

WINTER
& ASSOCIÉS



Générateurs de scénarios économiques en assurance

Points d'attention

Version 1.0

Juillet 2012

Frédéric PLANCHET
fplanchet@winter-associes.fr
Aymric KAMEGA
akamega@winter-associes.fr

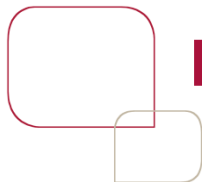
Les générateurs de scénarios économiques (GSE) sont devenus un composant indispensable de la « boîte à outil » à mobiliser pour répondre aux exigences de Solvabilité 2.

Dans leur version « risque neutre » ils sont indispensables au calcul des *best estimates* en assurance-vie.

On peut également avoir besoin de modèles de valorisation élaborés pour justifier de la variation de valeur d'actifs complexes (obligations convertibles) consécutive à un choc (formule standard).

La projection de l'environnement économique est également nécessaire pour l'ORSA, dans une logique qui prolonge les DFA non-vie développées il y a maintenant une dizaine d'années (*cf.* Ahlgrim et *al.* [2005]).

Enfin, une articulation étroite entre ces deux approches est nécessaire en assurance-vie.



Préambule

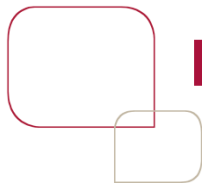
Qu'est-ce qu'un générateur de scénarios économique (GSE) ?

Un GSE est un outil qui permet de projeter des facteurs de risque économiques et financiers.

Il faut noter que le lien entre les facteurs de risque et les prix d'actifs peut être plus ou moins direct :

- pour les actions et l'immobilier, le facteur modélisé est directement le prix de l'actif ;
- pour les obligations, on modélise en général un nombre limité de facteurs explicatifs, typiquement le taux court.

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'usage qui va être fait du GSE et conduira à définir les notions de probabilité historique et probabilité risque neutre.



Préambule

Cette présentation se propose d'aborder quelques points potentiellement délicats dans la mise en œuvre d'un GSE et tentera de montrer qu'il est préférable de privilégier des approches simples et bien maîtrisées à des modèles complexes.

Après un rappel du cadre général de travail, on abordera quelques points nécessitant un peu d'attention sur les sujets suivants :

- estimation et calibrage ;
- mise en œuvre ;
- validation.

Pour les illustrations on supposera pour fixer les idées que les actions sont modélisées par B&S, les taux par H&W (*cf.* Hull et White [1990]) et le *spread* par LMN (*cf.* Longstaff et *al.* [2005]).

SOMMAIRE

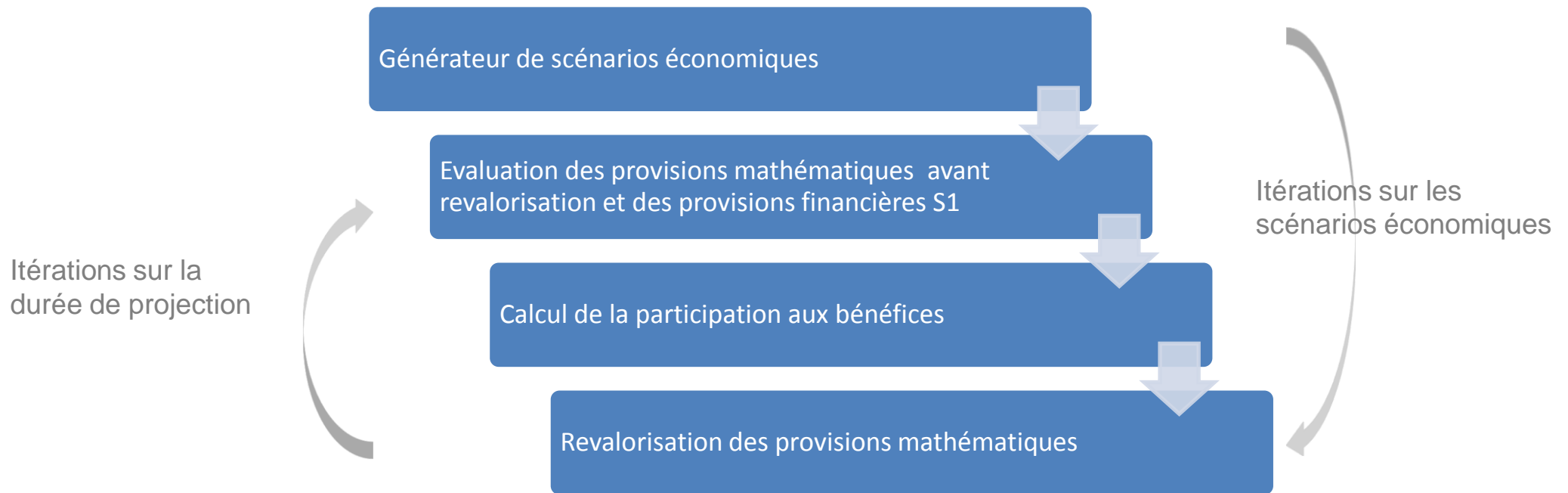
Propriétés d'un GSE en assurance

1. Le cadre général
2. Estimation et calibrage
3. Mise en œuvre
4. Validation

1. Le cadre général

En assurance-vie, le calcul des flux, puis du *best estimate* qui s'en déduit, est effectué dans le cadre suivant (cf. Planchet et al. [2011]) :

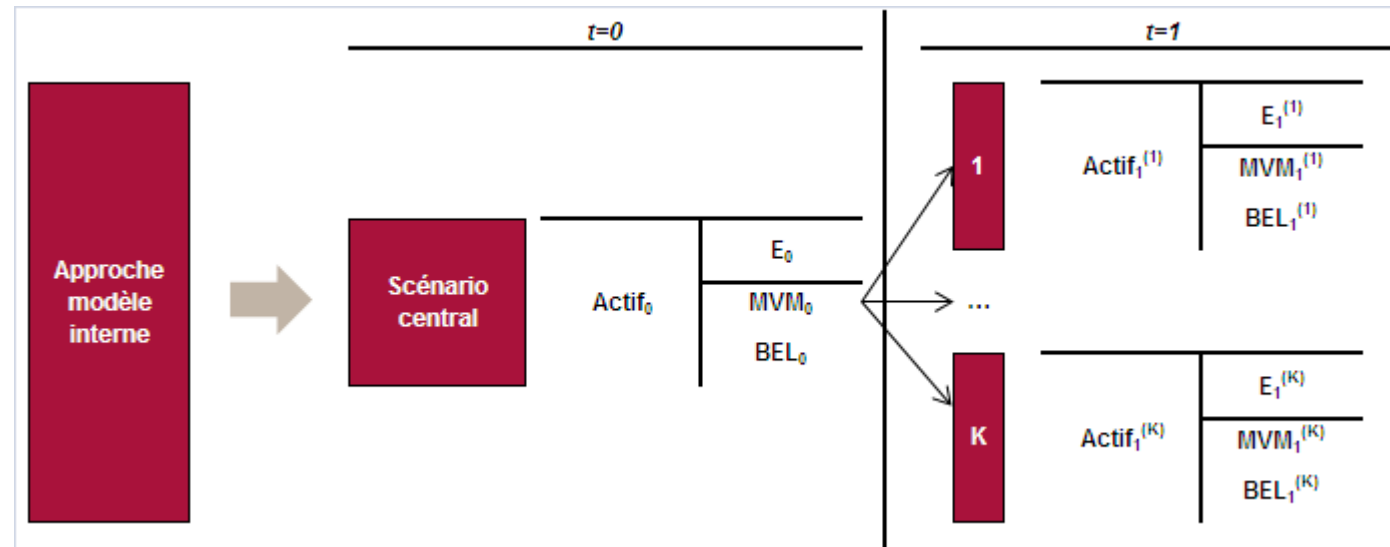
$$\Lambda = \sum_{j \geq 0} \frac{F_j}{(1 + R_j)^j} \qquad BEL = E^{P^A \otimes Q^F} (\Lambda)$$



Dans ce cadre le générateur est utilisé pour calculer des prix d'actifs en AOA.

1. Le cadre général

Le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (cf. Guibert et al. [2010]) :



La projection des facteurs de risque sur un an est effectuée en probabilité historique et le SCR est solution de :

$$P(E_1 < 0 | E_0 = x) \leq 0,5\%$$

souvent approché en pratique par

$$SCR \approx E_0 - VaR_{0,5\%}(\delta(1) \times E_1) \approx E_0 - P(0,1) \times VaR_{0,5\%}(E_1)$$

1. Le cadre général

Les facteurs de risque typiquement intégrés sont les suivants :

- prix des actions ;
- taux court ;
- processus de défaut des contreparties obligataires ;
- processus de liquidité ;
- prix des actifs immobiliers ;
- inflation.

D'autres facteurs économiques peuvent être pris en compte, par exemple le chômage.

Les choix de modélisation sont adaptés à l'objectif poursuivi : calcul de prix ou analyse de la distribution du facteur.

1. Le cadre général

Dans le cadre d'une modélisation globale dont l'ambition est de fournir des distributions de prix, on est donc formellement conduit à utiliser une approche à deux niveaux :

- la construction d'une fonctionnelle g fournissant le vecteur des prix en fonction des variables d'état Y à la date du calcul, $\pi_0 = g(Y_0)$
- la construction d'une dynamique pour les facteurs de risque,

On peut alors déterminer des prix à n'importe quelle date *via* :

$$\pi_t = g(Y_t)$$

La construction de la fonctionnelle g s'appuie sur les hypothèses classiques de la finance de marché et notamment l'AOA qui conduit à construire des probabilités « risque neutre » qui rendent les processus de prix actualisés martingales.

La construction de la dynamique de Y est un problème d'économétrie.

1. Le cadre général

Par exemple dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel de type Vasicek, on a les modèles suivants pour le facteur :

Projections

$$dY_t = dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Calculs de prix

$$dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma dW_t^Q$$

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda \sigma}{a}$$

et la fonctionnelle d'évaluation est :

$$g(r_t) = P(r_t, T - t) = \exp \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} (r_\infty - r_t) - (T - t)r_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right)$$

avec $r_\infty = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2a^2}$.

On observe ici que le lien entre les 2 représentations s'effectue *via* le paramètre λ .
NB : le paramètre σ est théoriquement invariant.

1. Le cadre général

De manière générale, le prix de marché du risque fournit le lien entre les représentations risque neutre et historique de la dynamique des facteurs de risque. Il apparaît naturellement dans les modèles à base de processus de diffusion.

On considère un mouvement brownien B sous P et un processus adapté λ vérifiant la condition de Novikov :

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right) \right] < \infty$$

On définit alors un processus W et une mesure Q en posant :

$$W_t = B_t + \int_t^T \lambda(u) du \quad \frac{dQ}{dP} = \exp \left(- \int_0^T \lambda(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right)$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que W est un Q mouvement brownien.

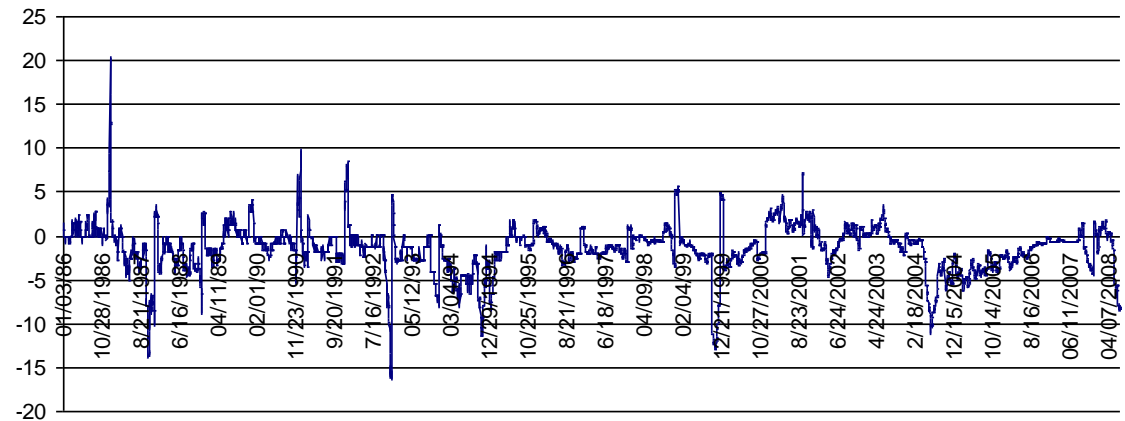
1. Le cadre général

Mais... le prix de marché du risque est très erratique (cf. Ahmad et Willmot [2006]) :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u - \lambda w) + o(T-t)$$

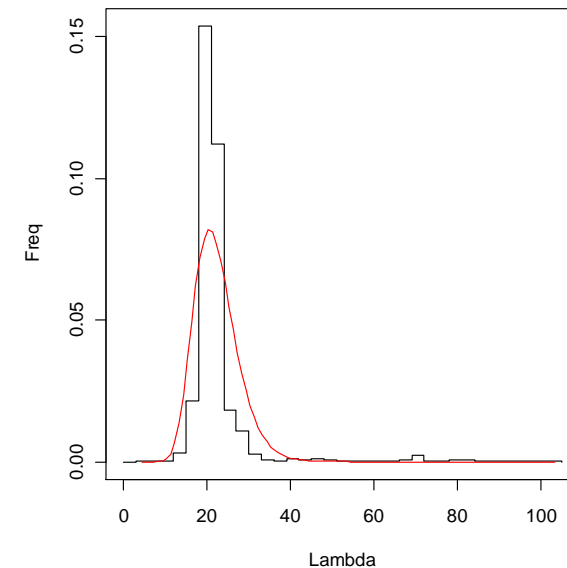


$$\lambda_t = \frac{2(R_t^1 - R_t^3)}{\frac{1}{6}w} + \frac{u}{w}$$



Ce qui conduit potentiellement à complexifier les modèles (cf. Caja et Planchet [2010]).

Solution pratique : déconnecter les 2 approches.



SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

1. Le cadre général
2. **Estimation et calibrage**
3. Mise en œuvre
4. Validation

2. Estimation et calibrage

L'estimation des paramètres d'un GSE peut être effectuée de deux manières :

- estimation directe sur des données historiques de la grandeur modélisée (ex. : cours d'un sous-jacent) ;
- estimation à partir de la grandeur d'intérêt (ex. : prix des options) ;

selon que l'on travaille en probabilité historique ou risque neutre

Si l'estimation est effectuée sur des données historiques, le choix de la profondeur de l'historique est délicat.

Si l'estimation est effectuée sur des prix, le choix de la série de prix à retenir est délicat.

Enfin, l'estimation de la structure de dépendance pose des problèmes spécifiques en probabilité risque neutre.

2. Estimation et calibrage

Estimation de la structure de dépendance

Le taux court étant variable, le prix des options dans le modèle de B&S associé s'en trouve affecté.

En théorie, il convient d'adapter les formules d'évaluation des options pour le calcul de la volatilité implicite (ou le provisionnement de garanties plancher) pour en tenir compte :

$$C(0,T) = S \times N(d_1) - K \times P(0,T) \times N(d_2)$$

$$\text{avec } d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K \times P(0,T)}\right) \pm \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \tau = \int_0^T (\sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_s\sigma_P(u,T) + \sigma_s^2) du$$

Cela permet en théorie de calibrer un coefficient de corrélation de manière homogène à une volatilité implicite. Ceci n'est toutefois que rarement fait.

2. Estimation et calibrage

Cumul des erreurs d'estimation

On considère l'exemple du modèle LMN pour le risque de *spread* ; ce modèle intègre une composante de défaut (modèle à intensité) et une composante de liquidité (bruit blanc gaussien) :

$$d\lambda(t) = a(b - \lambda(t))dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)} dW_\lambda(t) \quad d\gamma(t) = \eta dW_\gamma(t)$$

On dispose de formules fermées pour les obligations et les CDS :

$$CB(0, T) = c \times \int_0^T A(t) C(t) P(0, t) e^{\lambda_0 B(t) - \gamma_0 t} dt + A(T) C(T) P(0, T) e^{\lambda_0 B(T) - \gamma_0 T}$$
$$+ (1 - \omega) \times \int_0^T C(t) P(0, t) (G(t) + \lambda_0 H(t)) e^{\lambda_0 B(t) - \gamma_0 t} dt$$
$$s = \omega \frac{\int_0^T \exp(B(t) \lambda_0) D(t) (G(t) + H(t) \lambda_0) dt}{\int_0^T A(t) \exp(B(t) \lambda_0) D(t) dt}$$

2. Estimation et calibrage

Cumul des erreurs d'estimation

La principale difficulté associée à ce modèle est l'estimation des paramètres :

- une fois fixé le taux de recouvrement ($1-LGD$), il reste 6 paramètres à calibrer (3+1 pour le défaut et 1+1 pour la liquidité) ; ces paramètres s'ajoutent à ceux du modèle pour la courbe $P(0, T)$ sous-jacente ;
- l'estimation s'effectue en plusieurs étapes complexes, à partir de prix de ZC sans risque, de ZC *corporate* et de CDS.

La cohérence de ces données n'est pas simple à établir.

On « empile » donc des programmes d'optimisation non linéaire avec les résultats du programme $N-1$ qui alimentent le programme N : le processus est en pratique très instable.

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

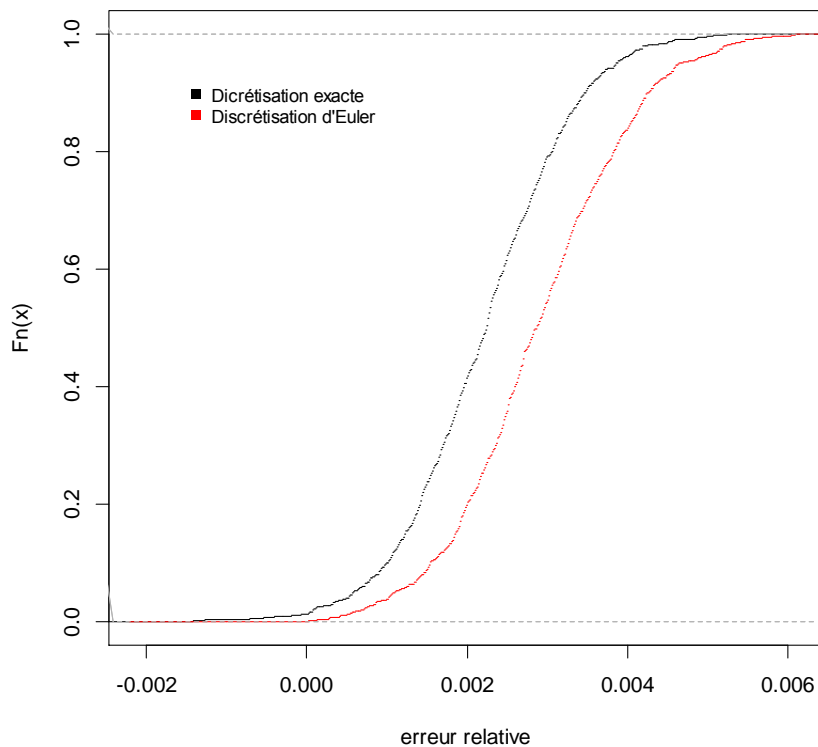
1. Le cadre général
2. Estimation et calibrage
- 3. Mise en œuvre**
4. Validation

3. Mise en œuvre

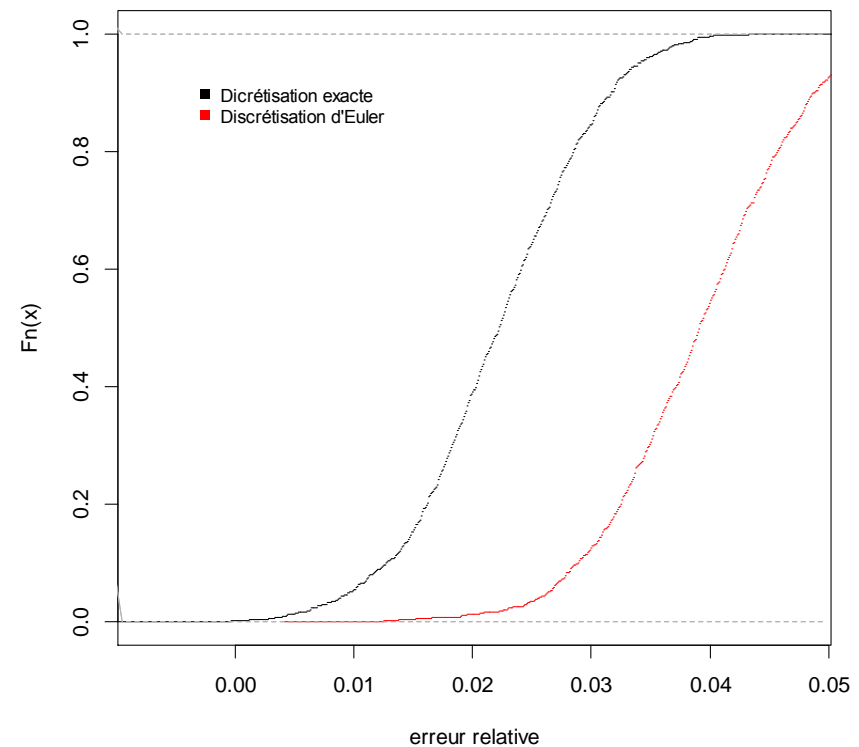
Mise en œuvre par simulation

La discrétisation induit des biais et, d'autre part, le nombre de simulations pour obtenir un niveau de précision fixé est croissant en fonction de la maturité du ZC ; en fixant par exemple ce nombre à 10 000 on trouve :

Répartition de l'erreur relative - Maturité=2



Répartition de l'erreur relative - Maturité=10



3. Mise en œuvre

Remarque sur la discrétisation

Le discrétisation peut être délicate car un processus n'admet en général pas de discrétisation exacte. On peut utiliser un schéma de Milstein :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}\varepsilon + \frac{\sigma_x(\tilde{X}_t, t)\sigma(\tilde{X}_t, t)}{2}\delta(\varepsilon^2 - 1)$$

qui donne par exemple avec un processus de Bessel (CIR) :

$$\tilde{\lambda}_{t+\delta} = \tilde{\lambda}_t + a(b - \tilde{\lambda}_t)\delta + \sigma_\lambda \sqrt{\tilde{\lambda}_t \times \delta} \varepsilon + \frac{\sigma_\lambda^2}{4}\delta(\varepsilon^2 - 1)$$

La qualité de la discrétisation est un point essentiel dans la mise en œuvre du modèle (*cf.* les graphiques précédents).

3. Mise en œuvre

Le schéma de calcul d'un *best estimate* présenté en introduction requiert *a priori* la simulation d'un nombre élevé de trajectoires pour voir converger les estimateurs empiriques vers leurs valeurs théoriques.

$$BEL = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^A \frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{(1 + R_n(0,t))^t}$$
$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} E^{P^A \otimes Q^F}(\Lambda)$$

On considère un contrat UC avec un sous-jacent modélisé par un processus log-normal et des taux modélisés par un modèle de Vasicek, de sorte que :

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r(u) - \frac{\sigma^2}{2}\right) du + \sigma B(t)\right) \quad dr(t) = k(\theta - r(t)) dt + \sigma_r dB_r(t)$$

Le contrat est de durée 10 ans, entièrement racheté au terme. Dans l'intervalle, le taux de rachat structurel est de 2 % et des rachats conjoncturels à hauteur de 5 % viennent s'ajouter lorsque la valeur de la part est inférieure à la valeur initiale.

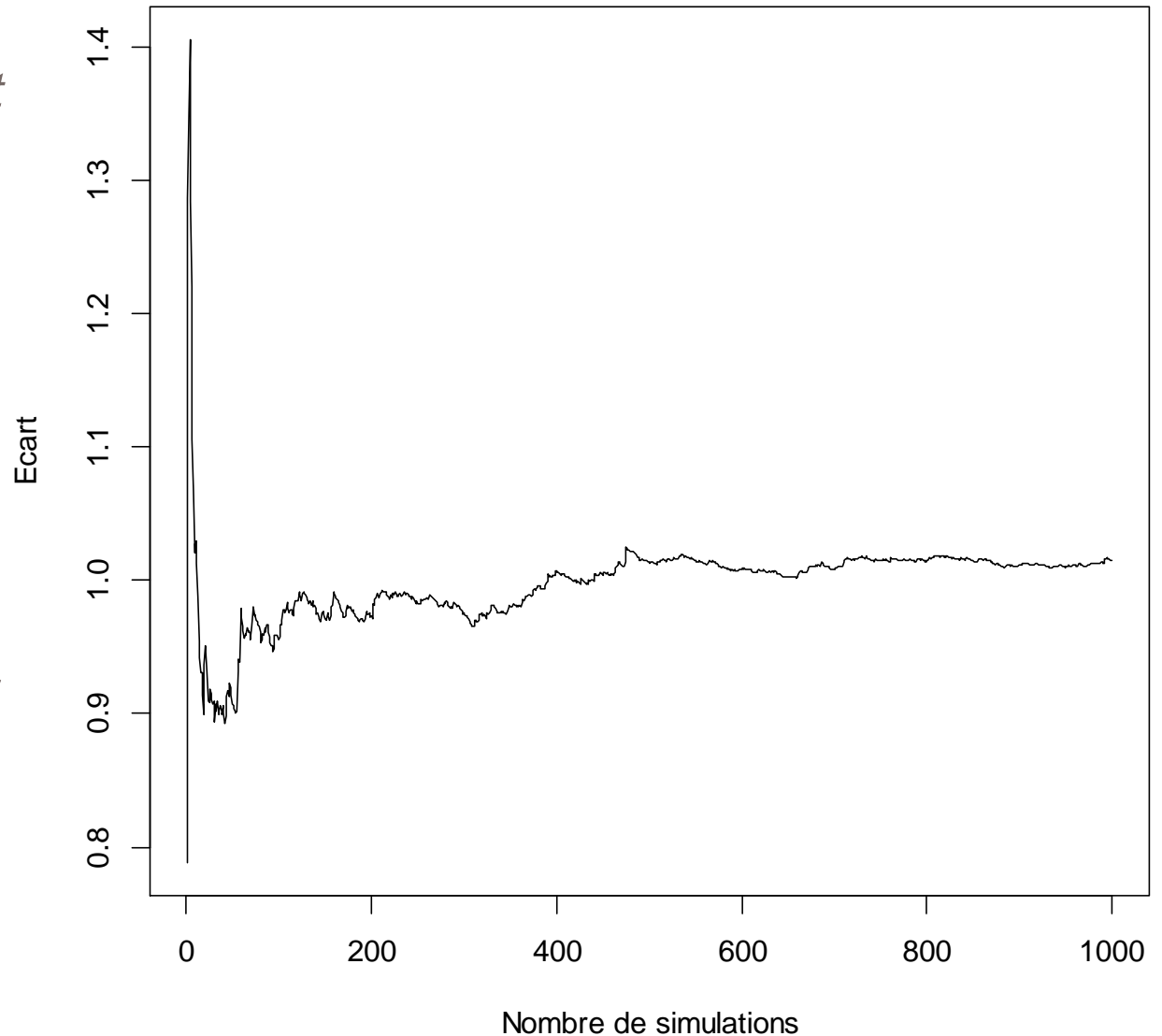
3. Mise en œuvre

La convergence du *best estimate* empirique vers sa valeur théorique est lente et, après 1000 tirages, un écart d'environ 1,5 % subsiste.

Pour diviser cet écart par 10 il faut multiplier le nombre de tirages par 100.

Dès lors il peut être utile (indispensable) d'optimiser ce schéma. On présente ci-après très succinctement la méthode proposée dans Nteukam et Planchet [2010].

Ecart de convergence en fonction du nombre de simulations

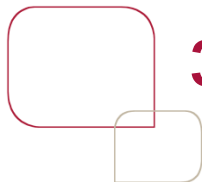


3. Mise en œuvre

Pour des raisons d'optimisation des temps de calculs, on peut remplacer le faisceau de trajectoires du processus d'actif par un ensemble simplifié construit de la manière suivante :

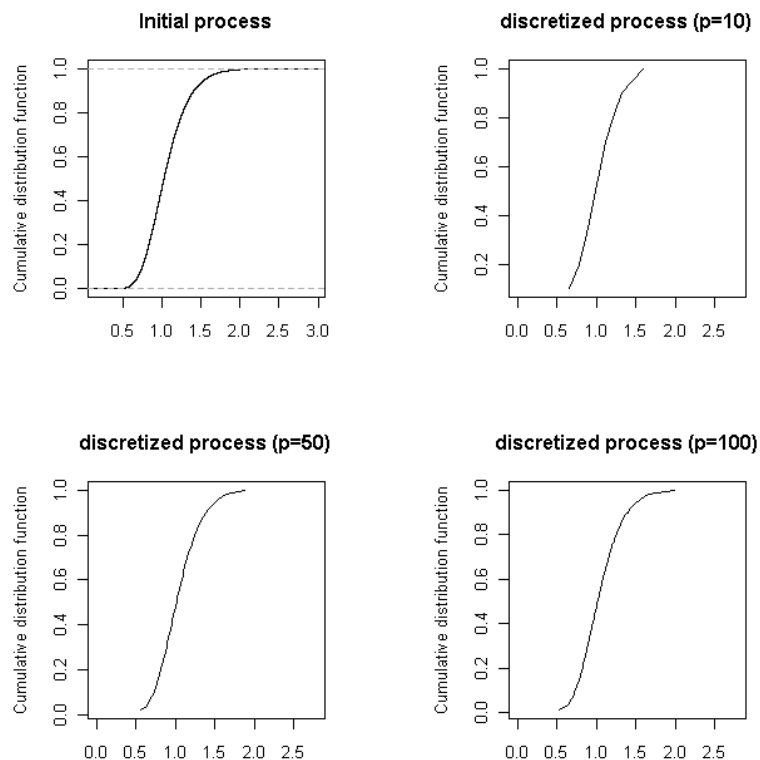
- on fixe une partition de $[0, +\infty[$, $\{[s_{j-1}, s_j[, 1 \leq j \leq p\}$
- on pose $\xi_j(t) = \mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{j-1}, s_j[)$
- on définit un nouveau processus $\xi(t)$ en sélectionnant l'une des p trajectoires $\xi_j(t)$.

En d'autres termes on effectue des regroupements de trajectoires en fonction de la répartition de la valeur du processus d'origine à chaque date.



3. Mise en œuvre

On trouve typiquement



Le calcul du BEL peut ainsi être effectué de manière plus efficace.

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

1. Le cadre général
2. Estimation et calibrage
3. Mise en œuvre
4. **Validation**

4. Validation

Le processus de validation d'un GSE diffère suivant que l'on se place sous les probabilités historique ou risque-neutre.

Il se décompose en une validation du calibrage et une validation de l'implémentation.

Validation du calibrage

Dans le premier cas, la validation est une combinaison d'éléments de nature statistique et de contrôles *ex-post*. On sollicite également des avis d'experts, notamment pour les corrélations entre les prix des actifs.

La validation sous la probabilité risque neutre consiste à vérifier que les prix sont correctement représentés.

4. Validation

Validation de l'implémentation

Il s'agit de vérifier ici que les trajectoires issues du générateur respectent les propriétés théoriques du modèle sous-jacent.

Dans le cas d'un générateur risque-neutre, on lui adjoint un contrôle appelé « test martingale » qui consiste à vérifier que les processus de prix actualisés issus du modèle sont bien des martingales.

Il s'agit en pratique d'identifier des moments calculables des distributions des prix et de vérifier que les moments empiriques correspondants convergent bien vers leurs valeurs théoriques.

Cela est illustré ci-après dans un cas simple.

4. Validation

Le modèle est utilisé pour faire des simulations et on dispose donc de trajectoires de r et S issues du générateur, soit en pratique d'observations

$$\{r_j(t_i); 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \quad \{S_j(t_i); 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\}$$

où j désigne le numéro de la trajectoire et i l'instant de la discrétisation

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$$

dont on suppose que le pas est fixe, $d = \frac{T}{p}$.

4. Validation

4.1. Test sur le rendement des actions

On peut alors utiliser les propriétés statistiques des estimateurs suivants

$$\rho(t) = \ln\left(\frac{\delta(t) \times S(t)}{S_0}\right) = -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t)$$
$$\bar{\rho}(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{\delta_j(t_i) \times S_j(t_i)}{S_0}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\rho(t_i)) = -\frac{\sigma^2}{2}t_i$$
$$\bar{e}(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j(t_i) \times S_j(t_i)}{S_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{\delta(t) \times S(t)}{S_0}\right) = 1$$

et en déduire par exemple des intervalles de confiance :

$$I_\alpha(\bar{\rho}(t_i)) = \left[-\frac{\sigma^2 t_i}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma; -\frac{\sigma^2 t_i}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \right]$$
$$I_\alpha(\bar{e}(t_i)) = \left[1 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{e^{\sigma^2 t_i} - 1}; 1 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{e^{\sigma^2 t_i} - 1} \right]$$

4. Validation

4.2. Test sur le modèle de taux

On se sert d'abord de la convergence des estimateurs empiriques des prix de ZC vers les prix théoriques :

$$P_n(0, T) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp\left(-\sum_{i=1}^p r_j(t_i)(t_i - t_{i-1})\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(0, T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right]$$

Puis on peut utiliser certaines propriétés particulières de la distribution du facteur de risque pour construire des contrôles. Il faut disposer d'expressions explicites pour des moments. Par exemple pour un modèle CIR, la distribution du taux court n'est pas simple (Khi-2 décentré, cf. Revuz et Yor [1999]) mais on sait que

$$E(r(t)) = \theta - (\theta - r_0)e^{-kt} \qquad V(r(t)) = \frac{\sigma_r^2}{k}(1 - e^{-kt})\left[r_0 e^{-kt} + \frac{\theta}{2}(1 - e^{-kt})\right]$$

4. Validation

4.3. Propriété de conservation

Un modèle ALM risque neutre vérifie une propriété d'absence de création ou destruction de valeur, au sens où l'espérance de la somme des valeurs actualisées des flux servis au cours de la projection doit être égale au montant du capital investi initialement.

Le capital global initial est investi sur des actifs de marché, ce qui revient à supposer qu'il est investi dans une unité de compte S qui est telle que $M = \delta S$ est une martingale. Au fil de la projection, des flux à destination de l'assuré et de l'actionnaire sont servis. On peut en toute généralité supposer que la somme des flux servis à la date t est une fraction $q(t)$ de la valeur de l'unité de compte, le processus q étant adapté.

Afin de s'assurer que le sous-jacent est entièrement distribué au cours de la projection, on doit imposer

$$\sum_{t=1}^T q_t = 1$$

4. Validation

4.3. Propriété de conservation

La valeur initiale des flux servis est alors

$$\begin{aligned} v &= \sum_{t=1}^{T-1} E^Q(q_t \times \delta(t) \times S(t)) + E^Q\left(\left(1 - \sum_{t=1}^{T-1} q_t\right) \times \delta(T) \times S(T)\right) \\ &= \sum_{t=1}^{T-1} E^Q\left(q_t \times [\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)]\right) + E^Q(\delta(T)S(T)) \end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned} E^Q\left(q_t \times [\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)]\right) &= E^Q\left(E_t^Q\left(q_t \times [\delta(t)S(t) - \delta(T)S(T)]\right)\right) \\ &= E^Q\left(q_t \times [\delta(t)S(t) - E_t^Q(\delta(T)S(T))]\right) = 0 \end{aligned}$$

Or $E^Q(\delta(T)S(T)) = S(0)$, donc $v = S(0)$. Cela fournit un moyen simple de vérifier la convergence d'un modèle ALM risque neutre en comparant l'estimateur empirique de la somme des flux actualisés avec le capital initial.

Une mise en œuvre efficace des GSE requis pour répondre aux exigences de Solvabilité 2 nécessite de porter un minimum d'attention à des points pratiques : discrétisation, utilisation de la simulation, estimation des paramètres.

Les contraintes opérationnelles associées incitent à privilégier des modèles simples correctement mis en œuvre à des constructions plus élaborées dans lesquelles les différents biais introduits ne sont pas maîtrisés.

Références bibliographiques

- AHMAD R.; WILMOTT P. [2006] « The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets », *Wilmott magazine*.
- AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession ». *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92. (<http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>).
- CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, , Vol.78 (3/4).
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.
- HULL J., WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate-Derivative Securities», *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, (Winter 1990), pp. 573-592.
- LONGSTAFF F.A.; MITHAL S.; NEIS E. [2005] « Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market», *Journal of Finance*, Vol. LX, n° 5.
- NTEUKAM O., PLANCHET F.[2010] « Stochastic Evaluation of Life Insurance Contract: Model Point on Asset Trajectories & Measurement of the Error Related to Aggregation », *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2118.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.
- REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third edition. Springer Verlag, Berlin.

Frédéric PLANCHET

fplanchet@winter-associes.fr

WINTER & Associés

Bureau de Paris

43-46 avenue de la Grande
Armée

F-75 116 Paris

+33-(0)1-45-72-63-00

<http://www.winter-associes.fr>

<http://www.ressources-actuarielles.net>

<http://blog.ressources-actuarielles.net>