Modèles de durée / Examen du 21 janvier 2014

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Corrigé

Sur le modèle AFT

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

Question n°1 (2 points) : On suppose que X satisfait la relation $\mathbf{ln}(X) = -\mathbf{ln}(\theta) + u$ avec u une variable aléatoire et θ un paramètre (modèle dit « AFT »). Ecrire la fonction de hasard du modèle à l'aide de celle de $\mathbf{exp}(u)$.

> On a par définition $h(x) = -\frac{d}{dx}\mathbf{ln}\, S(x)$ et $S(x) = P(X > x)$, donc $S(x) = P\left(\mathbf{exp}(-\mathbf{ln}(\theta) + u) > x\right) = P\left(\mathbf{exp}(u) > x\theta\right)$; si $S_0(x) = P\left(\mathbf{exp}(u) > x\right)$ de sorte que $S(x) = S_0(x\theta)$, en dérivant par rapport à x après avoir pris le logarithme on en déduit que :
>
> $$h_\theta(x) = \theta \times h_0(\theta \times x).$$

Question n°2 (2 points) : Rappelez la définition d'un modèle à hasard proportionnel (PH). Le modèle ci-dessus est-il à hasard proportionnel ? Vous donnerez un exemple pour justifier la réponse.

> Pour que le modèle soit à hasard proportionnel il faut trouver une fonction l telle que $h_\theta(x) = h_0(x) \times l(\theta)$ pour tous x et θ. Le modèle ci-dessus n'est pas en général à hasard proportionnel (prendre par exemple une loi de Makeham).

Question n°3 (2 points) : On suppose que $h_0(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, quelle est la loi de X ? Le modèle AFT est-il dans ce cas à hasard proportionnel ?

> C'est une loi de Weibull de paramètres (α, λ) avec $\lambda = \theta^\alpha$. Comme on a dans ce cas particulier $h_\theta(x) = \alpha\theta^\alpha x^{\alpha-1}$ le modèle vérifie bien l'hypothèse PH.

Question n°4 (4 points) : Quelle forme doit avoir $h_0(x)$ pour que le modèle AFT vérifie l'hypothèse PH ? Quelle est alors la loi de X ? Vous pourrez utiliser le fait qu'il doit exister des fonctions k et l telles que $k(x) \times l(\theta) = h_0(\theta \times x) \times \theta$ puis en déduire que la fonction $g(u) = u \times \frac{h_0^{'}(u)}{h_0(u)}$ doit être constante et conclure.

On part de $k(x) \times l(\theta) = h_0(\theta \times x) \times \theta$ et on pose $p(\theta) = \frac{\theta}{l(\theta)}$ de sorte que l'égalité précédente s'écrit $k(x) = p(\theta) \times h_0(\theta \times x)$. Comme cette égalité est vraie pour tous x et θ, on en déduit en dérivant par rapport à θ que :

$$p'(\theta) \times h_0(\theta \times x) + p(\theta) \times x \times h_0'(\theta \times x) = 0 .$$

Cette égalité peut se réécrire sous la forme $u \times \frac{h_0'(u)}{h_0(u)} = -\theta \frac{p'(\theta)}{p(\theta)}$ avec $u = \theta x$.

Comme elle doit être vraie pour tous les x et θ, on en déduit que $u \times \frac{h_0'(u)}{h_0(u)} = c$ (en d'autres termes que $\theta \frac{p'(\theta)}{p(\theta)}$ est constant en fonction de θ. L'intégration de cette équation est alors immédiate et conduit à $h_0(u) = b \times u^c$. On reconnait un modèle de Weibull.

Question n°5 (2 points) : On suppose que X est censurée dans le cadre d'une censure aléatoire droite non informative C. Rappelez le sens de cette définition. Donnez l'expression des variables observables T et D en fonction de X et C. Dans quelle situation pratique rencontre-t-on ce type de censure ?

Cf. le cours.

Question n°6 (4 points) : Rappelez l'expression générale de la log-vraisemblance dans ce contexte et écrivez les équations de vraisemblance dans le cas particulier du modèle de Weibull. Comment résolvez-vous ces équations ?

Idem.

Question n°7 (2 point) : l'expression de la log-vraisemblance rappelée à la question précédente est-elle valide si la loi de la censure est définie par $S_C(x) = S_X(x)^\beta$? Pourquoi ?

La censure décrite ici est informative et on ne peut donc utiliser l'expression simplifiée (*cf.* ce document).

Question n°8 (2 points) : On suppose que le paramètre θ est déterminé par des variables explicatives exogènes *via* $\theta = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \times Z_j = \beta' Z$. En supposant que la fonction de hasard de base du modèle h_0 est de type Weibull et que $\alpha = 1$, proposez une méthode d'estimation alternative pour β.

Dans ce cas particulier on peut utiliser l'estimateur de la vraisemblance partielle de Cox.