Sur quelques problématiques en prévoyance

Ecole d'été – 22 juillet 2010

Frédéric Planchet *Actuaire Associé*
fplanchet@winter-associes.fr

PRÉAMBULE

La détermination des ressources affectées à la couverture des risques dans le cadre prudentiel actuel repose sur des choix d'hypothèses prudentes (tables et taux) pour le calcul des provisions ainsi que des évaluations forfaitaires de l'exigence de marge.

Le dispositif Solvabilité 2 se propose d'expliciter l'ensemble des risques significatifs supportés par un organisme assureur et d'en déduire le niveau des ressources adapté au profil de risque de l'entreprise.

Cela se traduit par un basculement d'une démarche de prise en compte implicite des facteurs de risques *via* le choix d'hypothèses prudentes vers des méthodes de valorisation *market consistent,* une logique de provisionnement basé sur des hypothèses *best estimate* et le calcul de l'exigence de marge en référence à un critère de contrôle de la probabilité de ruine.

PRÉAMBULE

Dans cette présentation, on se propose d'examiner les conséquences de l'adoption de ce nouveau cadre dans un contexte d'assurance de personne, sur les deux sujets suivants :

- le calcul des provisions et les conséquences pratiques d'une approche *best estimate* ;

- le calcul de l'exigence de marge et, plus globalement, la construction du volet quantitatif d'un modèle interne.

On montre que, si l'on dispose d'un dispositif rigoureux de calcul des provisions *best estimate*, en utilisant au mieux les *proxies* proposés par le CEIOPS, on peut aboutir à un calcul explicite du *SCR* et de la marge pour risque en utilisant avec parcimonie le recours à la simulation.

PRÉAMBULE

Préalablement à la mise en place du modèle interne partiel, on décrit un cadre de calcul de provisions *best estimate* permettant, au-delà du montant de la provision, de déterminer les éléments sur la distribution de la charge sinistre qui seront utiles par la suite.

Une fois ce cadre décrit, les calculs de marge pour risque et de *SCR* sont abordés.

On se place dans la cadre de contrats de prévoyance ou de retraite pour lesquels une information ligne à ligne est disponible pour les sinistres.

NB : l'objectif est de présenter un cadre de travail relativement général en mettant en évidence les principaux composants. On fait donc ici l'économie de certains aspects secondaires (dans cette perspective) tels que les primes futures ou les sinistres tardifs.

SOMMAIRE

MODÉLISATION DANS LE CADRE DE SOLVABILITÉ 2

1. PROVISIONS *BEST ESTIMATE*

Définition et calcul des provisions techniques

Le CEIOPS retient comme définition du *best estimate* (*cf.* CP n°26) celle énoncée dans le paragraphe TS.V.2.2 des spécifications techniques du QIS5, à savoir :

La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.

La directive européenne stipule que le *best estimate* doit être calculé brut de réassurance, en contrepartie un actif de réassurance, tenant compte des probabilités de défaut du réassureur est reconnu à l'actif.

Prendre en compte l'expérience du portefeuille

Le calcul du *best estimate* nécessite donc de prendre en compte l'expérience du portefeuille lorsque qu'il s'agit d'évaluer la probabilité de versement des flux futurs.

En pratique, la manière la plus directe d'intégrer cette expérience consiste à construire des tables d'expérience pour les risques classiques du périmètre étudié : mortalité, survie, maintien en incapacité, en invalidité, résiliations / rachats, *etc*.

Les lois d'expérience peuvent être déterminées complètement à l'aide des données disponibles ou calibrées par positionnement par rapport à une référence externe.

Prendre en compte l'expérience du portefeuille

Il s'agit de comptabiliser l'occurrence d'un événement (décès, survenance d'un arrêt de travail, reprise d'activité, *etc*.) dans une population donnée, en fonction de variables explicatives, telle que l'âge, le niveau de la couverture, le sexe, *etc*. En pratique, l'obtention d'une table fiable est un exercice délicat, qui met en jeu :

- des aspects « biométriques» associés au comportement de la population sous risque qui sont liés à la partie du risque indépendante du comportement de l'assuré et de son niveau de couverture ;

- les limitations et contraintes d'observation (franchises, résiliations, limitations dans la qualité des données disponibles) ;

- l'impact des couvertures sur le risque (sélection médicale, niveau et étendue des garanties).

WINTER & ASSOCIÉS

Prendre en compte l'expérience du portefeuille

Une table d'expérience est ainsi à l'intersection d'un phénomène statistique (le décès, la survenance et la durée d'un arrêt de travail) sur un groupe donné et des distorsions induites par les termes du contrat et sa gestion par rapport à l'appréciation directe du phénomène.

Cette observation conduit tout naturellement à définir des tables d'expérience pour des contrats ou des familles de contrats bien définis, et non au niveau d'un portefeuille tout entier.

1. PROVISIONS *BEST ESTIMATE*

Hétérogénéité et segmentation

Le CP n°27 intègre ces observations et définit les règles à retenir en termes de segmentation qui doivent permettre d'aboutir à des groupes de risques homogènes ; il s'agit de considérer les assurés avec les mêmes caractéristiques en termes de :

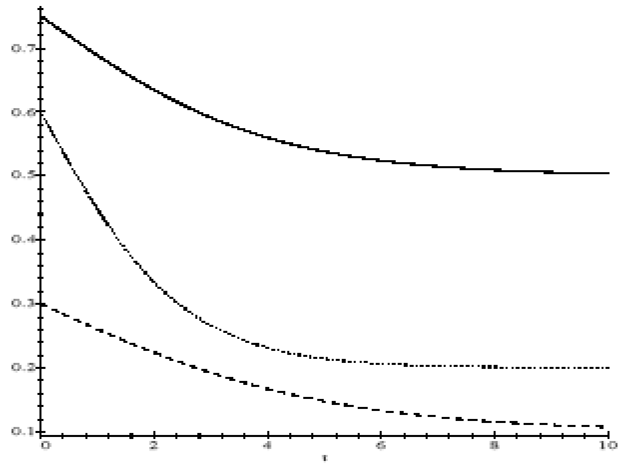
- profil ;
- souscription ;
- comportement ;
- garantie ;
- frais.

En pratique, ces exigences conduisent à construire des tables sur la base d'un niveau de segmentation potentiellement important afin d'affiner les hypothèses utilisées pour chaque sous population significatives du portefeuille et ainsi de réduire le risque de déformation de la loi avec le temps.

Hétérogénéité et segmentation

L'hétérogénéité (mélange de populations de caractéristiques différentes vis-à-vis du phénomène de durée étudié) a un impact important sur la perception de la fonction de hasard du modèle.

Par exemple un mélange de populations exponentielles (donc à hasard constant) conduit à un hasard agrégé décroissant :



Hétérogénéité et segmentation

De nombreux modèles permettent de prendre en compte ce mélange de populations : modèles de fragilité (Vaupel, 1979), fragilité combinée (Barbi 1999), modèles à chocs communs, modèle de Cox (Cox, 1972), à hasard additif (Aalen, 1978), des combinaisons des 2, *etc*.

Dans le cadre de la modélisation en assurance de personnes, ce sont essentiellement les modèles de type Cox et, plus récemment, Aalen, qui sont utilisés, notamment du fait de leur facilité de mise en œuvre et d'interprétation, et également du fait de la présence de censure (droite) et de troncature (gauche).

En remarquant que ce sont des modèles de régression linéaires dans lesquels la variable dépendante est une transformation monotone de la fonction de survie, cela permet d'imaginer d'autres modèles, mais souvent techniquement délicats.

Hétérogénéité et segmentation

On soulignera que :

- en présence de variables explicatives, l'estimateur de Kaplan-Meier doit être adapté (Stute,1993) ;

- dans le cas où l'introduction des variables explicatives invalide l'hypothèse d'indépendance entre le mécanisme de censure et la durée modélisée, l'estimateur de Kaplan-Meier devient inopérant et doit être adapté (Beran, 1981) ;

- la prise en compte de censures et de troncatures dans les modèles de régression usuels conduit à développer des estimateurs spécifiques (Lopez, 2007).

Hétérogénéité et segmentation

Exemple du modèle de Cox

Le modèle de référence est le modèle de Cox (1972), spécifié de la manière suivante à partir de la fonction de hasard :

$$\mathbf{ln}\, h\left(t \middle| Z = z\right) = \mathbf{ln}\, h(t) + \sum_{i=1}^{p} z_i \beta_i$$

Il s'agit donc d'un modèle de régression dont les coefficients peuvent être estimés par maximum de vraisemblance (partielle). Le lien avec les taux discrets est immédiat :

$$q\left(x \middle| z;\theta\right) = 1 - \left(1 - q_0(x)\right)^{\mathbf{exp}(-z'\theta)} \approx q_0(x) \times \mathbf{exp}(-z'\theta)$$

l'approximation étant valide lorsque le taux de sortie est faible.

Risques associés

La construction de tables d’expérience segmentées fait apparaître un risque de modèle et un risque d’estimation ; ces deux risques sont de nature systématique et donc potentiellement impactant, tant sur le *best estimate* que sur la distribution des flux futurs actualisés.

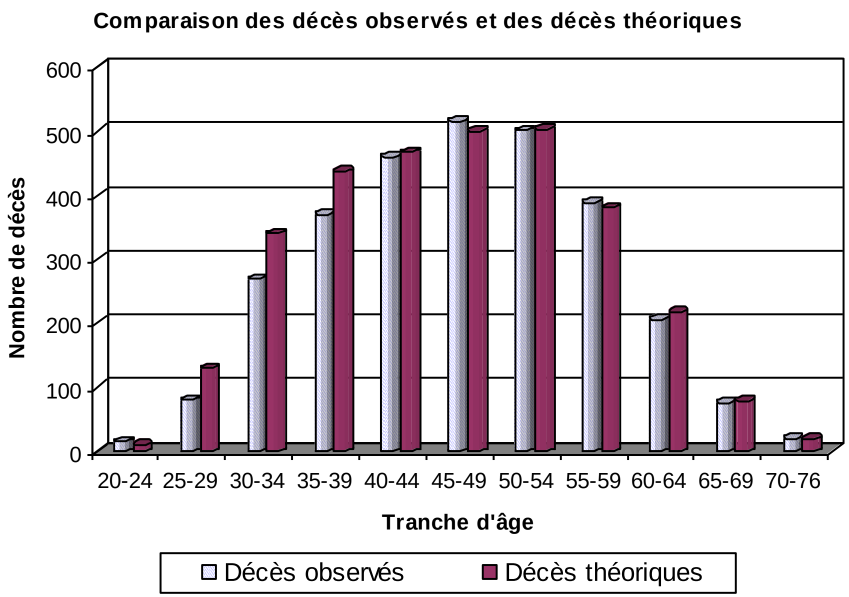
Si la prudence importante intégrée aux tables d’expérience rendait jusqu’à présent inutile la quantification précise de ces risques, le contexte *best estimate* change la donne : la volonté d’expliciter la marge pour risque impose *a minima* de justifier le fait d’éventuellement négliger ces risques.

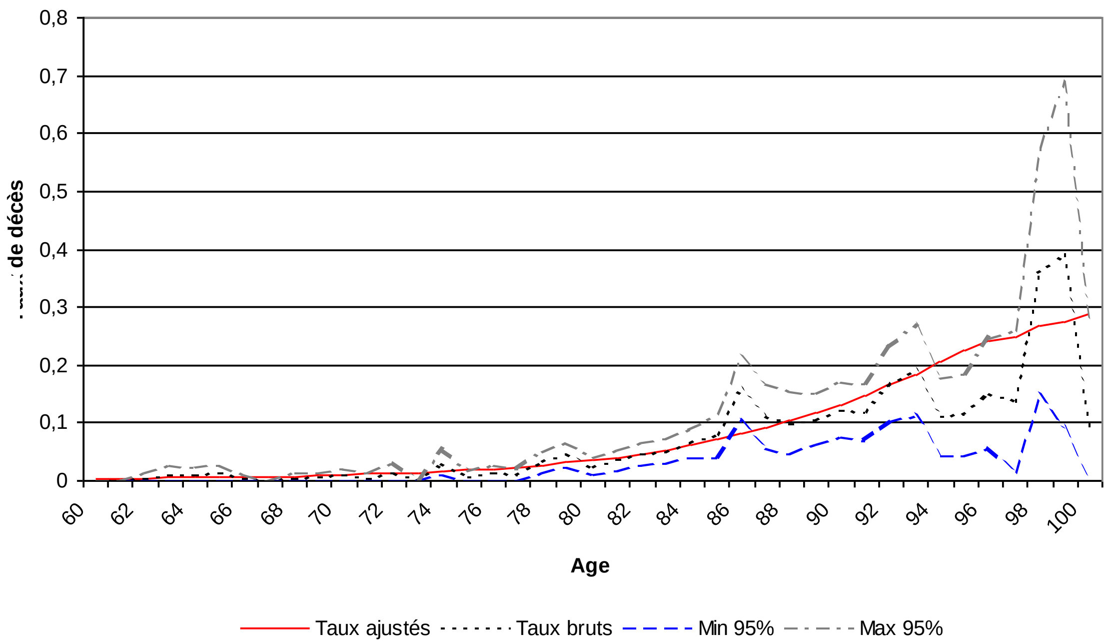
Les modèles de construction de loi d’expérience doivent donc prendre en compte cette contrainte.

1. PROVISIONS *BEST ESTIMATE*

Risques associés

Illustration sur un risque en cas de décès





Risques associés

Exemple avec un modèle à hasard proportionnel

Supposons que l'on ait construit la loi de maintien en incapacité à l'aide d'un modèle paramétrique, par exemple :

$$h(x \mid z;\theta,\alpha) = \mathbf{exp}(-z'\theta)\,\alpha x^{\alpha-1}$$

qui décrit un hasard de base de type Weibull avec une influence des variables explicatives (âge à l'entrée) modélisé par un hasard proportionnel. Si l'estimation des paramètres est faite dans le cadre du maximum de vraisemblance, l'estimateur $\hat{\beta} = (\hat{\theta},\hat{\alpha})$ est asymptotiquement gaussien, sans biais et de variance $I(\beta)^{-1}$

On est donc capable de quantifier le risque systématique associé au processus de construction.

Risques associés

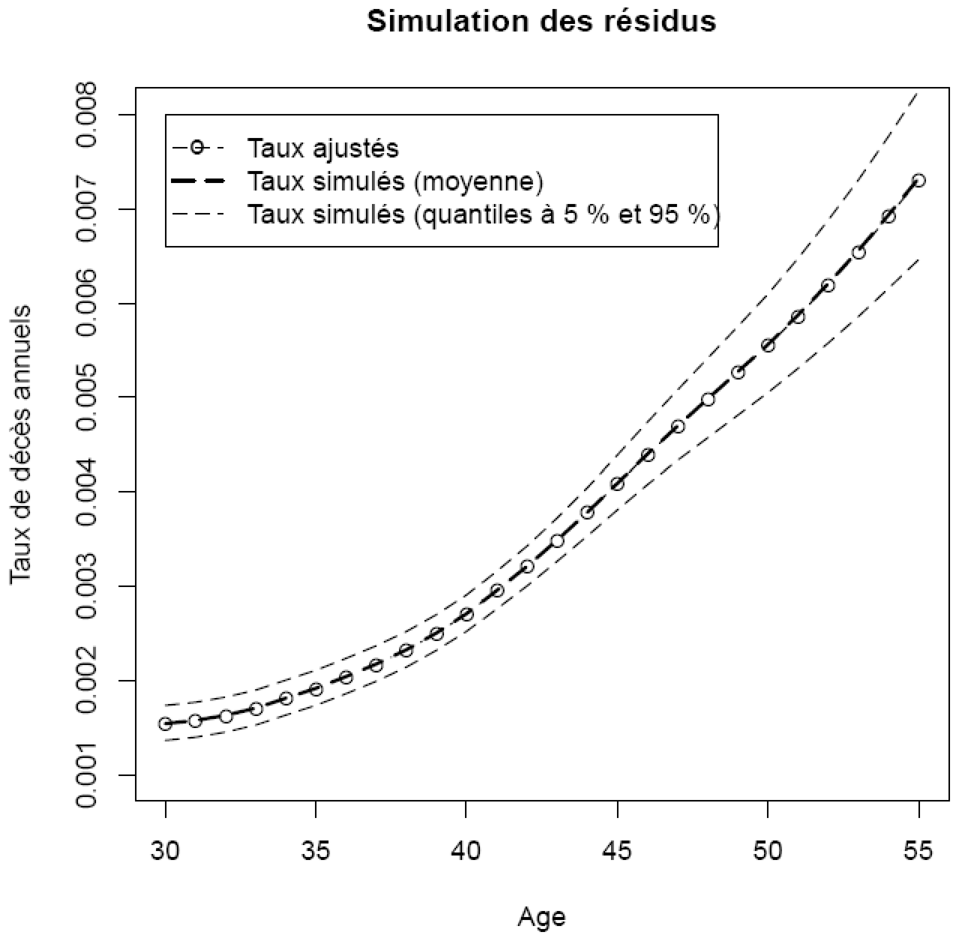
Dans le cas général, il est rare que l'on utilise aussi directement le maximum de vraisemblance et la mesure du risque d'échantillonnage est donc plus complexe.

On peut toutefois s'appuyer sur l'analyse des résidus pour produire des bandes de confiance dans un cadre assez général.

1. PROVISIONS *BEST ESTIMATE*

Risques associés

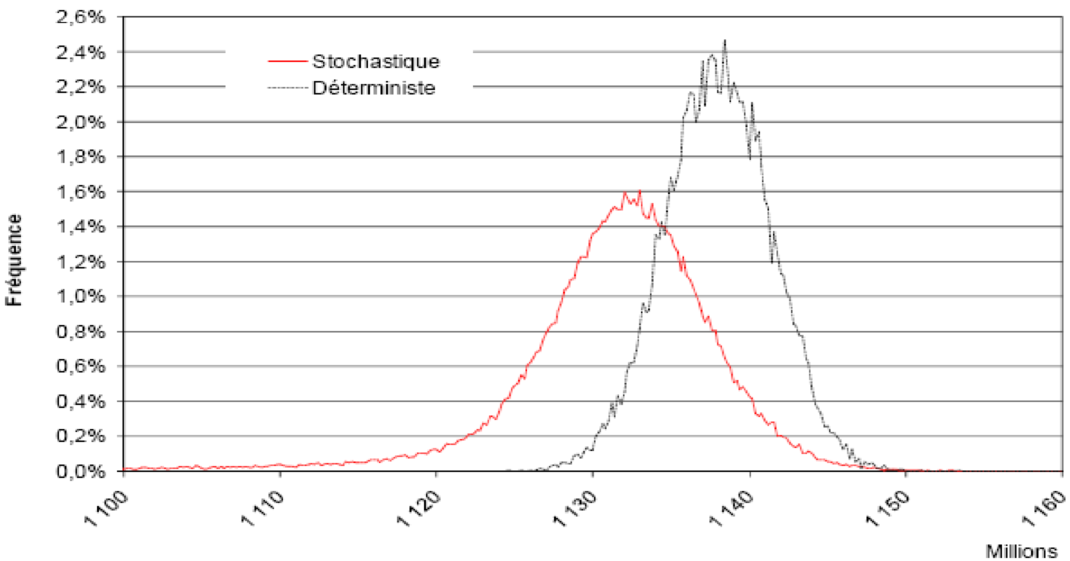
Exemple : bande de confiance construite à partir des quantiles de l'espérance de vie résiduelle associée à chaque table.



Risques associés

Plus généralement, l'impact des risques systématiques est non négligeable dès lors que les chocs sur la table sont dissymétriques.

La modélisation de ces derniers sur la loi d'expérience peut être réalisée à partir de modèles stochastiques qu'il faudra préalablement calibrer à partir des données issues de la population sous risque.



L'introduction d'un aléa systématique dans le modèle peut introduire des biais.

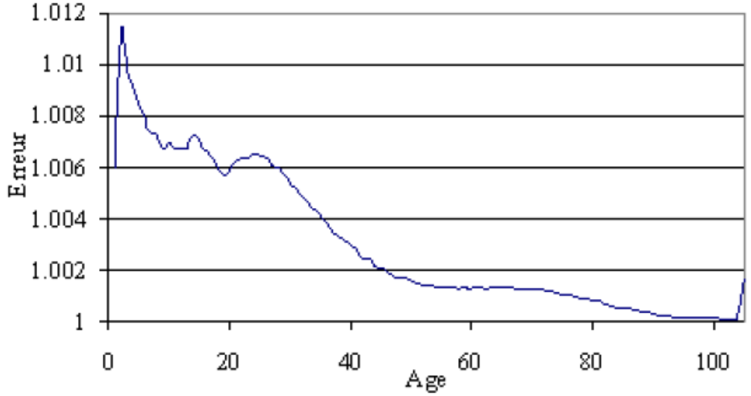
Risques associés

Exemple : version stochastique simple de Lee-Carter

$$k_t^* = at + b + \gamma_t \longrightarrow \mu_{xt}^* = \mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t^*\right)$$

La surface de mortalité moyenne issue du modèle stochastique n'est pas égale à la surface issue de l'ajustement Lee-Carter :

$$E\left(\mu_{xt}^*\right) = \mu_{xt}\,\mathbf{exp}\left(\frac{\beta_x^2 \sigma_\gamma^2}{2}\right) > \mu_{xt}$$



SOMMAIRE

MODÉLISATION DANS LE CADRE DE SOLVABILITÉ 2

2. DE LA PROVISION À LA LOI DES CHARGES FUTURES ACTUALISÉES

Les outils mis en place pour le calcul des *best estimate* peuvent être utilisés de deux manières :

- comme de simples outils de construction de lois d'expérience, relevant d'une étape de détermination des hypothèses du calcul ;

- comme un ensemble de techniques qui, correctement intégrées au processus de provisionnement, peuvent conduire à fournir des informations sur la loi des charges futures actualisées.

2. DE LA PROVISION À LA LOI DES CHARGES FUTURES ACTUALISÉES

Le risque d'échantillonnage

En désignant par Λ la charge actualisée et I l'ensemble des assurés en portefeuille, du fait de l'indépendance des individus et comme on peut toujours supposer que les prestations sont bornées par une constante absolue, la distribution limite de Λ est gaussienne :

$$\Lambda = \sum_{i \in I} p_i X_i \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Lambda - E(\Lambda)}{\sigma(\Lambda)} \underset{|I| \to \infty}{\longrightarrow} N(0,1)$$

Aussi sur la base de la connaissance de l'espérance et de la variance de Λ, la formule précédente permet d'approximer la distribution de la charge future actualisée avec lesquelles on peut aisément calculer des quantiles ou des intervalles de confiance. Par exemple, l'intervalle de confiance à 95 % pour Λ est de la forme :

$$IC(\Lambda) = \left[E(\Lambda) - 1{,}96 \times \sigma(\Lambda), E(\Lambda) + 1{,}96 \times \sigma(\Lambda) \right]$$

Le risque d'échantillonnage

Il suffit donc de savoir calculer l'espérance et la variance de Λ pour connaître complètement sa loi dans ce cas, ce qui se ramène à connaître ses éléments pour chaque ligne.

Ce risque peut être complexe : on peut y intégrer tous les aléas affectant les prestations qui se mutualisent entre les individus. Lorsqu'on prend en compte ces aléas en plus du risque d'échantillonnage associé au modèle de durée on utilise alors pour calculer la variance l'équation :

$$V(\Lambda)=V\left(E\left(\Lambda|P\right)\right)+E\left(V\left(\Lambda|P\right)\right)$$

WINTER & ASSOCIÉS

Prise en compte des autres facteurs de risque

En présence d'autres facteurs de risque seule la distribution conditionnelle à ces risques présente un caractère gaussien.

Autrement dit, en notant *Z* la variable aléatoire synthétisant les risques pris en compte, on a la convergence en loi :

$$\frac{\Lambda|Z - E(\Lambda|Z)}{\sigma(\Lambda|Z)} \underset{|I|\to\infty}{\to} N(0,1)$$

De ce fait, la transformée de Laplace de la loi conditionnelle de l'engagement converge vers la transformée de Laplace d'une gaussienne :

$$\lim_{|I|\to\infty} E\left(e^{-u\Lambda}|Z\right) = \exp\left(-uE(\Lambda|Z) + \frac{u^2\sigma^2(\Lambda|Z)}{2}\right)$$

WINTER & ASSOCIÉS

Prise en compte des autres facteurs de risque

On peut donc obtenir la loi globale en remarquant que comme :

$$E\left(g\left(\Lambda\right)\right)=E\left(E\left[g\left(\Lambda\middle|Z\right)\right]\right)$$

on a simplement :

$$\lim_{|I|\to\infty} E\left(e^{-u\Lambda}\right)=E\left(\mathbf{exp}\left(-uE\left(\Lambda\middle|Z\right)+\frac{u^2\sigma^2\left(\Lambda\middle|Z\right)}{2}\right)\right)$$

De la sorte on se ramène à calculer les moments conditionnels (souvent possible analytiquement) et la loi de *Z* (par simulation).

Logique des calculs

Calcul des chroniques de prestations individuelles

Pour chaque individu, on doit, en fonction de ses caractéristiques, des caractéristiques du contrat et de la courbe des taux sans risque ,calculer

$$x_i(t)$$

le montant actualisé de la prestation qui lui sera versée en *t* si l'événement conditionnant le paiement est réalisé (décès, survie, incapacité, etc.).

La prise en comptes des perturbations individuelles et globales se traduit en pratique par la détermination (par simulation *a priori*) d'une réalisation des facteurs de risque sur la base desquels on calcule le flux individuel choqué (pour l'état du monde n°*k*) :

$$y_i^k(t) = x_i\left(t, \varepsilon_i^k(t), \varepsilon^k(t)\right)$$

Logique des calculs

Exemple

Supposons que des erreurs de gestions affectent les dossiers et que leur impact est sans biais et distribué selon une loi log-normale. On a alors :

$$y_i(t) = x_i(t) \times \mathbf{exp}(\varepsilon_{i,t})$$

$\varepsilon_{i,t}$ une loi normale de paramètres :

$$\left(m = -\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$$

Cet aléa est sans effet sur le *best estimate*.

Logique des calculs

Exemple

Lorsque ces erreurs affectent un contrat avec des prestations en capital, comme on a conditionnellement au niveau des prestations *Y* :

$$E\left(\Lambda \middle| Y\right)=\sum_{i\in I} y_i \sum_{m=0}^{M} e^{-rm} p\left(a_i,m\right) \qquad V\left(\Lambda \middle| Y\right)=\sum_{i\in I} y_i^2 \left(\sum_{m=0}^{M} e^{-2rm} p\left(a_i,m\right)-\left(\sum_{m=0}^{M} e^{-rm} p\left(a_i,m\right)\right)^2\right)$$

avec $p\left(a,m\right)=q_{a+m}\times\prod_{h=0}^{m-1}\left(1-q_{a+h}\right)$. On a donc si $x_i=E\left(y_i\right)$

$$E\left(\Lambda\right)=\sum_{i\in I} x_i \sum_{m=0}^{M} e^{-rm} p\left(a_i,m\right)$$

Logique des calculs

Exemple

Le calcul de la variance est effectué en utilisant

$$V(\Lambda) = V\left(E\left(\Lambda \middle| P\right)\right) + E\left(V\left(\Lambda \middle| P\right)\right)$$

Ce qui conduit à

$$E\left(V\left(\Lambda \middle| Y\right)\right) = \sum_{i \in I} E\left(y_i^2\right)\left(\sum_{m=0}^{M} e^{-2rm} p\left(a_i, m\right) - \left(\sum_{m=0}^{M} e^{-rm} p\left(a_i, m\right)\right)^2\right)$$

$$V\left(E\left(\Lambda \middle| Y\right)\right) = \sum_{i \in I} V\left(y_i\right)\left(\sum_{m=0}^{M} e^{-rm} p\left(a_i, m\right)\right)^2$$

2. DE LA PROVISION À LA LOI DES CHARGES FUTURES ACTUALISÉES

Logique des calculs

On dispose à l'issue de cette étape de *K* ensembles de flux de prestations, en fonction des réalisations des perturbations individuelles et globales. Chaque ensemble est composé des sinistres de l'ensemble *I* dont les caractéristiques en matière de risque et de prestation sont ajustées en fonction des perturbations.

Prise en compte des perturbations sur les lois

Les lois de survenance ou maintien peuvent également être perturbées, ce qui se matérialise en pratique par le tirage d'un état du monde, correspondant à la détermination de la loi choquée. Par convention, on indice toujours par *k* le numéro d'ordre de cette perturbation. On obtient à l'issue de cette étape une loi de durée décrite par une fonction de survie (conditionnelle à tous les risques intégrés jusqu'alors) S_i^k .

2. DE LA PROVISION À LA LOI DES CHARGES FUTURES ACTUALISÉES

Logique des calculs

Enfin, sur la base des éléments ci-dessus, il reste à déterminer la loi des flux actualisés agrégés sur l'ensemble du segment considéré. On dispose pour cela de *K* états du monde simulés lors des étapes précédentes et, dans chacun de ces états, des suites de flux et des probabilités de les payer que l'on peut considérer comme déterministes. Les impacts des facteurs de risque autres que la fluctuation d'échantillonnage ont été modélisés, il reste donc à traiter ce dernier risque. On a :

$$\Phi(u) = E\left(e^{-u\Lambda}\right) \approx \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{exp}\left(-um^k + \frac{u^2 v^k}{2}\right)$$

avec $m^k = \sum_{i \in I} m_i^k$ et $v^k = \sum_{i \in I} v_i^k$ les espérances et variances empiriques du segment calculées à partir des valeurs individuelles.

2. DE LA PROVISION À LA LOI DES CHARGES FUTURES ACTUALISÉES

Un exemple : l'incapacité

Les règlements espérés d'un assuré entré en incapacité à l'âge *x* dont l'ancienneté dans l'arrêt est *a* sont calculés à l'aide de la formule suivante, pour une prestation unitaire :

$$\pi(x,a,r)=\frac{1}{2}\sum_{k=a}^{35} e^{-r\frac{k-a}{12}}\left[\frac{l_k^x+l_{k+1}^x}{l_a^x}\right]$$

Cette formule permet d'estimer le nombre de jours d'indemnisation espérés à partir de la loi de maintien en incapacité ; la volatilité associée est :

$$\sigma(x,a,r)=\sqrt{\frac{1}{r}\sum_{k=a}^{35}\left(1-e^{-r\frac{k-a}{12}}\right)e^{-r\frac{k-a}{12}}\left[\frac{l_k^x+l_{k+1}^x}{l_a^x}\right]-\pi(x,a,r)^2}$$

WINTER & ASSOCIÉS

Un exemple : l'incapacité

Pour mener à bien le calcul ci-dessus il faut disposer, pour un segment homogène, des données individuelles suivantes :

- Date de naissance ;
- Date de survenance de l'arrêt ;
- Montant de la prestation mensuelle.

Les paramètres suivants sont utilisés :

- Taux d'actualisation *r* ;
- Lois de maintien en incapacité en fonction de l'âge à la survenance.

Le cas général des rentes

Dans le cas général d'une prestation unitaire payée pendant la durée *T*, en observant que :

$$X = \int_0^{\infty} e^{-rt} 1_{\{T>t\}} dt$$

on trouve que :

$$E(X) = \int_0^{\infty} e^{-rt} S(t) dt \qquad V(X) = \frac{2}{r} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-rt}\right) e^{-rt} S(t) dt - E(X)^2$$

ce qui conduit aux expressions du transparent précédent.

Le cas général des rentes

En pratique, les prestations peuvent évoluer au cours du temps et le taux d'actualisation n'est pas constant. On peut alors noter $x(t)$ le montant de la prestation actualisée payée à la date *t* et

$$C(u) = \int_0^u x(t)\,dt$$

le montant cumulé. Après quelques calculs on trouve que :

$$E(X) = \int_0^\infty S(t)\,dC(t) \qquad E(X^2) = \int_0^\infty S(t)\,dC^2(t)$$

SOMMAIRE

MODÉLISATION DANS LE CADRE DE SOLVABILITÉ 2

Enjeux et cadre

La structure du modèle standard peut apparaître à certains égards assez frustre :

- La formule standard n'offre pas une connaissance suffisamment fine des facteurs de risques unitaires ;
- Les choix en termes d'agrégation des facteurs de risques peuvent apparaître critiquables.

Dans ce contexte, le développement d'un modèle interne (partiel) peut contribuer à déterminer de manière optimale l'exigence de fonds propres tout en fournissant un outil performant de pilotage de l'activité dans le cadre plus large de l'ORSA.

Les approches

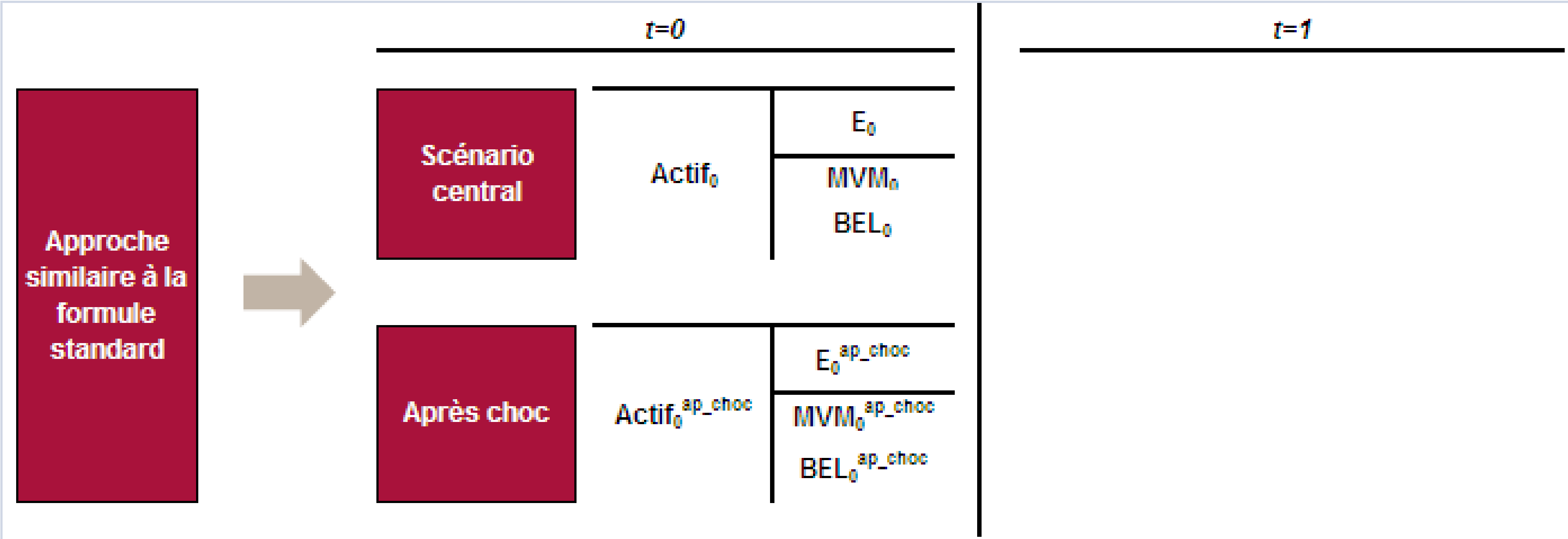
Deux approches peuvent être envisagées *a priori* pour construire le modèle interne :

- une approche similaire à la formule standard nécessite un calibrage *ex ante* des niveaux de chocs afin de traduire plus fidèlement la structure de chaque profil de risques.

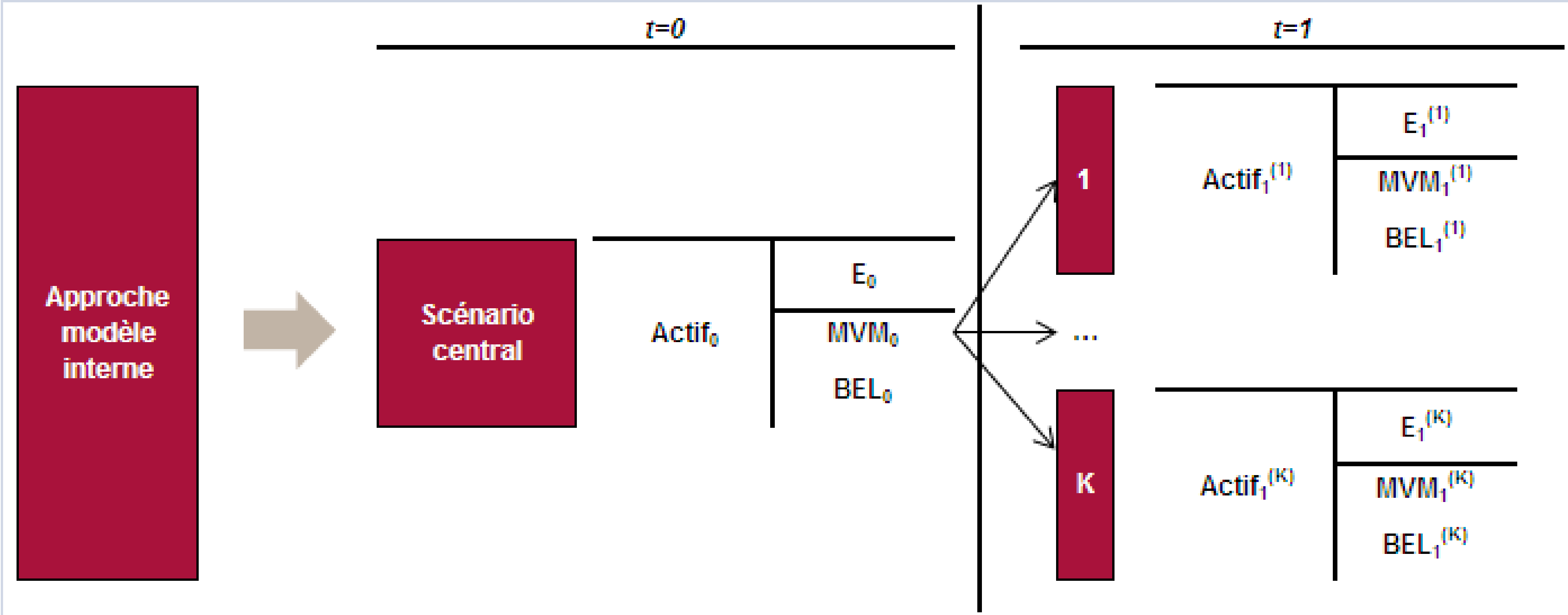
- une approche plus complexe mais plus complète nécessite de prendre en compte la déformation de bilan économique à horizon 1 an sous l'effet combinés des différents facteurs de risques.

Ainsi, les différents postes du bilan à 1 an sont vues de la date d'inventaire comme des variables aléatoires dépendant de l'évolution des risques entre $t=0$ et $t=1$.

Les approches



Les approches



Les approches

On peut observer que les modèles proposés dans la première partie de cette présentation ne répondent que partiellement au problème posé.

En effet, ils fournissent une information sur la loi du passif en *t=0* alors qu'il s'agit de considérer la situation de l'assureur à la date *t=1*.

Toutefois, on en retient l'idée de distinguer les facteurs de risque systématiques des facteurs mutualisables.

Les approches

La mise en place d'un modèle interne nécessite obligatoirement le recours à la modélisation stochastique dont l'objet est de fournir une information sur la loi du phénomène observé.

La mise en œuvre de ces techniques se base sur des formules analytiques et/ou des simulations.

Le CP n°26 revient sur ces techniques et met en avant le caractère efficient et auditable du modèle retenu. En particulier, le recours à des algorithmes de simulation lourds et complexes présente trois inconvénients majeurs : leur coût de mise en œuvre, les temps de calcul et le risque de modèle associé.

Des approches mixtes sont donc à privilégier…

WINTER & ASSOCIÉS

Formulation du *SCR*

Le calcul du *SCR* nécessite la projection du bilan de l'entité à horizon 1 an et la valorisation *market consistent* des différents postes.

BILAN en *t=0*	
A_0	FS_0
	$SCR = E_0 - FS_0$
	$L_0 = BEL_0 + MVM_0$

Ces postes évoluent selon la dynamique :

$$A_{t+1} = A_t \times (1 + R_{t+1}) - F_{t+1} + C_{t+1}$$

$$L_{t+1} = BEL_{t+1} + MVM_{t+1}$$

$$E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1}$$

Formulation du *SCR*

Le contrôle de la probabilité de ruine à 1 an conduit à devoir respecter la condition suivante :

$$P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) \geq 99,5\%$$

Le calcul de cette quantité revient à ne considérer que la partie basse du bilan. Par ailleurs, en supposant les cotisations nulles pour simplifier :

$$P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) = P\left(SCR \geq \frac{F_1 + L_1}{1 + R_1} - L_0\right)$$

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - L_0$$

La marge pour risque

Selon le CEIOPS, une marge pour risque est constituée selon la nature réplicable ou non du passif d'assurance.

Elle est calculée dans une logique *CoC* avec, pour le calcul des *SCR* futurs, la prise en compte des risques de souscription vie, risques opérationnels, risques de défaut de contrepartie des réassureurs et le « risque financier inévitable ».

$$MVM_0 = \alpha \sum_t E\left(SCR_t\right) \times e^{-rt}$$

Cette approche est relativement arbitraire puisqu'elle se base sur la valeur de transfert des provisions techniques, délicate en pratique à justifier. Le QIS 5 introduit un degré de complexité supplémentaire en imposant le calcul de la marge globalement.

La marge pour risque

Le calcul rigoureux de la marge pour risque selon une approche *CoC* nécessite donc de projeter les *SCR* futurs ce qui se révèle pratiquement infaisable surtout lorsque le passif est long (comme le reconnaît le CP n°76).

Dans ces conditions, son calcul peut être obtenu en considérant un certain nombre d'approximations bien choisies ; en assurance de personnes, sous l'hypothèse de proportionnalité à chaque date du *SCR* et du *best estimate* :

$$\forall t \geq 0, k = \frac{SCR_t}{BEL_t}$$

on peut utiliser montrer que :

$$MVM_0 \approx \alpha \times D_0 \times SCR$$

Formule approchée pour le *SCR*

L'expression simplifiée de la marge pour risque permet d'obtenir une expression directe du *SCR* en fonction de la distribution d'une variable faisant intervenir les interactions actif / passif.

$$SCR = \frac{1}{1+\alpha \times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1} \right) - BEL_0 \right)$$

En utilisant la même approximation pour le calcul de la marge pour risque à la date *t=1*, on trouve une équation implicite du *SCR* :

$$SCR = \frac{1}{1+\alpha \times D_0}\left(VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + BEL_1 \times \left(1+\alpha \times \frac{SCR}{BEL_0} \times D_1 \right)}{1+R_1} \right) - BEL_0 \right)$$

Formule approchée du *SCR*

En considérant les approximations prudentes suivantes, on peut se ramener à une formule simplifiée du *SCR* :

$$\begin{cases} 1+\alpha \times \dfrac{SCR}{BEL_0} \times D_1 \approx 1+\alpha \times k \times \left(D_0 - 1\right) = c \\ VaR_{99,5\%}\left(\dfrac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) \approx c \times VaR_{99,5\%}\left(\dfrac{F_1 + BEL_1}{1+R_1}\right) = c \times VaR_{99,5\%}\left(\chi\right) \end{cases}$$

$$SCR = \frac{\dfrac{VaR_{99,5\%}\left(\chi\right)}{BEL_0} - 1}{1+\alpha \times \left(D_0 - \dfrac{VaR_{99,5\%}\left(\chi\right)}{BEL_0}\left(D_0 - 1\right)\right)} BEL_0$$

Détermination de la loi de χ

Le calcul du *SCR* se ramène à un calcul de quantile de la variable aléatoire χ conditionnellement à l'ensemble des facteurs de risques systématiques.

La somme des prestations actualisées pour une population d'individus Λ s'écrit :

$$\Lambda = \sum_{i \in I} X_i = e^{-r} F_1 + \sum_{i \in I_1} X_i$$

Conditionnellement à l'ensemble aléatoire $I_1 \subset I$ des individus encore présents en *t=1*, on note avec :

$$X_i^+(1) = X_i \middle| i \in I_1 \qquad \Lambda_1 = \sum_{i \in I_1} X_i^+(1)$$

Détermination de la loi de χ

On note que conditionnellement à l'ensemble des facteurs de risques systématiques, représentés par la variable synthétique *Y*, la variable aléatoire $BEL_1 = E_1(\Lambda_1)$ est asymptotiquement gaussienne.

De manière générale, l'expression de la loi d'une variable aléatoire $Z = f(X,Y)$ avec $Z \mid Y$ gaussienne est caractérisée par :

$$P(Z \leq q) = \mathrm{E}\,P\left(f(X,Y) \leq q \middle| Y\right) = \int \Phi\left(\frac{q-\mu(y)}{\sigma(y)}\right) F_Y(dy)$$

La résolution de l'équation en *q* $P(Z \leq q) = \alpha$ n'est pas simple et nécessite de recourir à des méthodes de simulations de type Monte Carlo pour calculer le terme :

$$P(Z \leq q) \approx \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \Phi\left(\frac{q-\mu(y_k)}{\sigma(y_k)}\right)$$

Exemple : cas d'un régime de retraite

Il s'agit enfin, en fonction du contexte, de calculer les moments d'ordre 1 et 2, conditionnels à chaque état du monde, de la variable χ afin de caractériser sa loi conditionnelle .

La variable aléatoire $\chi \mid Y$ est asymptotiquement gaussienne et donc caractérisable par ses moments :

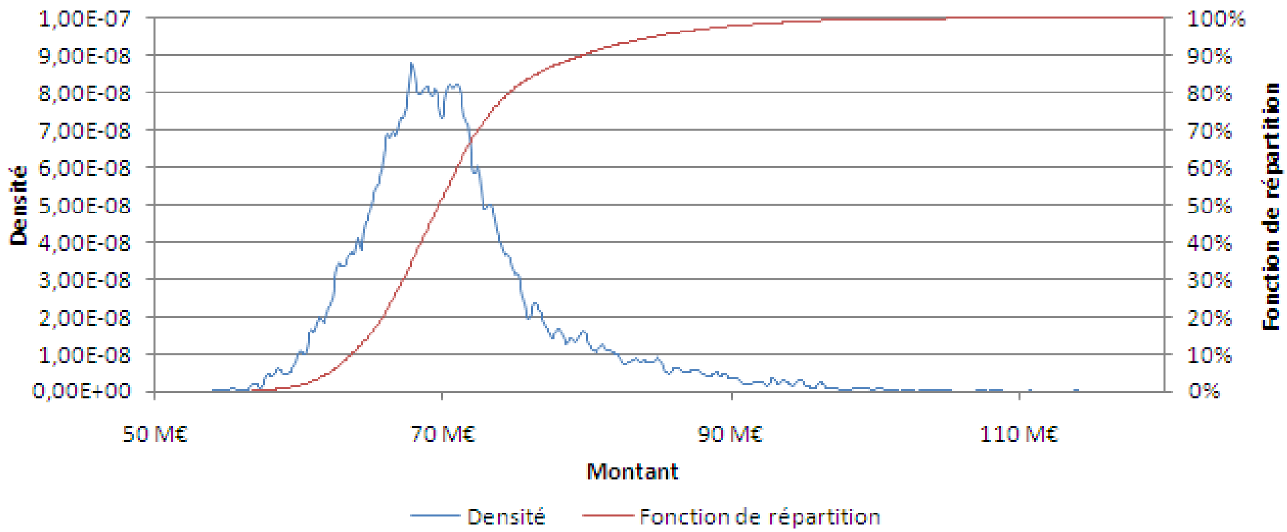
$$\chi(y) = \frac{F_1(y) + BEL_1(y)}{1 + R_1(y)}$$

$$\begin{cases} \mu(y) = \dfrac{\sum_{i \in I} \left(f_i + E_1\left(X_i^+(1) \mid Y = y\right)\right) \times E\left(1_{\{T_{x_i} > 1\}}\right) \times \dfrac{IPC_1}{IPC_0}(y)}{1 + R_1(y)} \\ \sigma^2(y) = \dfrac{\sum_{i \in I} \left(f_i + E_1\left(X_i^+(1) \mid Y = y\right)\right)^2 \times V\left(1_{\{T_{x_i} > 1\}}\right) \times \left(\dfrac{IPC_1}{IPC_0}(y)\right)^2}{\left(1 + R_1(y)\right)^2} \end{cases}$$

Exemple : cas d'un régime de retraite

La fonction de répartition est obtenue par Monte Carlo :

$$P(\chi \leq q) \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \Phi\left(\frac{q - \mu(y_k)}{\sigma(y_k)} \right)$$



CONCLUSION

Dans le cadre d'une approche modèle interne, l'utilisation de modèles stochastiques est devenue incontournable pour des raisons de valorisation *market consistent* et de calcul du *SCR*.

Compte de tenue de la difficulté des mécanismes mis en jeu, le recours à des techniques de simulations s'avèrent souvent indispensable.

Néanmoins, avec l'application de calculs analytiques fondés sur l'observation que les lois conditionnelles des engagements aux facteurs de risques systématiques sont gaussiennes, il est possible de limiter fortement le recours à la simulation. Ainsi, on peut quantifier le montant de *SCR* et des provisions techniques à partir de :

- ✓ la connaissance des risques systématiques ;
- ✓ les moments d'ordre 1 et 2 conditionnels à ces risques.

CONCLUSION

La mise en œuvre d'une approche semi-analytique présente l'avantage, outre la simple considération du temps de calculs, de fournir une meilleure description des risques, ce qui participe à une meilleure maîtrise de ces derniers.

Cette mécanique nécessite de recourir à :

- ✓ des tables d'expériences avec un niveau de granularité suffisamment fin pour être *best estimate* ;
- ✓ une analyse précise des facteurs de risques systématiques impactant l'entité (et notamment ceux associés aux choix de ces tables).

Cela fournit un cadre relativement général pour développer un modèle interne (partiel) intégrant les facteurs de risque que l'on souhaite modéliser de manière spécifique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AALEN O. [1978] « Non-parametric inference for a family of counting processes ». Ann. Stat. 6, 710-726.

AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. [2005] Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society 92*. (http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf).

ALHO J. M. [2007] « Méthodes utilisées pour établir les projections relatives à la mortalité – Distributions prédictives de la mortalité future », ISSA, Quinzième Conférence internationale des actuaires et statisticiens de la sécurité sociale.

BARBI E.[1999] « Eterogeneità della popolazione e sopravvivenza umana : prospettive metodologiche ed applicazioni alle generazioni italiane 1870-1895 », Florence, Dipartimento Statistico (Ph.D. thesis), 91 p.

COX D.R. [1972] « Regression models and life-tables (with discussion) ». J. R. Statist. Soc. Ser. B, pages 187-220.

FÉLIX J.P., PLANCHET F. [2009] « Mesure des risques de marché et de souscription vie en situation d'information incomplète pour un portefeuille de prévoyance. », Bulletin Français d'Actuariat, vol. 9, n°18.

MARTINUSSEN T., SCHEIKE T. [2006] Dynamic Regression Models for Survival Data, New York : Springer.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

PLANCHET F. [2009] « Provisionnement *best estimate* et risque arrêt de travail. », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°140 du 01/10/2009.

PLANCHET F., JUILLARD M., THEROND P. E. [2008] Extreme disturbances on the drift of anticipated mortality-Application to annuity plans. *Proceedings of the 18th AFIR Colloquium*.

PLANCHET F., GUIBERT Q., JUILLARD M. [2010] «Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes » , Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP2126.

PLANCHET F., THEROND P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. Paris : Economica.

PLANCHET F., JUILLARD M. [2006] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes », Assurances et gestion des risques, Vol. 75 (3).

VAUPEL J. W., MANTON K., STALLARD E., 1979, « The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality », Demography, 16, p. 439-454.

WINTER & ASSOCIÉS

CONTACTS

Frédéric PLANCHET

fplanchet@winter-associés.fr

Equipe R&D

Quentin GUIBERT, Marc JUILLARD, Aymric KAMEGA et Oberlain NTEUKAM

WINTER & Associés

Bureau de Paris	Bureau de Lyon
43-46 avenue de la Grande Armée	55 avenue René CASSIN
F-75 116 Paris	F-69 009 Lyon
+33-(0)1-45-72-63-00	+33-(0)4-37-37-80-90

http://www.winter-associes.fr/
http://www.ressources-actuarielles.net/
http://www.winter-associes.fr/blog