) = \mathbf{exp}\left(-\int_x^{x+T-t} \mu(u)\,du\right) = \frac{S(x+T-t)}{S(x)}$, avec $S(x) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^x \mu(u)\,du\right)$ la fonction de survie du modèle.

1.1. Quels types d'aléa ?

Dans le cas où le taux instantané de décès est une fonction déterministe et en supposant celle-ci correctement spécifiée, le risque de mortalité se mutualise ; en effet, la loi des grands nombres s'applique, et assure que sur un portefeuille de taille importante, les fluctuations d'échantillonnage sont faibles. Au surplus le théorème central limite permet de quantifier l'amplitude de ces fluctuations et d'obtenir des intervalles de confiance pour le nombre de décès de la forme :

$$D_x \in \left[D_x^{th} - 1{,}96 \times \frac{D_x^{th}}{\sqrt{n}} ; D_x^{th} + 1{,}96 \times \frac{D_x^{th}}{\sqrt{n}}\right].$$

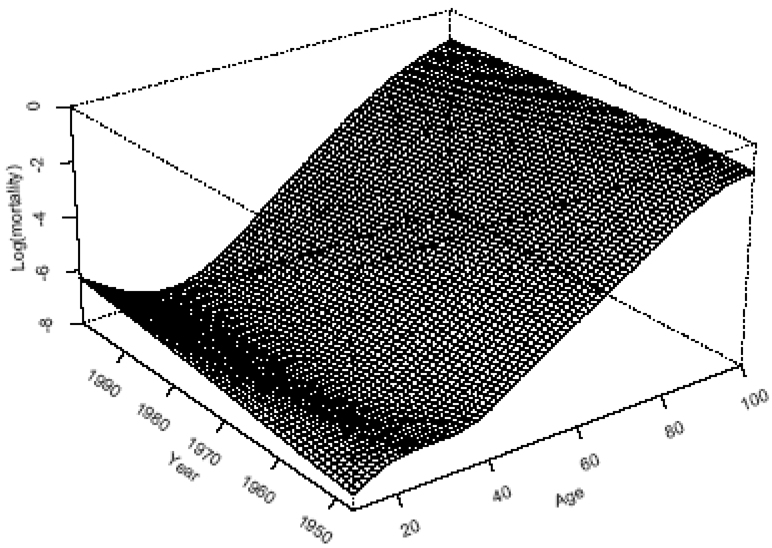
À ce risque mutualisable s'ajoute un risque d'erreur de spécification : si la mortalité observée dans le futur est différente de celle prévue par le modèle, l'écart n'est bien entendu pas mutualisable, puisque toutes les têtes concernées sont affectées dans le même sens par l'écart de la réalisation par rapport à la prévision. Dans l'approche standard de la mortalité la manière de se prémunir contre ce risque consiste à retenir une modélisation prudente intégrant une marge pour risque.

On peut également observer que l'erreur d'estimation des paramètres du modèle conduit à introduire une erreur systématique dans le modèle. En effet, dans le cas d'un modèle paramétrique, $\mu_\theta(x,t)$ est en pratique approché par $\mu_{\hat{\theta}}(x,t)$, avec $\hat{\theta}$ l'estimateur retenu de θ. Dans un cadre « maximum de vraisemblance », la loi asymptotique de $\hat{\theta}$ étant connue, il est possible de déterminer des intervalles de confiance pour $\mu_\theta(x,t)$ et de quantifier ainsi l'ampleur du risque non mutualisable associé.

[1] Voir le support « tables de mortalité » du cours de modèles de durée.

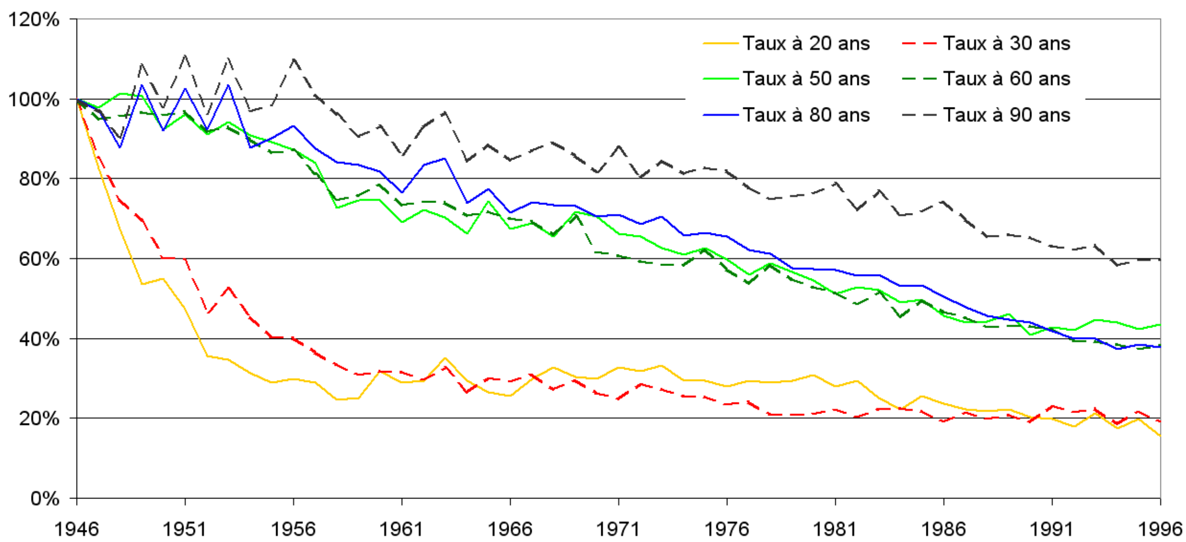
Toutefois, l'idée sous-jacente de ces modélisations est qu'il existe une « vraie valeur » de $\mu(x,t)$, que l'on cherche à approcher au mieux. On construit ainsi des « surfaces de mortalité » régulières, comme, par exemple dans CURRIE et al. [2004] :

Fig. 1 : **Surface de mortalité régulière**



Cependant, un examen plus fin de cette surface fait apparaître que l'évolution du taux instantané de mortalité présente, aux différents âges, des variations erratiques autour de la tendance qui se dégage[2] :

Fig. 2 : **Évolution des taux de décès au cours du temps (données INED)**



On est donc conduit à rechercher une modélisation capable de rendre compte de ses fluctuations autour de la valeur tendancielle : c'est là l'objectif des modèles stochastiques de mortalité.

[2] Taux présentés en « base 100 en 1946 ».

Dans un contexte d'assurance, la prise en compte de ce risque systématique intervient dans de nombreuses applications :

- solvabilité : capital de solvabilité, avec par exemple dans le QIS 4 : +10 % (mortalité) ou –25 % (longévité) sur les taux conditionnels de mortalité à chaque âge dans l'approche par scénario.
- transfert de risque : réassurance, titrisation, etc.
- évaluation de portefeuilles ou de compagnies : IFRS « assurance », Embedded Value, cession, etc.

1.2. Les modèles stochastiques[3]

Les modèles stochastiques proposent de considérer que le taux de mortalité futur est lui même aléatoire, et donc $\mu(x,t)$ devient un processus stochastique. Le taux de mortalité observé pour un âge et une année donnés est alors une réalisation d'une variable aléatoire : on peut noter l'analogie avec les méthodes de lissage bayésiennes[4]. Le phénomène de mortalité intègre alors explicitement les deux risques décrits ci-dessus.

Dans la littérature, les approches stochastiques des phénomènes de mortalité sont nombreuses.

Plusieurs modèles classiques sont de fait des modèles stochastiques ; en premier lieu, les lissages bayésiens et le modèle de Kimeldorf-Jones[5] entrent dans cette catégorie.

Les modèles avancées de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter[6] ou les modèles poissoniens, sont également des cas particuliers de modèles stochastiques, bien qu'ils soient à l'origine élaborés pour construire des extrapolations (temporelles) de la surface $\mu(x,t)$ déterministe ; en ce qui concerne la modélisation de Lee-Carter ou les modèles poissoniens, on peut toutefois noter que les taux de mortalité aux différents âges sont supposés parfaitement corrélés, la composante aléatoire (k_t) ne dépendant que du temps[7]. Ceci est clairement contredit par le graphique précédent.

Un autre exemple simple de modèle stochastique consiste à déformer une table de mortalité classique par une perturbation aléatoire, en posant[8] :

$$q_{xt}^1 = a_t q_x + b_t$$

avec $E(a_t)=1$ et $E(b_t)=0$. Un exemple de ce type est développé à la section 4 ci-dessous. On peut également consulter SOININEN [1995] qui propose une approche très formelle de ce risque.

[3] Voir également cette liste de références.
[4] Voir le support de cours « lissages et ajustements ».
[5] KIMELDORF et JONES [1967].
[6] Ce modèle est décrit par exemple dans BROUHNS et al. [2002].
[7] Cette composante est modélisée par un processus ARIMA.
[8] Voir LEE [2000].

La modélisation stochastique de la mortalité peut également s'inspirer des approches développées pour modéliser le défaut sur un marché de taux d'intérêt ou de dette (on pourra par exemple consulter LE PAGE [2000] pour une présentation des principaux modèles de ce type) ; la durée avant le défaut joue alors le rôle de la durée de vie. Ce sont ces classes de modèles qui sont aujourd'hui très étudiés. On peut en effet remarquer que $\mu(x,T) = \lim_{t \to T} -\frac{\partial}{\partial T} \ln S(x,t,T)$. Cette égalité, rappelle la définition du taux d'intérêt instantané par rapport au prix d'un zéro-coupon ; elle conduit à introduire la notion de taux instantané de décès « forward », défini par $\mu(x,t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln S(x,t,T)$, de sorte que $\mu(x,T) = \lim_{t \to T} \mu(x,t,T)$; ces analogies avec les modèles de taux d'intérêt sont détaillées en 3 ci-dessous. Ces approches sont notamment intéressantes dans la perspective de la valorisation en « juste valeur » d'engagements comportant à la fois le risque financier et le risque démographique.

Enfin, signalons l'existence d'approches utilisant la théorie des valeurs extrêmes pour évaluer certains dérivés de mortalité, comme, par exemple le produit proposé par Swiss Ré ; on pourra consulter sur ce point BEELDERS et COLAROSSI [2004].

L'utilisation potentielle d'un modèle stochastique est donc double :

- ✓ un tel modèle permet de quantifier le risque systématique non diversifiable en intégrant explicitement l'incertitude sur les taux de mortalité futurs ;
- ✓ l'évaluation en « juste valeur » au sens des normes IFRS de la valeur d'un contrat d'assurance vie peut être effectuée dans le contexte général de l'absence d'opportunité d'arbitrage, en traitant de manière symétrique les risques financier et démographique.

Une littérature abondante est consacrée au second point : on pourra notamment consulter BIFFIS et MILLOSOVITCH [2004], CAIRNS et al. [2004], DAHL [2004], MOLLER [1998] et SCHRAGER [2004]. Cet aspect ne sera que brièvement abordé dans le présent document, consacré aux modèles de mortalité proprement dit.

Les modèles développés dans ce cadre, qui sont plus particulièrement présentés ici, ne constituent donc qu'une approche possible pour introduire une mesure du risque systématique, et à certains égards pas nécessairement l'approche la plus pertinente. En particulier, les modèles de type Poisson s'avèrent bien adaptés pour les applications en assurance[9].

1.2.1. Notations et définition

On désigne par $\left(\mathrm{F}_t^m\right)$ la filtration associée à la structure $\mu(x,t)$, vu comme un processus en t pour chaque x.

[9] On se reportera au support de cours sur les tables de mortalité et à HADERER [2003] pour une application.

L'indice de survie défini en 1.1 n'est alors plus une probabilité, mais une variable aléatoire. On introduit l'indicatrice de présence en t, $Y_x(t) = 1_{\{T_x > t\}}$, de sorte que la probabilité de présence en *t* d'un individu d'âge *x* à l'origine s'écrive :

$$p(x,0,t) = E\left[Y_x(t) \middle| \mathcal{F}_t^m\right]$$

Mais on a $E\left[Y_x(t)\right] = E\left(E\left[Y_x(t) \middle| \mathcal{F}_t^m\right]\right) = E\left[S(x,0,t)\right]$. De la même manière, si $T > t$, la probabilité pour qu'un individu d'âge *x* à l'origine et vivant en *t* soit encore vivant en *T* est donnée par :

$$p(x,t,T) = E\left[\frac{S(x,0,T)}{S(x,0,t)} \middle| \mathcal{F}_t^m\right]$$

car $p(x,t,T) = E\left[Y_x(T) \middle| Y_x(t) = 1, \mathcal{F}_t^m\right]$.

On peut donc calculer les probabilités de survie à l'origine en calculant l'espérance de l'indice de survie stochastique. Il convient maintenant de spécifier de manière plus précise la forme que l'on souhaite donner au processus stochastique $\mu(x,t)$.

1.2.2. Modélisation du décès via les processus de comptage

La formalisation d'un cadre relativement général pour les modèles stochastiques de mortalité nécessite un arsenal mathématique relativement lourd qui ne sera qu'esquissé ici. Le lecteur intéressé peut se reporter à BRÉMAUD [1981] ou ROLSKI et al. [1998].

Dans la présentation des modèles de mortalité non paramétriques[10] on a introduit le processus ponctuel naturellement associé $N(t)$, égal à 0 tant que l'événement n'a pas eu lieu, puis 1 après : $N(t) = 1_{\{T \leq t\}}$. Cette approche peut être généralisée de la manière suivante : on considère un processus de comptage $N(t)$ adapté non explosif (c'est à dire tel que $N_t < \infty$ p.s. si $t < \infty$) et le décès est défini comme étant le premier instant de saut *T* de *N*. Dans ce contexte, s'il existe un processus prévisible[11] positif (λ_t) tel que $\int_0^t \lambda(u)du < \infty$ p.s. et que $M_t - \int_0^t \lambda_u du$ est une martingale locale, on dit que (λ_t) est l'intensité de N. Lorsqu'en plus $E\left(\int_0^t \lambda_u du\right) < \infty$, *M* est une martingale.

Deux filtrations interviennent pour définir les processus *N* et λ : la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(N_u ; u \leq t)$ et une filtration $(\mathcal{F}_t)$ *a priori* moins « riche » que $(\mathcal{G}_t)$, au sens où $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$

[10] Voir le support « Statistique des modèles non paramétriques » du cours de modèles de durée.
[11] Un processus est prévisible si il est adapté par rapport à la filtration engendrée par les processus mesurables continus à gauche.

pour laquelle (λ_t) est adapté et prévisible. L'intensité du processus de comptage fournit une information sur le nombre moyen de sauts, puisque l'on peut vérifier que :

$$E\left[N_{t+h} - N_t \middle| \mathsf{F}_t\right] = \lambda_t h + o(h)$$

Dans l'expression ci-dessus le conditionnement est effectué par rapport à la filtration la « moins informative », de sorte que l'on obtient une information sur le nombre moyen de sauts, mais qu'on ne peut déterminer si le processus va effectivement sauter ou pas. Cette équation est à rapprocher de l'expression du taux de décès instantané :

$$\mathbf{Pr}\left[x < T \le x+h \middle| T > x\right] = \mu(x)h + o(h).$$

Pour obtenir des formules exploitables, on a besoin de spécifier un peu plus la forme du processus ; on dit que (N_t) est doublement stochastique[12] par rapport à (F_t) si pour tous $s < t$, conditionnellement à la tribu $\mathsf{G}_s \vee \mathsf{F}_t$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\int_s^t \lambda_u du$. L'intérêt pratique de cette formalisation est qu'elle conduit à l'expression suivante :

$$\mathbf{Pr}\left(T > t \middle| \mathsf{G}_s\right) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_s^t \lambda(u)du\right) \middle| \mathsf{G}_s\right]$$

et donc si la durée de vie résiduelle d'un individu d'âge *x* à l'origine est notée T_x :

$$\mathbf{Pr}\left(T_x > t\right) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_0^t \lambda_x(u)du\right)\right]$$

Cette formule rapprochée de la formule de 1.1 conduit à remarquer le lien entre l'intensité du processus de comptage et la fonction de hasard ; dans le cas où (λ_t) est déterministe, on a en effet $\lambda_x(u) = \mu(x+u,u)$.

Dans le cas général, on obtiendra les probabilités de survie[13] à partir de l'égalité $p(x,t,T) = E\left[\frac{S(x,0,T)}{S(x,0,t)} \middle| \mathsf{F}_t^m\right]$, qui peut être réécrite sous la forme :

$$p(x,t,T) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_t^T \mu(x+u,u)du\right) \middle| \mathsf{F}_t^m\right]$$

Tout se ramène donc au choix du processus d'intensité $\lambda_x(u) = \mu(x+u,u)$.

Avec un choix judicieux du processus d'intensité, les expressions ci-dessus conduisent à des expressions explicites de la fonction de survie et des probabilités de survie entre

---

[12] Ou « processus de Cox ».

[13] Il s'agit ici de la probabilité qu'un individu d'âge *x* à l'origine et vivant en *t* soit encore vivant en *T*.

deux dates. L'idée est de sélectionner convenablement le processus d'intensité pour être capable de calculer les fonctionnelles exponentielles ci-dessus. Ceci est en particulier possible dans le contexte des processus à « structure affine », présenté ci-après.

2. Modélisation du processus d'intensité

Les modèles de mortalité stochastique utilisent de manière intensive les processus à structure affine[14], qui conduisent à des formules fermées dans un grand nombre de cas. Lorsqu'on considère les modèles à structure affine à un facteur, on peut montrer que deux situations sont possibles : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (associé dans la littérature sur les taux d'intérêt au modèle de Vasicek) et le processus de Feller (associé quant à lui au modèle CIR). Au surplus, ces deux processus apparaissent de manière naturelle dans des modèles physiques simples.

Afin de simplifier les écritures, on considère que l'on fixe un âge *x* et on cherche donc à modéliser le processus d'intensité à cet âge, vu comme une seule fonction de *t*. Cette approche est bien entendu assez restrictive puisqu'elle n'intègre pas explicitement la prise en charge de la surface de mortalité $\mu(x,t)$.

Après une présentation générale du cadre de la modélisation du processus d'intensité, les principales propriétés de ces objets sont rappelées ici.

2.1. Cadre général

Le processus d'intensité (λ_t) est supposé être fonction d'un processus, non observable en général, (X_t), soit $\lambda_t = \phi(X_t)$, le processus *X* étant supposé être solution d'une EDS de la forme :

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

En toute généralité on pourra considérer un mouvement brownien *B* de dimension *p* et un processus *X* de dimension *p*. On suppose que la dépendance des coefficients μ et $\sigma\sigma'$ en fonction de *x* est affine.

On peut alors montrer que l'égalité suivante est vérifiée :

$$E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_s^t \varphi(X_u)du + \omega X_t\right)|\mathrm{G}_s\right] = \mathbf{exp}\left(\alpha(t-s) + \beta(t-s)X_t\right)$$

les fonctions α et β étant solutions de deux équations différentielles ordinaires de Riccati.

On peut donc obtenir dans ce contexte une expression analytique de la fonction de survie, ou, à tout le moins, résoudre numériquement les EDO et ainsi en calculer les coefficients.

[14] On pourra se reporter à AÏT-SAHALIA et KIMMEL [2002] pour une présentation de ces processus.

En pratique, on fait souvent le choix $p=1$ et $\varphi(x)=x$, ce qui conduit aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de Feller, présentés de manière détaillée ci-après. Dans ces cas particuliers, les calculs peuvent être effectués simplement.

2.2. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ne peut être *a priori* utilisé en l'état pour modéliser l'intensité du décès, puisqu'il autorise des valeurs négatives. Toutefois, compte tenu de l'importance de ce processus d'une part, et du fait que la probabilité d'observer des valeurs positives peut être rendu faible, d'autre part, il a paru utile de le présenter ci-après.

2.2.1. Introduction heuristique[15]

Le mouvement brownien permet de modéliser le mouvement d'une particule soumise à l'agitation thermique. Toutefois, en faisant l'hypothèse que la position de la particule est un processus de Markov à accroissements indépendants, on néglige le fait que si la particule possède une masse elle possède une inertie et donc sa position à l'instant $t+h$ ne dépend pas uniquement de sa position en *t*, mais également de sa vitesse à cet instant.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck permet de rendre compte de ce phénomène. Plus précisément, si la masse de la particule est *m* et que sa vitesse est x_t, on peut écrire que la variation de la quantité de mouvement de la particule entre *t* et $t+dt$ est de la forme :

$$mdx_t = -rx_t dt + dM_t$$

avec *r* un coefficient de viscosité. Des considérations physiques relatives au terme dM_t représentant la part de la variation conséquence des chocs moléculaires conduisent à proposer que $dM_t = \sigma dB_t$, avec B un mouvement brownien. On obtient ainsi l'équation de Langevin :

$$mdx_t = -rx_t dt + \sigma dB_t$$

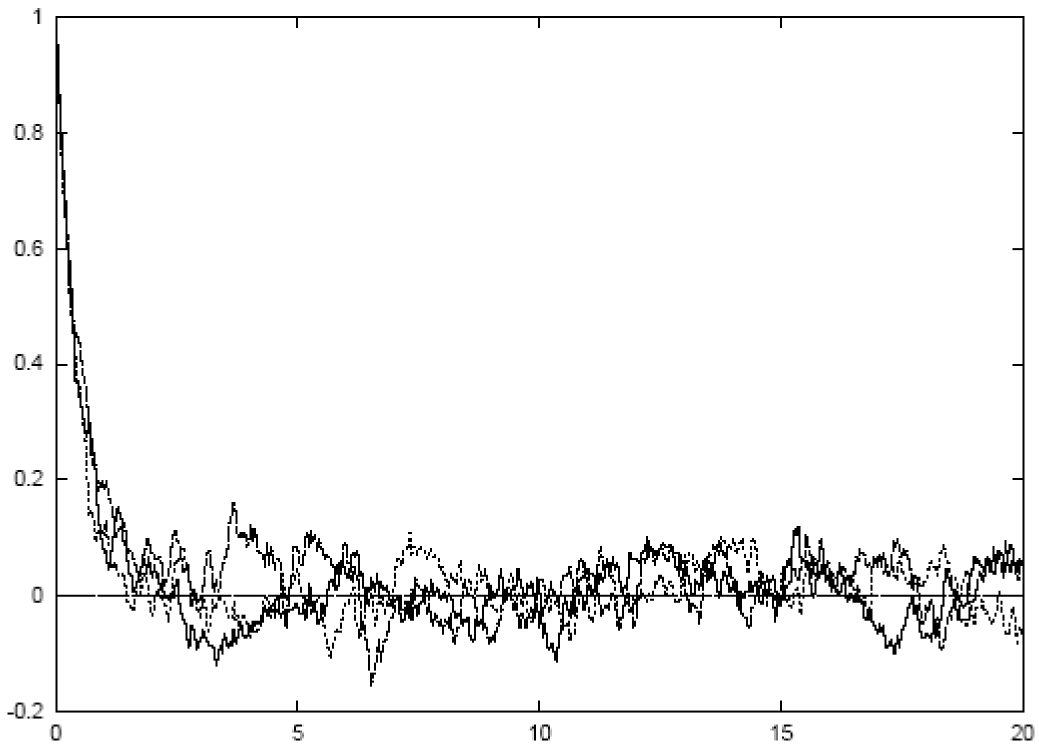
Le processus solution de cette équation s'appelle le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Usuellement on utilise la présentation à partir de l'équation suivante, qui servira de référence par la suite :

$$dx(t) = k\left(\theta - x(t)\right) dt + \sigma dB(t)$$

Les trajectoires de ce processus ont l'allure suivante :

[15] Cette présentation reprend celle de BOULEAU [2000].

Fig. 3 : **Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck**



2.2.2. Principes propriétés

Il résulte immédiatement de la définition que ce processus est gaussien, comme intégrale par rapport au mouvement brownien d'une fonction déterministe. En effet, on vérifie directement que la solution de l'équation différentielle stochastique définissant le processus est donnée par :

$$x_t = x_0 e^{-kt} + \theta\left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dB(s)$$

On en déduit en particulier que la variable $Z(t,T) = \int_t^T x_s ds$ est gaussienne. Comme on a, pour une variable aléatoire gaussienne X, $E\left(e^{\lambda X}\right) = \mathbf{exp}\left(\lambda E(X) + \frac{1}{2}\lambda^2 V(X)\right)$, on obtient que :

$$E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_s^t x(u)\,du\right) \middle| \mathcal{G}_s\right] = \mathbf{exp}\left[-m(s,t) + \frac{1}{2}v(s,t)\right]$$

où $m(s,t)$ et $v(s,t)$ désignent respectivement l'espérance et la variance conditionnelles de $Z(s,t)$. Les fonctionnelles exponentielles permettant de calculer $p(x,t,T)$ se calculent donc explicitement dans ce cadre. Le calcul de $m(s,t)$ et $v(s,t)$ s'effectue de la manière suivante :

$$m(s,t) = E_s\left(Z(s,t)\right) = \int_s^t E_s\left(x_u\right) du = \int_s^t \left[x_0 e^{-ku} + \theta\left(1 - e^{-ku}\right)\right] du$$

ce qui conduit à :

$$m(s,t) = E_s\left(Z(s,t)\right) = \int_s^t E_s(x_u)\,du = \int_s^t \left[x_0 e^{-ku} + \theta\left(1-e^{-ku}\right)\right] du$$

Après calcul de l'intégrale ci-dessus on obtient finalement :

$$m(s,t) = \theta(t-s) + (x_0 - \theta)\frac{e^{-ks}}{k}\left(1-e^{-k(t-s)}\right)$$

Pour calculer la variance de $Z(s,t)$, on remarque que par définition de *x* on a :

$$x_t = x_s + k\theta(t-s) - kZ(s,t) - \sigma(B_t - B_s)$$

On déduit de cette expression que :

$$v(s,t) = \frac{1}{k^2} V_s\left[x_t - x_s - \sigma(B_t - B_s)\right]$$

En utilisant le fait que $x_t = x_0 e^{-kt} + \theta\left(1-e^{-kt}\right) + \sigma\int_0^t e^{-k(t-s)} dB(s)$, on trouve donc :

$$v(s,t) = \frac{1}{k^2} V_s\left[-\sigma\int_s^t e^{-k(t-u)} dB_u + \sigma(B_t - B_s)\right] = \frac{1}{k^2} V_s\left[\sigma\int_s^t \left(1-e^{-k(t-u)}\right) dB_u\right]$$

D'où il suit que :

$$v(s,t) = \frac{\sigma^2}{k^2}\int_s^t \left(1-e^{-k(t-u)}\right)^2 du$$

Finalement on obtient :

$$v(s,t) = \frac{\sigma^2}{2k^3}\left(1-e^{-k(t-s)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{k^2}\left((t-s) - \frac{1-e^{-k(t-s)}}{k}\right)$$

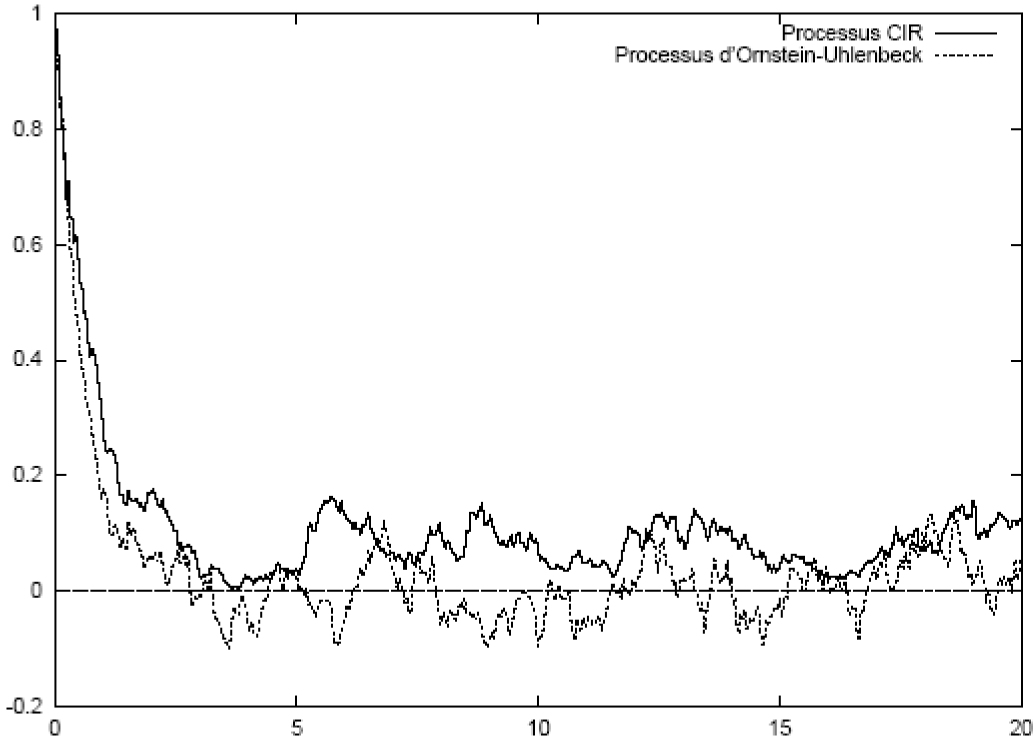
2.3. Le processus de Feller (CIR)

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck présente l'inconvénient comme on l'a vu de prendre des valeurs négatives ou nulles avec une probabilité strictement positive. En modifiant légèrement l'équation différentielle qui le définit, on introduit ainsi un nouveau processus dont les trajectoires sont presque sûrement positives, le processus de Feller. Le processus de Feller est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dx(t) = k\left(\theta - x(t)\right)dt + \sigma\sqrt{x(t)}\,dB(t)$$

Cette équation admet une solution unique pour $k\theta \geq 0$; la solution n'admet pas de représentation explicite, comme dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Si la condition $2k\theta \geq \sigma^2$ est de plus satisfaite, alors presque sûrement $x(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Les trajectoires de ce processus ont l'allure suivante :

Fig. 4 : **Trajectoire d'un processus de Feller**



2.3.1. Le calcul de l'espérance

En écrivant l'équation sous forme intégrale :

$$x(t) = x_0 + k\int_0^t \left(\theta - x(u)\right)du + \sigma\int_0^t \sqrt{x(u)}dB(u)$$

Puis en prenant l'espérance, comme l'intégrale stochastique d'un processus adapté par rapport au brownien est une martingale, il reste :

$$E\left[x(t)\right] = x_0 + k\int_0^t \left(\theta - E\left[x(u)\right]\right)du$$

Si on pose $m(t) = E\left[x(t)\right]$, on a donc

$$\frac{dm}{dt}(t) = k\left(\theta - m(t)\right)$$

avec la condition limite $m(0) = x_0$. On déduit aisément de cette équation que :

$$m(t) = \theta - (\theta - x_0)\mathbf{exp}(-kt)$$

En particulier $\lim_{t\to\infty} m(t) = \theta$. En appliquant la propriété de Markov, on obtient l'expression de l'espérance conditionnelle :

$$E_s\left[x(t)\right] = \theta - (\theta - x_s)\mathbf{exp}\left(-k(t-s)\right)$$

2.3.2. Le calcul de la variance

La formule d'Itô appliquée à $f\left(x(t)\right)$ conduit à :

$$df\left(x(t)\right) = f'\left(x(t)\right)dx(t) + \frac{1}{2} f''\left(x(t)\right)\left[dx(t)\right]^2.$$

En choisissant $f(x) = x^2$, on a donc en particulier :

$$dx(t)^2 = \left[\left(2k\theta + \sigma^2\right)x(t) - 2kx(t)^2\right]dt + 2\sigma x(t)^{\frac{3}{2}} dB(t)$$

Cela s'écrit : $x(t)^2 - x_0^2 = \left(2k\theta + \sigma^2\right)\int_0^t x(u)du - 2k\int_0^t x(u)^2 du + 2\sigma^2 \int_0^t x(u)^{\frac{3}{2}} dB(u)$, ce qui conduit en prenant l'espérance à :

$$E\left[x(t)^2\right] - x_0^2 = \left(2k\theta + \sigma^2\right)\int_0^t E\left[x(u)\right]du - 2k\int_0^t E\left[x(u)^2\right]du .$$

En différenciant par rapport au temps on obtient l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $y(t) = E\left[x(t)^2\right]$:

$$\frac{d}{dt}E\left[x(t)^2\right] = \left(2k\theta + \sigma^2\right)m(t) - 2kE\left[x(t)^2\right]$$

Or, $v(t) = V\left(x(t)\right) = E\left[x(t)^2\right] - \left[E\left(x(t)\right)\right]^2$, d'où $v(t) = \frac{\sigma^2}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\left[x_0 e^{-kt} + \frac{\theta}{2}\left(1 - e^{-kt}\right)\right]$.

En particulier on a $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \frac{\theta\sigma^2}{2k}$. La variance conditionnelle s'obtient de même avec la propriété de Markov :

$$V_s\left[x(t)\right] = \frac{\sigma^2}{k}\left(1 - e^{-k(t-s)}\right)\left[x_s e^{-k(t-s)} + \frac{\theta}{2}\left(1 - e^{-k(t-s)}\right)\right]$$

2.3.3. Fonctionnelles exponentielles associées

Que ce soit dans les modèles de taux d'intérêt, ou dans les modèles de mortalité stochastique, on est amené comme on l'a vu à évaluer des expressions telles que :

$$S\left(t,T,x(t)\right) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_t^T x_u du\right)\middle|\mathcal{G}_t\right]$$

On a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : La fonction $S(t,T,x)$ définie par l'équation ci-dessus est égale à

$$S(t,T,x) = a(T-t)\mathbf{exp}\left[-xb(T-t)\right]$$

avec

$$a(u) = \left[\frac{2\gamma \exp\left((k+\gamma)\frac{u}{2} \right)}{(k+\gamma)\times(\exp(\gamma u)-1)+2\gamma} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$b(u) = \frac{2(\exp(\gamma u)-1)}{(k+\gamma)\times(\exp(\gamma u)-1)+2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{k^2+2\sigma^2}$$

2.3.4. La loi du processus[16]

L'obtention de la loi de $x(t)$ nécessite l'introduction des processus de Bessel ; pour cela on considère tout d'abord le processus $X_t = \left(\sum_{i=1}^{n} B_i(t)^2 \right)^{1/2}$ où $(B_1(t),..,B_n(t))$ est un mouvement brownien n-dimensionnel[17]. En appliquant la formule d'Itô on obtient que :

$$dX_t^2 = \sum_{i=1}^{n} 2B_i(t)\,dB_i(t) + ndt$$

Le processus $dW_t = \frac{1}{X_t}\sum_{i=1}^{n} B_i(t)\,dB_i(t)$ est une martingale (comme somme de martingales) satisfaisant $<W,W>_t = t$; cette dernière propriété est équivalente au fait que $W_t^2 - t$ est une martingale. Le processus *W* est donc un mouvement brownien, et en posant $V_t = X_t^2$ on a donc démontré que :

$$dV_t = 2\sqrt{V_t}\,dW_t + ndt$$

X est appelé processus de Bessel de dimension *n*, et *W* carré de processus de Bessel. Plus généralement l'équation différentielle stochastique :

$$dV_t = \delta dt + 2\sqrt{|V_t|}\,dW_t$$

avec $\delta \geq 0$ admet une unique solution appelé carré du processus de Bessel de degré $\delta \geq 0$, noté $BESQ(\delta)$. Le processus CIR peut être ramené à un coefficient de volatilité de 2 par le changement de temps $\tau(t) = \frac{\sigma^2 t}{4}$; on peut montrer qu'on a l'égalité :

$$x_t = e^{-kt} V\left(\frac{\sigma^2}{4k}\left(e^{kt}-1\right) \right)$$

[16] Voir par exemple REVUZ et YOR [1999].
[17] Il s'agit donc de la norme euclidienne du vecteur brownien.

où V est un processus $BESQ(\delta)$ avec $\delta = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$. On en déduit alors en utilisant des résultats généraux sur les processus de Bessel que la loi de x_t est un Khi-2 décentré avec $\delta = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$ degrés de liberté et un paramètre de non centralité égal à $\alpha = \frac{x_0}{\frac{\sigma^2}{4k}\left(e^{kt}-1\right)}$.

2.4. L'estimation des paramètres

Une fois le modèle spécifié, il convient d'estimer les paramètres à partir de données observées. L'information accessible à l'observation est constituée des taux bruts de mortalité, et en faisant l'hypothèse de constance du taux instantané dans chaque carré du diagramme de Lexis on a :

$$\mu_{xt}^* = -\ln\left(1-\hat{q}_{xt}\right)$$

Une fois les taux instantanés de mortalité ainsi estimés, deux approches sont possibles pour déterminer les paramètres du modèle :

- ✓ l'estimation par maximum de vraisemblance ;
- ✓ la minimisation de la somme des carrés des écarts entre les taux issus du modèle et les taux estimés.

Ces techniques ne seront pas développées ici ; pour une présentation générale sur l'estimation par maximum de vraisemblance dans le cadre des modèles à structure affine on pourra consulter AÏT-SAHALIA et KIMMEL [2002].

Dans le cas d'un critère de moindres carrés, on obtient en pratique souvent (comme d'ailleurs lorsque estime les paramètres d'un modèle de taux) une valeur nulle pour le paramètre de volatilité : on pourra par exemple consulter LUCIANO et VIGNA [2005]. Cela conduit à un modèle qui est déterministe et qui perd donc une bonne partie de son intérêt. Une solution consiste à fixer arbitrairement le paramètre $\sigma > 0$ pour conserver une variabilité des taux futurs, et de n'estimer alors que les deux paramètres restants.

3. Utilisation pour la tarification de dérivés de mortalité

On se place maintenant dans la situation où l'on est confronté à l'existence concomitante d'un risque financier et d'un risque démographique ; l'objectif est de fournir un cadre permettant de calculer des prix pour des contrats incorporant les deux risques.

Une présentation de ce contexte est effectuée par ARGESANU [2004]. Une introduction à la prise en compte simultanée d'un risque financier et d'un risque d'assurance est fournie par CHENUT et al. [2003] dans le contexte des garanties planchers sur les contrats en unités de compte[18].

[18] Voir également le support du cours de « modèles financiers de l'assurance » sur ce sujet.

3.1. Rappel sur l'évaluation par arbitrage (APT)

Les deux résultats fondamentaux de l'évaluation par arbitrage[19] s'énoncent comme suit :

- la propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité *Q* équivalente à la probabilité *P* d'origine telle que sous *Q* le processus de prix actualisé soit une martingale ;
- la propriété de complétude du marché est équivalente à l'unicité de la probabilité *Q* définie ci-dessus.

Le fait que le marché soit complet peut s'exprimer en disant que dans un marché complet, toute variable aléatoire H_T qui est $\mathcal{F}_T^f$ - mesurable est réplicable. D'un point de vue pratique, cela implique que lorsque l'on veut calculer le prix de H_T, on est ramené à calculer l'espérance sous la probabilité risque-neutre du flux futur actualisé. On peut noter que cette démarche suppose l'existence d'un marché secondaire sur lequel s'échangent les dérivés concernés. Ce point n'est pas (encore) réalisé dans le cas du risque de mortalité.

3.2. Construction de l'espace produit[20]

On fait l'hypothèse que l'on dispose d'un premier espace de probabilité $\left(\Omega^f, \mathcal{F}^f, P^f\right)$ équipé d'une filtration $F^f = \left(\mathcal{F}_t^f\right)$ décrivant l'information disponible sur le marché financier. La filtration est supposée complète et continue à droite[21].

L'information démographique est décrite par un second espace probabilisé $\left(\Omega^m, \mathcal{F}^m, P^m\right)$ équipé d'une filtration $F^m = \left(\mathcal{F}_t^m\right)$ continue à droite mais non nécessairement complète.

Lorsque l'on considère de manière conjointe le risque de mortalité d'une part et le risque financier d'autre part, on introduit l'espace produit $\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$ avec $\Omega = \Omega^f \otimes \Omega^m$, $P = P^f \otimes P^m$; la définition de la tribu $\mathcal{F}$ et de la filtration nécessite quelques considérations techniques. On introduit la tribu $\mathcal{N}$ engendrée par les ensembles négligeables de $\mathcal{F}^f \otimes \mathcal{F}^m$, puis la tribu $\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}^f \otimes \mathcal{F}^m\right) \vee \mathcal{N}$ obtenue en augmentant la tribu produit avec les ensembles négligeables. On procède de la même manière pour construire la filtration équipant l'espace produit.

On peut vérifier alors que l'espace filtré ainsi construit satisfait les conditions usuelles.

3.3. Mise en œuvre

On considère ici un titre qui paye le montant $S(x,T) = S(x,0,T)$ à la date *T* pour l'âge *x* en 0, et on souhaite connaître la valeur en 0 (et plus généralement à toute date $0 \le t \le T$) d'un tel titre. On désigne par $P(t,T)$ le prix en *t* d'un zéro-coupon qui paye 1 en *T*. Cette

[19] Voir par exemple ce support.
[20] MOLLER [1998].
[21] Ces propriétés sont désignées sous le terme de « conditions usuelles ».

structure détermine un processus de taux court $r(t)$, via $r(t) = \lim_{T \to t} f(t,T)$, où $f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T)$ est la courbe de taux « forward » à la date *t*.

On introduit alors le « bon de capitalisation » dont la dynamique est définie par $dB(t) = r(t)B(t)dt$, ce qui est équivalent à $B(t) = B(0)\exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$. La théorie financière permet alors d'affirmer que la propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) est équivalente à l'existence d'une probabilité *Q* équivalente à *P* telle que $P(t,T) = E^Q\left[\frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t^f\right]$, ce qui traduit le fait que sous *Q* le prix actualisé du zéro-coupon est une martingale.

Si le prix $\pi(x,t,T)$ de l'actif $S(x,T)$ peut être mis sous la forme $\pi(x,t,T) = E^Q\left(\frac{B(t)}{B(T)} S(x,T) \middle| \mathcal{F}_t\right)$, avec *Q* une probabilité équivalente à *P*, alors le processus de prix du produit dérive de mortalité vérifie la condition d'AOA.

3.4. Couverture du risque de mortalité

Le risque de mortalité présente la caractéristique suivante : selon que le portefeuille est composé de contrats en cas de vie ou de contrats en cas de décès, l'impact d'un écart entre le taux de mortalité prévu et le taux de mortalité réalisé n'est pas identique. L'assureur de risques en cas de décès sera pénalisé par une sous-estimation de la mortalité, alors que la situation est inverse pour un assureur de risque en cas de vie.

Cette remarque conduit certains auteurs à proposer une approche dite de « couverture naturelle » du risque de mortalité, consistant à échanger des risques portant sur des portefeuilles en cas de décès et en cas de vie. Cette approche est présentée dans COX et LIN [2004].

4. Un modèle simple de mortalité stochastique

On dispose d'une table de mortalité fournie de manière non paramétrique *via* les taux de décès (q_x). Afin d'alléger les notations ont suppose que la table est une table du moment (les taux dépendent de l'âge seulement), mais tout ce qui suit s'écrit de la même manière avec une table prospective.

On veut intégrer dans le modèle une incertitude sur le niveau des taux de mortalité futurs ; pour cela suppose que le taux de mortalité à l'âge *x* l'année *t* peut s'écrire :

$$q_x^t = a_{x,t}\, q_x$$

Les variables aléatoires $a_{x,t}$ sont indépendantes lorsque *t* varie, et à *t* fixé on intègre une dépendance décroissante en fonction de l'écart entre les âges. Ce point sera précisé plus loin.

Il est naturel d'imposer la contrainte $E\left[a_{x,t}\right]=1$, de sorte que $E\left[q_x^t\right]=q_x$; afin de spécifier plus le modèle on fait l'hypothèse *ad hoc* que $\ln\left(a_{x,t}\right)$ est une variable normale de paramètres $\left(m_{x,t},\sigma_{x,t}^2\right)$; la relation $E\left[a_{x,t}\right]=1$ devient $\exp\left[m+\frac{\sigma^2}{2}\right]=1$, et donc la loi de $a_{x,t}$ ne dépend finalement que de $\sigma_{x,t}^2$, et $m_{x,t}=-\frac{\sigma_{x,t}^2}{2}$.

Une première méthode pour déterminer $\sigma_{x,t}^2$ est de faire un ajustement sur des données historiques, puis d'extrapoler le résultat en *t*.

Mais on peut aussi vouloir plutôt mesurer la sensibilité d'un engagement à une « unité » de volatilité dans les taux de décès. L'idée est alors de considérer le coefficient de variation $cv_{x,t}=\frac{\sigma\left[q_x^t\right]}{E\left[q_x^t\right]}$; on a $E\left[q_x^t\right]=q_x$ et $V\left[q_x^t\right]=q_x^2 V\left[a_{x,t}\right]$. Mais la variance d'une distribution log-normale est de la forme $V\left[a_{x,t}\right]=e^{2\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)}\left(e^{\sigma^2}-1\right)=e^{\sigma^2}-1$ puisque $m_{x,t}=-\frac{\sigma_{x,t}^2}{2}$.

On a donc finalement $cv_{x,t}=\sqrt{e^{\sigma_{x,t}^2}-1}$. On peut alors fixer ce coefficient arbitrairement, ce qui détermine le paramètre de variance.

Jusqu'à présent on a raisonné sans tenir compte de la dépendance en *x* à *t* fixé des $a_{x,t}$; on peut par exemple raisonner comme dans le modèle de Kimeldorf-Jones et considérer que le vecteur $\left(\ln\left(a_{x,t}\right)\right)$ est un vecteur gaussien avec pour les coefficients de la matrice Σ :

$$\Sigma_{xy}=\sigma_x\sigma_y\rho^{|x-y|}$$

avec un nouveau paramètre ρ décrivant le degré de corrélation de 2 termes consécutifs. On se ramène ainsi pour mesurer le risque systématique ainsi introduit à savoir simuler des variables aléatoires gaussien.

5. Références

AÏT-SAHALIA Y., KIMMEL R. [2002], « *Estimating affine multifactor term structure models using closed -form likelihood expansions* » Princeton University, Working Paper.

ARGESANU G. [2004], « *Risk analysis and hedging in incomplete markets* », PhD dissertation, Ohio State University.

BEELDERS O.,COLAROSSI D. [2004], « *Modelling Mortality Risk with Extreme Value Theory : The Case of Swiss Re's Mortality-Indexed Bonds* », GLOBAL ASSOCIATION OF RISK PROFESSIONALS

BIFFIS E. [2004], « *Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations* » Université Bocconi, Working Paper.

BIFFIS E., MILLOSSOVICH P. [2004], « *The fair value of guaranteed annuity options* » Université de Trieste, Working Paper

BOULEAU N. [2000], « *Processus stochastiques et applications* », Hermann

BREMAUD P. [1981], « *Point Processes and Queues - Martingale Dynamics* », Springer Verlag, New York.

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002], « *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables* », IME

CAIRNS A., BLAKE D., DOWD K. [2004], « *Pricing Frameworks for Securitization of Mortality Risk* », AFIR

CHENUT X., FRANTZ C., WALHIN J.F. [2003], « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death garantee », AFIR

COX S., LIN Y. [2004] « *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks* » AFIR

DAHL M. [2004] « *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts* ». Insurance: Mathematics and Economics, 35 (1), 113-136.

DENUIT M., MAGIS C., WALHIN F. [2004], « *La mortalité, un phénomène en pleine mutation: quelle solution pour le marché des rentes ?* »

HADERER M. [2003], « *Réassurance du risque de longévité* », ISFA, Mémoire d'actuaire.

KIMELDORF G.S, JONES D.A. [1967], « *Bayesian graduation* », TSA, XIX

LEE P.J. [2000], « *A General Framework for Stochastic Mortality and Investment Risks* » Heriot-Watt University, Working Paper

LE PAGE D. [2000], « *Risque de défaut : une approche par intensité* », ENSAE, Mémoire d'actuaire.

LUCIANO E., VIGNA E. [2005], « A note on stochastic survival probabilities and their calibration » ICER, Working Paper

MOLLER T. [1998], « *Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts* », ASTIN Bulletin 28, 17-47.

REVUZ D., YOR M. [1999], « *Continuous Martingales and Brownian Motion* ». Third edition. Springer Verlag, Berlin

ROLSKI T., SCHMIDILI H., SCHMIDT V., TEUGELS J. [1998], « *Stochastic processes for insurance and finance* », Wiley series in probability and statistics.

SCHRAGER D.F. [2004], « *Affine Stochastic Mortality* », Working Paper

SOININEN P. [1995], « *Stochastic variation of interest and mortality* », AFIR