$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbb{1}_{]t;\infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

ISFA GRANDE ÉCOLE D'ACTUARIAT ET DE GESTION DES RISQUES
INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

Construction et utilisation de scénarios économiques dans le contexte de Solvabilité 2

Version 5.9

Février 2025

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

Préambule

La projection des facteurs de risque économiques et financiers est un élément central des analyses prospectives réalisées par les assureurs vie, tant pour le calcul des provisions que pour les choix d'allocation et la gestion des risques financiers.

Cette projection est en pratique réalisée *via* des « générateurs de scénarios économiques » (GSE), qui alimentent les modèles de calcul de la valeur économique des actifs et des passifs et d'analyse de la distribution de cette valeur.

Le calcul des « valeurs économiques » repose sur l'hypothèse centrale d'absence d'opportunité d'arbitrage qui conduit à modéliser les facteurs de risque sous une probabilité risque neutre, alors que l'analyse de la distribution de ces valeurs requiert la projection de ces mêmes facteurs sous la probabilité historique.

L'actuaire doit donc manipuler des représentations distinctes des mêmes facteurs de risque, ce qui est source de complexité.

Préambule

Pour calculer les *best estimate* des contrats d'épargne et le SCR dans le cadre du modèle standard de Solvabilité 2 il faut être capable :

- de projeter les prix des différents actifs dans le futur ;

- de recalculer la variation de prix d'un actif à la date 0 lors d'un choc appliqué à un facteur de risque sous-jacent (valeur des actions, niveau des taux, *etc*.).

Pour les actifs de base (actions, obligations souveraines et privées essentiellement) le générateur de scénarios économiques (GSE) apporte la réponse au premier point et les calculs du second point sont immédiats.

Pour les actifs dérivés (obligations convertibles, options diverses, *etc*.) il faut disposer de modèles pour recalculer des prix en fonction du niveau des facteurs de risque sous-jacent (action, taux, crédit, liquidité) à toute date (en 0 et dans le futur), soit *via* des formules directes, soit au travers de sensibilités.

Préambule

Dans le cadre de l'ORSA, une fois déterminées les provisions (« valeur économique » des engagements), il faut projeter le bilan à un an pour évaluer le niveau de la marge de solvabilité minimale requise pour assurer la suffisance des fonds propres à un an avec une probabilité au moins égale à 99,5 % (ou à des seuils plus faibles dans le cadre de l'ORSA).

Un modèle actif / passif utilisé en assurance vie doit être en mesure de prendre en compte ces deux aspects, ce qui implique en particulier :

- de devoir calculer des prix (actifs et provisions) ;
- de devoir calculer des quantiles de la distribution de la NAV (SCR).

La prise en compte conjointe de ces deux éléments dans le cadre d'un modèle interne ou de l'ORSA est complexe car elle conduit à manipuler les facteurs de risque pour deux usages très différents.

Cela conduit à devoir construire des générateurs de scénarios économiques (GSE).

Préambule

Dans le cadre d'une modélisation globale dont l'ambition est de fournir des distributions de valeur économique, on est donc formellement conduit à utiliser une approche à deux niveaux :

- la construction d'une fonctionnelle *g* fournissant le vecteur des prix en fonction des variables d'état *Y* à la date du calcul, $\pi_0 = g\left(Y_0\right)$

- la construction d'une dynamique pour les facteurs de risque, Y_t

On peut alors déterminer des prix à n'importe quelle date *via* :

$$\pi_t = g\left(Y_t\right)$$

La construction de la fonctionnelle *g* s'appuie sur les hypothèses classiques de la finance de marché et notamment l'AOA qui conduit à construire des probabilités « risque neutre » qui rendent les processus de prix actualisés martingales.

La construction de la dynamique de *Y* est un problème d'économétrie.

Préambule

Par exemple dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel de type Vasicek, on a les modèles suivants pour le facteur :

Projections	Calculs de prix
$dY_t = dr_t = a\left(b - r_t\right)dt + \sigma\, dW_t$	$dr_t = a\left(b_\lambda - r_t\right)dt + \sigma\, dW_t^Q$
	$b_\lambda = b - \dfrac{\lambda\sigma}{a} \qquad W_t^Q = W_t + \lambda \times t$

et la fonctionnelle d'évaluation est :

$$g\left(r_t\right) = P\left(r_t, T-t\right) = \mathbf{exp}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\left(r_\infty - r_t\right) - \left(T-t\right)r_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)$$

avec $r_\infty = b_\lambda - \dfrac{\sigma^2}{2a^2}$.

On observe ici que le lien entre les 2 représentations s'effectue *via* le paramètre λ.
NB : le paramètre σ est théoriquement invariant.

Préambule

Qu'est-ce qu'un générateur de scénarios économique (GSE) ?

Un GSE est un outil qui permet de projeter des facteurs de risque économiques et financiers.

Le lien entre les facteurs de risque et les prix d'actifs peut être varier :

- pour les actions et l'immobilier, le facteur modélisé est directement le prix de l'actif ;

- pour les obligations, on modélise en général un nombre limité de facteurs explicatifs, typiquement le taux court.

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'usage qui va être fait du GSE et conduira à utiliser les probabilités historique et risque neutre en fonction du contexte.

Préambule

Où trouver un GSE ?

La société Barrie & Hibbert, propriété depuis 2011 de Moody's Analytics, est le plus important fournisseur de GSE sur le marché français.

Il existe également quelques solutions développées par des sociétés de conseil ou des éditeurs de logiciels ALM, mais elles sont marginales.

De nombreux acteurs font le choix de développer eux-mêmes leurs générateurs, ensuite intégrés dans les outils ALM classiques (Moses, Prophet, Moody's Analytics – ex Fermat, etc.).

Dans le cadre de la justification auprès de l'ACPR des modèles de calcul du *best estimate*, l'entité doit maîtriser cet outil ; la construction en interne est de ce point de vue un moyen efficace de respecter cette contrainte.

Préambule

Les facteurs de risque typiquement intégrés sont les suivants :

- prix des actions ;
- taux court ;
- processus de défaut des contreparties obligataires ;
- processus de liquidité ;
- prix des actifs immobiliers ;
- inflation.

D'autres facteurs économiques peuvent être pris en compte, par exemple le chômage.

Les choix de modélisation sont adaptés à l'objectif poursuivi : calcul de prix ou analyse de la distribution du facteur.

Préambule

Construire un GSE est une tâche délicate car les prix d'actifs financiers sont structurellement instables, comme le montre une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur. D'après l'analyse classique de la valeur fondamentale, on a en fixant un horizon *n* :

$$P_{t,n} = \sum_{h=1}^{n} \frac{E_t\left(D_{t+h}\right)}{\left(1+r\right)^h} + \frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}$$

La valeur de la société est alors obtenue en faisant tendre *n* vers l'infini, sous l'hypothèse que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n} = 0$$

et on trouve le résultat usuel définissant la valeur comme la somme actualisée des bénéfices futurs :

$$P_t = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{E_t\left(D_{t+h}\right)}{\left(1+r\right)^h}$$

Préambule

Mais l'hypothèse que l'espérance du prix actualisé tend vers 0 peut apparaître discutable après une analyse du comportement des investisseurs. En effet, on observe de nombreuses grandeurs économiques (richesse, chiffres d'affaires, volumes de ventes, *etc*.) dont la distribution est proche d'une distribution de Pareto (*cf*. Zajdenweber [2000]). Dans ce cas on a une relation de la forme :

$$E_t\left(P_{t+1}\right) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} P_t$$

et :

$$\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n} = \left(\frac{1+\dfrac{1}{\alpha-1}}{1+r}\right)^n P_t$$

Le comportement de la valeur va alors être très différent en fonction de la position de la raison de la progression géométrique par rapport à 1.

Préambule

Trois cas sont possibles :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=P_t \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=+\infty$$

Ainsi, lorsque les distributions sont parétiennes, l'incertitude sur la valeur devient très grande.

En pratique les modèles doivent donc intégrer cette incertitude sous peine de sous-estimer les risques (*cf*. WALTER et *al*. [2008]).

Par ailleurs, plus les marchés sont interconnectés plus ils seront globalement instables (on peut sur ce sujet se reporter aux travaux d'A. Orléan) : cela conduit à la présence de dépendance accrue en situation de crise.

Sommaire

1. ***Best estimate* et SCR**
2. Les composants du GSE
3. Estimation et calibrage
4. Validation
5. Quelques points d'attention
6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

1.1. Le calcul du *best estimate*

Schématiquement, le calcul d'un *best estimate* en assurance vie (plus généralement en présence d'interactions actif / passif) conduit à devoir évaluer :

$$\Lambda = \sum_{j \geq 0} \frac{F_j}{\left(1 + R_j\right)^j} \longrightarrow BEL = E^{P^A \otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

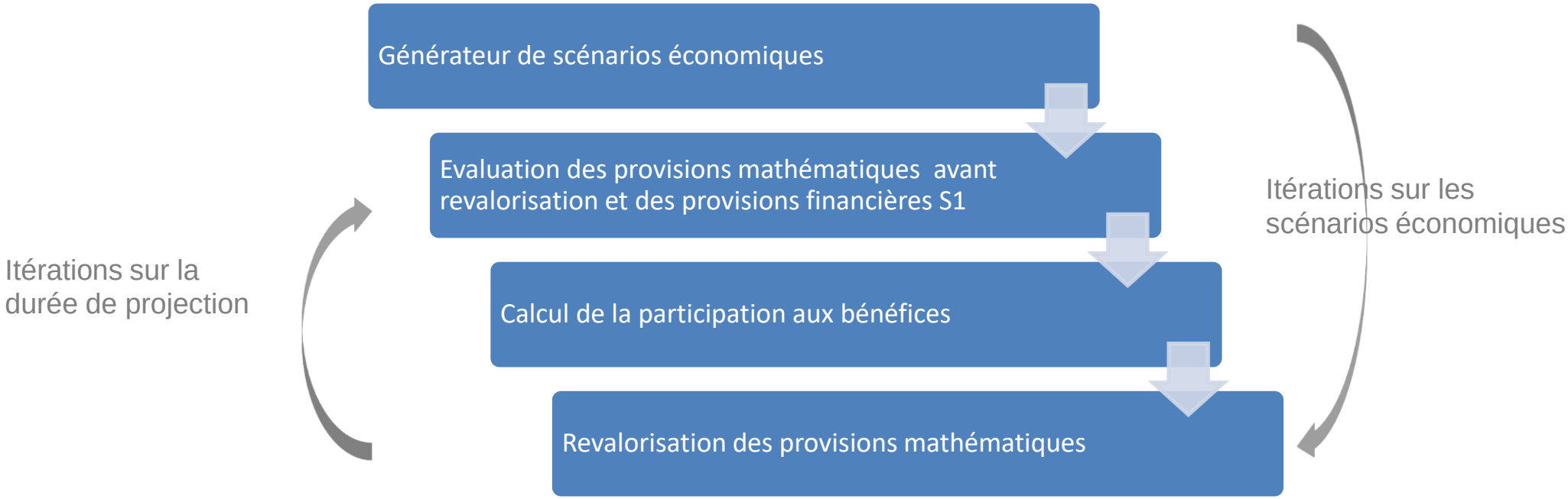
ce qui en pratique s'effectue (souvent) par simulation :

$$BEL = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sum_{a=1}^{A} \frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1 + R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

La difficulté principale est le calcul du terme $Flux_{t,n,a}$ du fait des interactions entre le rendement brut de l'actif et les comptes sociaux.

1.1. Le calcul du *best estimate*

Le calcul des flux, puis du *best estimate* qui s'en déduit, est effectué dans le cadre suivant (voir le package SimBEL pour un exemple d'implémentation) :



Dans ce cadre le générateur est utilisé pour calculer des prix d'actifs en AOA et fournir une évaluation du passif cohérente avec des prix de marché.

1.1. Le calcul du *best estimate*

Une remarque

Les règles incluses dans le modèle de projection s'appuient souvent sur des comparaisons de taux pour, par exemple, décider de la réalisation de plus ou moins-values latentes.

Mais dans la construction de ces règles de décision, des niveaux de taux extrêmes n'ont en général pas été pris en compte, car considérés comme impossibles. Il s'agit donc d'adapter le modèle pour prendre en compte des situations très hypothétiques dont la probabilité réelle d'occurrence est négligeable.

On conçoit que la crédibilité d'une telle règle soit inévitablement discutable.

Pour un plus ample développement sur ce point, voir

http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2013/05/engagement-best-estimate-dun-contrat-d%C3%A9pargne-en-.html

1.1. Le calcul du *best estimate*

Les expressions précédentes se simplifient en l'absence d'interactions actif / passif :

$$BEL = E^{P^A \otimes Q^F}\left(\sum_{j\geq 0}\frac{F_j}{\left(1+R_j\right)^j}\right) = \sum_{j\geq 0} E^{Q^F}\left(\frac{1}{\left(1+R_j\right)^j}\right) E^{P^A}\left(F_j\right) = \sum_{j\geq 0} P\left(0,j\right) E^{P^A}\left(F_j\right)$$

avec $P\left(0,t\right) = E^{Q^f}\left(\mathbf{exp}\left(-\int_0^t r\left(u\right)du\right)\right)$ le prix d'un ZC sans risque.

NB : on ne peut actualiser avec le ZC qu'en l'absence d'interactions actif / passif.

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Le schéma de calcul d'un *best estimate* requiert *a priori* la simulation d'un nombre élevé de trajectoires pour voir converger les estimateurs empiriques vers leurs valeurs théoriques.

$$BEL = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{a=1}^{A}\frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1+R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} E^{P^A\otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

Soit alors un contrat UC avec un sous-jacent modélisé par un processus log-normal et des taux modélisés par un modèle de Vasicek, de sorte que :

$$S\left(t\right) = S_0\,\mathbf{exp}\left(\int_0^t\left(r\left(u\right)-\frac{\sigma^2}{2}\right)du + \sigma B\left(t\right)\right) \qquad dr\left(t\right) = k\left(\theta - r\left(t\right)\right)dt + \sigma_r dB_r\left(t\right)$$

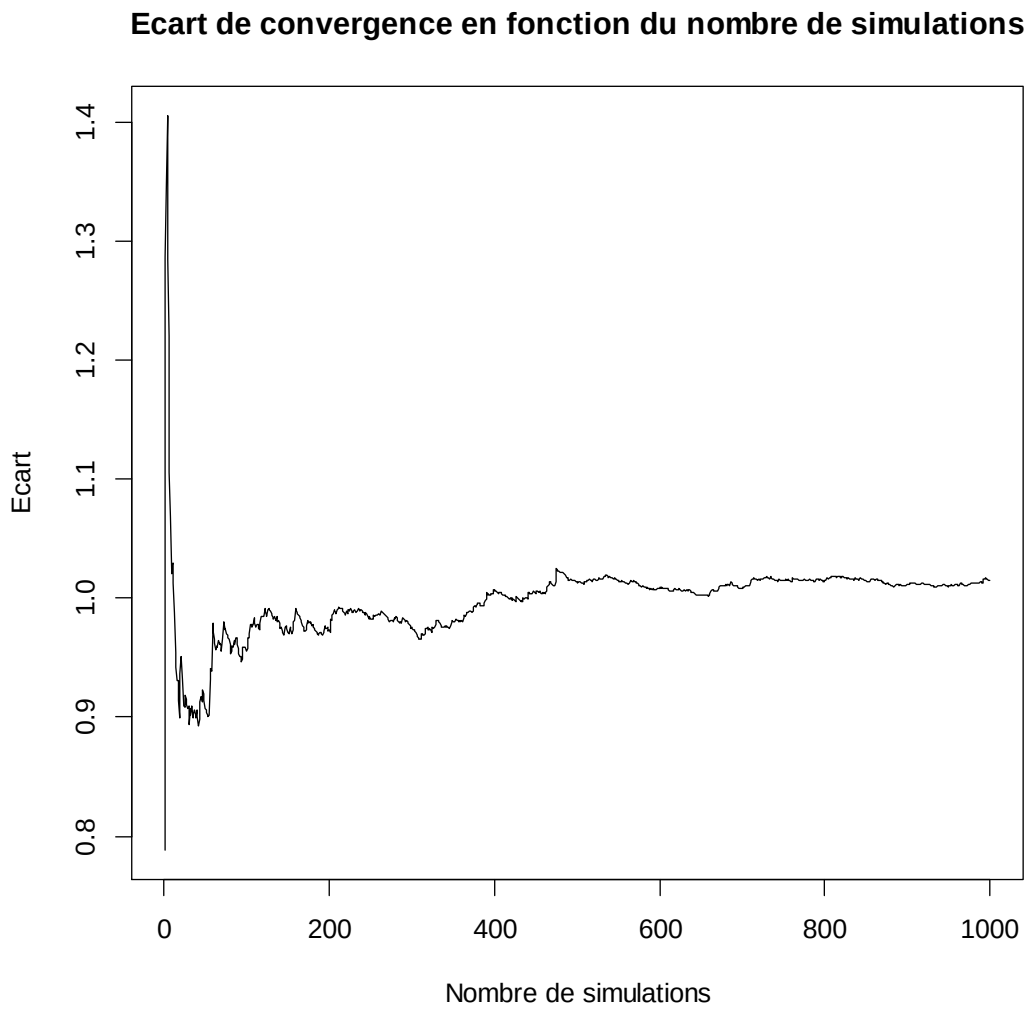
Le contrat est de durée 10 ans, entièrement racheté au terme. Dans l'intervalle, le taux de rachat structurel est de 2 % et des rachats conjoncturels à hauteur de 5 % viennent s'ajouter lorsque la valeur de la part est inférieure à la valeur initiale.

1.1. Le calcul du *best estimate*

La convergence du *best estimate* empirique vers sa valeur théorique est lente et, après 1000 tirages, un écart d'environ 1,5 % subsiste. Cet écart conduit à un écart de l'ordre de 15 % sur les fonds propres…

Pour diviser cet écart par 10 il faut multiplier le nombre de tirages par 100.

Dès lors il peut être utile (indispensable) d'optimiser ce schéma (*cf*. par exemple NTEUKAM et PLANCHET [2012]).

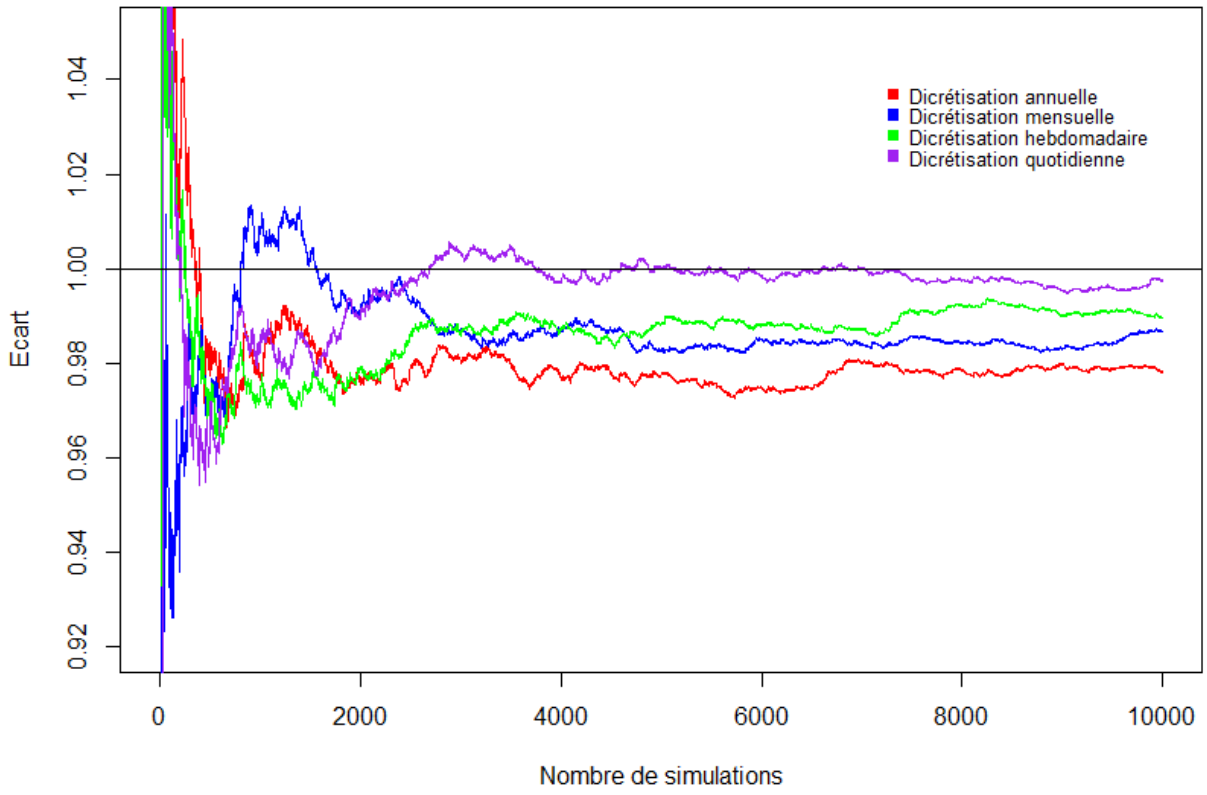


Remarque : *cf*. BAUER et *al*. [2010] sur la question des budgets de simulation.

1.1. Le calcul du *best estimate*

La convergence est également impactée par le choix de la discrétisation des processus sous-jacents.

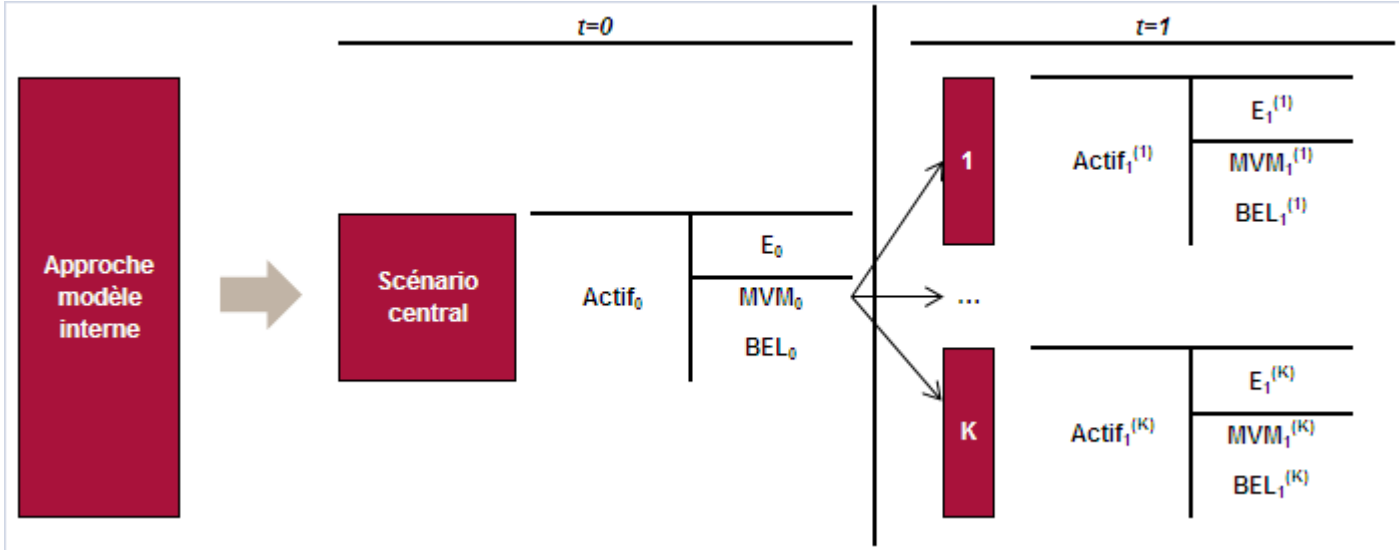
Il faut distinguer le pas de projection pour les flux (en général annuel) et le pas de discrétisation utilisé pour approcher les facteurs d'actualisation (*cf.* IFERGAN [2013]).



En pratique dans les modèles de projection utilisés pour calculer un *best estimate*, on peut considérer que l'erreur d'échantillonnage est de l'ordre de 0,50 %.

1.2. Le calcul du SCR

Le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (*cf*. GUIBERT et *al*. [2010]) :



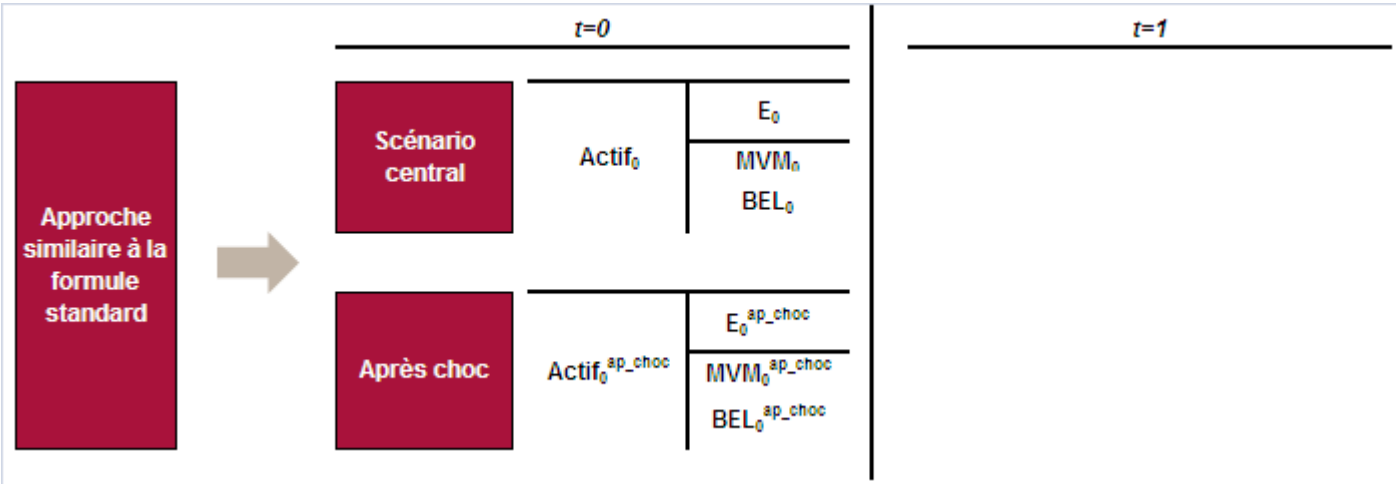
La projection des facteurs de risque sur un an est effectuée en probabilité historique et le SCR est solution de $P\left(E_1 < 0 \middle| E_0 = x\right) \leq 0{,}5\%$

souvent approché en pratique par

$$SCR \approx E_0 - VaR_{0,5\%}\left(\delta(1) \times E_1\right) \approx E_0 - P(0{,}1) \times VaR_{0,5\%}\left(E_1\right)$$

1.2. Le calcul du SCR

La démarche est simplifiée dans le cadre du modèle standard :



Toutefois on perd alors le lien, et donc la cohérence, entre le comportement du GSE utilisé pour le calcul du BEL et le niveau des chocs (sensés être associés au quantile à 99,5 % de la distribution du facteur de risque). Cette restriction doit toutefois être relativisée, les deux visions étant sous des probabilités différentes.

Sommaire

1. *Best estimate* et SCR
2. **Les composants du GSE**
3. Estimation et calibrage
4. Validation
5. Quelques pistes de réflexion
6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

2. Les composants du GSE

On effectue ici une rapide revue des composants de base d'un GSE le plus simple possible respectant les contraintes de base imposées par le cadre Solvabilité 2.

Compte tenu de leur importance dans l'allocation d'actif, les risques associés aux produits obligataires nécessitent une certaine attention.

L'utilisation première du GSE décrit ici est, à titre d'illustration, le calcul des provisions dans un cadre *best estimate* pour des contrats d'épargne dans sa version « risque neutre » et l'ORSA dans sa version « historique ».

Le GSE présenté ici est implémenté dans le *package* ESG de R :

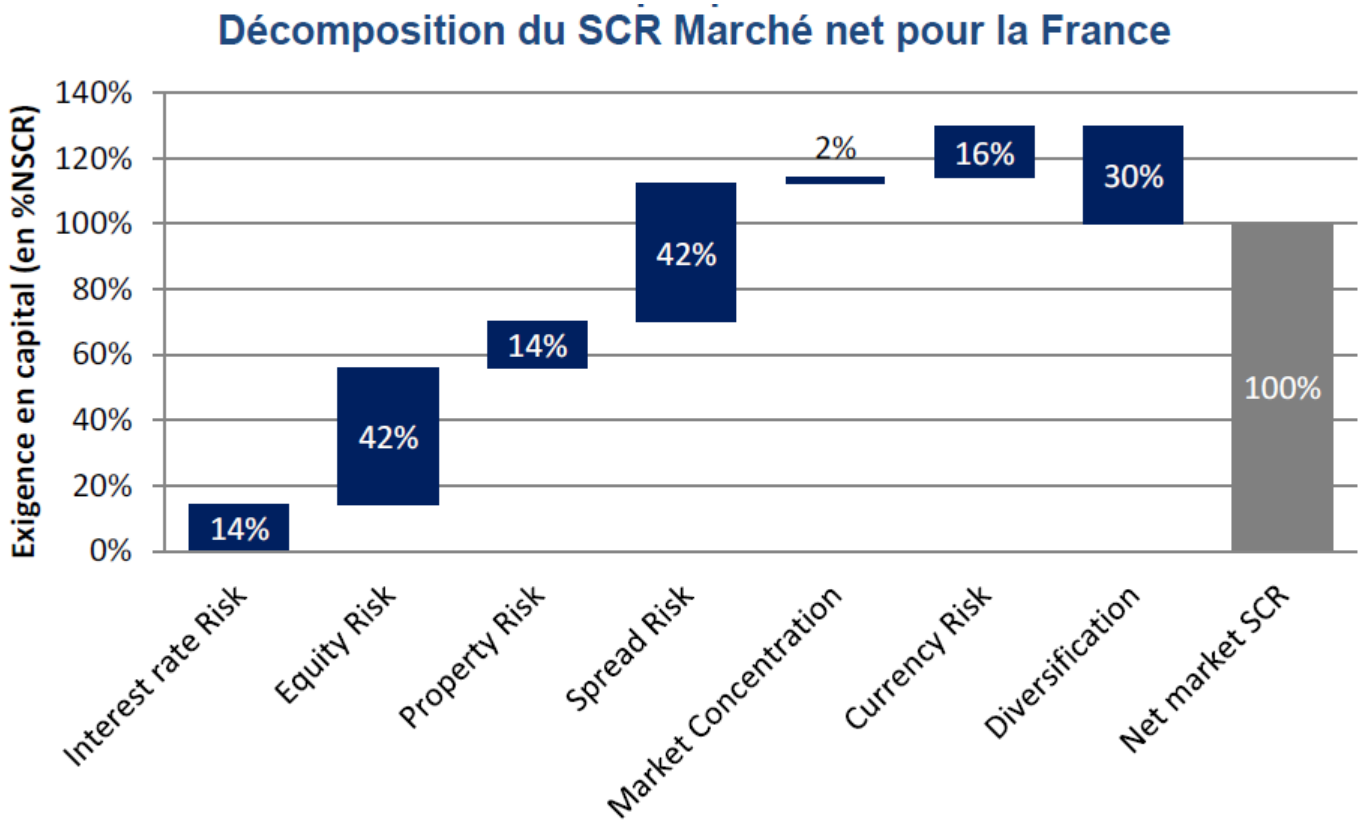
http://cran.r-project.org/web/packages/ESG/index.html

Des exemple d'utilisation sont proposés ici. Les modalités détaillées de construction et de choix d'un GSE risque-neutre sont analysées dans ARMEL et PLANCHET [2018], [2019].

2. Les composants du GSE

Les risques à modéliser dépendent de la structure du portefeuille de l'entité, mais le poids des modules de la formule standard fournit une indication sur les enjeux (*cf*. ACPR [2015a]) :

Le SCR de marché représente 78 % du BSCR (mais le SCR net est de l'ordre de 44 % du BSCR).



2. Les composants du GSE

Les contraintes de base que doit satisfaire un tel GSE sont les suivantes :

Pour les calculs de valeur économique :

- utiliser la courbe des taux ZC initiale comme paramètre (ex. : Hull & White à un facteur, plus généralement HJM) ;

- permettre la prise en compte du risque de taux, du risque de *spread*, du risque action et du risque immobilier ;

- le cas échéant, prendre en compte l'inflation ;

- être cohérent avec les prix observés ; pour la volatilité cela conduit à utiliser une volatilité implicite, mais avec quelle formule ? (B&S ou une formule cohérente avec le modèle retenu : *cf*. les ONC) ;

Pour l'ALM et l'ORSA

- être justifiable au regard de la description d'une situation économique.

2. Les composants du GSE

Exemple

Sur la base d'une allocation d'actifs classique en assurance-vie et en retenant le démembrement des produits structurés (qui fait typiquement intervenir des actions, des produits de taux ainsi que des dérivés actions et taux), 6 facteurs de risques sont à modéliser :

- la rentabilité du portefeuille action et des dérivés à sous-jacent action ;
- la rentabilité du portefeuille immobilier ;
- le taux court nominal ;
- la structure par termes des taux d'intérêts ;
- le taux d'inflation ;
- le risque de défaut.

2. Les composants du GSE

2.1. Le risque de taux

La modélisation de la structure par termes des taux d'intérêt est un élément central de la pertinence des évaluations effectuées ; la notion de « taux sans risque » peut être quantifiée par plusieurs références :

- la courbe de référence publiée par l'EIOPA, établie sur la base de taux swaps ;

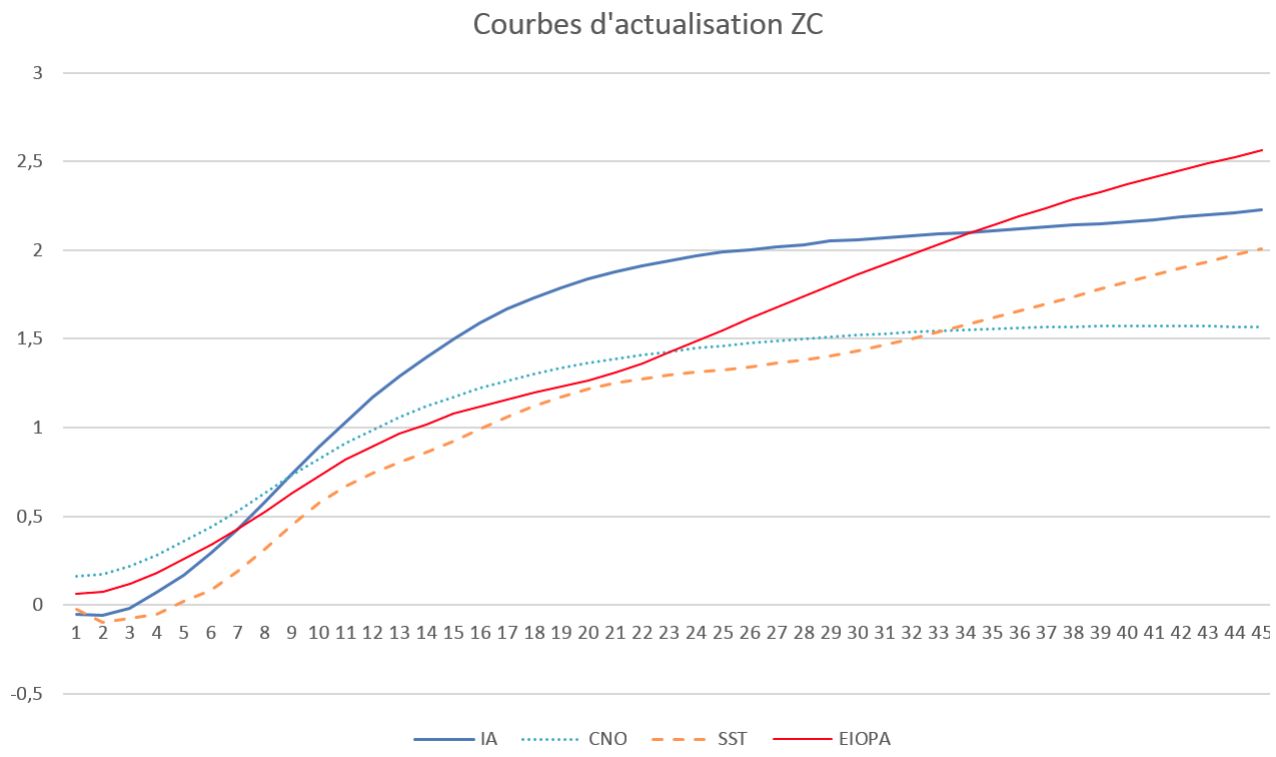
- la courbe de l'Institut des Actuaires, construite sur la base d'émissions obligataires d'État (OAT) ;

- celle du Comité de Normalisation Obligataire, destinée a priori à être utilisée dans le cadre des normes IFRS et construite à partir de données issues des taux swaps ;

- la courbe publiée par la FINMA dans le cadre du SST, construite sur la base d'émissions obligataires de la Confédération.

2.1. Le risque de taux

La forme et le niveau de ces différentes références diffèrent sensiblement, comme l'illustrent les courbes obtenues au 31/12/2014 :



2.1. Le risque de taux

Le *spread* entre émissions d'État et *swaps* est, à fin 2014, de l'ordre de 40 bp à 30 ans (les taux swaps à 30 ans étant inférieurs aux taux des OAT. Le *spread* est inversé pour les maturités courtes.

Les courbes EIOPA et CNO sont toutes deux construites sur des taux de *swaps*, ce qui se traduit par des courbes parallèles jusqu'à la maturité de 20 ans. Ensuite les deux courbes divergent du fait de choix d'extrapolation différents.

L'impact sur l'évaluation des engagements est important ; pour un passif de retraite « classique », la valeur actualisée des flux augmente de 4 % en passant de la courbe IA à la courbe CNO, de 4 % avec la courbe EIOPA et de 9 % en utilisant la courbe SST.

2. Les composants du GSE

2.1. Le risque de taux

Le modèle factoriel le plus simple permettant d'utiliser en entrée la courbe des taux initiale est le modèle de Hull et White [1990], qui est une spécification particulière du cadre proposée par HJM (HEATH et *al*. [1990]) et repose sur :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-k(T-t)}$$

On conserve dans ce modèle un taux court markovien et des prix de ZC log-normaux. En pratique les points suivants doivent être considérés :

- le lien avec le modèle « actions » ;
- l'estimation des paramètres ;
- la mise en œuvre par simulation.

La courbe des taux initiale doit préalablement être construite et cette étape est complexe.

Cf. : http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2F9/$FILE/Taux.pdf?OpenElement

2.1. Le risque de taux

Lien avec le modèle « actions »

Le taux court étant variable, le prix des options dans le modèle de B&S associé s'en trouve affecté.

En théorie, il convient d'adapter les formules d'évaluation des options pour le calcul de la volatilité implicite (ou le provisionnement de garanties plancher) pour en tenir compte :

$$C(0,T) = S \times N(d_1) - K \times P(0,T) \times N(d_2)$$

avec $d_{1/2} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{K \times P(0,T)}\right) \pm \dfrac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}$ et $\tau = \int_0^T \left(\sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_s\sigma_P(u,T) + \sigma_s^2\right) du$

Ceci n'est toutefois que rarement fait.

2.1. Le risque de taux

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres de ce modèle est délicate (*cf*. ROGERS [1995]). Deux approches sont envisageables :

- l'utilisation de dérivés de taux pour lesquels on dispose d'une formule fermée dans le modèle de Vasicek généralisé, en cherchant les paramètres qui minimisent un écart quadratique avec des prix observés pour ces dérivés.

- l'utilisation de la vision historique du modèle. En effet, on peut associer au modèle de Vasicek généralisé une dynamique du taux court dans l'univers historique. Les paramètres peuvent alors en être estimés par régression. De plus les paramètres k et σ sont (théoriquement) identiques sous les deux mesures.

Seule la première approche est toutefois justifiable dans un cadre imposant la cohérence avec des valeurs de marché du fait de la divergence observée en pratique entre volatilités historique et implicite.

2.1. Le risque de taux

Estimation des paramètres

Au surplus, le modèle nécessite le calibrage de la courbe des taux *forward* instantanés, qui ne sont pas observables. On utilise en général le lien avec les taux ZC

$$R(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,u)\,du \approx \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} f(0,k)$$

qui conduit à l'approximation

$$f(0,s) \approx -\frac{\ln\left(P\left(0,s^+\right)\right) - \ln\left(P(0,s)\right)}{s^+ - s}$$

Une alternative possible est de construire un ajustement paramétrique de la courbe des taux.

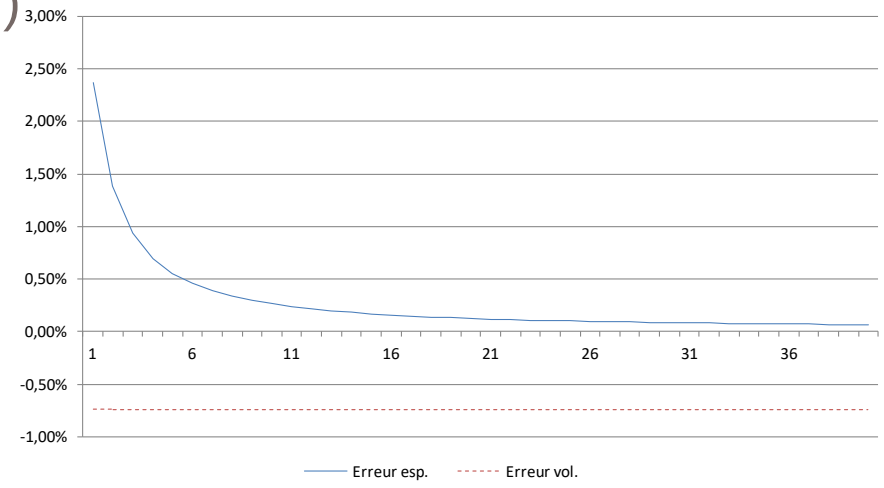
2.1. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

Cette mise en œuvre nécessite un peu d'attention :

- la discrétisation doit être effectuée proprement (discrétisation exacte si possible, ou correction des biais) ;

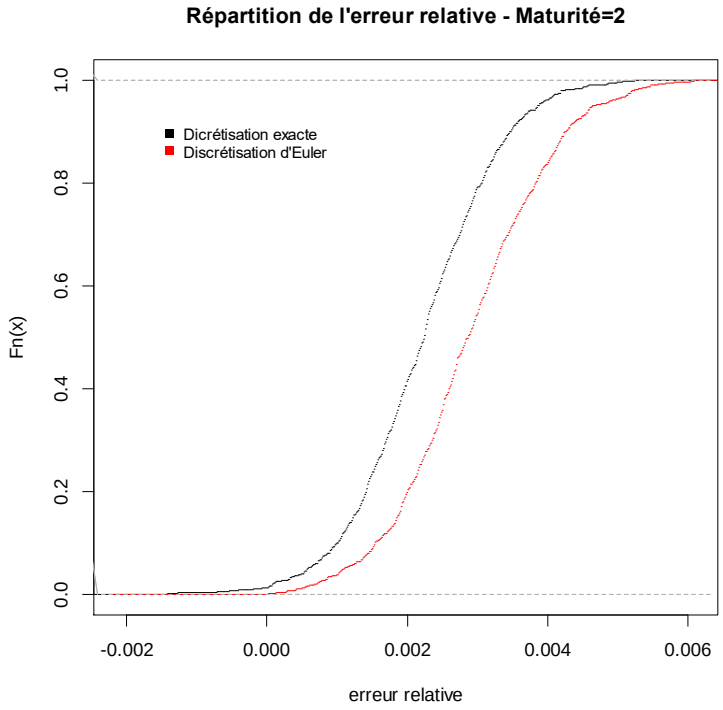
- le nombre de simulations à réaliser pour retrouver les caractéristiques théoriques de la distribution du prix d'un ZC est élevé ; par exemple avec 10000 réalisations du taux court on a pour **ln**(*P*(1,T))

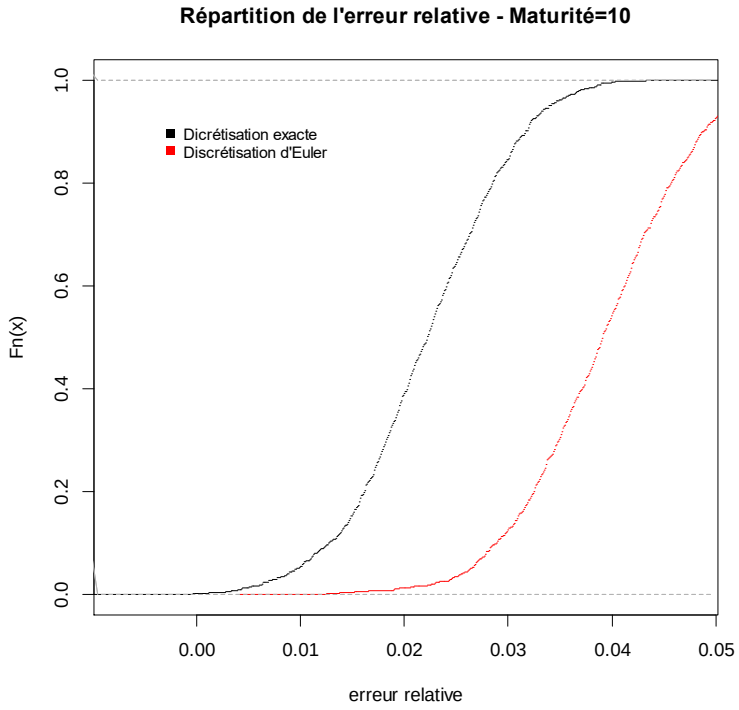


2.1. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

La discrétisation induit des biais et, d'autre part, le nombre de simulations pour obtenir un niveau de précision fixé est croissant en fonction de la maturité du ZC ; en fixant par exemple ce nombre à 10 000 on trouve :





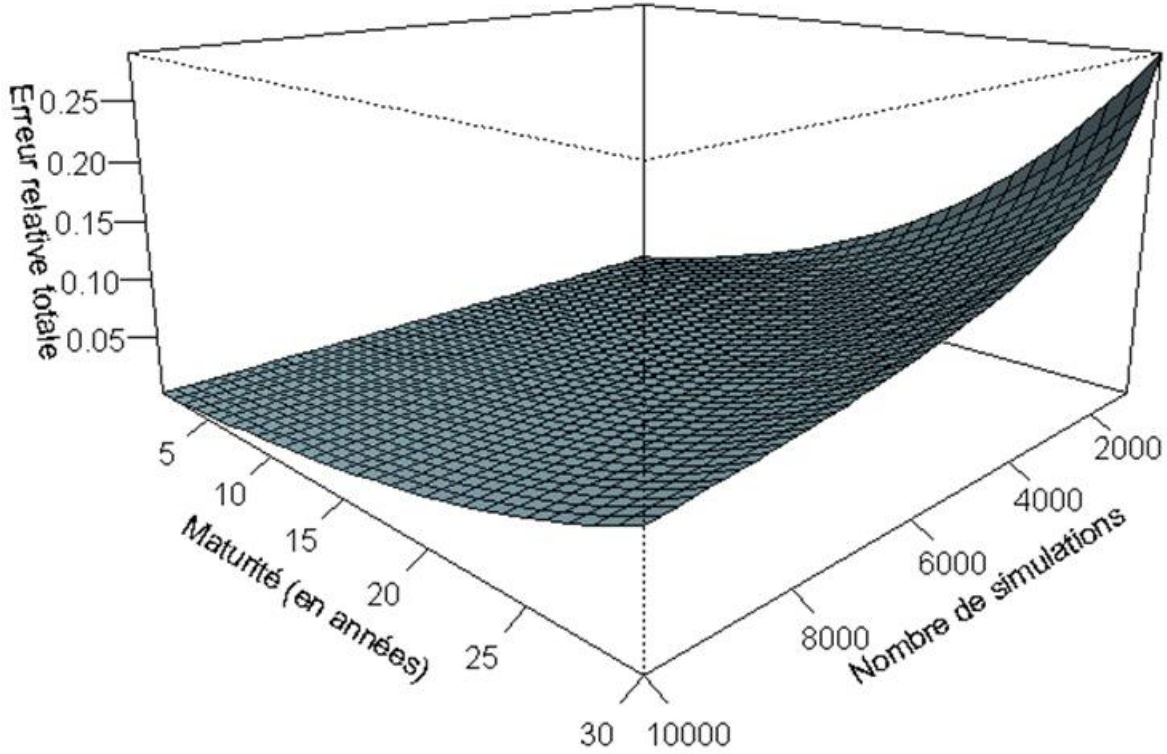
2.1. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

L'erreur d'estimation associée au calcul par simulation du prix d'un ZC a en pratique l'allure suivante :

On peut en retenir qu'approcher le prix d'un unique ZC par simulation n'est pas simple.

La convergence pour ce type d'actif est plus lente que pour des flux plus complexes tels que ceux d'un contrat d'épargne.



2.1. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

La discrétisation d'Euler du processus de taux court dans le modèle H&W conduit ainsi à :

$$r_\delta(n\delta) = f(0,n\delta) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(1 - e^{-kn\delta}\right)^2 + \sigma\sqrt{\delta}e^{-kn\delta}\sum_{i=1}^{n} e^{+k(i-1)\delta}\varepsilon_i$$

Cette discrétisation n'introduit pas de biais sur l'espérance, mais :

$$V\left(r_\delta(n\delta)\right) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kn\delta}\right) \times \frac{2\times k\times\delta}{e^{2k\delta}-1} = V\left(r(n\delta)\right) \times \frac{2\times k\times\delta}{e^{2k\delta}-1}$$

La constante $c_\delta = \frac{2\times k\times\delta}{e^{2k\delta}-1}$ tend vers 1 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, mais peut être en pratique pénalisante avec des pas annuels ou mensuels.

Il est alors nécessaire de corriger le biais (directement, avec un schéma de Milstein, avec une discrétisation exacte, *etc*.).

2.1. Le risque de taux

Construction de la courbe initiale

En amont de l'estimation d'un modèle il est nécessaire de construire la courbe des taux ZC initiale. Parmi les nombreux modèles proposés dans la littérature, le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]) est souvent utilisé de par sa bonne flexibilité et sa facilité de mise en œuvre.

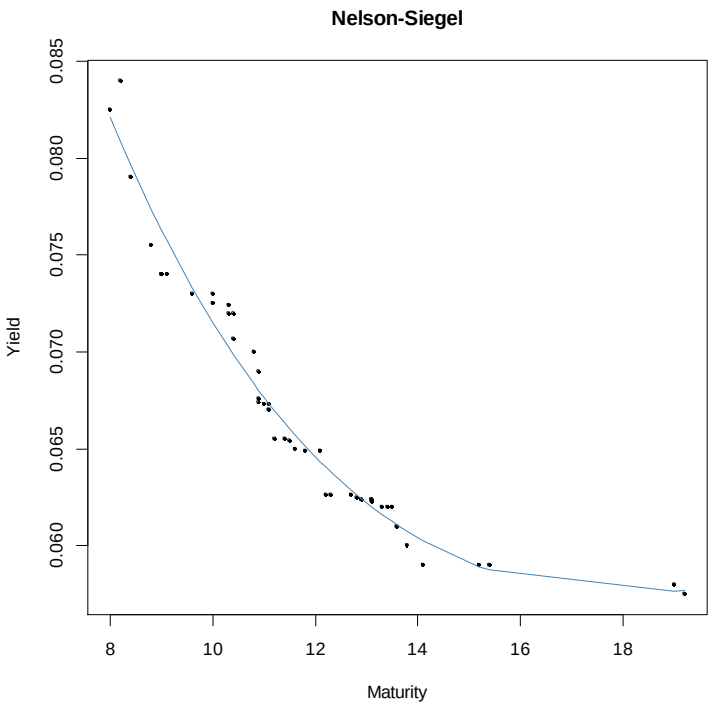
Le taux à terme instantané s'écrit (avec les notations de RONCALLI [1998]) dans ce modèle :

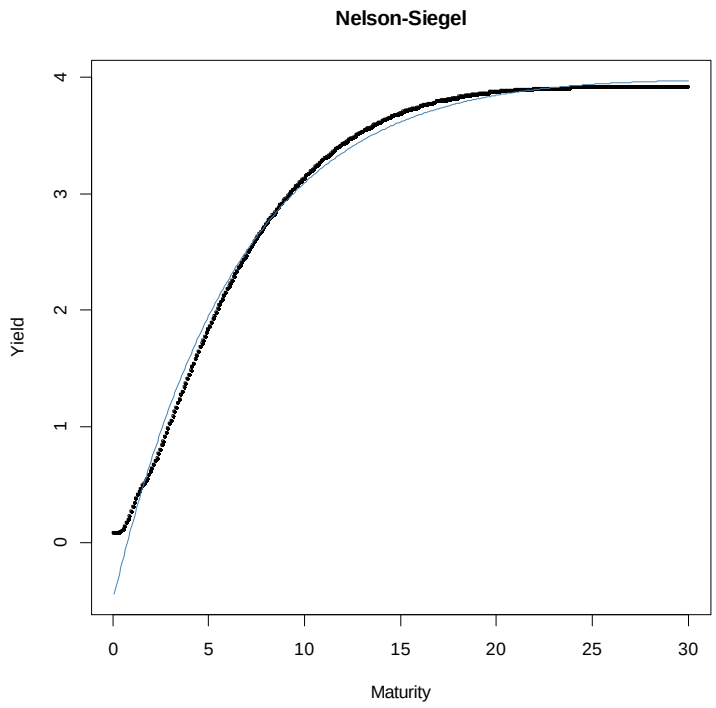
$$f(t,T) = \mu_1 + \mu_2 \,\mathbf{exp}\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{T-t}{\tau_1} \mathbf{exp}\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)$$

2.1. Le risque de taux

Construction de la courbe initiale

Ce modèle permet la prise en compte de différentes formes de courbes, par exemple ici la courbe des taux de l'Institut des Actuaires au 31/05/2012 (droite) ou des taux d'obligations *corporate* (gauche) :





2.1. Le risque de taux

De nombreux autres modèles ont été proposés pour modéliser la courbe des taux. On peut notamment citer ici (*cf*. RACICOT et THÉORÊT [2006]) :

- le modèle CIR étendu, qui ne permet pas l'apparition de taux négatifs, et est d'une complexité mathématique significative :

$$dr_t = a(t)\big(b(t) - r_t\big)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

- le modèle de Black & Karasinski :

$$d\ln(r_t) = a(t)\big(b(t) - \ln(r_t)\big)dt + \sigma_t\,dW_t$$

- les modèles de marché (BGM), qui s'appuient sur des données observables (et non sur la courbe des taux *forward* instantanée, inobservable).

2.1. Le risque de taux

Projection de la courbe initiale

Un modèle de référence pour la projection de la courbe de taux est le le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]). Le taux zéro-coupon se décompose par hypothèse selon :

$$R(t,\tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1-\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1-\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right)$$

$$R(t,\tau) = r_0(t)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t)\left(1-\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

Ce modèle est un cas particulier de modèle de taux affine (*cf*. CHRISTENSEN et *al*.)

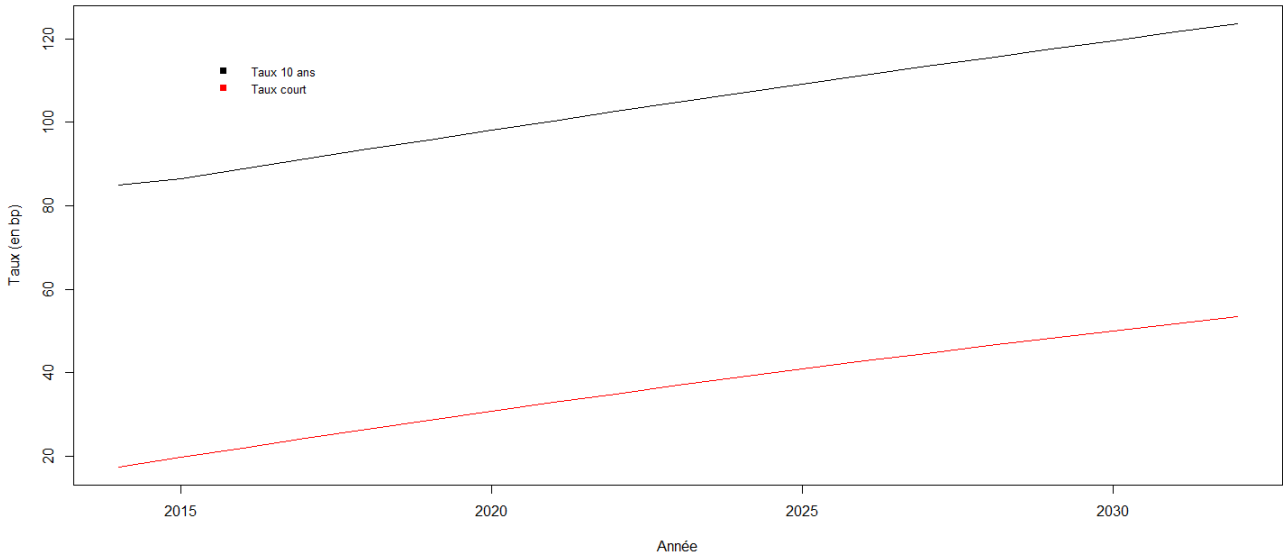
2.1. Le risque de taux

Projection de la courbe initiale

Une fois le modèle choisit, il s'agit de le paramétrer à partir d'un historique. Les choix effectués à ce niveau ont un impact fort sur les résultats obtenus.

Avec un ajustement sur les 50 premières années de la courbe, on trouve ainsi :

Le taux 10 ans passe ainsi de 0,85 % à fin 2014 à 1,24 % à fin 2032.

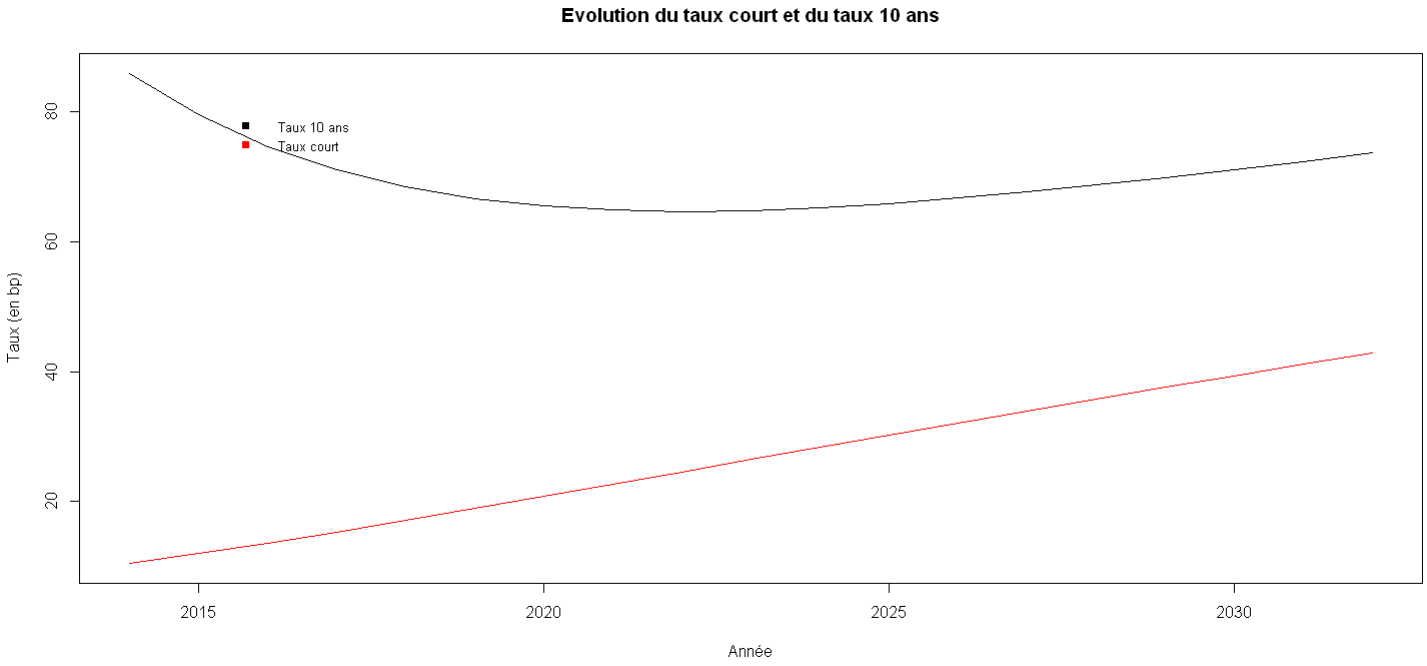


2.1. Le risque de taux

Projection de la courbe initiale

En considérant les 150 maturités disponibles, on aboutit à un comportement très différent :

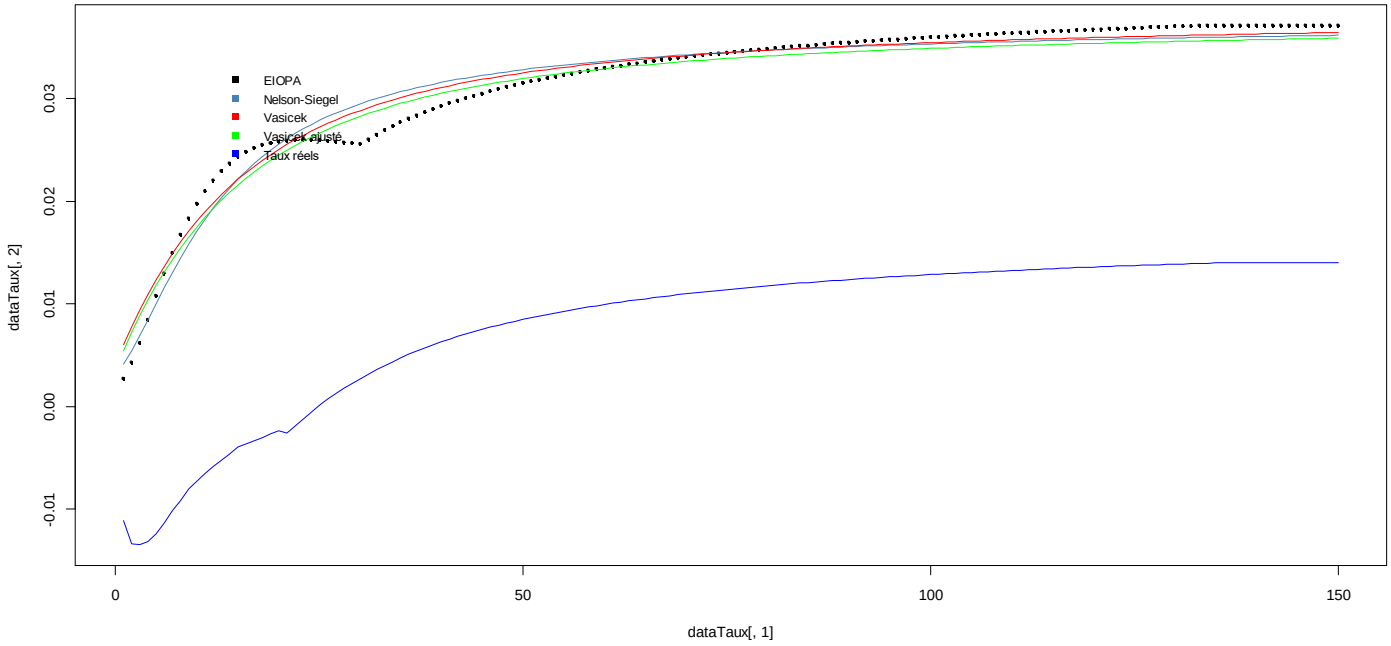
Le taux 10 ans passe ici de 0,85 % à fin 2014 à 0,80 % à fin 2032 avec une période de taux très bas entre les 2 dates.



2.1. Le risque de taux

Des représentations distinctes du même objet

Le calcul du déflateur nécessite un modèle de projection « risque neutre » du taux court cohérent avec la courbe des taux. Cela conduit à gérer différentes représentations de la courbe des taux en fonction des composants du modèle :



2.2. Le risque action

Le modèle de B&S reste le plus utilisé malgré ses lacunes. Par ailleurs la *VaR* sur longue période estimée dans le cadre de ce modèle, *via*

$$SCR_{\alpha} = 1 - \mathbf{exp}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times u_{\alpha}\right)$$

fournit des résultats cohérents avec le calibrage « long terme » de la formule standard (39 %) :

	Moyenne	Volatilité	SCR 0,5%
23/09/2011	2,00%	22,8%	44,7%
31/12/2010	3,54%	22,7%	43,7%

NB : Cette *VaR* sous-estime sensiblement la *VaR* « réelle » et l'écart entre la norme du QIS et une mesure objective mesure la part de risque systématique intégrée *via* le seuil de 0,5 % (*cf*. LEROY et PLANCHET [2010]).

2.2. Le risque action

Il existe de nombreuses alternatives proposées dans la littérature pour pallier aux principaux inconvénients de B&S. On peut citer les modèles d'Heston (1993), de Hardy (2001), Merton (1976), les modèles GARCH, les processus de Lévy, *etc*.

Exemple : le modèle de Merton

$$S(t) = S(0)\,\mathbf{exp}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}$$

Ce modèle est intéressant en ce qu'il permet de conserver de nombreuses « bonnes propriétés » de B&S et notamment la simplicité d'utilisation et qu'il est interprétable économiquement. Il permet dans le cadre d'une approche ORSA ou MI de limiter la sous-estimation des scénarios les plus adverses.

2.2. Le risque action

Exemple : Supposons qu'au bout d'une année, la société doive avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 1. L'assureur dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le taux majoration du capital γ tel que :

$$P\left[(1+\gamma)\mathbf{exp}\left\{\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma B_1+\sum_{k=1}^{N_1}U_k\right\}\leq 1\right]\leq 0{,}5\,\%$$

NB : γ est lié au SCR des transparents précédents *via* :

$$SCR=\frac{\gamma}{1+\gamma}$$

2.2. Le risque action

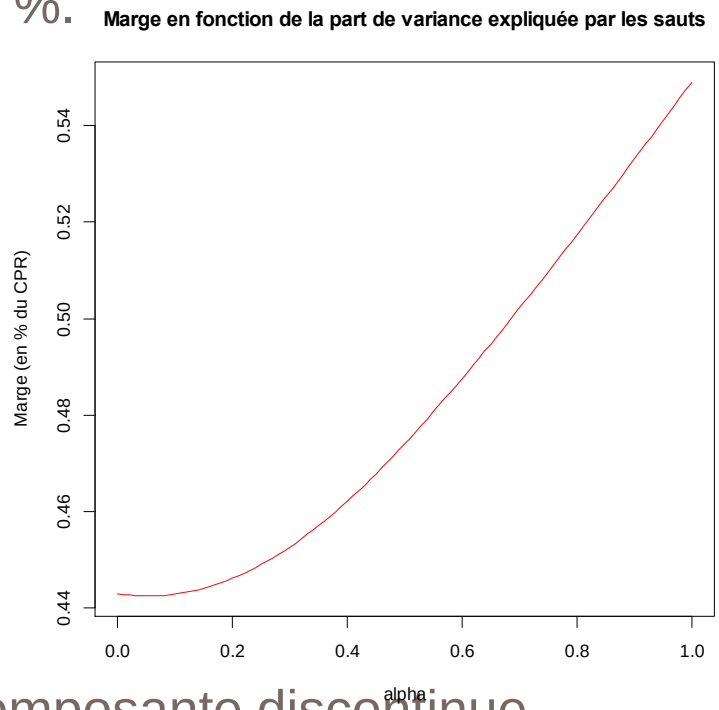
A volatilité du sous-jacent fixé, le montant de capital à immobiliser au-delà du *best estimate* passe de 44,3 % de la provision dans le cas de B&S à 47,4 % pour une part de variance de 50 % pour la composante à sauts (ce qui est ce que l'on constate en pratique), soit une augmentation de 7 %.

$$\mu = \ln(1{,}06)$$

$$\lambda = 1{,}5$$

$$\sqrt{\sigma^2 + \lambda\sigma_u^2} = 0{,}16$$

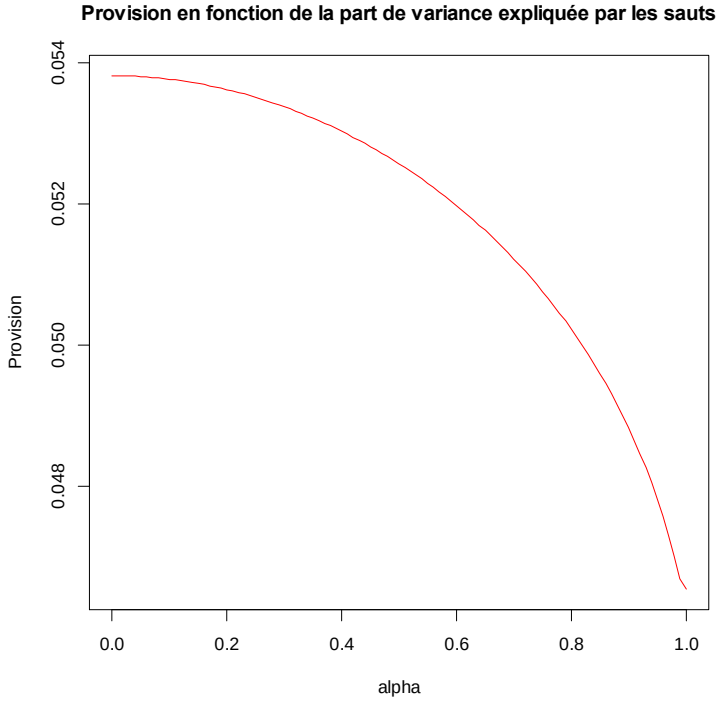
$$\alpha = \frac{\sigma_U^2\,\lambda}{\sigma^2 + \lambda\,\sigma_U^2}$$

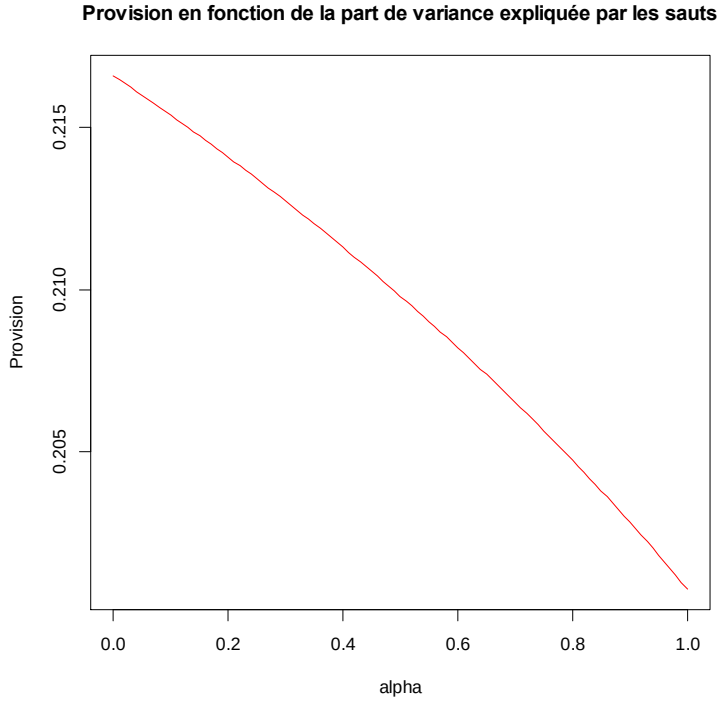


NB : α désigne la part de variance affectée à la composante discontinue.

2.2. Le risque action

L'impact du changement de modèle sur les provisions est plus limité et de sens opposé ; par exemple en considérant le prix d'une option de vente à la monnaie pour un taux sans risque de 2 % on trouve un écart de -2,3 % à un an et -3,1 % à 5 ans :





2.3. Le risque de *spread*

Lorsqu'une obligation présente un risque de défaut, pour une maturité donnée, le prix de ZC avec risque de défaut est lié au prix du ZC sans risque par la relation suivante :

$$P_D(0,T) = \left(1-\phi_T^*\right)P(0,T) + \phi_T^*\alpha P(0,T)$$

L'idée est alors de relier la probabilité risque-neutre de défaut ϕ_T^* au *spread* avec le taux sans risque ; ce lien est simple si ce dernier est constant :

$$\phi_T^* = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{\exp(sT)}\right)$$

Par ailleurs, l'écart entre le rendement de l'actif et le taux sans risque incorpore *a priori* également une composante relative au risque de liquidité.

2.3. Le risque de *spread*

De nombreux modèles utilisés en assurance traitent ce risque de manière simplifiée. En partant de la relation

$$O(T) = N \times \left(\gamma \sum_{i=1}^{T} P_l(0,i) + P_l(0,T) \right)$$

on détermine un coefficient de dépréciation *D* qui permet de recaler le prix de marché observé pour les obligations de maturité *T* avec risque de défaut :

$$O_D(T) = D \times O(T)$$

En pratique, en fonction de la finesse de la modélisation, *D* dépend de la maturité et du *rating* des obligations présentant un risque de *spread* ou est fixé globalement au niveau du portefeuille soumis au risque de *spread*.

2.3. Le risque de *spread*

Une limite importante de cette approche est qu'elle fige l'effet du risque de *spread* à la date du calcul.

Une première solution est de rendre le coefficient de dépréciation dynamique en posant $O_D(T) = D(T) \times O(T)$ avec

$$D(t) = D(s(t), s_0, \delta) = D_0 \times \mathbf{exp}\left(-\delta\left(s(t) - s_0\right)\right)$$

$$ds(t) = k \times \left(s_\infty - s(t)\right)dt + \sigma_s dW_s(t)$$

Le mouvement brownien doit être *a priori* corrélé à celui utilisé pour les actions.

La valeur initiale du *spread* est calibrée sur le *spread* moyen du portefeuille obligataire et les paramètres de la diffusion sont calibrés sur une série historique de *spreads* de notation comparable à celle du portefeuille obligataire.

2.3. Le risque de *spread*

On peut également se tourner vers des approches plus complexes, et notamment les modèles à intensité comme le modèle LMN (*cf*. LONGSTAFF et *al*. [2005]) qui établit un lien entre le *spread*, la probabilité du défaut et le risque de liquidité. Il s'appuie sur les processus d'intensité de défaut et de liquidité suivants :

$$d\lambda(t) = a\big(b - \lambda(t)\big)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)}\, dW_\lambda(t) \qquad d\gamma(t) = \eta\, dW_\gamma(t)$$

Le défaut est donc modélisé dans le cadre d'un processus de Cox doublement stochastique. Le point important est, dans ce cas, que la fonction de survie associée est de la forme :

$$Q(\tau > t) = E^Q\left[\mathbf{exp}\left(-\int_0^t \lambda(u)\,du\right)\right]$$

2.3. Le risque de *spread*

Le prix de l'obligation est égal à l'espérance des flux actualisés sous la probabilité risque neutre,

$$CB(t,T) = E_t^Q\left(\int_t^T \frac{\delta(u)}{\delta(t)} f_t(u)du + \frac{\delta(T)}{\delta(t)} F_t(T)\right)$$

en notant $\delta(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ le facteur d'actualisation et

$$f_t(u) = \left(c + (1-\omega)\times\lambda(u)\right)\times\mathbf{exp}\left(-\int_t^u (\lambda_s + \gamma_s)ds\right) \qquad F_t(T) = \mathbf{exp}\left(-\int_t^T (\lambda_s + \gamma_s)ds\right)$$

les flux instantané et terminal. Le terme de liquidité reflète ici directement le supplément de rémunération (d'espérance nulle sous *Q*) qu'exige l'investisseur pour investir dans le titre *corporate* (et au-delà de la rémunération du risque de défaut).

2.3. Le risque de *spread*

On en déduit la formule générale suivante :

$$CB(t,T) = E_t\left(c \times \int_t^T \mathbf{exp}\left(-\int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) du \right)$$
$$+ E_t\left(\mathbf{exp}\left(-\int_t^T (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) \right)$$
$$+ E_t\left((1-\omega) \times \int_t^T \lambda_u \,\mathbf{exp}\left(-\int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) du \right)$$

qui doit être explicitée en fonction des paramètres des dynamiques des facteurs. Des calculs standards dans le cadre des modèles affines permettent d'obtenir des expressions explicites.

2.3. Le risque de *spread*

Ce modèle conduit ainsi à des formules fermées pour le prix des obligations présentant un risque de *spread* :

$$CB(0,T) = c \times \int_0^T A(t)C(t)P(0,t)e^{\lambda_0 B(t)-\gamma_0 t}dt + A(T)C(T)P(0,T)e^{\lambda_0 B(T)-\gamma_0 T}$$
$$+(1-\omega)\times \int_0^T C(t)P(0,t)\big(G(t)+\lambda_0 H(t)\big)e^{\lambda_0 B(t)-\gamma_0 t}dt$$

les fonctions *A*, *B C*, *G* et *H* étant simples. Il présente l'avantage de pouvoir décomposer le *spread* entre la composante liée au défaut et celle liée à la liquidité et peut être utilisé quel que soit le modèle de taux sous-jacent.

Une synthèse très complète des modèles de risque de crédit est proposée dans DUFFIE et SINGLETON [2003].

2.3. Le risque de *spread*

Le dérivé le plus utilisé, le CDS ou *swap* de défaut, est un produit dérivé qui procure à son acheteur, sur une période définie, une assurance contre la survenance d'aléas de crédit se rapportant à un ou plusieurs émetteurs obligataires de référence (http://fr.wikipedia.org/wiki/Credit_default_swap).

L'acheteur du CDS acquiert le droit de céder au vendeur du *swap* une obligation particulière à sa valeur nominale en cas de réalisation d'un aléa de crédit de l'émetteur obligataire de référence. En échange, l'acheteur paie au vendeur, jusqu'au terme du contrat, des montants de prime prédéfinis, égaux au produit d'un *spread* de taux relatif au CDS (exprimé en points de base : bp) par le nominal.

On dispose dans le modèle LMN de formules fermées pour les CDS, ce qui est utile pour la calibration et pour les valorisations.

2.3. Le risque de *spread*

Ainsi on trouve que le *spread* du CDS s'écrit :

$$s = \frac{E\left(\omega \times \int_0^T \lambda_t \,\mathbf{exp}\left(-\int_0^t \left(r_s + \lambda_s\right) ds\right) dt\right)}{E\left(\int_0^T \mathbf{exp}\left(-\int_0^t \left(r_s + \lambda_s\right) ds\right) dt\right)}$$

ce qui conduit aux formules explicites suivantes :

$$s = \omega \frac{\int_0^T \mathbf{exp}\left(B(t)\lambda_0\right) D(t)\left(G(t) + H(t)\lambda_0\right) dt}{\int_0^T A(t)\,\mathbf{exp}\left(B(t)\lambda_0\right) D(t)\, dt}$$

NB : si λ est constant alors $s = \omega \times \lambda$

2.3. Le risque de *spread*

Remarque sur la discrétisation

Le discrétisation de la composante crédit est délicate car, si le processus de Feller admet une discrétisation exacte, elle est couteuse numériquement (cf. ALFONSI [2012]). On peut utiliser un schéma de Milstein :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu\left(\tilde{X}_t, t\right)\delta + \sigma\left(\tilde{X}_t, t\right)\sqrt{\delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma_x\left(\tilde{X}_t, t\right)\sigma\left(\tilde{X}_t, t\right)}{2}\delta\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

qui donne ici

$$\tilde{\lambda}_{t+\delta} = \tilde{\lambda}_t + a\left(b - \tilde{\lambda}_t\right)\delta + \sigma_\lambda\sqrt{\tilde{\lambda}_t \times \delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma_\lambda^2}{4}\tilde{\lambda}_t \times \delta\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

Comme pour le modèle de taux, la qualité de la discrétisation est un point essentiel dans la mise en œuvre du modèle.

2.3. Le risque de *spread*

La principale difficulté associée à ce modèle est l'estimation des paramètres :

- une fois fixé le taux de recouvrement (*1-LGD*), il reste 6 paramètres à calibrer (3+1 pour le défaut et 1+1 pour la liquidité) ; ces paramètres s'ajoutent à ceux du modèle de ZC sans défaut sous-jacent ;

- l'estimation s'effectue en plusieurs étapes complexes, à partir de prix de ZC sans risque, de ZC *corporate* et de CDS.

La cohérence de ces données n'est pas simple à établir.

2.3. Le risque de *spread*

Etapes de l'estimation

- estimation des paramètres du modèle de taux sous-jacent à partir d'une courbe de taux swap ;

- estimation des 4 paramètres associés au processus de défaut à partir des prix (théoriques et observés) des CDS ;

- estimation des 2 paramètres du processus de liquidité à partir des prix (théoriques et observés) des obligations *corporate*.

On « empile » donc des programmes d'optimisation non linéaire avec les résultats du programme *N*-1 qui alimentent le programme *N* : le processus est en pratique très instable.

Le paramètre de recouvrement (1-*LGD*) est fixé par avis d'expert. Pour une étude détaillée du calibrage de ce modèle, on peut se reporter par exemple à LAÏDI [2013].

2.4. Le risque immobilier

Le standard en la matière consiste à utiliser un modèle log-normal comme pour les actions.

Ce risque est en pratique très hétérogène (*cf*. FRIGGIT [2001]) : les marchés résidentiel et des entreprises ont ainsi des comportements différents.

Toutefois, compte tenu du poids de cette classe d'actifs dans l'allocation, une modélisation simplifiée apparaît justifiable.

Ce risque est *a priori* non couvrable (réplicable).

2.5. Le risque inflation

L'inflation concerne *a priori* plusieurs paramètres du modèle :

- l'inflation générale des prix (revalorisation de rentes) ;
- l'inflation des frais de gestion ;
- l'inflation des coûts en général dans les assurances de choses et de responsabilité.

Dans ces deux derniers cas, seule une analyse en probabilité historique doit être menée, ces sources de risque étant non couvrables.

L'inflation générale des prix est potentiellement partiellement couvrable *via* des OATi et le recours à une modélisation en probabilité risque neutre est envisageable.

2.5. Le risque inflation

L'indice d'inflation est en général modélisé par un processus autorégressif. En toute rigueur, le calibrage pour le calcul des provisions nécessite de disposer d'un modèle de prix pour des OATi.

Le modèle décrit dans BRENNAN et XIA [2000] propose un cadre intégrant conjointement le risque de taux et le risque inflation, mais il est peu utilisé en pratique en assurance.

Des travaux empiriques récents (*cf*. ANG et *al*. [2008]) s'intéressent à la construction d'une structure par terme des taux réels et de l'inflation.

Ce facteur de risque est utile lorsque des OATi sont présentes à l'actif et / ou des garanties inflation au passif. Il est aussi utile (*cf*. *infra*) pour analyser le lien avec une vision économique du scénario.

Dans ROSSPOPOFF [2013], l'auteur propose une revue très complète des modèles d'inflation pour les calculs d'engagement.

2.5. Le risque inflation

Dans une logique de parcimonie, l'inflation (mesurée par l'écart entre les structures par termes nominale et réelle) peut être intégrée *via* un unique paramètre supposé constant au cours du temps.

$$R_r(t,\tau) = R_r(t-1,\tau) + \beta \times \left(R_n(t,\tau) - R_n(t-1,\tau)\right)$$

Avec l'approximation de Fisher, on en déduit les anticipations d'inflation :

$$\left(1+R_n(t,\tau)\right)^{\tau} = \left(1+R_r(t,\tau)\right)^{\tau} \times \left(1+I(t,\tau)\right)^{\tau}$$

puis la dynamique du taux d'inflation instantané :

$$i_t = \frac{1+r_t}{1+R_r(t,1)} - 1$$

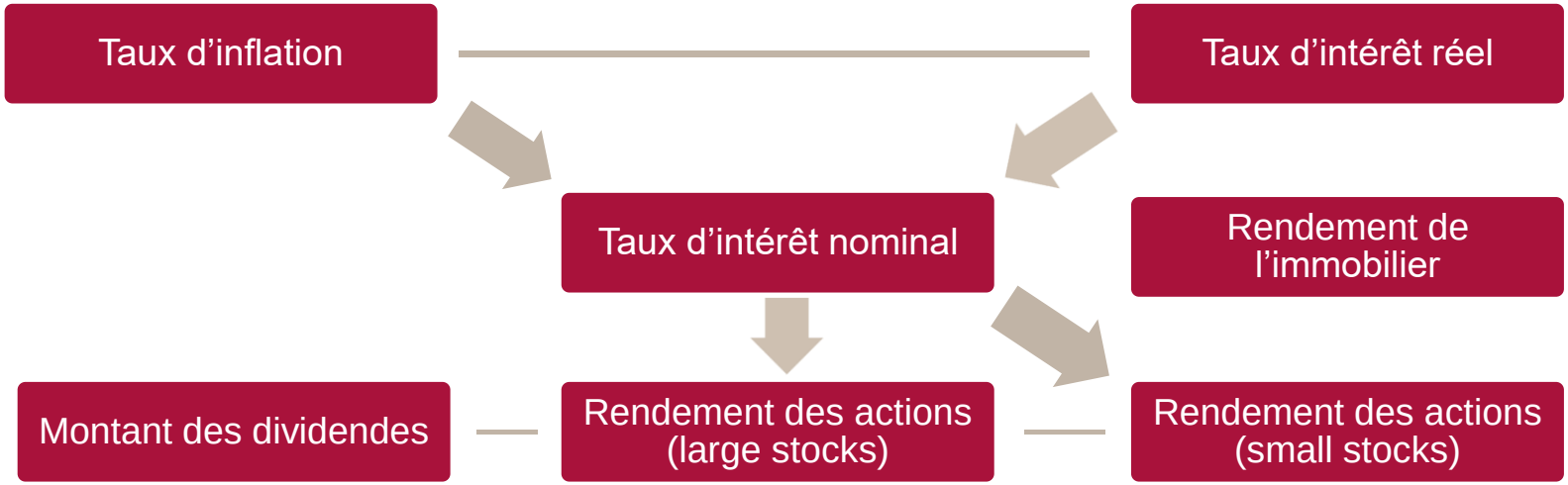
avec $R_r(t,1) = R_r(t-1,1) + \beta \times \left(r_t - r_{t-1}\right)$

2.6. Un exemple (*cf.* GAUTHIER [2011])

	Approche Risque Neutre Modèle Composite			Approche « Monde réel » Modèle en cascade (Ahlgrim)		
Classe d'actifs	Modèle	Paramètres	Estimation	Modèle	Paramètres	Estimation
INFLAT°	Vasicek	Moyenne long terme Vitesse de retour à la moyenne Volatilité	Objectif BCE Estimation sur une plage d'historique représentative (MCO) Estimation sur une plage d'historique représentative (MCO)	Vasicek	Moyenne long terme Vitesse de retour à la moyenne Volatilité	Objectif BCE Estimation sur une plage d'historique représentative Estimation sur une plage d'historique représentative Moindres Carrés Ordinaire (MCO)
RENDMNT ACTION	Black & Scholes	Rendement annuel sans risque espéré Volatilité Implicite	Taux sans risque (moyenne long terme) Donnée de marché	Taux réel + Inflation + Primes de Risque (RSLN)	Tx réel CT simulé Inflation simulée P(1,2) ; P(2,1) Rdmnt 1, Rdmnt 2 Vol 1, Vol 2	Valeur en t renvoyée par le modèle Valeur en t renvoyée par le modèle Maximum de vraisemblance
OBLIG	HJM (Vasicek Généralisé)	Courbe des taux initiale Volatilité Vitesse de retour à la moyenne	Donnée de marché (Obligations UE - AAA) A partir du prix d'Options sur le marché : En minimisant les écarts quadratiques entre prix de call observé et calculé.	Hull&White2 Facteurs	Taux Long / Court Réels AAA + Risque de spread OU Taux Long / Court Réels (risqués)	Courbe Tx réels = Courbe Tx Nom – Courbe Inflation implicite (swaps) Estimation par minimisation écart quadratique Théorique/Observé OU Double Moindres Carrés sur historiques TL / TC (pb des données, car Taux réels)
IMMO	Black&Scholes	Rendement espéré Volatilité	Taux sans risque Historique	Black&Scholes Vasicek	Moy Vol Moy Vol Retour Moy	1+Rdt Immo=(1+Rdt en Capital)*(1+Rdt locatif) Modèles calibrés sur un historique
MON		Rendement annuel	Taux court sans risque		Rendement	Taux court sans risque simulé

2.6. Un exemple (*cf*. GAUTHIER [2011])

On peut synthétiser la structure du modèle d'Ahlgrim (*cf*. AHLGRIM et *al*. [2005]) par le schéma suivant :



Remarque

http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2012/08/coordonner-les-gse-historique-et-risque-neutre.html

Sommaire

1. *Best estimate* et SCR
2. Les composants du GSE
3. **Estimation et calibrage**
4. Validation
5. Quelques points d'attention
6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

3. Estimation et calibrage

L'estimation des paramètres d'un modèle d'actif peut être effectuée de deux manières :

- estimation directe sur des données historiques de la grandeur modélisée (ex. : cours d'un sous-jacent) ;

- estimation à partir de la grandeur d'intérêt (ex. : prix des options) ;

selon que l'on travaille en probabilité historique ou risque neutre

Si l'estimation est effectuée sur des données historiques, le choix de la profondeur de l'historique est délicat.

Si l'estimation est effectuée sur des prix, le choix de la série de prix à retenir est délicat.

Enfin, l'estimation de la structure de dépendance pose des problèmes spécifiques en probabilité risque neutre.

3.1. Les conséquences du risque d'estimation

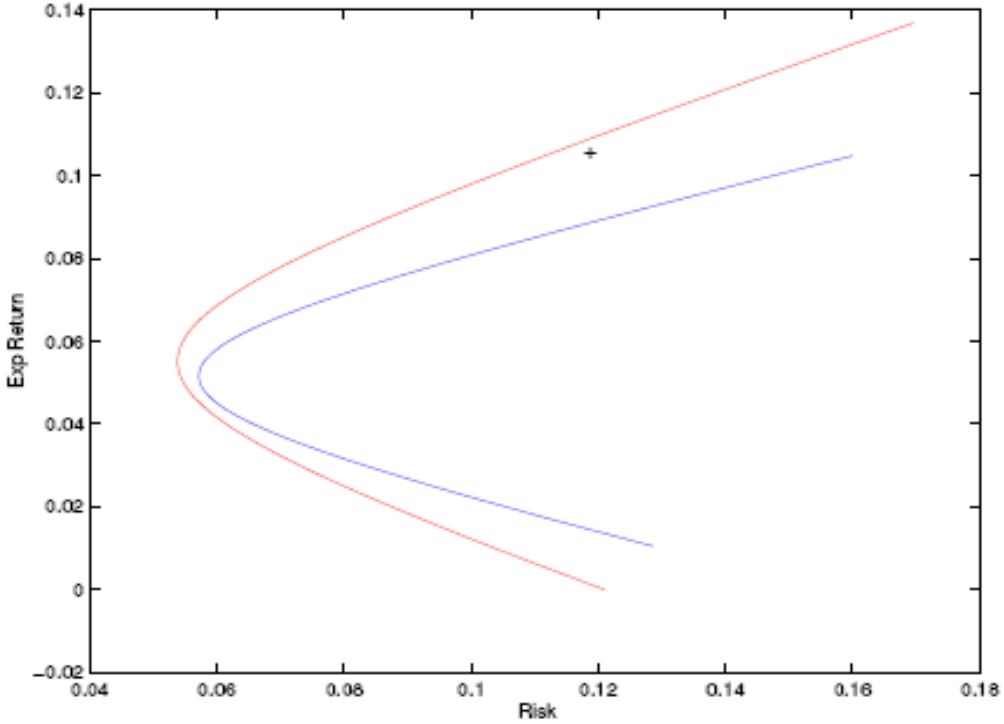
L'estimation peut induire une perte d'information significative, comme le montrent les travaux de P. Boyle (WINDCLIFF et BOYLE [2004]). L'idée est de s'intéresser à la détermination de l'allocation optimale « à la Markowitz » avec 5 supports d'investissement, dont les vraies valeurs des paramètres sont :

Asset Name	μ	σ	ρ				
Large Cap	.1165	.1449	1.0000	0.9180	0.8341	0.4822	0.3873
Mid Cap	.1288	.1549	0.9180	1.0000	0.9386	0.4562	0.3319
Small Cap	.0968	.1792	0.8341	0.9386	1.0000	0.4206	0.2002
World Index	.0921	.1715	0.4822	0.4562	0.4206	1.0000	0.2278
Long Bond Index	.0547	.0558	0.3873	0.3319	0.2002	0.2278	1.0000

On compare cette allocation estimée avec l'allocation uniforme en « 1/*N* ».

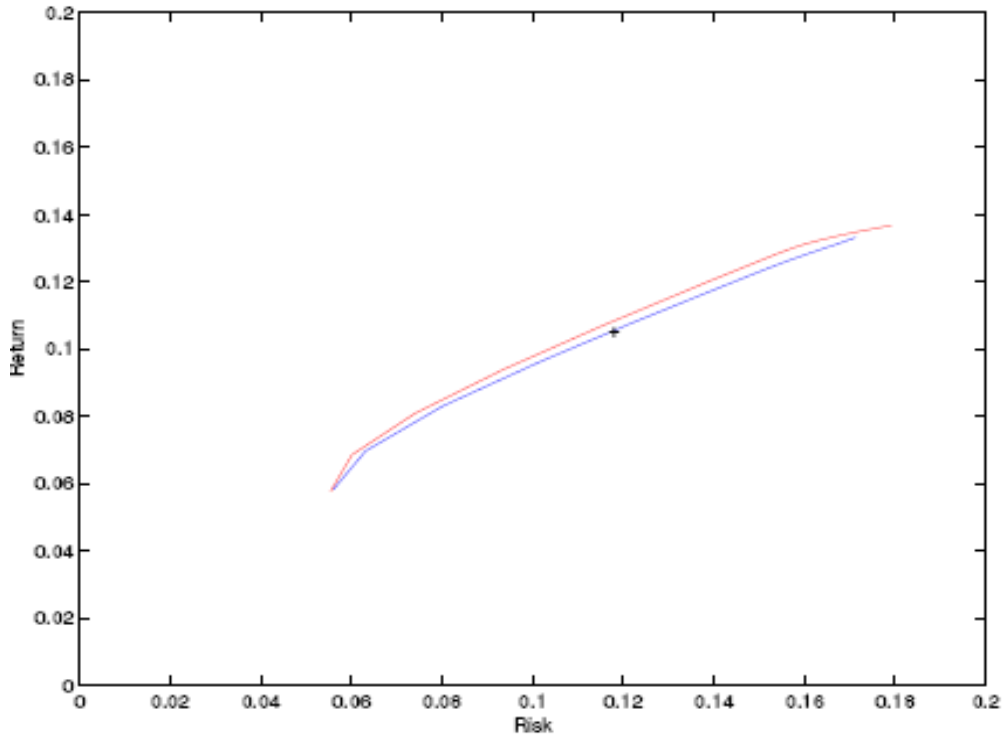
3.1. Les conséquences du risque d'estimation

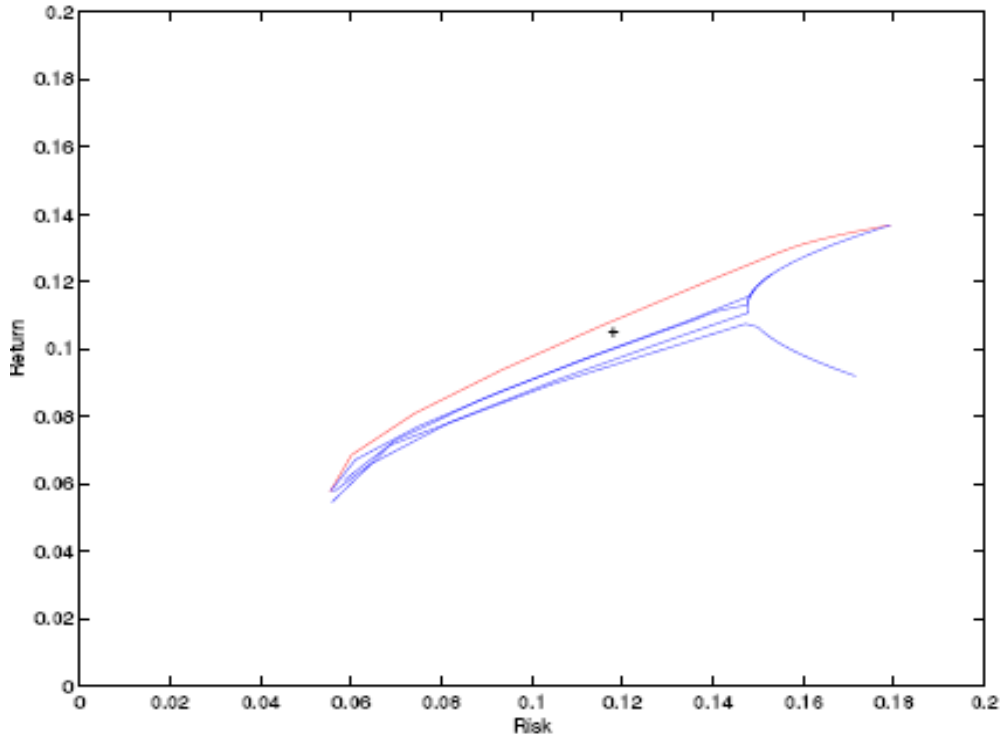
On peut alors comparer la frontière efficiente théorique (en rouge) avec la « frontière réelle » (en bleu) construite sur la base des pondération des supports estimées et de la vraie loi sous-jacente :



3.1. Les conséquences du risque d'estimation

Dans la réalité toutefois on ne peut avoir de position courte, ce qui modifie le frontière efficiente, qui n'a plus d'expression paramétrique





3.2. Choix de la plage d'estimation

Fixer le niveau des paramètres du modèle est un compromis entre une démarche statistique d'estimation à partir de séries (de prix à un instant donné ou d'évolutions historiques du facteur de risque suivant les cas) et l'opinion que l'on a de l'évolution des facteurs de risque à l'avenir.

Ce point est illustré ci-après par l'exemple de l'inflation.

3.2. Choix de la plage d'estimation

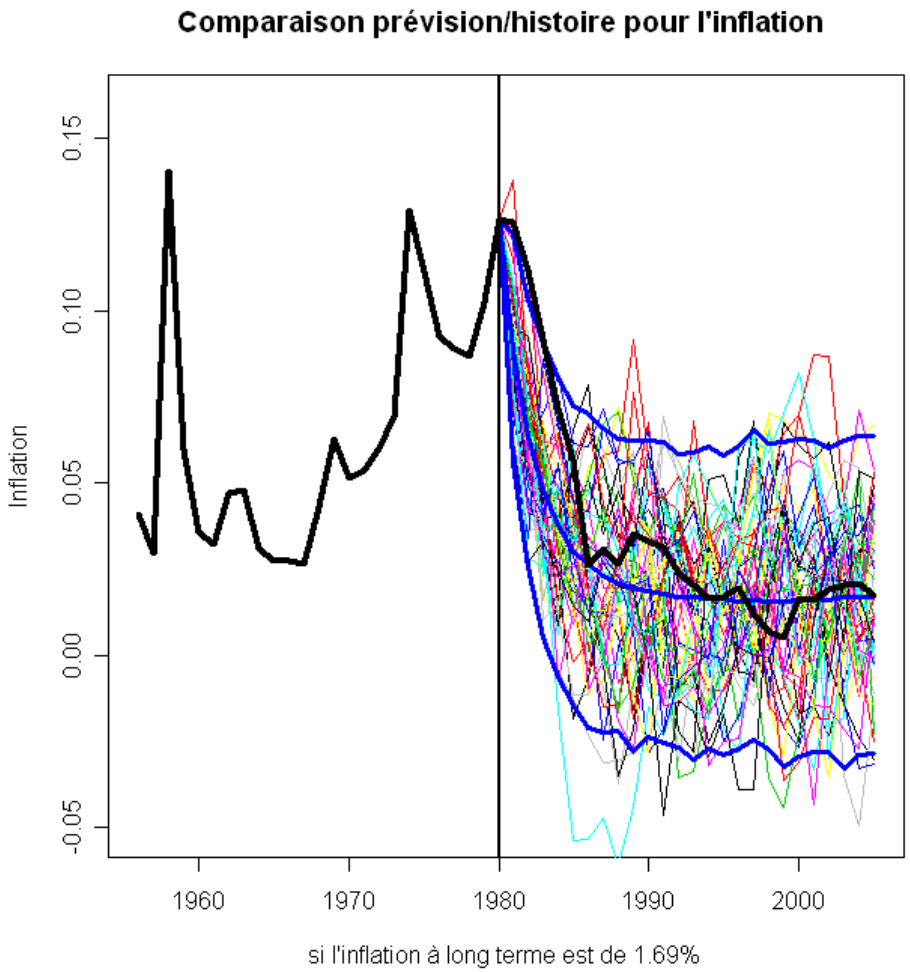
En ajustant l'inflation sur les données disponibles depuis 1950, on obtient une inflation espérée à long terme de 4,84 %.

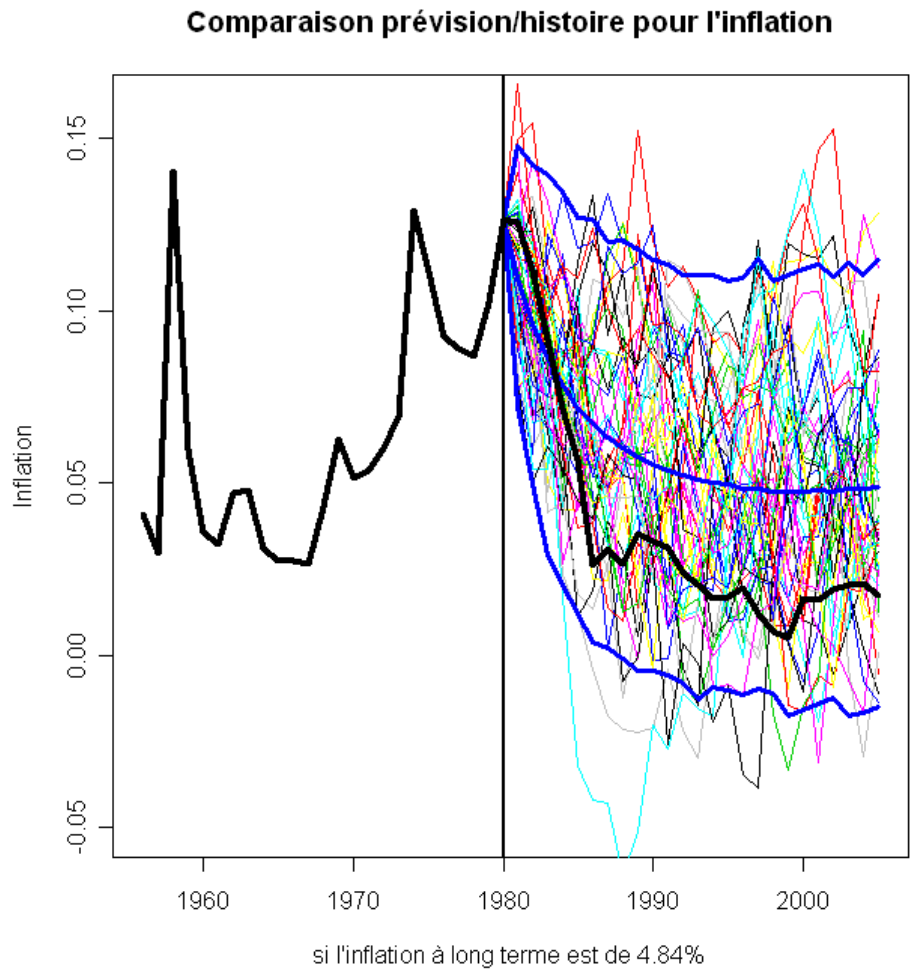
Cela ne correspond pas aux objectifs de croissance à long terme fixée par la Banque Centrale Européenne (BCE) depuis les années 2000.

L'écart est important et à moyen terme il serait plus judicieux de prendre une valeur cohérente avec les dernières années compte tenu de la politique monétaire de la BCE de maintenir l'inflation à un niveau proche et inférieur à 2 %.

Les conséquences pratiques sont très importantes, comme le montre l'exemple de *backtesting* suivant :

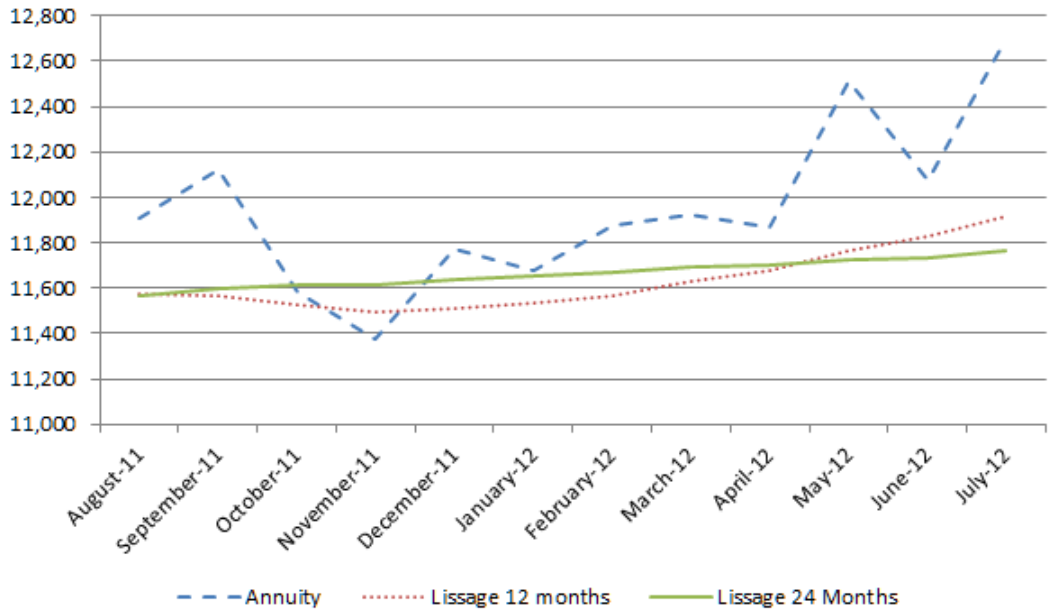
3.2. Choix de la plage d'estimation





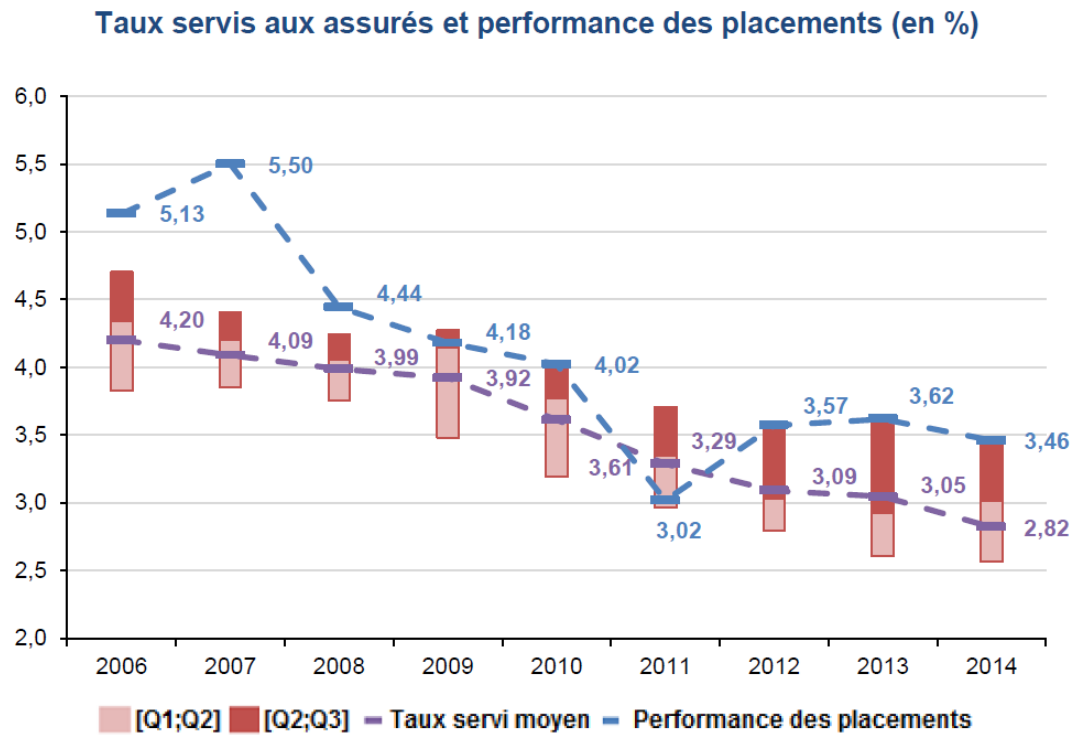
3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

La mise en œuvre des valorisations cohérentes avec des valeurs de marché conduit en pratique à une volatilité importante des évaluations et par voie de conséquence des bilans. Pour illustrer cette situation, on considère ici les taux de marché des emprunts d'État français mois par mois entre août 2011 et juillet 2012 et on calcule le capital constitutif d'une rente viagère immédiate à 65 ans à termes échus avec la TH00-02.



3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

Le phénomène de lissage que l'on constate dans l'exemple précédent peut être illustré également par le fonctionnement des comptes sociaux pour le calcul de la participation aux bénéfices (ACPR [2015b]) :



3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

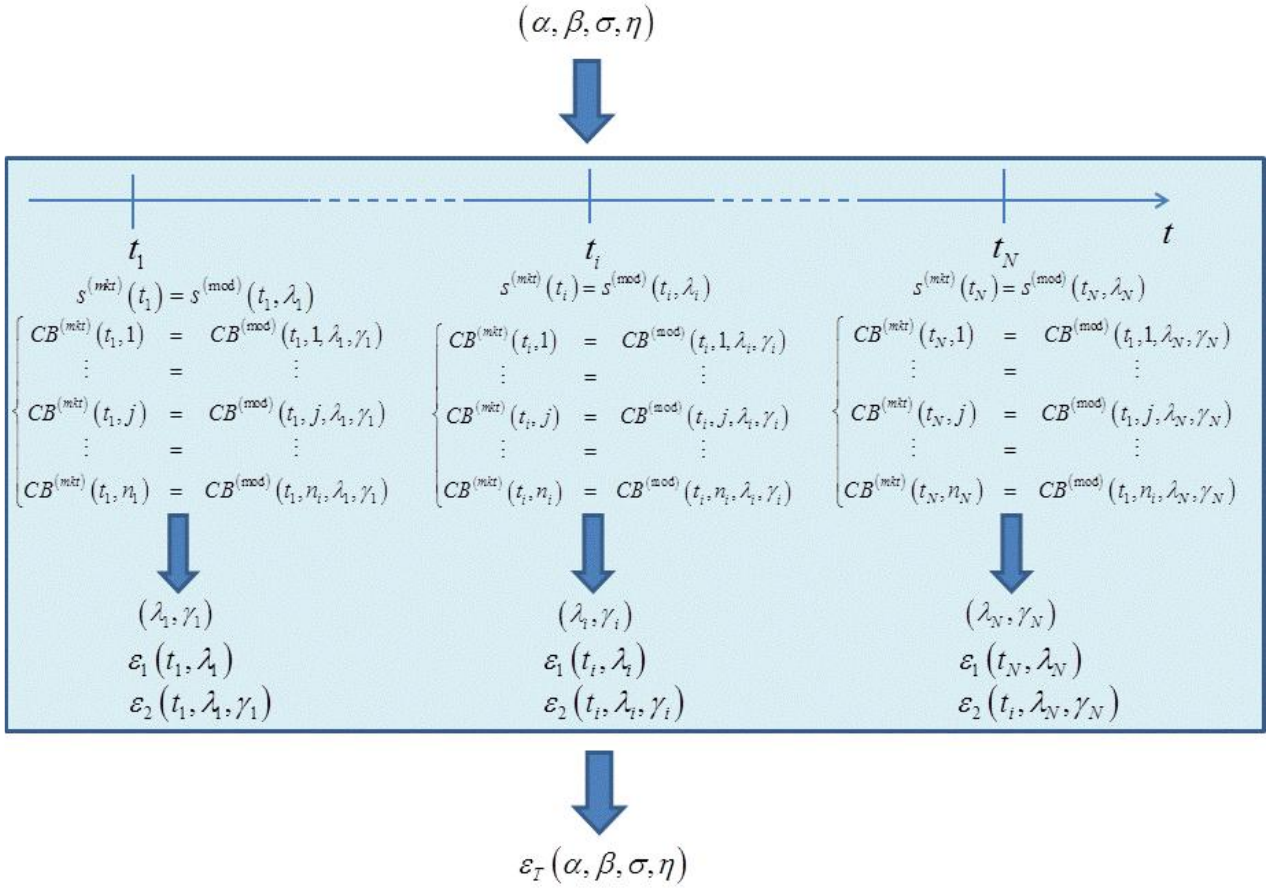
Il est nécessaire de choisir des paramètres cohérents avec les prix observés et l'horizon long terme des projections.

Le calibrage doit donc être relativement stable à l'occasion de son actualisation à des dates voisines.

Une méthode utilisant uniquement les derniers prix connus, comme celle proposée initialement par LONGSTAFF et *al*. [2005] dans le cas du modèle LMN présenté *supra* n'est évidemment pas pertinente en l'espèce, car elle induit une volatilité des paramètres qui n'est pas représentative des risques réellement encourus, comme l'a montré l'exemple précédent.

3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

On peut ainsi imaginer (pour le modèle LMN) le schéma suivant (repris de LAÏDI et PLANCHET [2015])



Sommaire

1. *Best estimate* et SCR
2. Les composants du GSE
3. Estimation et calibrage
4. **Validation**
5. Quelques points d'attention
6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

4. Validation

Le processus de validation d'un GSE diffère suivant que l'on se place sous les probabilités historique ou risque-neutre.

Il se décompose en une validation du calibrage et une validation de l'implémentation.

Validation du calibrage

Dans le premier cas, la validation est une combinaison d'éléments de nature statistique et de contrôles *ex-post* (comme par exemple l'analyse précédent de l'inflation). On sollicite également des avis d'experts, notamment pour les corrélations entre les prix des actifs.

La validation sous la probabilité risque neutre consiste à vérifier que les prix sont correctement représentés.

4. Validation

Validation de l'implémentation

Il s'agit de vérifier ici que les trajectoires issues du générateur respectent les propriétés théoriques du modèle sous-jacent.

L'exemple de la discrétisation du modèle de taux présenté *supra* (*cf*. 2.2) en fournit un exemple.

Dans le cas d'un générateur risque-neutre, on lui adjoint un contrôle appelé « test martingale » qui consiste à vérifier que les processus de prix actualisés issus du modèle sont bien des martingales.

Il s'agit en pratique d'identifier des moments calculables des distributions des prix et de vérifier que les moments empiriques correspondants convergent bien vers leurs valeurs théoriques.

Cela est illustré ci-après dans un cas simple.

4. Validation

À titre d'illustration, on propose des tests pour contrôler la bonne qualité de l'implémentation d'un générateur de scénarios économiques comportant des actions modélisées par un processus log-normal et des taux modélisés par un modèle CIR.

On note respectivement *r* et *S* le taux court et la valeur d'une action et le générateur est considéré sous la probabilité risque neutre.

On a donc le cadre général :

$$S(t) = S_0 \,\mathbf{exp}\left(\int_0^t \left(r(u) - \frac{\sigma^2}{2} \right) du + \sigma B(t) \right)$$

$$dr(t) = k\left(\theta - r(t)\right) dt + \sigma_r \sqrt{r(t)}\, dB_r(t)$$

4. Validation

Le modèle est utilisé pour faire des simulations et on dispose donc de trajectoires de *r* et *S* issues du générateur, soit en pratique d'observations

$$\left\{r_j\left(t_i\right);1\leq i\leq p,1\leq j\leq n\right\} \qquad \left\{S_j\left(t_i\right);1\leq i\leq p,1\leq j\leq n\right\}$$

où *j* désigne le numéro de la trajectoire et *i* l'instant de la discrétisation

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_p=T$$

dont on suppose que le pas est fixe, $d=\dfrac{T}{p}$.

4. Validation

4.1. Test sur le rendement des actions

On déduit de la forme du prix de l'action que

$$\rho(t) = \mathbf{ln}\left(\frac{\delta(t)\times S(t)}{S_0}\right) = -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t)$$

avec $\delta(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(u)du\right)$ le facteur d'actualisation est gaussienne. De plus

$$\Delta\rho(t) = \rho(t) - \rho(t-1) = \sigma\left(B(t) - B(t-1)\right) = -\frac{\sigma^2}{2} + \sigma\times\varepsilon_t$$

où ε est un bruit blanc et $\frac{\delta(t)\times S(t)}{S_0}$ suit une loi log-normale d'espérance 1 et de variance

$$v = \mathbf{exp}\left(\sigma^2 t\right) - 1$$

4. Validation

4.1. Test sur le rendement des actions

On peut alors utiliser les propriétés statistiques des estimateurs suivants

$$\bar{\rho}(t_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{\delta_j(t_i)\times S_j(t_i)}{S_0}\right) \underset{n\to\infty}{\to} E\left(\rho(t_i)\right) = -\frac{\sigma^2}{2}t_i$$

$$\bar{e}(t_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j(t_i)\times S_j(t_i)}{S_0} \underset{n\to\infty}{\to} E\left(\frac{\delta(t)\times S(t)}{S_0}\right) = 1$$

et en déduire par exemple des intervalles de confiance :

$$I_\alpha\left(\bar{\rho}(t_i)\right) = \left[-\frac{\sigma^2 t_i}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\,;-\frac{\sigma^2 t_i}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]$$

$$I_\alpha\left(\bar{e}(t_i)\right) = \left[1 - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{e^{\sigma^2 t_i}-1}\,;1 + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{e^{\sigma^2 t_i}-1}\right]$$

4.2. Test sur le modèle de taux

On se sert d'abord de la convergence des estimateurs empiriques des prix de ZC vers les prix théoriques :

$$P_n(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{exp}\left(-\sum_{i=1}^{p} r_j(t_i)(t_i - t_{i-1})\right) \underset{n\to\infty}{\to} P(0,T) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right]$$

Puis on peut utiliser certaines propriétés particulières de la distribution du facteur de risque pour construire des contrôles. Ici la distribution du taux court n'est pas simple (Khi-2 décentré, *cf*. REVUZ et YOR [1999]) mais on sait que

$$E(r(t)) = \theta - (\theta - r_0)e^{-kt} \qquad V(r(t)) = \frac{\sigma_r^2}{k}\left(1-e^{-kt}\right)\left[r_0 e^{-kt} + \frac{\theta}{2}\left(1-e^{-kt}\right)\right]$$

4.3. Propriété de conservation

Un modèle ALM risque neutre vérifie une propriété d'absence de création ou destruction de valeur, au sens où l'espérance de la somme des valeurs actualisées des flux servis au cours de la projection doit être égale au montant du capital investi initialement.

Le capital global initial est investi sur des actifs de marché, ce qui revient à supposer qu'il est investi dans une unité de compte S qui est telle que $M = \delta S$ est une martingale. Au fil de la projection, des flux à destination de l'assuré et de l'actionnaire sont servis. On peut en toute généralité supposer que la somme des flux servis à la date t est une fraction $q(t)$ de la valeur de l'unité de compte, le processus q étant adapté.

Afin de s'assurer que le sous-jacent est entièrement distribué au cours de la projection, on doit imposer

$$\sum_{t=1}^{T} q_t = 1$$

4.3. Propriété de conservation

La valeur initiale des flux servis est alors

$$v = \sum_{t=1}^{T-1} E^Q\left(q_t \times \delta(t) \times S(t)\right) + E^Q\left(\left(1 - \sum_{t=1}^{T-1} q_t\right) \times \delta(T) \times S(T)\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T-1} E^Q\left(q_t \times \left[\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)\right]\right) + E^Q\left(\delta(T)S(T)\right)$$

mais on a

$$E^Q\left(q_t \times \left[\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)\right]\right) = E^Q\left(E_t^Q\left(q_t \times \left[\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)\right]\right)\right)$$

$$= E^Q\left(q_t \times \left[\delta(t)S(t) - E_t^Q\left(\delta(T)S(T)\right)\right]\right) = 0$$

Or $E^Q\left(\delta(T)S(T)\right) = S(0)$, donc $v = S(0)$. Cela fournit un moyen simple de vérifier la convergence d'un modèle ALM risque neutre en comparant l'estimateur empirique de la somme des flux actualisés avec le capital initial.

Sommaire

1. *Best estimate* et SCR
2. Les composants du GSE
3. Estimation et calibrage
4. Validation
5. **Quelques points d'attention**
6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

5. Quelques points d'attention

La mise en place d'un GSE dans le contexte rappelé ci-avant pose quelques difficultés théoriques et pratiques. On en présente ici rapidement quelques-unes :

- le lien entre prix et réplication d'un flux ;
- la cohérence avec les scénarios macro-économiques ;
- la cohérence entre les visions historique et risque-neutre ;
- la structure des dépendance entre les prix des actifs.

La mise en œuvre pratique du GSE nécessite également un peu d'attention, ce point sera rapidement présenté.

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables (*cf*. PLANCHET [2009])

Pour illustrer le mécanisme de construction d'un portefeuille de couverture, on utilise ici l'exemple simple d'une garantie de type GMDB, pour laquelle le flux à répliquer est, si le décès survient à la date *t* :

$$G_t = S_t + \left[K - S_t\right]^+$$

La valeur actuelle du flux est donc :

$$\Lambda_x = e^{-rT_x}\left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{T_x \le T}$$

En appliquant le cadre de valorisation standard, on calcule simplement la valeur économique de ce flux :

$$V = \mathbf{E}^{P^a \otimes Q^F}\left[e^{-rT_x}\left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{T_x \le T}\right] = \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_x \times q_{x+t-1} \times \mathbf{E}^{Q^F}\left[e^{-rt}\left[K - S_t\right]^+\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_x \times q_{x+t-1} \times \left[Ke^{-rt}N\left(-d_2\left(t\right)\right) - S_0 N\left(-d_1\left(t\right)\right)\right]$$

5. Quelques points d'attention

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables

Lors de la construction du portefeuille de couverture, les imperfections proviennent essentiellement de deux sources :

- la mutualisation imparfaite des décès ;
- le caractère discret des réajustements.

On se restreint ici à la seconde source d'imperfections, couplée avec la présente de coûts de transaction ; on doit donc modéliser deux coûts :

- le coût de l'erreur de couverture associée au caractère discret des réallocations ;
- les coûts de transaction.

On s'appuie sur la décomposition suivante du coût de la garantie :

$$V = \sum_{t=1}^{T} {}_{t-1}p_x \times q_{x+t-1} \times E^{Q^F}\left[e^{-rt}\left[K - S_t\right]^+\right]$$

5. Quelques points d'attention

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables

La valeur initiale du portefeuille de couverture est, pour une option de vente, la suivante :

$$W = -P\left(S_0, T, K, r, \sigma\right) + \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

La mise en place d'une stratégie visant à s'immuniser contre les variations de prix du sous-jacent conduit à détenir la quantité d'actif risqué

$$\alpha_i\left(T\right) = -N\left(-d_1\left(S_i, T - i\delta_N\right)\right)$$

Les coûts associés sont

- le coût de transaction : $c_i = \gamma \times \left(\left|\alpha_i - \alpha_{i-1}\right| S_{i\delta_N} + \left|\beta_i - \beta_{i-1} e^{r\delta_N}\right|\right)$
- l'erreur de couverture :

$$w_i^- = -P\left(S_{i\delta_N}, T\left(1 - \frac{i}{N}\right), K, r, \sigma\right) + \alpha_{i-1}\left(T\right) S_{i\delta_N} + \beta_{i-1}\left(T\right) \mathbf{exp}\left(r\delta_N\right)$$

5. Quelques points d'attention

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables

Le contrat nécessite la couverture simultanée de plusieurs options et, en supposant le risqué d'assurance parfaitement mutualisé, la quantité d'actif risqué à détenir à la date *t* pour couvrir l'option de maturité *T* est :

$$a_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N^{-1}+1}^{N-1} \alpha_t\left(k\delta_N\right) {}_{(k-1)\delta_N} p_{x(j)} q_{x(j)+(k-1)\delta_N}$$

En projetant les flux de trésorerie (sous la probabilité historique), on construit aisément la distribution empirique du coût global :

$$S_t^i = S_{t-\delta_N}^i \, \mathbf{exp}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta_N + \sigma\sqrt{\delta_N}\,\varepsilon\right\}$$

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-rn\delta_N}\left(k \times \left(\left|a_{n\delta_N} - a_{n\delta_N-\delta_N}\right| S_{n\delta_N\delta_N} + \left|b_{n\delta_N} - b_{n\delta_N-\delta_N} e^{r\delta_N}\right|\right) + S_{n\delta_N\delta_N}\left(a_{n\delta_N} - a_{n\delta_N-\delta_N}\right) + \left(b_{n\delta_N} - b_{n\delta_N-\delta_N} e^{r\delta_N}\right)\right)$$

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables

La valeur actuelle de ce coût s'écrit de manière synthétique :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \left(c_i + w_i^- \right) \mathbf{exp} \left(-ri\delta_N \right)$$

Pour obtenir les informations sur la distribution de cette charge, on procède par simulation. On prend :

- un taux sans risque de 3 %;
- une durée de projection de 10 ans ;
- la volatilité de l'actif de 16 %;
- les coûts de transaction de 0.1 % du volume des transactions.

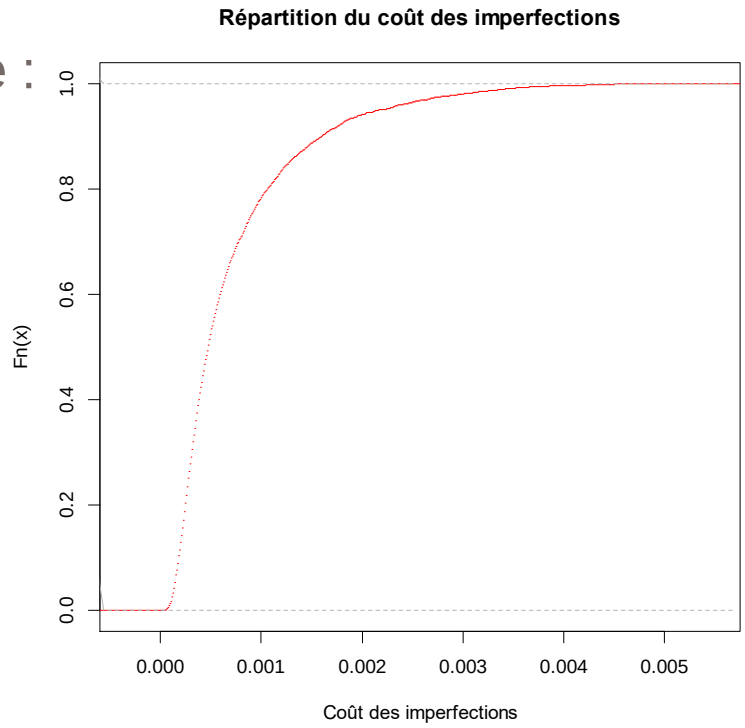
On effectue les réallocations à une fréquence hebdomadaire.

5.1. Prix et réplication : deux notions indissociables

Le quantile à 99,5 % de ce coût additionnel est de 2,1 % de l'encours initial, pour un coût moyen de la stratégie de 0,40 %.

Avec des rebalancements quotidiens, on ramène le besoin en capital à 0,4 % avec un coût moyen de 0,1 %.

La distribution du coût présente l'allure suivante :



5.2. Les contraintes macro-économiques

À long terme, il existe un lien étroit entre le taux d'intérêt nominal prévalant sur les marchés financiers, le taux d'inflation, c'est-à-dire l'évolution de l'indice des prix, et le taux d'intérêt réel. Plus précisément, le taux d'intérêt nominal est égal à la somme du taux d'intérêt réel et l’anticipation du taux d'inflation :

$$\text{Taux d'intérêt Nominal} = E_t(\text{Taux d'Inflation}) + \text{Taux d'intérêt Réel}$$

5.2. Les contraintes macro-économiques

Simultanément, il existe un lien étroit à long terme entre le taux d'intérêt réel et le taux de croissance réel de l'économie. Le taux d'intérêt réel ne peut être longuement très différent du taux de croissance de l'économie sauf à provoquer des arbitrages entre activité financière et activité réelle d'une part, entre investissement dans un pays et investissement dans d'autres pays d'autre part :

Taux d'intérêt réel à long terme = Taux de croissance réel à long terme

La prise en compte de ces contraintes nécessite la modélisation de l'inflation, qui est rarement modélisée explicitement en pratique.

5.3. Le prix de marché du risque

Le prix de marché du risque fournit le lien entre les représentations risque neutre et historique de la dynamique des facteurs de risque. Il apparaît naturellement dans les modèles à base de processus de diffusion.

On considère un mouvement brownien *B* sous *P* et un processus adapté λ vérifiant la condition de Novikov :

$$E\left[\mathbf{exp}\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right)\right] < \infty$$

On définit alors un processus *W* et une mesure *Q* en posant :

$$W_t = B_t + \int_t^T \lambda(u)du \qquad \frac{dQ}{dP} = \mathbf{exp}\left(-\int_0^T \lambda(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right)$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que *W* est un *Q* mouvement brownien.

5.3. Le prix de marché du risque

On déduit de ce théorème général que dans un modèle de taux mono factoriel, en notant x le facteur de risque sous-jacent :

$$dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t \qquad dx_t = \left(\mu(t, x_t) - \lambda(t) \times \sigma(t, x_t)\right)dt + \sigma(t, x_t)dW_t^Q$$

Dans le cas particulier du modèle de Vasicek cela conduit à :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^Q$$

avec $b_\lambda = b - \dfrac{\lambda\sigma}{a}$. On dispose donc d'un cadre théorique *a priori* simple pour relier les deux visions (historique et risque neutre). Ce cadre suppose toutefois que la forme du prix de marché du risque est simple et, en pratique, que celui-ci est constant.

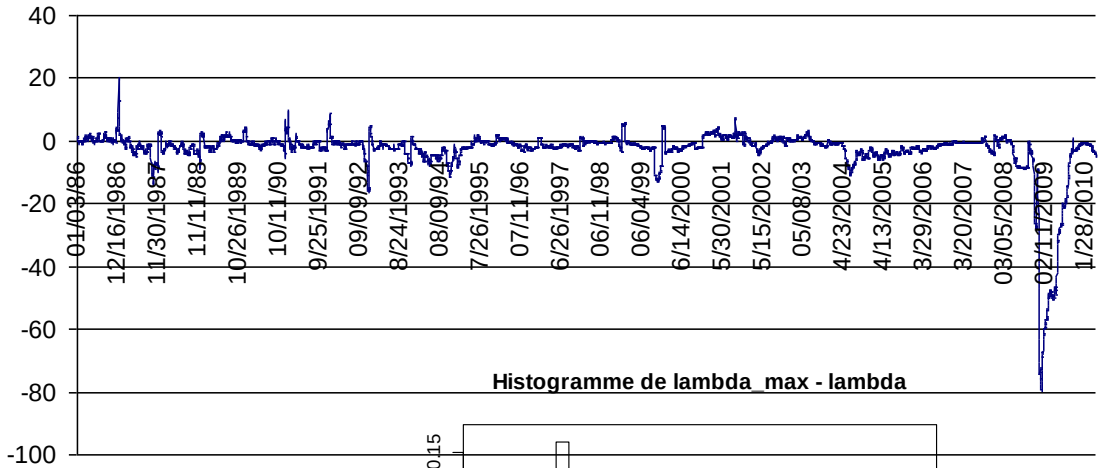
5. Quelques points d'attention

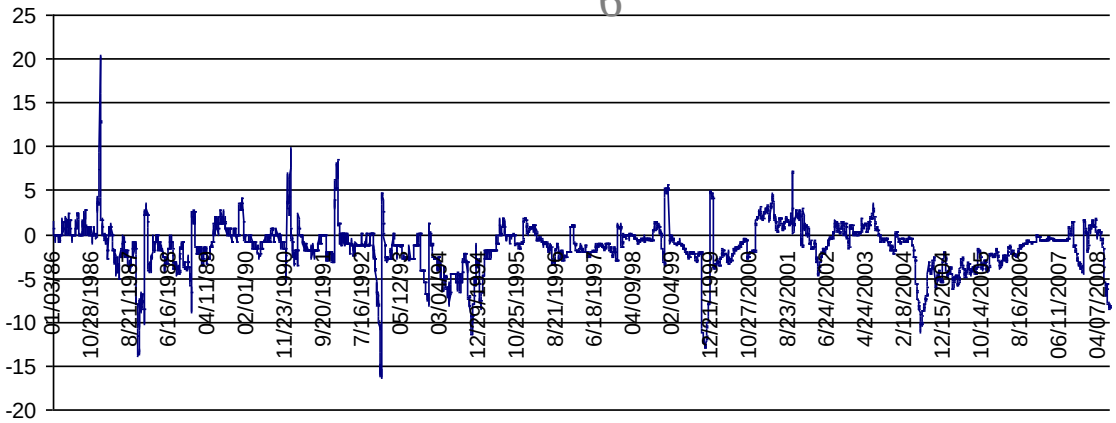
5.3. Le prix de marché du risque

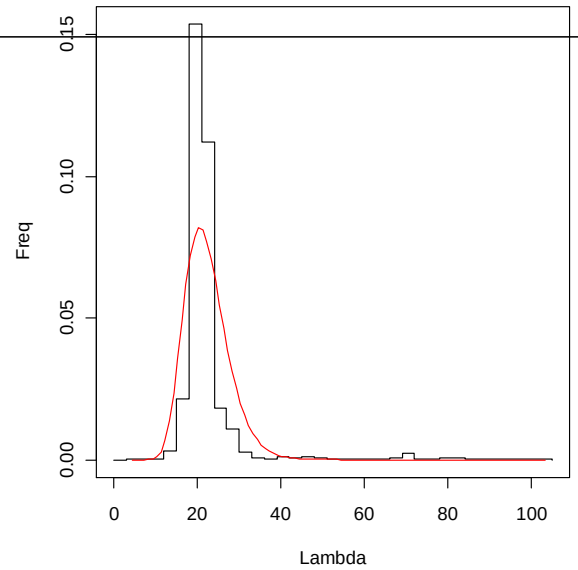
Le prix de marché du risque est très erratique (AHMAD et WILLMOT [2006]) :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u-\lambda w) + o(T-t)$$

$$\lambda_t = \frac{2\left(R_t^1 - R_t^{1,3}\right)}{\frac{1}{6}w} + \frac{u}{w}$$







5.3. Le prix de marché du risque

La mise en œuvre dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel est simple

$$dr_t = \left(u_t - \lambda_t w_t\right)dt + w_t dW_t$$

$$d\lambda_t = \left(p_t + \lambda_t q_t\right)dt + q_t dW_t^2$$

$$\longrightarrow \quad P\left(t,T\right) = E_t\left[\mathbf{exp}\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$$

et on peut ensuite utiliser une approche par simulation :

$$P_K\left(t,T\right) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{exp}\left(-\sum_{i=1}^{n} r_k\left(t_i\right)\right)$$

Cela évite la contrainte usuellement imposée de disposer d'un modèle affine sous *P* et *Q* (*cf*. STANTON [1997] qui discute ce point et CAJA et PLANCHET [2010]).

5.3. Le prix de marché du risque

Cette approche présente l'avantage d'utiliser directement les paramètres *u* et *w* du processus de taux court dans l'univers historique qui, complétés par la description de λ, permet de calculer des prix.

La logique de calibrage du modèle est alors « naturelle » :

- calibrage à partir de données historiques du facteur de risque (ici le taux court) ;

- calibrage de λ à partir de prix (ici de ZC).

De la sorte il devient possible de calculer des quantiles et des prix de manière cohérente. L'instabilité du calibrage en fonction de l'historique retenu constitue une difficulté.

La généralisation à l'ensemble des facteurs de risque conduit à l'approche par déflateur (cf. CHENG et PLANCHET [2018] et ARMEL et PLANCHET [2021]).

5.4. La structure de dépendance

Peu importante pour le calcul du *best estimate*, la structure de dépendance devient déterminante pour le calcul du besoin en capital. La copule gaussienne utilisée la plupart du temps n'est pas adaptée (ici on modélise l'inflation, les taux court et long, les rendements des actions et de l'immobilier) :

Copule	La norme	La norme
Gaussienne	1,408	*13,476*
Student	1,916	58,224
Cook Johnson	*0,974*	13,786
Gumbel	0,989	13,865
Franck	0,988	13,857

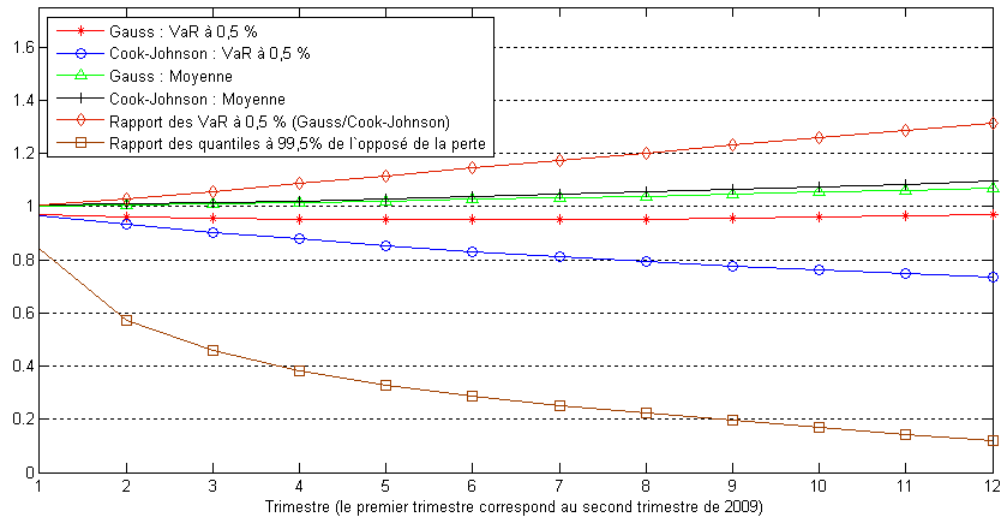
On est conduit à retenir une copule archimédienne (*cf*. ARMEL et *al*. [2010]). Plus généralement on peut utiliser des structures de dépendance hiérarchiques en présence d'un nombre élevés de classes d'actif (*cf*. BOUVIER [2010]).

NB : l'existence d'un processus ainsi construit n'est pas simple à prouver.

5.4. La structure de dépendance

Les conséquences du point de vue de l'exigence de marge sont sensibles. On considère un portefeuille composé de 80 % d'obligations d'Etat EEA 5 ans, 10 % d'actions françaises et 10 % d'immobilier, géré de manière à maintenir cette allocation constante.

$$R'(t) = \frac{1 - VaR_{[0,t]}^{Gauss}}{1 - VaR_{[0,t]}^{Cook-Johnson}}$$



Le SCR est égal à 4,7 % avec la structure normale, 12,2 % avec Clayton.

5.5. Modalités d'utilisation du GSE

Une fois le GSE construit, son utilisation peut (doit) parfois être optimisées, notamment au regard de contraintes de temps de calcul.

On a vu en effet que le schéma de calcul d'un *best estimate* présenté en introduction requiert *a priori* la simulation d'un nombre élevé de trajectoires pour voir converger les estimateurs empiriques vers leurs valeurs théoriques.

$$BEL = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{a=1}^{A}\frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1+R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

$$\underset{N\to\infty}{\to} E^{P^A\otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

Dès lors il est peut être utile (indispensable) d'optimiser ce schéma. On présente ci-après très succinctement la méthode proposée dans NTEUKAM et PLANCHET [2012].

5.5. Modalités d'utilisation du GSE

Pour des raisons d'optimisation des temps de calculs, on peut remplacer le faisceau de trajectoires du processus d'actif par un ensemble simplifié construit de la manière suivante :

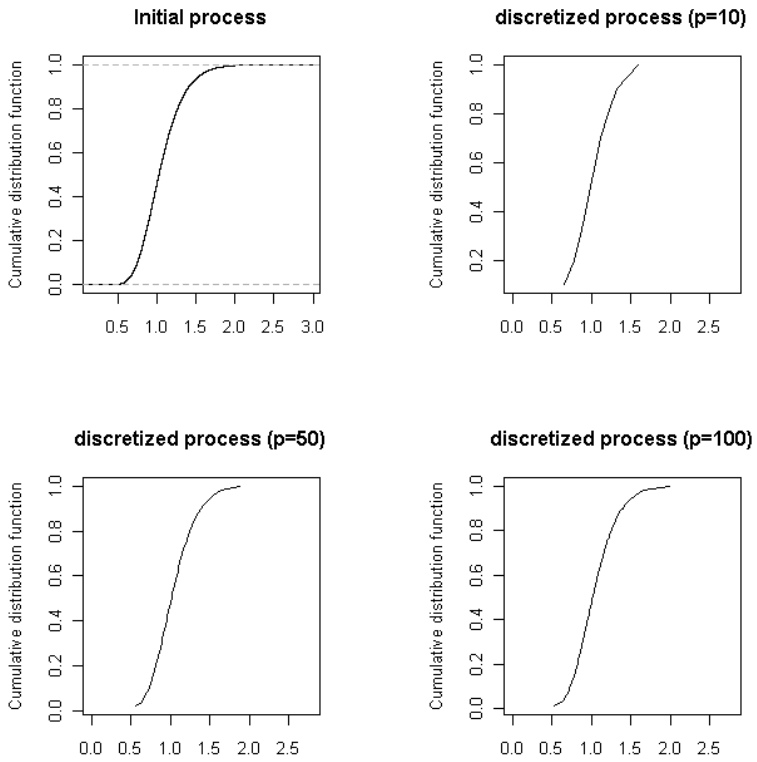
- on fixe une partition de $[0,+\infty[$, $\left\{\left[s_{j-1},s_j\right[,1\leq j\leq p\right\}$
- on pose $\xi_j(t)=\mathbf{E}\left(S(t)\middle|S(t)\in\left[s_{j-1},s_j\right[\right)$
- on définit un nouveau processus $\xi(t)$ en sélectionnant l'une des *p* trajectoires $\xi_j(t)$ chacune ayant la probabilité :

$$\pi_{t,j}=P\left(S(t)\in\left[s_{j-1},s_j\right[\right)$$

En d'autres termes on effectue des regroupements de trajectoires en fonction de la valeur au terme du processus d'origine.

5.5. Modalités d'utilisation du GSE

On trouve typiquement



Le calcul du BEL peut ainsi être effectué de manière plus efficace.

Sommaire

1. *Best estimate* et SCR
2. Les composants du GSE
3. Estimation et calibrage
4. Validation
5. Quelques points d'attention
6. **Un exemple dans le cadre de l'ORSA**

6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

6.1. Le contexte

Dans le cadre de la mise en place du volet quantitatif de l'ORSA, un organisme assureur doit mettre en place des outils lui fournissant une vision prospective de sa solvabilité et, en particulier, des indications sur l'incertitude associée au niveau de la couverture des engagements réglementaires (en premier lieu du SCR).

Il s'agit de fournir des informations sur la distribution de probabilité d'indicateurs clé associés au bilan économique, tels que la valeur de l'actif, du passif, du surplus, du SCR, etc. Cette distribution doit être calculée pour chaque année de projection sur un horizon de l'ordre de celui du plan stratégique, disons de 3 à 5 ans (*cf*. GUIBERT et *al*. [2012]).

En présence de dispositif de participation aux bénéfices qui créent des interactions fortes entre l'actif et le passif, la modélisation de ces distributions s'avère délicate. En effet, le calcul des provisions techniques dans le cadre du pilier 1 s'effectue le plus souvent par simulations, ce qui conduit à une imbrication de simulations pour utiliser ces outils dans le cadre de l'ORSA (*cf*. BONNIN et *al*. [2014]).

6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

6.1. Le contexte

Dès lors, il convient de proposer des approches plus efficaces d'un point de vue numérique, comme par exemple dans BONNIN et *al*. [2014] pour le cas des contrats d'épargne en euros.

Dans le cas d'un contrat de retraite, ses contraintes réglementaires et en particulier les règles de détermination de la revalorisation des prestations sont analogues à ce qui prévaut pour les contrats d'épargne. Toutefois, l'objectif de revalorisation d'un contrat de retraite est le plus souvent directement relié à l'inflation (*cf*. PLANCHET et THÉROND [2007]).

6. Un exemple dans le cadre de l'ORSA

6.1. Le contexte

On utilise un marché financier qui généralise celui proposé dans BONNIN et *al*. [2010] et dont la logique est de projeter directement des structures de prix. Quatre facteurs de risque sont intégrés au modèle :

- le niveau des taux (*cf*. 2.2),
- de l'inflation (*cf*. 2.5),
- des *spread* de crédit (*cf*. 2.3)
- et le prix des actions (*cf*. 2.1).

Les approches retenues pour chacun de ces classes sont décrites *infra*.

D'autres facteurs de risque affectent potentiellement le bilan de l'organisme, notamment le change, l'immobilier et la concentration des émetteurs.

Ils ne sont pas modélisés dans le cadre de la démarche prospective compte tenu de leur importance moindre par rapport aux 4 risques ci-dessus.

6.2. Le cadre de modélisation : l'évaluation « économique » du bilan

Le modèle doit permettre de rendre compte de :

- la dynamique des facteurs de risque « bruts » issus du marché

- l'effet d'atténuation des comptes sociaux et du cadre réglementaire qui construit le taux servi par filtrage du taux de marché.

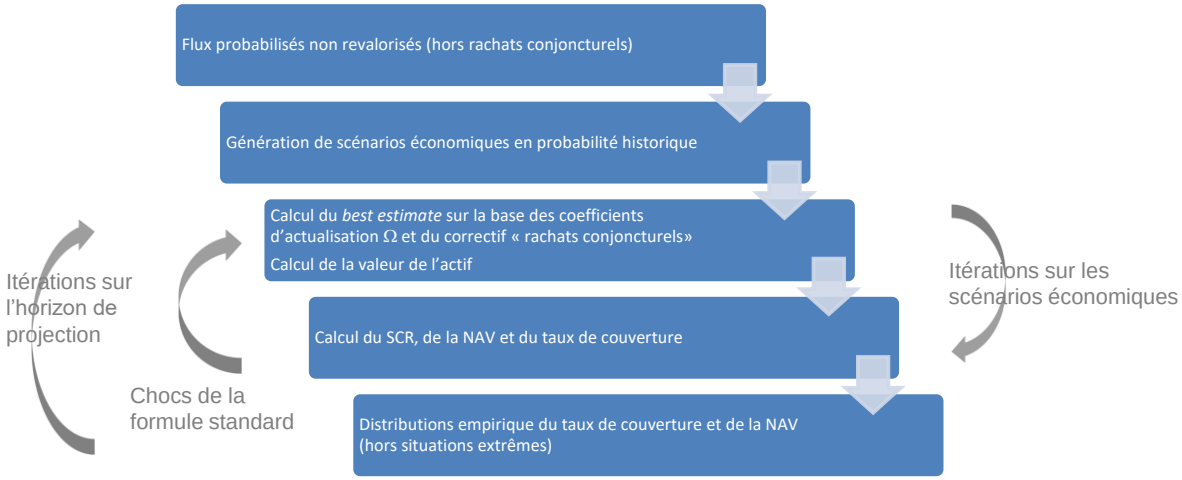
Les paramètres sont donc contraints par le fait que le *best estimate* issu du modèle doit coïncider avec celui issu des outils « pilier 1 » qui projettent effectivement la mécanique des comptes sociaux et donc le taux servi (*cf*. 1.1). De cette manière le coût de la contrainte règlementaire globale de participation aux bénéfices est bien pris en compte dans le modèle.

Le modèle proposé doit donc permettre de prendre en compte toute politique de participation aux bénéfices équivalente en termes de risques à garantir, outre le taux technique, à une fonction affine du taux sans risque.

6.2. Le cadre de modélisation : l'évaluation « économique » du bilan

Il repose sur un modèle de calcul des coefficients d'actualisation pour les prestations objet d'une revalorisation et pour les cotisations (et un correctif global pour les rachats conjoncturels) et un générateur de scénarios économiques en probabilité historique pour la projection des facteurs de risque financiers.

Le calcul du SCR peut être calculé à chaque date en formule standard, ce qui conduit finalement au schéma :



6.2. Le cadre de modélisation : le calcul des provisions techniques

Le calcul du *best estimate* est effectué sur la base de déflateurs spécifiques, prenant en compte le mécanisme de revalorisation et un correctif pour mesurer l'impact de la possibilité de sortie anticipé d'un adhérent du régime. A partir de l'expression générale de la somme des flux de trésorerie actualisés

$$\Lambda = \sum_{j \geq 1} \delta(j) \times \left(\left(1+\tau_p\right) \times P_j^R - C_j \right)$$

on obtient l'expression suivante du *best estimate*

$$\begin{aligned} BE &= E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda) \\ &= \left(1+\tau_P\right) \times \sum_{j \geq 1} E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j) \times P_j^R\right) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}\left(C_j\right) \end{aligned}$$

Le point délicat est la calcul de $E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j) \times P_j^R\right)$ qui nécessite la mise au point d'un modèle ALM.

6.2. Le cadre de modélisation : le calcul des provisions techniques

Les contrats incluent de retraite un taux technique et doivent donc être revalorisés au moins à ce taux. Cela implique que le coefficient de revalorisation des flux pour la période *k* associé à une génération de contrats aux taux technique *i* est, si ω désigne le taux de revalorisation avant taux technique, de la forme

$$1+\rho_k = 1+i+\left[\omega_k - i\right]^+$$

On fait l'hypothèse que l'objectif de revalorisation du régime est de servir au moins (une fraction de) l'inflation, ce qui conduit à l'expression suivante pour les prestations actualisées :

$$P_j^R = P_j \times \prod_{k=1}^{j}\left(1+\rho_k\right) = P_j \times \prod_{k=1}^{j}\left(1+i+\left[\lambda \times i_k - i\right]^+\right)$$

On exploite alors la forme particulière de l'inflation et le lien (fort) entre l'inflation et le taux sans risque nominal :

$$i_t = \frac{1+r_t}{1+R_r\left(t,1\right)} - 1 \approx \left(1+r_t\right)\times\left(1-R_r\left(t,1\right)\right) - 1 \approx r_t - R_r\left(t,1\right)$$

6.2. Le cadre de modélisation : le calcul des provisions techniques

La valeur économique de la prestation actualisée s'exprime alors selon

$$E^{P^a \otimes Q^f}\left(\delta(j)\times P_j^R\right)=E^{P^a}\left(P_j\right)\times E^{Q^f}\left(\delta(j)\times\prod_{k=1}^{j}\left(1+\rho_k\right)\right)=E^{P^a}\left(P_j\right)\times E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{1+\rho_k}{1+r_k}\right)$$

Tout se ramène donc à calculer le déflateur

$$\Omega(0,j)=E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{1+\rho_k}{1+r_k}\right)=E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\left(1-\Delta_k\right)\right)$$

On utilise pour cela le fait que, dans le modèle d'inflation proposé, on peut écrire au premier ordre que

$$i_t\approx(1-\beta)r_t+\beta r_0-R_r(0,1)$$

$$\Omega(0,j)=E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{1+i+\left[\lambda(1-\beta)r_k+\lambda\beta r_0-\lambda R_r(0,1)-i\right]^+}{1+r_k}\right)$$

6.2. Le cadre de modélisation : le calcul des provisions techniques

En, rassemblant les différents composants rappelés *supra*, on a une expression de la forme

$$PT = \frac{(1+\tau_{RM})\times(1+\tau_P)}{1-\gamma\dfrac{\beta\times\sigma_\Delta^2}{\mu}}\times\sum_{j\geq 1}\Omega(0,j)E^{P^a}(P_j)-\sum_{j\geq 1}P_n(0,j)E^{P^a}(C_j)$$

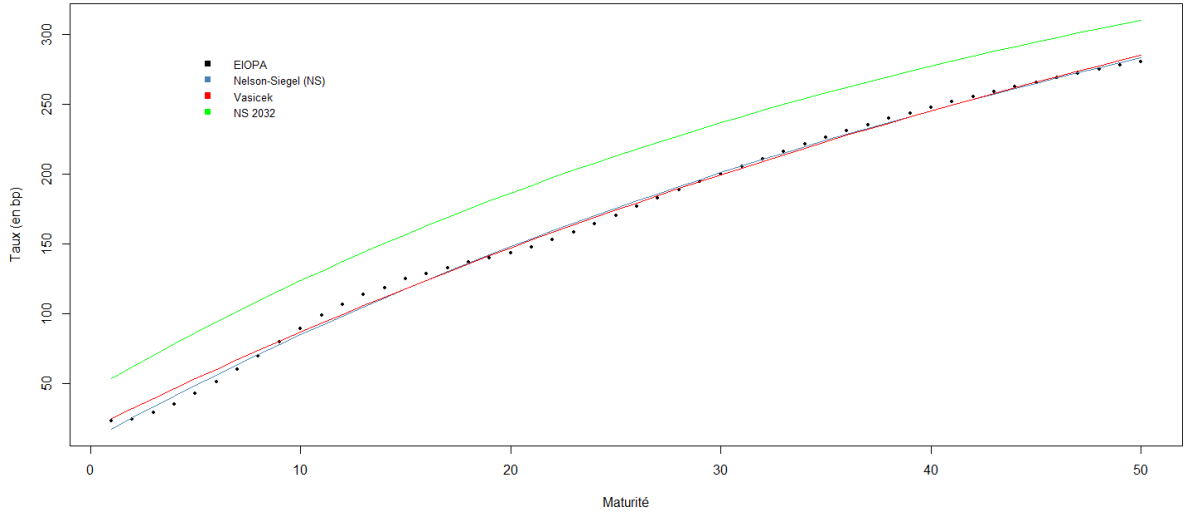
pour les provisions techniques avec le déflateur :

$$\Omega(0,j)=E^{Q^f}\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{1+i+\left[\lambda(1-\beta)r_k+\lambda\beta r_0-\lambda R_r(0,1)-i\right]^+}{1+r_k}\right)$$

6.3. La double vision « historique » et « risque neutre » (*cf*. 2.2 p. 50)

La courbe initiale est obtenue en ajustant le modèle de Nelson-Siegel sur les 50 premières années de la courbe fournie par l'EIOPA ; Cette courbe se déplace régulièrement vers le haut jusqu'à la courbe verte à l'horizon 2032 ;

Un ajustement par le modèle de Vasicek est également effectué pour le calcul des provisions « économiques ».



6.3. La double vision « historique » et « risque neutre »

- La courbe initiale fournie par l'EIOPA est utilisée pour calibrer l'ajustement de la forme paramétrique de Nelson-Siegel (projetée sous *P*) ;

- Cette forme paramétrique est utilisée à chaque pas de projection pour calibrer le modèle de Vasicek à partir duquel sont projetés (sous *Q*) les taux courts utilisés pour le calcul des coefficients d'actualisation.

Dans ce contexte il est important d'assurer une certaine cohérence entre ces différentes représentations. Le calibrage est ainsi déterminé pour minimiser les écarts entre ces différentes courbes. Afin d'assurer la cohérence du calcul des valeurs actuelles entre la courbe initiale et la courbe issue du modèle de Vasicek, on corrige cette dernière pour assurer ex-post que la valeur actuelle des prestations non revalorisée soit identique avec les ZC de la courbe EIOPA et ces mêmes coefficients issus du modèle de Vasicek ; pour cela on ajoute un « spread d'ajustement » aux taux ZC issus du modèle de Vasicek. Ce spread est déterminé en 0 et supposé constant au cours de la projection

6.4. Le calcul du SCR

On utilise ici un calcul selon la formule standard Le point essentiel consiste à recalculer conformément à la formule standard les SCR taux, spread et actions, de la manière suivante :

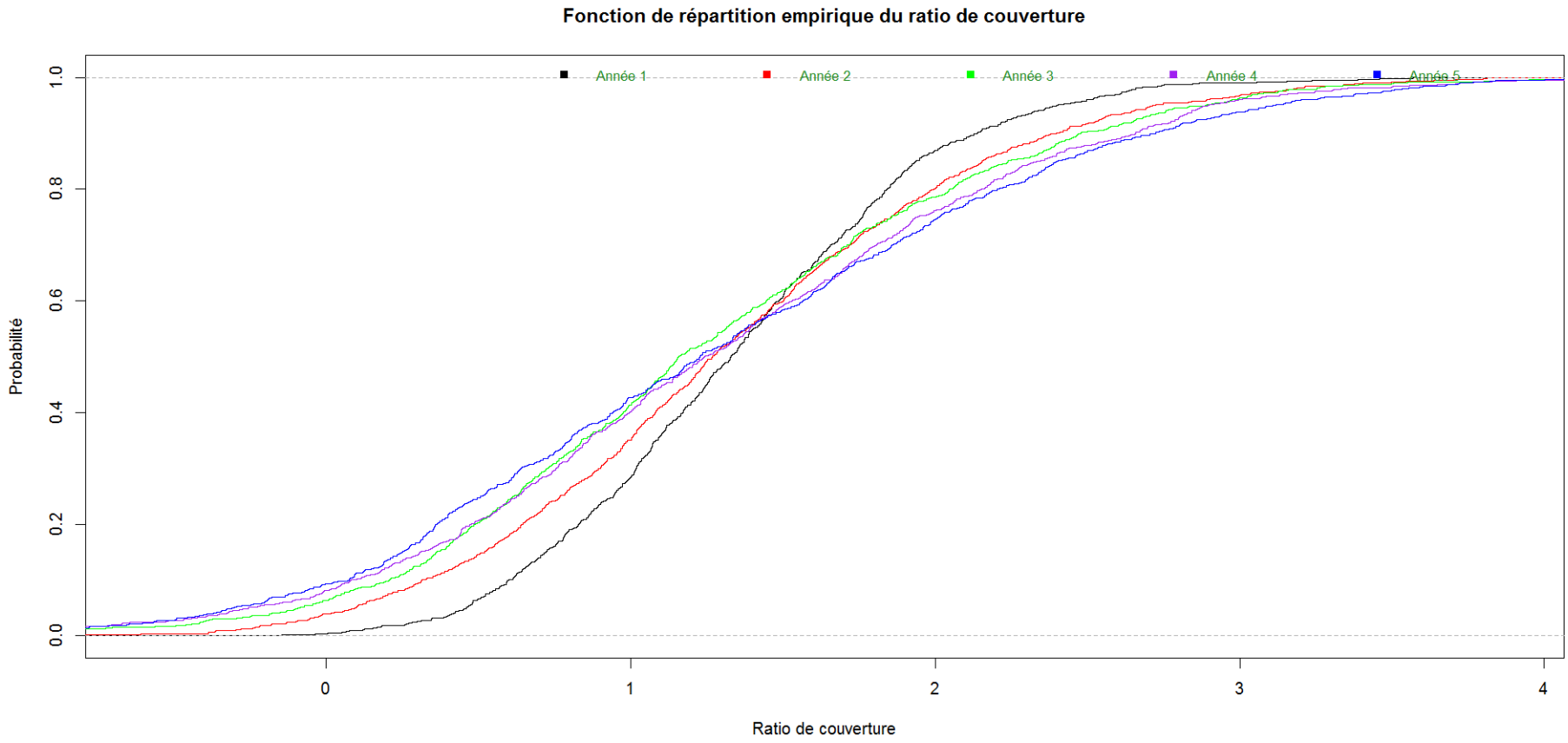
- taux : pour chaque couple (année de projection, scénario), on recalcule les coefficients d'actualisation avec la courbe de taux nominaux choquée vers le haut puis vers le bas ; on en déduit aussi les structures d'inflation et réelles choquées (par souci de cohérence avec le cadre de modélisation, un choc de taux entraîne un choc sur l'inflation) ;

- *spread* : c'est un simple choc sur la valeur de marché (VM) fonction de la notation (qui ne bouge pas) et de la duration : on calibre le choc en 0 et on l'applique à la valeur des obligations. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.

- actions : on applique un abattement de 22 % sur la valeur de marché. Il n'y a pas d'interaction avec les coefficients d'actualisation.

6.5. Les résultats

L'allure typique des résultats est la suivante



Références

ACP [2010] *Orientations nationales complémentaires*

ACPR [2015b] «La situation des principaux organismes d'assurance en 2014 », Analyses et Synthèses, n°52.

ACPR [2015a] « Stress test EIOPA 2014 : échantillon européen, situation domestique et *benchmarkings* », Analyses et Synthèses, n°44.

AHMAD R.; WILMOTT P. [2006] « The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets », *Wilmott magazine*.

AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession ». *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92. (http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf).

ALFONSI A. [2012] Discrétisation de processus et modélisation en finance, Mémoire d'HDR, Université Paris Est.

ANG A., BEKAERT G., WIE M. [2008] « The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation », *Journal of Finance*, Volume 63, Issue 2, pp 797–849.

ARMEL K., PLANCHET F. [2021] « Assessing the economic value of life insurance contracts with stochastic deflators », *Bankers Markets Investors*, n°167, December 2021.

ARMEL K., PLANCHET F. [2019] « How to Define the Quality of an Economic Scenario Genarator to Assess the Best Estimate of a French Savings Contract in € ? », Bankers Markets Investors, n°157, June 2019.

ARMEL K., PLANCHET F. [2018] « Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l'évaluation économique des contrats d'épargne ? », Assurances et gestion des risques, Vol. 85 (1-2).

ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.

BAUER D., BERGMANN D., REUSS A. [2010] « Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach », *Proceedings of the 2010 ICA congress*.

BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. », *Bulletin Français d'Actuariat,* vol. 11, n°21.

BOUVIER P. [2010] *Application des copules à la finance de marché*, Thèse de doctorat, UQAM.

BRENNAN M.; XIA Y. [2000] « Dynamic Asset Allocation under Inflation, », UCLA, Working Paper, 24-00.

Références

CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, Vol.78 (3/4).

CHENG P.K., PLANCHET F. [2019] « Stochastic Deflator for an Economic Scenario Generator with Five Factors », Bankers Markets Investors, n°157, June 2019.

CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; Rudebush G.D. [2010] « The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models », Federal Reserve Bank of San Francisco, WP n°2007-20.

DUFFIE D., SINGLETON K.J. [2003] *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press.

FRIGGIT J. [2001] *Prix des logements, produits financiers immobiliers et gestion des risques*, Paris: Economica

GAUTHIER T. [2011] *Développement d'un générateur de scénarii économiques au sein d'une compagnie d'assurance-vie*, Mémoire d'actuaire, ISFA.

IFERGAN E. [2013] Mise en œuvre d'un calcul de *best estimate*, Mémoire d'actuaire, Dauphine.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

HEATH D., JARROW R., MORTON K. [1990] « Bond pricing and the term structure of interest rate: a discret time approximation », *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 25, 419-440.

HULL J., WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate-Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, (Winter 1990), pp. 573-592.

KAMEGA A., PLANCHET F., THÉROND P.E. [2009] Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation, Paris : Economica.

LAIDI Y., PLANCHET F. [2015] « Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance », Bulletin Français d'Actuariat, vol. 15, n°29.

LAIDI Y. [2013] Problématiques de calibration en vue de l'évaluation des risques de taux, de défaut et de liquidité, Mémoire d'actuaire, CNAM.

LEROY G., PLANCHET F. [2010] « Que signifie la ruine dans Solvabilité 2 ? », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°147 du 01/05/2010.

LONGSTAFF F.A.; MITHAL S.; NEIS E. [2005] « Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market», *Journal of Finance*, Vol. LX, n° 5.

NTEUKAM O., PLANCHET F. [2012] « Stochastic Evaluation of Life Insurance Contract: Model Point on Asset Trajectories & Measurement of the Error Related to Aggregation », *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 51, pp. 624-631.

Références

PLANCHET F., THÉROND P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.

PLANCHET F. [2010] « Les stress-tests : un outil au cœur de Solvabilité 2. », Banque Stratégie, n°282 du 01/06/2010.

PLANCHET F. [2009] « Provisionnement et couverture des garanties financières : deux notions indissociables. », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°138 du 01/07/2009.

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third edition. Springer Verlag, Berlin.

RACICOT F.E., THEORET R. [2006] « Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues », *Cahier de Recherche* n°08-2006, UQAM.

ROGERS L.C.G. [1995] « Which model for term-structure of interest rates should one use? », *Mathematical Finance*, IMA vol. 65, Springer, 93-116.

RONCALLI T. [1998] *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*, Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV

ROSSPOPOFF B. [2013] Modèles de taux et d'inflation pour Solvabilité 2, Mémoire d'actuaire, ISFA.

STANTON R. [1997] « A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk », *Journal of Finance* 52: 1973-2002.

WALTER C., BRIAN E. (Dir.) [2008] *Critique de la valeur fondamentale*, Paris : Springer

WINDCLIFF H., BOYLE P. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal*, vol. 8, n°3, p. 32-4

ZAJDENWEBER D. [2000] *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion

Packages et codes R

Les GSE peuvent être mis en œuvre avec différents packages R, parmi lesquels :

- ESG (https://cran.r-project.org/web/packages/ESG/index.html)
- ESGtoolkit (https://cran.r-project.org/web/packages/ESGtoolkit/index.html)
- ycinterextra (https://cran.r-project.org/web/packages/ycinterextra/index.html)

Les codes R de cette présentation sont disponibles ici :

http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/A5E99E9ABF5D3674C125772F00600F6C

Contact

Frédéric PLANCHET

frederic@planchet.net

PRIM'ACT
42 avenue de la Grande Armée
75017 Paris
+33-1-42-22-11-00

ISFA
50 avenue Tony Garnier
F - 69007 Lyon
+33-4-37-38-74-37

http://www.primact.fr
http://www.ressources-actuarielles.net
http://blog.ressources-actuarielles.net