



Risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

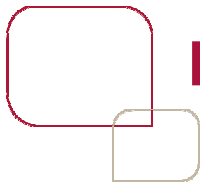
Application à la mesure de la mortalité en Afrique subsaharienne

Séminaire Lyon-Lausanne
du 25/02/2011



Frédéric PLANCHET *Actuaire Associé*
fplanchet@winter-associes.fr

Aymric KAMEGA *Actuaire*
akamega@winter-associes.fr



Préambule



Cette présentation propose une mesure du risque d'estimation pour deux exemples de modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de variables explicatives observables.

En particulier, il s'agit ici de montrer que le choix de tels modèles pour prendre en compte l'hétérogénéité permet de limiter le niveau du risque d'estimation.

Une illustration numérique est effectuée dans le cadre de la construction de tables d'expérience pour l'Afrique subsaharienne francophone (ASF).



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

1. Problématique et mesure du risque d'estimation
2. La mortalité de la population assurée en ASF
3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Contexte

Dans le cadre du calcul du *best estimate*, il convient prendre en compte l'hétérogénéité du portefeuille.

En effet, avec une approche trop globale pour l'ensemble du portefeuille, on court le risque de n'être finalement *best estimate* sur aucune des sous-populations significatives composant le portefeuille et de voir la table devenir inadaptée dès que le portefeuille se déforme avec le temps.

Par exemple, en construisant une table de mortalité unisexe, la mortalité des hommes sera sous-estimée et celle des femmes surestimée et toute modification du *sex ratio* conduira à une inadéquation de la table avec le risque.

Quelle que soit la sophistication du modèle, la prise en compte de l'hétérogénéité conduit à segmenter la population d'expérience en sous-populations.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Contexte

A contrario, une segmentation trop fine fait apparaître :

- un risque d'estimation ;
- un risque de modèle.

Le risque d'estimation et le risque de modèle sont des risques systématiques, donc potentiellement dangereux (car en plus d'introduire de la volatilité dans la distribution de l'engagement, ils modifient la valeur du *best estimate*).

Une réflexion s'impose alors sur le choix du niveau de segmentation optimal. La quantification du risque d'estimation associé à la construction de tables d'expérience peut être un critère utile à cet effet.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Intervalles et bandes de confiance

La mesure la plus directe de l'incertitude sur les estimateurs passe par la construction d'intervalles de confiance, le plus souvent sur les taux conditionnels de sortie ou sur la fonction de survie.

Ces intervalles sont en général ponctuels (*ie* à un âge fixé). Par exemple, avec l'estimateur des taux bruts de Hoem :

$$\hat{q}_x \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)}{R_x}},$$

où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite et α le niveau de confiance.

Cette mesure ne permet pas de disposer d'une indication globale, qui passe par la construction de bandes de confiance.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Intervalles et bandes de confiance

On observe que les intervalles de confiance ponctuels pour l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie sont de la forme :

$$\hat{S}(x) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{S}(x) \gamma(x)$$

avec $\gamma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^x \frac{d_i}{R_i(R_i - d_i)}}$, et Nair montre qu'en posant :

$$\hat{S}(x) \pm c_{\alpha}(a_{x_m}, a_{x_M}) \hat{S}(x) \gamma(x)$$

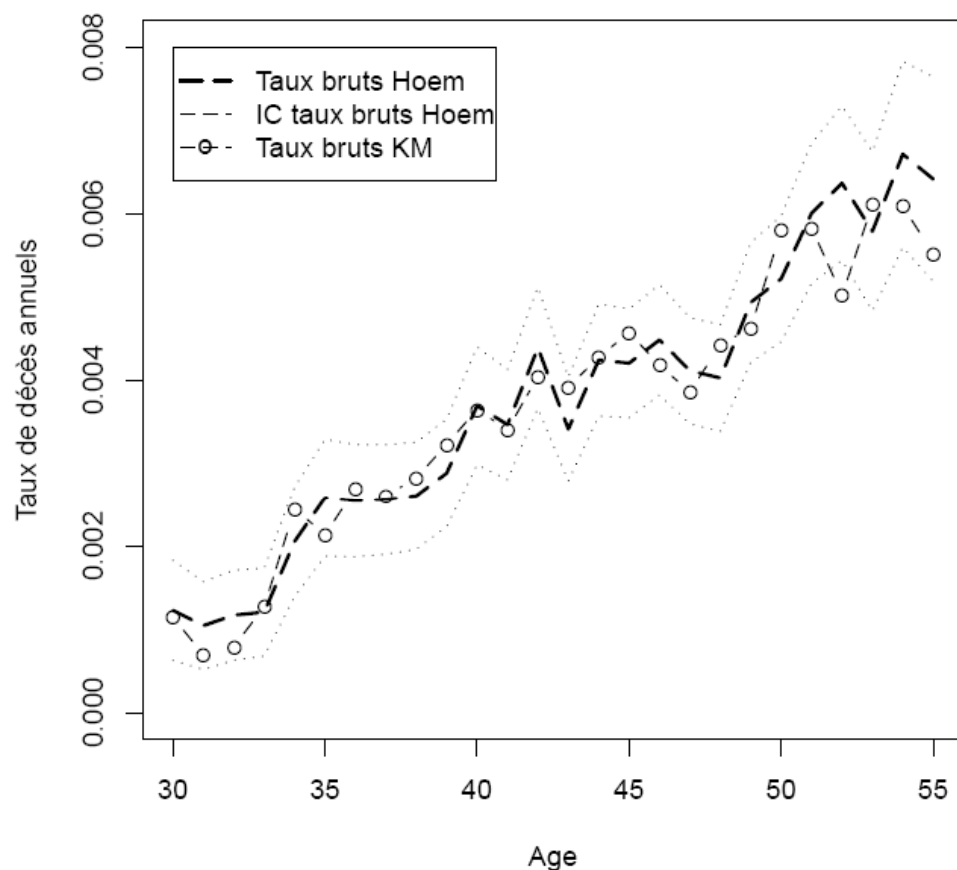
avec $a_x = \frac{p \times \gamma(X)^2}{1 + p \times \gamma(X)^2}$ pour un échantillon de taille p , on peut construire une bande de confiance (cf. Klein et Moeschberger [2005]). Les coefficients $c_{\alpha}(a_{x_m}, a_{x_M})$ sont tabulés.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation

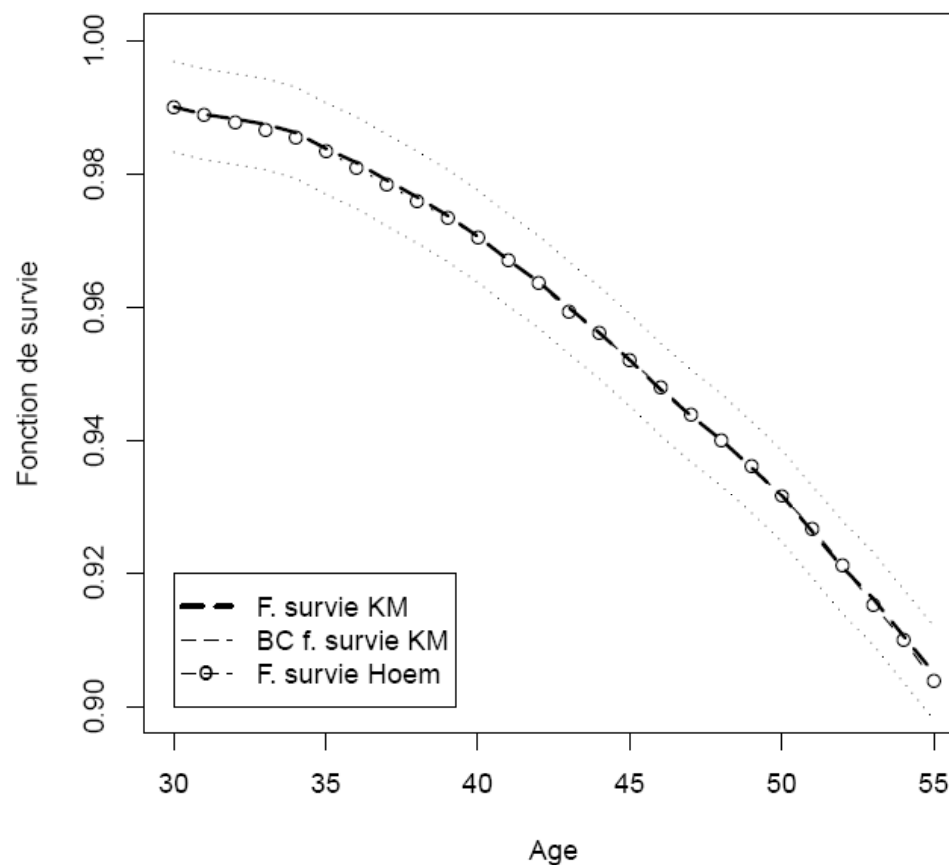


Intervalles et bandes de confiance (illustrations)

Hoem : taux bruts et IC à 95 % / KM : taux bruts



KM : f. de survie et BC à 95 % / Hoem : f. de survie



1. Problématique et mesure du risque d'estimation



En pratique toutefois on n'utilise que rarement directement les estimateurs non paramétriques et un modèle est ajusté. Les mesures ci-dessus sont alors d'un intérêt limité, il faut pouvoir mesurer l'incertitude sur les valeurs ajustées.

Si l'ajustement est effectué dans le cadre du maximum de vraisemblance, la loi asymptotique du paramètre est connue et un cadre existe donc pour mesurer le risque d'estimation sur les valeurs ajustées.

Mais il est rare que l'ajustement soit effectué dans un strict cadre EMV, par exemple les modèles de positionnement ne fournissent pas des estimateurs EMV.

On cherche alors à définir un cadre relativement général pour effectuer cette mesure en dehors d'une estimation par maximum de vraisemblance.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 1 : simulation directe des taux bruts

On considère un modèle de Brass, c'est-à-dire un modèle à référence externe tel que $y_x = a \times z_x + b + \varepsilon_x$, avec $y_x = \ln(\hat{q}_x / (1 - \hat{q}_x))$ et $z_x = \ln(q_x^{ref} / (1 - q_x^{ref}))$.

On cherche à présenter le risque d'estimation associé aux données uniquement. On suppose qu'il n'y a pas de risque de modèle. Deux approches peuvent être envisagées. Dans les deux cas, la technique de simulation retenue consiste à considérer une méthode de Monte-Carlo pour simuler la distribution d'une loi normale. Dans la première méthode on considère des taux bruts estimés selon l'approche de Hoem. On a alors :

$$Q_x \sim N \left(\hat{q}_x ; \sqrt{\frac{\hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)}{R_x}} \right).$$

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 1 : simulation directe des taux bruts

On génère alors k simulations des taux bruts de décès selon cette loi, et pour chaque simulation k , on détermine une estimation des paramètres $\theta^k = (a^k, b^k)$.

On en déduit ensuite k réalisations des taux ajustés (on parle alors de taux simulés) :

$$q_x(\hat{\theta}^k) = \frac{\exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}{1 + \exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)} .$$

Le risque d'estimation peut alors être mesuré par le coefficient $c(\psi_x) = \frac{\psi_x}{q_x(\hat{\theta})}$, où

$$q_x(\hat{\theta}) = \frac{\exp(\hat{a} \times z_x + \hat{b})}{1 + \exp(\hat{a} \times z_x + \hat{b})} \quad \text{et} \quad \psi_x = \sqrt{E \left[\left(q_x(\hat{\theta}^k) - q_x(\hat{\theta}) \right)^2 \right]} .$$

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 2 : simulation des résidus

La seconde approche présentée pour mesurer le risque d'estimation s'appuie sur la simulation des résidus (de laquelle on déduit des réalisations de taux bruts, puis des réalisations de taux ajustés au titre des fluctuations d'échantillonnage – on parle alors de taux simulés –). Après avoir testé l'adéquation de la distribution des « vrais » résidus observés du modèle à la loi normale, on calcule empiriquement la moyenne et l'écart-type de la distribution des résidus puis on génère sur ces bases des erreurs aléatoires selon la loi normale. On a ainsi pour différents scénarios k ,

$$y_x^k = \hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k .$$

Les « taux de décès bruts » associés aux k scénarios sont alors :

$$q_x^k = \frac{\exp(\hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k)}{1 + \exp(\hat{a} \times z_x + \hat{b} + e_x^k)} .$$

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les taux de décès ajustés

Méthode 2 : simulation des résidus

Pour chaque scénario k , on calcule à partir de ces « taux bruts » une estimation des paramètres $\theta^k = (a^k, b^k)$.

On en déduit ensuite k réalisations des taux ajustés (on parle alors de taux simulés) :

$$q_x^k(\hat{\theta}^k) = \frac{\exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}{1 + \exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)} .$$

Le risque d'estimation peut alors être mesuré par le coefficient $c(\psi_x) = \frac{\psi_x}{q_x(\hat{\theta})}$.

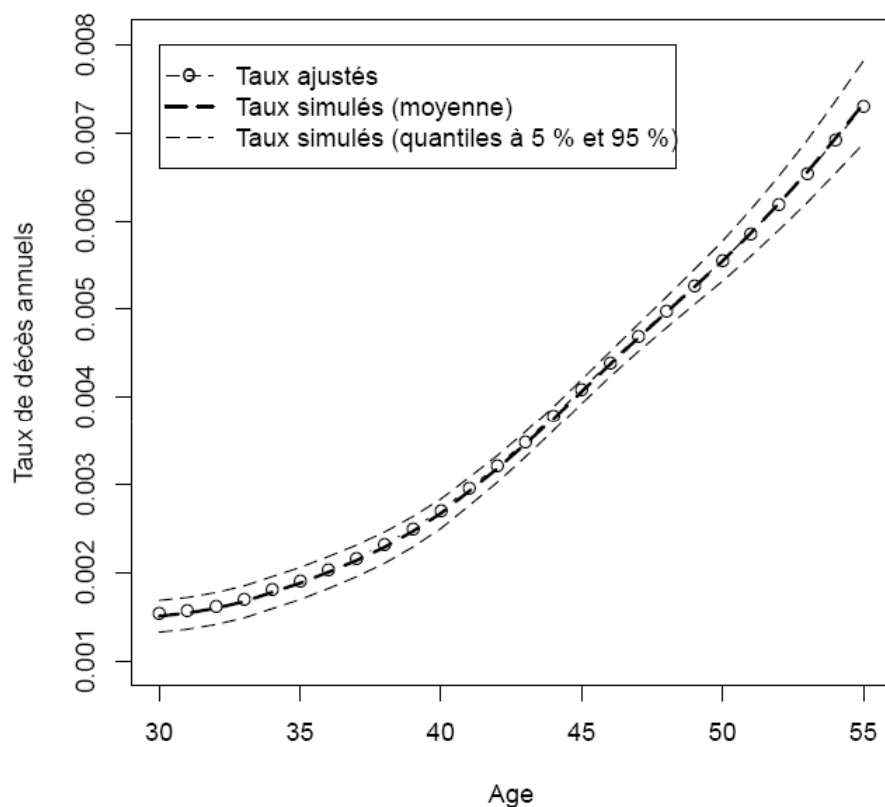
1. Problématique et mesure du risque d'estimation



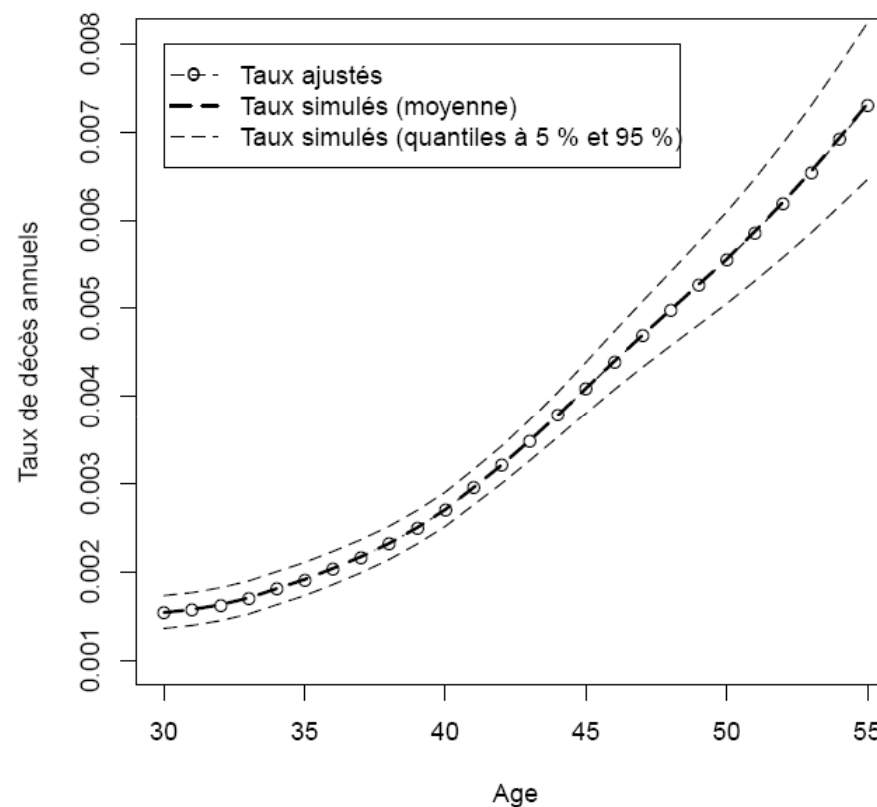
Mesure sur les taux de décès ajustés

Illustration des taux de décès ajustés et simulés

Simulation directe des taux bruts



Simulation des résidus



1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les taux de décès ajustés

Illustration des mesures de risques d'estimation (moyenne)

Méthode de simulation des taux bruts (risque d'estimation)	Mesure du risque d'estimation (en % des taux ajustés)
Méthode 1 : simulation « directe » des taux bruts	4,07%
Méthode 2 : simulation des résidus	5,59%

La mesure du risque d'estimation issue de la simulation des résidus majore en moyenne de plus de 35 % celle issue de la simulation directe des taux bruts (les résultats se basent sur 15 000 simulations). Ces écarts s'expliquent par les hypothèses retenues : la méthode de simulation des résidus repose largement sur l'hypothèse d'absence d'erreur de spécification du modèle, ce qui ne reflète pas la réalité (en pratique, il existe une erreur de spécification du modèle). Ainsi, pour cette méthode, les mesures de risque d'estimation présentées incluent également un risque de modèle.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



On dispose maintenant d'outils simples pour évaluer l'incertitude sur la table ajustée par le modèle. Toutefois, cette mesure reste trop générale et imprécise pour l'assureur, qui n'est intéressé qu'aux conséquences que l'incertitude sur la table construite peut avoir dans les calculs qu'il va mener.

On illustre dans la suite la mesure de l'incertitude associée au risque d'estimation sur deux valeurs clé, l'espérance de vie partielle et le montant d'une provision pour un risque en cas de décès.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation

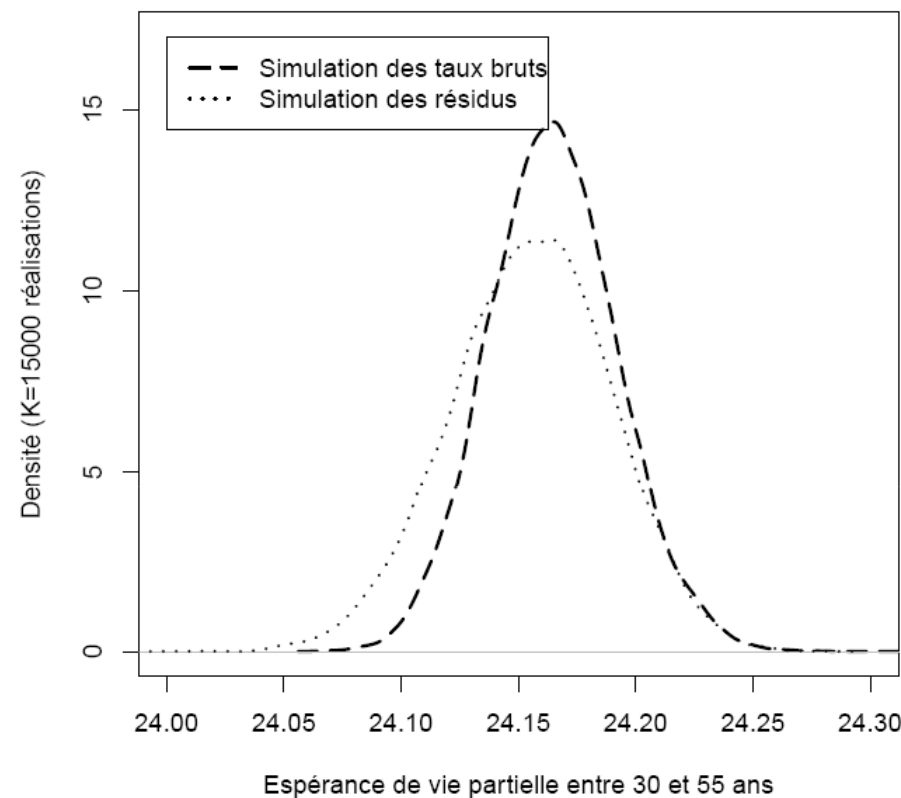


Mesure sur les espérances de vie partielles

Pour comparer les tables de mortalité on cherche une fonctionnelle propre à chaque table qui lui associe un nombre positif. L'espérance de vie est de ce point de vue une fonctionnelle naturelle.

Ce graphique présente, pour chaque méthode de simulation, les estimations des fonctions de densité (par l'estimateur à noyau) des espérances de vie résiduelles (entre 30 et 55 ans) établies à partir des taux de décès simulés.

Distribution des espérances de vie partielles à 30 ans



1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les provisions

Introduction

On se place désormais dans un contexte d'assurance et on choisit le montant des provisions comme variable d'intérêt.

On considère plus précisément des provisions relatives à des engagements temporaires au décès (la durée de l'engagement est de d années) et évaluées à partir des taux de décès simulés (l'aléa sur les taux de décès utilisé ici est établi à partir de la **simulation directe des taux de décès bruts**, car elle permet une meilleure mesure du risque lié aux fluctuations d'échantillonnage).

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les provisions

Avec l'hypothèse de décès en milieu d'année, on en déduit que le montant de la provision pour la réalisation k est $L_0^k = \sum_{t=0}^{d-1} F_x^k(t) \times (1+r_{t+1})^{-t-\frac{1}{2}}$, où r_t représente le taux

d'actualisation des flux de l'échéance t et avec :

$$F_x^k(t) = \begin{cases} C \times q_x(\hat{\theta}^k), & t = 0 \\ C \times q_{x+t}(\hat{\theta}^k) \times \prod_{j=0}^{t-1} (1 - q_{x+j}(\hat{\theta}^k)), & 1 \leq t < d \end{cases}$$

L'impact du risque d'estimation sur les provisions peut alors être mesuré par le coefficient $c(\gamma) = \frac{\gamma}{L_0}$, où L_0 est la provision calculée à partir des taux de décès ajustés $q_x(\hat{\theta})$ et en notant $\gamma = \sqrt{E[(L_0^k - L_0)^2]}$.

On note enfin $\bar{L}_0 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K L_0^j$. Ici, on considère 15 000 scénarios de taux de décès.

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 5 ans

Statistique	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 8,12 \cdot 10^{-3}$	$\bar{L}_0 = 7,98 \cdot 10^{-3}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$6,53 \cdot 10^{-3}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$7,12 \cdot 10^{-3}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$8,82 \cdot 10^{-3}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$9,29 \cdot 10^{-3}$
Coefficient	Sans objet	$c(\gamma) = 6,64 \%$

Il ressort que la prise en compte du risque systématique impacte légèrement la provision (baisse de 1,7 % lors de la prise en compte du risque systématique).

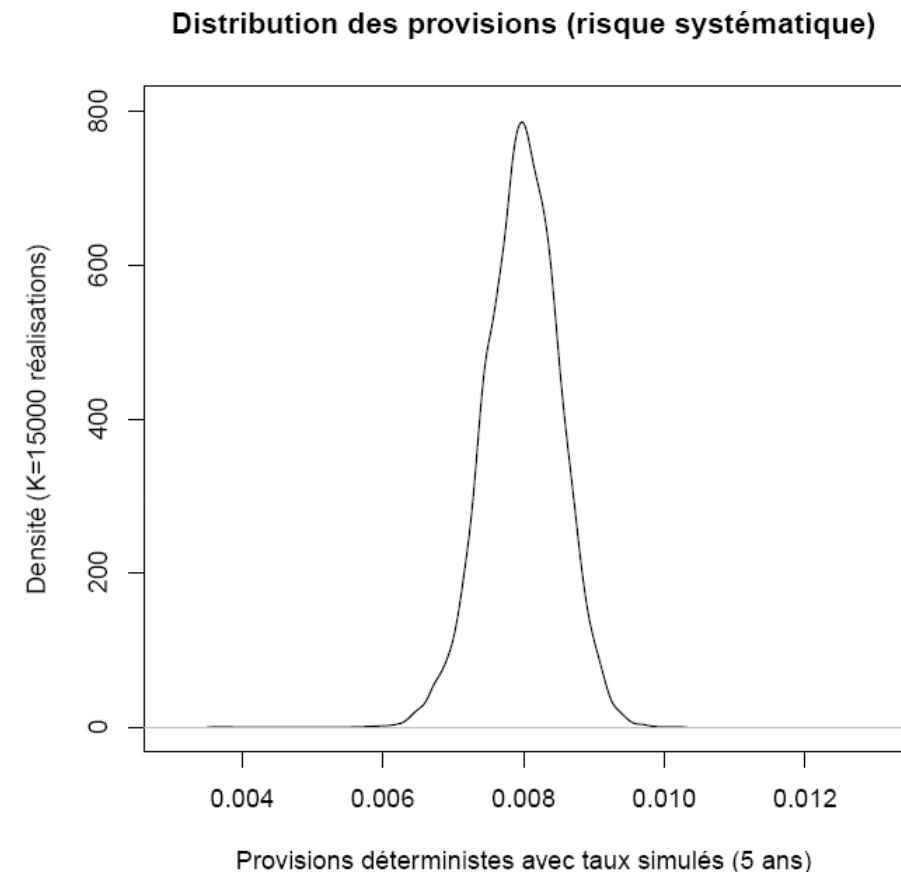
1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 5 ans

La dispersion de la distribution peut également être représentée par une estimation de la fonction de densité (par l'estimateur à noyau) de la provision déterministe calculée à partir des taux simulés.



1. Problématique et mesure du risque d'estimation



Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 20 ans

Statistique	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 3,83.10^{-2}$	$\bar{L}_0 = 3,80.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,48.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,60.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$3,99.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,08.10^{-2}$
Coefficient	Sans objet	$c(\Upsilon) = 3,18 \%$

La prise en compte du risque systématique impacte de manière limitée la provision calculée (baisse de 0,8 %).

1. Problématique et mesure du risque d'estimation



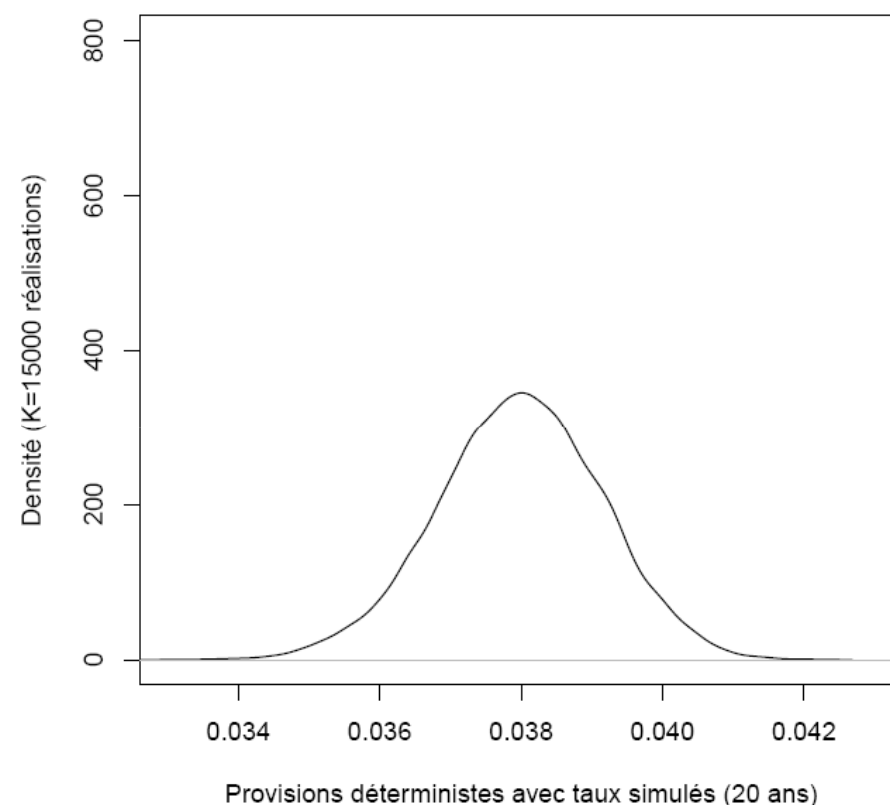
Mesure sur les provisions

Illustrations pour une provision de 20 ans

La dispersion de la distribution peut également être représentée par une estimation de la fonction de densité (par l'estimateur à noyau) de la provision déterministe calculée à partir des taux simulés.

L'échelle en ordonnée de ce graphique est identique à celle du graphique précédent, et on note que le montant moyen de la provision est environ quatre fois supérieur à celui associé au graphique précédent.

Distribution des provisions (risque systématique)





SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

1. Problématique et mesure du risque d'estimation
2. **La mortalité de la population assurée en ASF**
3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

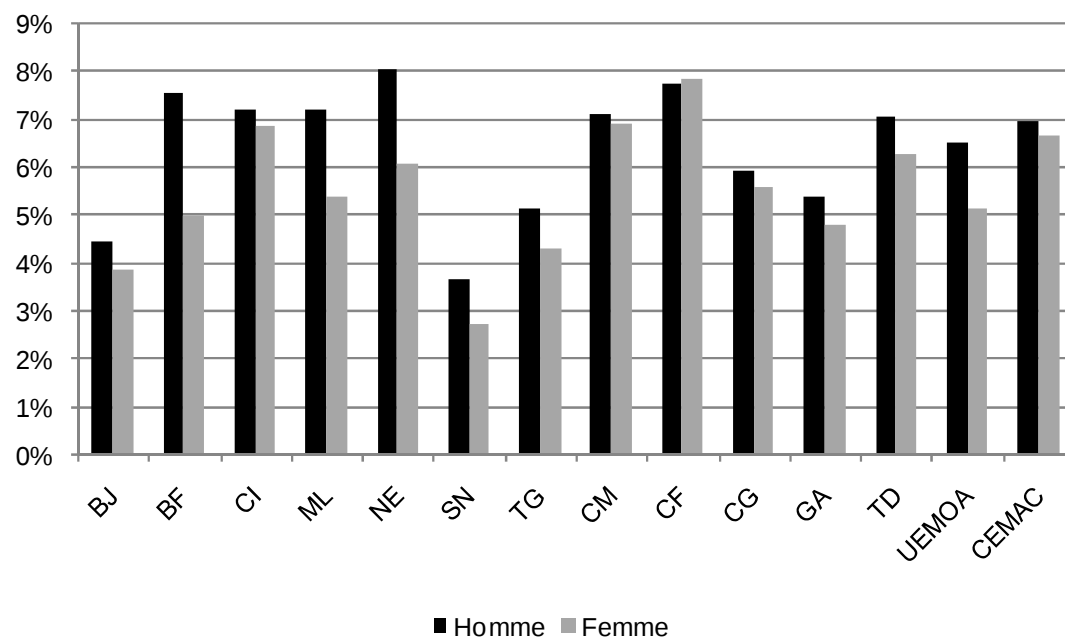
2. La mortalité de la population assurée en ASF



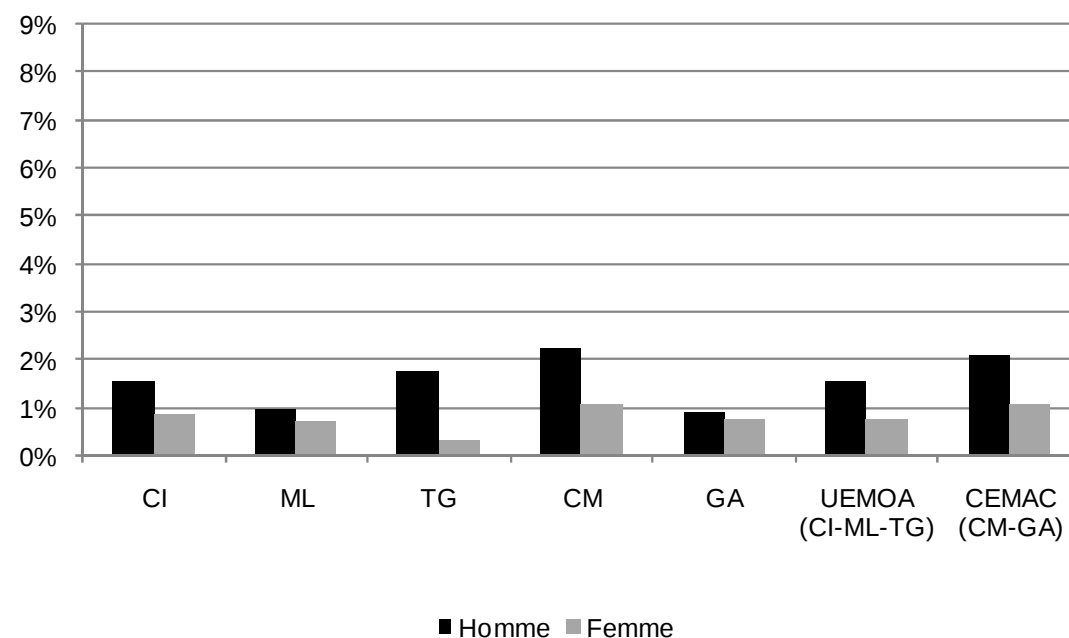
Différences entre les populations générale et assurée

Les niveaux de mortalité de la population générale et de la population assurée sont comparés à partir des taux comparatifs de décès.

Taux de mortalité comparatifs (pop. générale)



Taux de mortalité comparatifs (pop. assurée)



2. La mortalité de la population assurée en ASF



Différences au sein de la population assurée

La comparaison des sous-populations assurées est réalisée avec la méthode du log-rank, sous l'hypothèse H_0 d'identité des distributions de survie.

Dans ce test, dont le principe est par exemple détaillé dans Hill et al. [1990], on considère la statistique $\frac{(D_j^{obs} - D_j^{th})^2}{\sigma^2}$ qui suit asymptotiquement un $\chi^2(1)$, avec j une

des deux sous-populations de la comparaison (j est égal à 1 ou à 2), $D_j^{obs} = \sum_{t_i=1}^T d_{ij}$,
 $D_j^{th} = \sum_{t_i=1}^T d_i \frac{r_{ij}}{r_i}$ et $\sigma^2 = \sum_{t_i=1}^T d_i \frac{(r_i - d_i)}{(r_i - 1)} \frac{r_{i1} r_{i2}}{r_i^2}$.

En pratique, on utilise la forme approchée du test du log-rank, dont la statistique est :

$$\frac{(D_1^{obs} - D_1^{th})^2}{D_1^{th}} + \frac{(D_2^{obs} - D_2^{th})^2}{D_2^{th}}.$$

2. La mortalité de la population assurée en ASF



Différences au sein de la population assurée

Afin de quantifier la différence de mortalité entre deux sous-populations, on s'appuie sur une estimation du rapport des risques instantanés de décès.

L'estimateur retenu est l'estimateur de Tarone [1981] (également nommé estimateur de Mantel-Haenszel modifié), dont l'emploi est recommandé en présence d'ex-æquo (c'est-à-dire lorsque l'on suppose qu'il se produit plus d'un décès à chaque instant) ; sur ce point on pourra consulter Hill et al. [1990].

Sur une base 100, cet estimateur est déterminé par (pour deux sous-populations 1 et 2) :

$$100 \times \frac{\sum_{t_i=1}^T d_{i2} \frac{r_{i1}}{r_i}}{\sum_{t_i=1}^T d_{i1} \frac{r_{i2}}{r_i}},$$

avec les mêmes notations que celles du test du log-rank.

2. La mortalité de la population assurée en ASF



Différences au sein de la population assurée

Sur ces bases, les matrices suivantes présentent les risques relatifs (RR) entre couples de pays de la zone CIMA/FANAF (ASF). Les combinaisons pour lesquelles on accepte l'hypothèse d'identité des distributions de survie au seuil de 5 % sont en gris foncé et en gras.

RR et tests de comparaison par pays (homme, pop. assurée)

Homme (pop. ass.)	CI	ML	TG	CM	GA
CI	100	55	108	151	52
ML		100	196	273	99
TG			100	141	48
CM				100	35
GA					100

RR et tests de comparaison par pays (femme, pop. assurée)

Femme (pop. ass.)	CI	ML	TG	CM	GA
CI	100	63	38	134	86
ML		100	60	210	147
TG			100	352	240
CM				100	64
GA					100

2. La mortalité de la population assurée en ASF



Différences au sein de la population assurée

L'hétérogénéité au sein de la population est principalement justifiée par :

- L'urbanisation : il existe une surmortalité dans les zones rurales (toutes choses égales par ailleurs).
- La prévalence du VIH/Sida : il existe une surmortalité dans les zones à fortes prévalence du VIH/Sida (toutes choses égales par ailleurs).
- Le taux de pénétration de l'assurance vie : le lien avec le niveau d'abattement nécessaire au passage de la mortalité de la population générale à celle de la population assurée est toutefois complexe et difficile à identifier.

Pour modéliser les lois de survie de cette population hétérogène, il convient notamment de tenir compte des problématiques de choix de segmentation optimale et de risque d'estimation (cf. Planchet et Leroy [2009]) .



SOMMAIRE

Mesure du risque
d'estimation

1. Problématique et mesure du risque d'estimation
2. La mortalité de la population assurée en ASF
3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Impact d'une réduction d'échantillon

Les illustrations de la partie 1 ont été réalisées à partir de données de toute la population UEMOA. Ces données incluent les données de trois pays, présentées dans le tableau ci-dessous (il s'agit de données sur les 30-55 ans).

Homme (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
CI	549 656	43,9 ans	0,40%	0,38%	0,41%
ML	12 114	42,5 ans	0,22%	0,14%	0,31%
TG	133 779	43,2 ans	0,42%	0,39%	0,46%
UEMOA (CI-ML-TG)	695 549	43,8 ans	0,40%	0,38%	0,41%

L'objectif ici est alors de présenter l'évolution du risque systématique lorsque l'on passe de l'échelle de la population UEMOA à celle d'un pays.

Le pays retenu pour cette illustration est le Togo (TG), pays intermédiaire entre la Côte d'Ivoire (CI) et le Mali (ML) en termes d'exposition au risque.

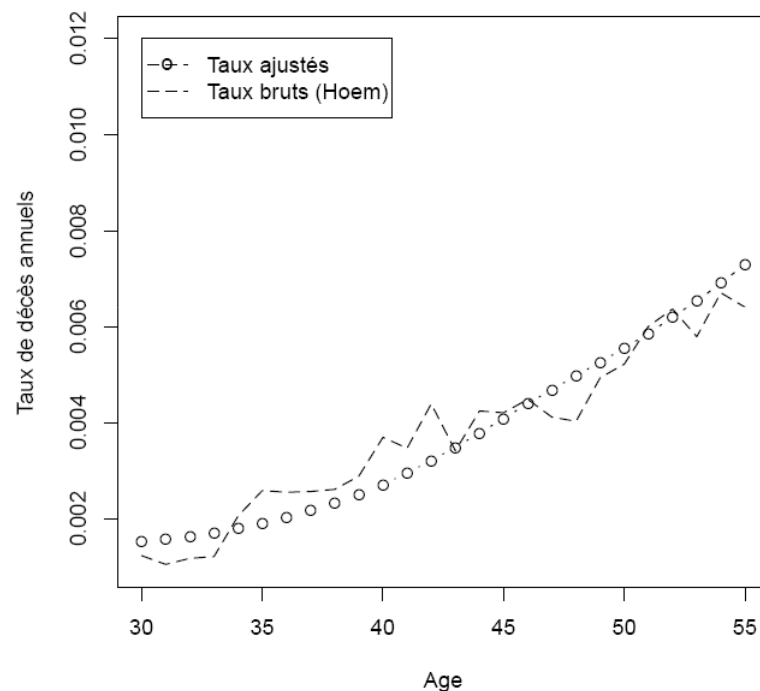
3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



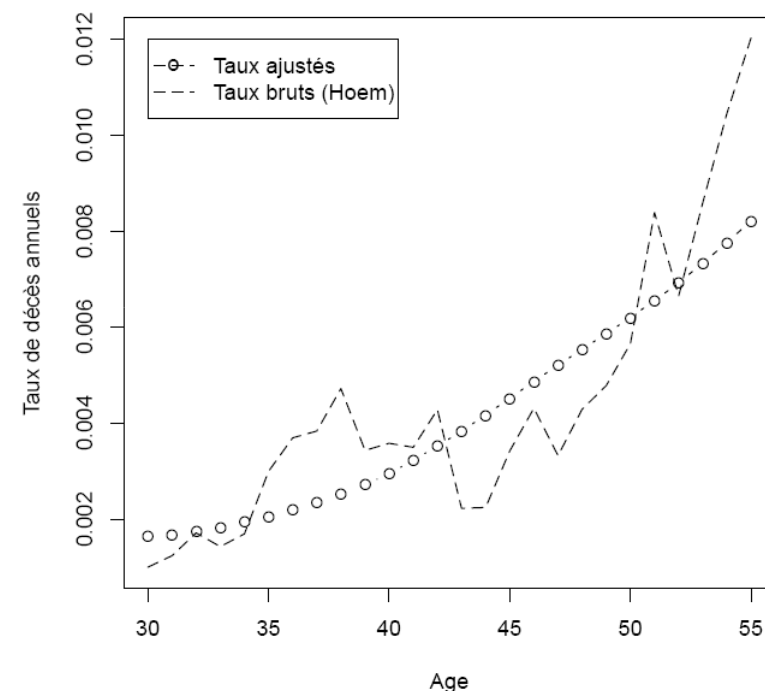
Impact d'une réduction d'échantillon

Les graphiques ci-dessous présentent les taux ajustés et les taux bruts pour les données de l'UEMOA et du Togo. Il y apparaît que les fluctuations d'échantillonnage sont logiquement plus importantes avec les données du Togo.

Taux ajustés et taux bruts (UEMOA)



Taux ajustés et taux bruts (TG)

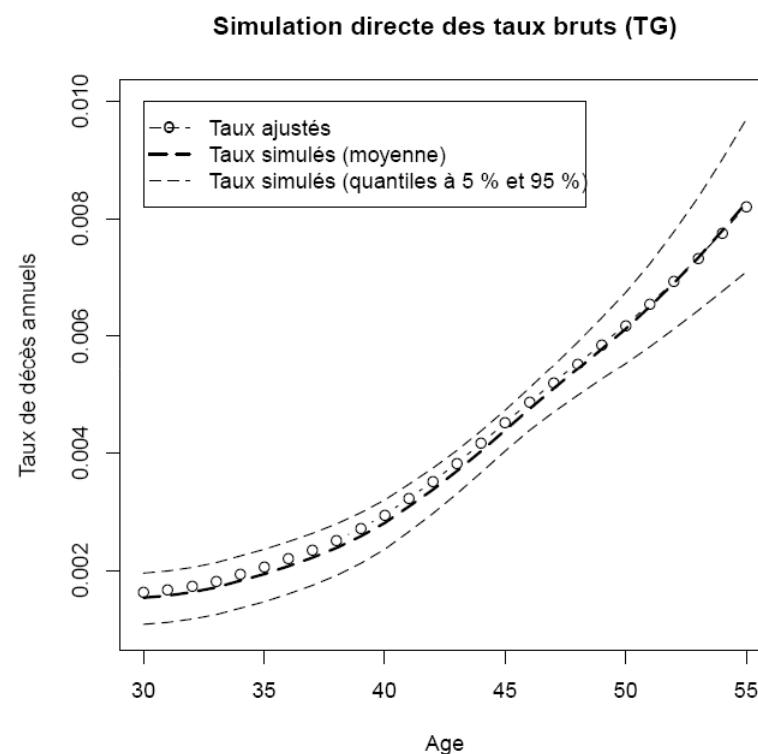
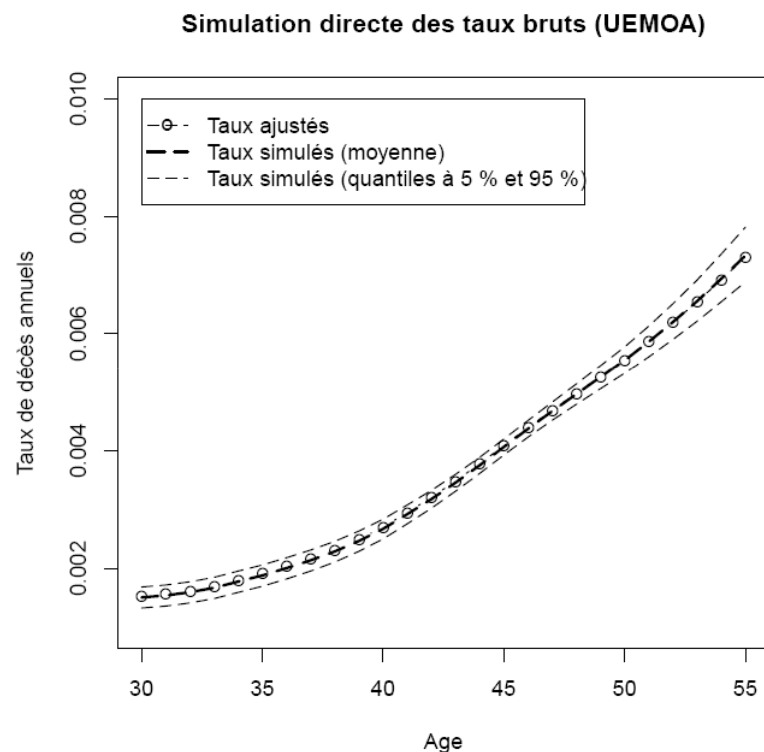


3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Impact d'une réduction d'échantillon

Les graphiques ci-dessous présentent les taux ajustés et les taux simulés pour les données de l'UEMOA et du Togo. Il ressort que la dispersion des taux de décès simulés à partir des données du Togo est logiquement plus importante.



3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Impact d'une réduction d'échantillon

Pour quantifier l'écart de dispersion, le tableau ci-dessous présente une moyenne arithmétique du coefficient $c(\psi_x)$ pour tous les âges $x \in [x_m, x_M]$.

Population	Mesure du risque d'estimation (en % des taux ajustés)
UEMOA (CI-ML-TG)	4,07%
TG	10,03%

La moyenne du coefficient augmente de près de 150 %.

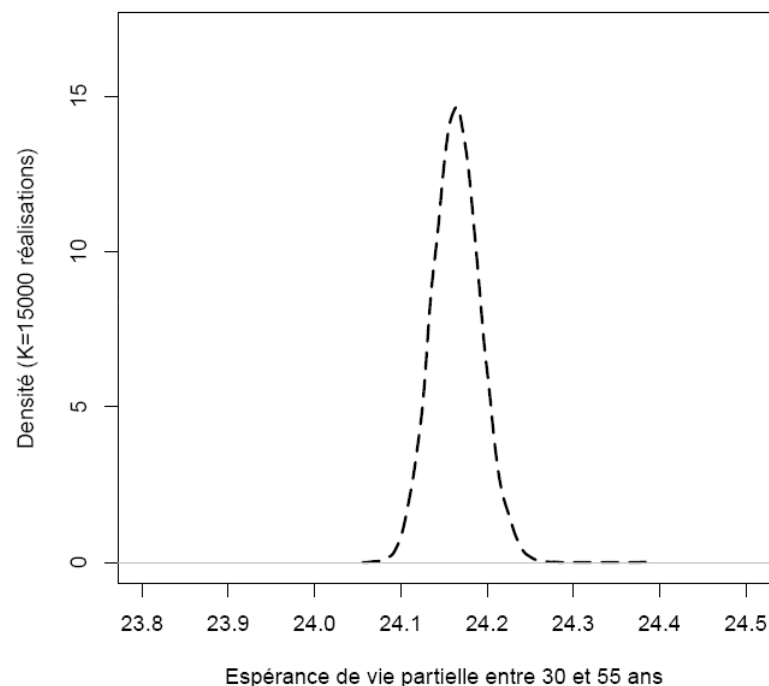
3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



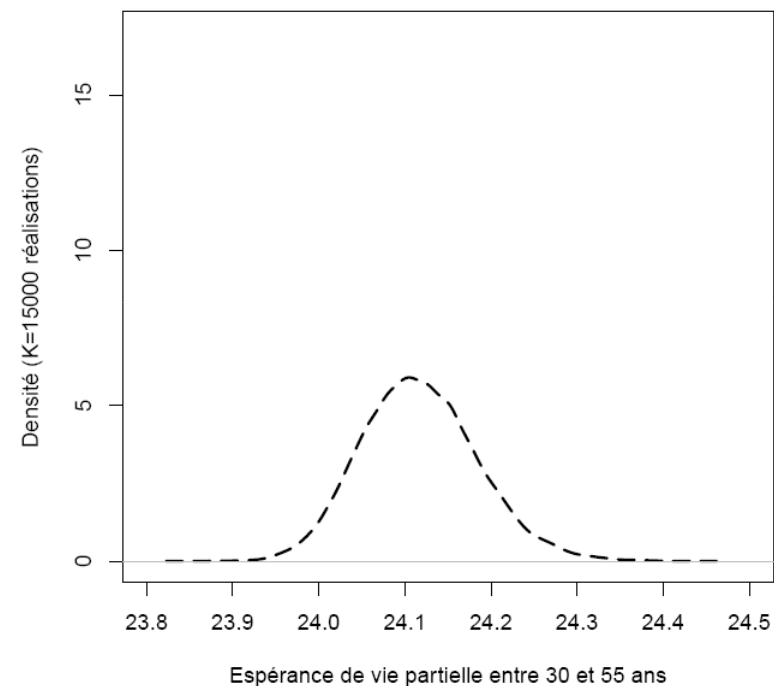
Impact d'une réduction d'échantillon

Dans la continuité des observations ci-dessus, il apparaît sur ces graphiques que la distribution de l'espérance de vie partielle issue de la population UEMOA présente une queue moins épaisse que celle issue de la population du Togo.

Distribution des espérances de vie partielles (UEMOA)



Distribution des espérances de vie partielles (TG)



3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Impact d'une réduction d'échantillon

Impact sur les provisions

Statistique	UEMOA		TG	
	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)	Provision déterministe et taux ajustés	Provision déterministe et taux simulés (risque d'estimation)
Moyenne	$L_0 = 3,83.10^{-2}$	$\bar{L}_0 = 3,80.10^{-2}$	$L_0 = 4,18.10^{-2}$	$\bar{L}_0 = 4,02.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,48.10^{-2}$	Sans objet	$3,17.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,60.10^{-2}$	Sans objet	$3,53.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$3,99.10^{-2}$	Sans objet	$4,47.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,08.10^{-2}$	Sans objet	$4,70.10^{-2}$
Coefficient	Sans objet	$c(\Upsilon) = 3,18 \%$	Sans objet	$c(\Upsilon) = 7,91 \%$

Avec les données du Togo, la prise en compte du risque systématique impacte significativement la provision calculée (baisse de 3,8 %), alors que l'impact est limité avec les données UEMOA (baisse de 0,8 %).

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Impact d'une réduction d'échantillon

La modélisation de l'hétérogénéité à partir de modélisations indépendantes de sous-populations n'est pas appropriée car elle fait apparaître un risque d'estimation significatif, qui conduit à biaiser le *best estimate* et à épaissir la queue de distribution des engagements (ce qui majore le capital de solvabilité requis dans le projet Solvabilité 2, le CRNHR dans le référentiel MCEV ou l'ajustement pour risque dans le projet de norme IFRS sur les contrats d'assurance).

La segmentation du portefeuille peut donc présenter un coût significatif en cas de modélisation indépendante de chaque population.

Il faut donc construire un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables de manière plus globale.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Choix du modèle d'hétérogénéité

Trois approches (au moins) sont possibles pour modéliser l'hétérogénéité :

- la première démarche consiste à modéliser le comportement de chaque sous-population de manière indépendante ;
- la deuxième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité observables à partir de variables explicatives ;
- la troisième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité inobservables.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles à variables explicatives et problèmes de dimension

Lorsqu'un phénomène peut être expliqué par plusieurs variables explicatives, on peut se tourner vers des régressions purement paramétriques. L'avantage est qu'on alors peut facilement trouver des estimateurs convergents, mais l'inconvénient est que ces modèles s'appuient sur de nombreuses hypothèses pour le comportement du phénomène observé et présentent donc un risque important de ne pas être fidèle aux données d'expérience.

Une alternative consiste à se tourner vers des régressions non paramétriques, qui ont l'avantage de s'appuyer sur un nombre limité d'hypothèses pour le comportement du phénomène observé. Ces modèles présentent toutefois un inconvénient connu sous le terme de fléau de la dimension (du mathématicien Richard Bellman), relatif à l'augmentation explosive du volume de données liée à l'ajout de dimensions supplémentaires dans un espace mathématique.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles *single-index* (SIM)

Il est donc nécessaire de réduire la dimension des modèles. La méthode qui est considérée ici est la méthode retenue par Lopez [2007] : il s'agit de la régression *single index*. Les modèles de régression *single index* (SIM) sont définis par :

$$m(z) = E(Y | Z = z) = f(\delta^T z),$$

où Y représente la variable à expliquer de dimension 1, Z les variables explicatives de dimension p , m une fonction inconnue $m: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, f une fonction de lien inconnue telle que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\delta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ est un paramètre inconnu de dimension finie.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles de Cox et de Lin et Ying

Le modèle multiplicatif de Cox [1972] et le modèle additif de Lin et Ying [1994] sont des cas particuliers du modèle SIM, dans lesquels les hypothèses ne portent pas sur l'espérance conditionnelle mais sur le taux de hasard instantané conditionnel :

- Cox :
$$\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) e^{\delta^T z}$$

- Lin et Ying :
$$\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) + \gamma^T z$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Choix du modèle d'hétérogénéité

Modèles de Cox et de Lin et Ying

Les modèles de Cox et de Lin et Ying présentent les contraintes suivantes :

- le modèle de Cox repose sur l'hypothèse que les différences relatives des taux de décès instantanés entre les différents segments sont constantes (hypothèse de proportionnalité) ;
- le modèle de Lin et Ying repose sur l'hypothèse que les différences absolues des taux de décès instantanés entre les différents segments sont constantes.

NB : ces contraintes peuvent être levées dans des modèles plus généraux, purement non paramétriques, comme le modèle additif d'Aalen.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Ajustement

Lorsque l'on suppose qu'il ne se produit qu'un seul décès à chaque instant, Cox [1972] remarque que la contribution à la vraisemblance de la sortie au $j^{\text{ème}}$ instant est :

$$\exp\{\delta^T z_{(i)}\} / \sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} ,$$

où $z_{j(i)}$ représente les caractéristiques du $j^{\text{ème}}$ individu sous risque à l'instant de la sortie. La vraisemblance partielle de Cox se calcule ainsi comme le produit de ces contributions, et la log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T z_{(i)} - \sum_{i=1}^D \ln \left(\sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right) .$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Lorsque l'on suppose qu'il se produit plusieurs décès à chaque instant, Cox [1972] fournit une nouvelle spécification de son modèle multiplicatif dans un cas discret :

$$\frac{\lambda(t | Z = z)}{1 - \lambda(t | Z = z)} = \frac{\lambda_0(t)}{1 - \lambda_0(t)} e^{\delta^T z}.$$

Avec cette nouvelle spécification, la contribution à la vraisemblance des sorties au $i^{\text{ème}}$ instant s'écrit :

$$\exp\{\delta^T s_{(i)}\} / \sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\},$$

où $s_{(i)}$ représente le nombre de sorties et la notation du dénominateur signifie que la somme est prise sur tous les ensembles d'individus bien distincts tirés dans R_i . La log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T s_{(i)} - \sum_{i=1}^D \ln \left(\sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\} \right).$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Une des spécificités du risque décès est que la fréquence de survenance du risque est faible et que l'exposition au risque est relativement élevée. Dans ce cas le nombre de combinaisons possibles dans $\sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\}$ dans l'estimateur

de Cox en présence d'*ex-aequo* est particulièrement important et limite la mise en œuvre (notamment dans le cadre de simulations, comme ici). On peut alors se tourner vers les approximations de Breslow et d'Elfron. En retenant celle de Breslow, la contribution à la vraisemblance est :

$$\exp\{\delta^T s_{(i)}\} / \left[\sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right]^{d_i}$$

et la log-vraisemblance est :
$$L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T s_{(i)} - \sum_{i=1}^D d_i \times \ln \left(\sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right).$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

En pratique, dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (sous-population de base ici) à partir du modèle à référence externe de Brass. À cet effet, les taux bruts sont estimés selon l'approche de Hoem et les taux de référence sont ceux des tables réglementaires françaises TH/TF00-02 (décès). Ces taux ajustés sont notés

$$q_{x,CI}(\hat{\theta}), \text{ avec } \hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}).$$

Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Cox, par les relations suivantes (en retenant l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}; \hat{\delta}_{ML}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right)^{\exp(\hat{\delta}_{ML})} \quad q_{x,TG}(\hat{\theta}; \hat{\delta}_{TG}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right)^{\exp(\hat{\delta}_{TG})}$$

où $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_{TG}; \hat{\delta}_{ML})$ est estimé par Cox.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Simulation

On se place dans le cas des taux bruts estimés selon l'approche de Hoem pour chaque sous-population. Ces taux bruts sont notés $\hat{q}_{x,h}$ pour le pays h .

La technique de simulation retenue consiste à considérer une méthode de Monte-Carlo pour simuler la distribution d'une loi normale. Ainsi, pour chaque pays, on génère dans une première étape k réalisations des taux de décès bruts, pour tous les âges ($x \in [x_m, x_M]$), selon :

$$Q_{x,h} \sim N \left(\hat{q}_{x,h}; \sqrt{\frac{\hat{q}_{x,h} (1 - \hat{q}_{x,h})}{R_{x,h}}} \right).$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Dans une seconde étape, on en déduit pour chaque simulation k et pour tous les âges x la valeur approchée du nombre de décès par pays par :

$$\hat{d}_{x,h}^k \approx \left[\hat{q}_{x,h}^k \times R_{x,h} \right].$$

Les étapes suivantes consistent à estimer les K réalisations des taux ajustés (on parle alors de taux simulés), et à cet effet on distingue la CI, le ML et le TG.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

Pour la Côte d'Ivoire (CI), pour chaque simulation on a :

$$q_{x,CI}(\hat{\theta}^k) = \frac{\exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}{1 + \exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}.$$

Dans le cas du Mali (ML) et du Togo (TG), les taux ajustés sont obtenus à partir du modèle de Cox. Pour chaque simulation k on en estime les paramètres avec la méthode de Breslow ; dans ce cas, la log-vraisemblance s'écrit :

$$L(\delta^k) = \sum_{i=1}^D (\delta^k)^T s_{(i)}^k - \sum_{i=1}^D \hat{d}_i^k \times \ln \left(\sum_{j \in R_i} \exp \left\{ (\delta^k)^T z_{j(i)} \right\} \right),$$

$$\text{où } \hat{d}_i^k = \sum_h \hat{d}_{i,h}^k \text{ et } \delta^k = (\delta_{ML}^k; \delta_{TG}^k).$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Cox : ajustement et simulation

On en déduit pour chaque simulation k les taux ajustés du Mali et du Togo par :

$$q_{x,ML} \left(\hat{\theta}^k ; \hat{\delta}_{ML}^k \right) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}^k \left(\hat{\theta}^k \right) \right)^{\exp \left(\hat{\delta}_{ML}^k \right)}$$

$$q_{x,TG} \left(\hat{\theta}^k ; \hat{\delta}_{TG}^k \right) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}^k \left(\hat{\theta}^k \right) \right)^{\exp \left(\hat{\delta}_{TG}^k \right)}$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Lin et Ying : ajustement et simulation

Ajustement

Lin et Ying [1994] et Klein et Moeschberger [2005] montrent que l'estimation des coefficients du modèle s'effectue en calculant simplement :

$$\hat{\gamma} = A^{-1}B$$

où :

$$A = \sum_{i=1}^D \sum_{j \in R_i} \left(z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right)^T \left(z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right)$$

$$B = \sum_{i=1}^D \sum_h d_{i,h} \left(z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)} \right)$$

$$\bar{z}_{(i)} = \frac{1}{R_i} \sum_{j \in R_i} z_{j(i)}$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Lin et Ying : ajustement et simulation

Dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (pour mémoire il s'agit de la sous-population de base) comme précédemment.

Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Lin et Ying, par la relation suivante (sous l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}; \hat{\gamma}_{ML}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right) \exp(-\hat{\gamma}_{ML}) \quad q_{x,TG}(\hat{\theta}; \hat{\gamma}_{TG}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right) \exp(-\hat{\gamma}_{TG})$$

où $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_{TG}; \hat{\gamma}_{ML})$ sont les paramètres estimés du modèle de Lin et Ying.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Modèle de Lin et Ying : ajustement et simulation

Simulation

Les premières étapes de la simulation des taux de décès à partir du modèle de Lin et Ying sont identiques à celles réalisées à partir du modèle de Cox. On dispose ainsi de simulations du nombre de décès par pays par $\hat{d}_{x,h}^k$ et des taux de décès simulés pour la Côte d'Ivoire $q_{x,CI}(\hat{\theta}^k)$.

Pour déterminer les taux de décès du Mali et du Togo pour chaque simulation k , on s'appuie sur le modèle de Lin et Ying et on estime les paramètres $\gamma^k = (\gamma_{ML}^k; \gamma_{TG}^k)$. À cet effet, on utilise la relation : $\hat{\gamma} = A^{-1}B^k$, où $B^k = \sum_{i=1}^D \sum_h \hat{d}_{i,h}^k (z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)})$.

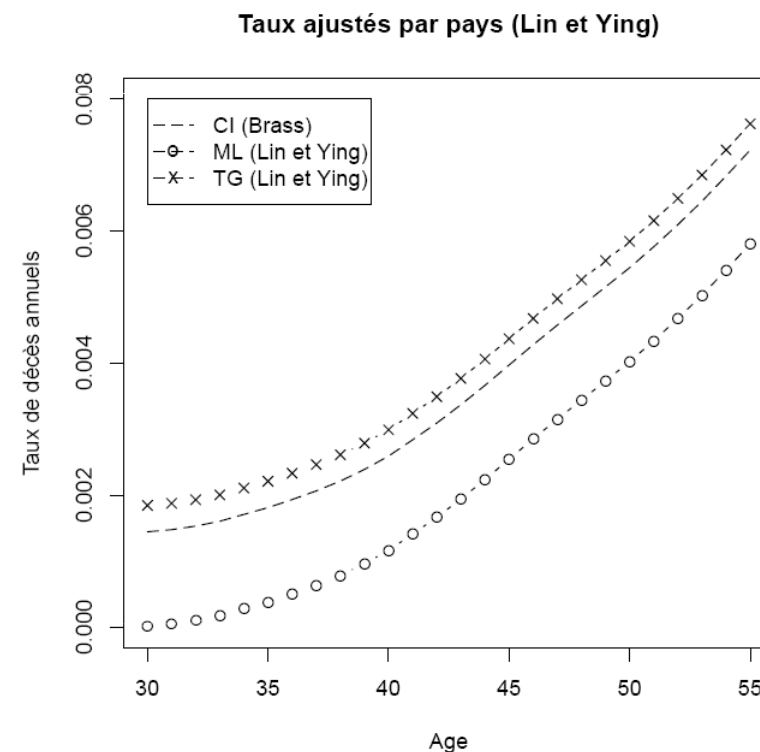
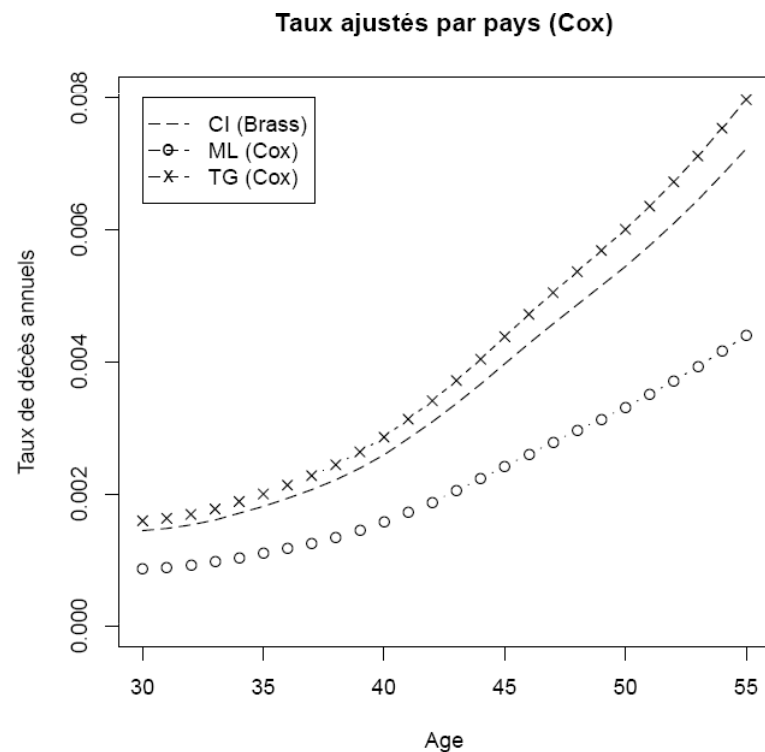
Pour chaque simulation k , on en déduit ensuite les taux de décès simulés du Mali et du Togo par les relations :

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}^k; \hat{\gamma}_{ML}^k) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta}^k)\right) \exp(-\hat{\gamma}_{ML}^k) \quad q_{x,TG}(\hat{\theta}^k; \hat{\gamma}_{TG}^k) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta}^k)\right) \exp(-\hat{\gamma}_{TG}^k)$$

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Comparaison des ajustements et *backtesting*



Concernant les ajustements, il apparaît qu'avec le modèle multiplicatif de Cox, les différences absolues entre les pays augmentent significativement lorsque l'âge augmente, contrairement au modèle de Lin et Ying dans lequel les différences absolues sont constantes pour tous les âges.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Comparaison des ajustements et *backtesting*

Modèle global UEMOA - H (Brass global)			
Pays	Décès observés	Décès prédits	Différence relative
Côte d'Ivoire	2 188	2 203	0,7%
Mali	27	44	63,8%
Togo	565	511	-9,6%

Modèles intégrant l'hétérogénéité (sans et avec fact. obs.)			
Pays (modèle)	Décès observés	Décès prédits	Différence relative
Côte d'Ivoire (Brass)	2 188	2 144	-2,0%
Mali (Brass(*))	27	29	8,4%
Mali (Cox)		26	-3,2%
Mali (Lin et Ying)		26	-4,9%
Togo (Brass)	565	565	-0,1%
Togo (Cox)		548	-3,0%
Togo (Lin et Ying)		550	-2,7%

(*) avec convention pour le traitement des taux de décès bruts nuls.

Le 1^{er} sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés sans tenir compte de l'hétérogénéité entre sous-populations. Le 2^{ème} sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés avec des modèles intégrant l'hétérogénéité, soit à partir de modèles indépendants pour chaque sous-population (Brass), soit à partir de modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (Cox et Lin et Ying).

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Population	Modèle de Brass (approche 1)	Modèle de Cox (approche 2)	Modèle de Lin et Ying (approche 2)
Togo $c(\psi_{TG})$	9,89 %	6,19 %	6,78 %

L'utilisation du modèle de Brass (modèle indépendant pour chaque sous-population), conduit à un risque d'estimation supérieur à celui obtenu avec le modèle de Cox ou de Lin et Ying (modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables). Les résultats se basent sur 1 000 simulations des taux.

Par ailleurs, on note que le risque d'estimation est d'autant plus important que la population présente une faible exposition. Ainsi par exemple, le risque d'estimation avec le modèle de Brass pour la Côte d'Ivoire est égal à 4,73 %, et celui du Mali avec le modèle de Cox est égal à 22,27 %.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



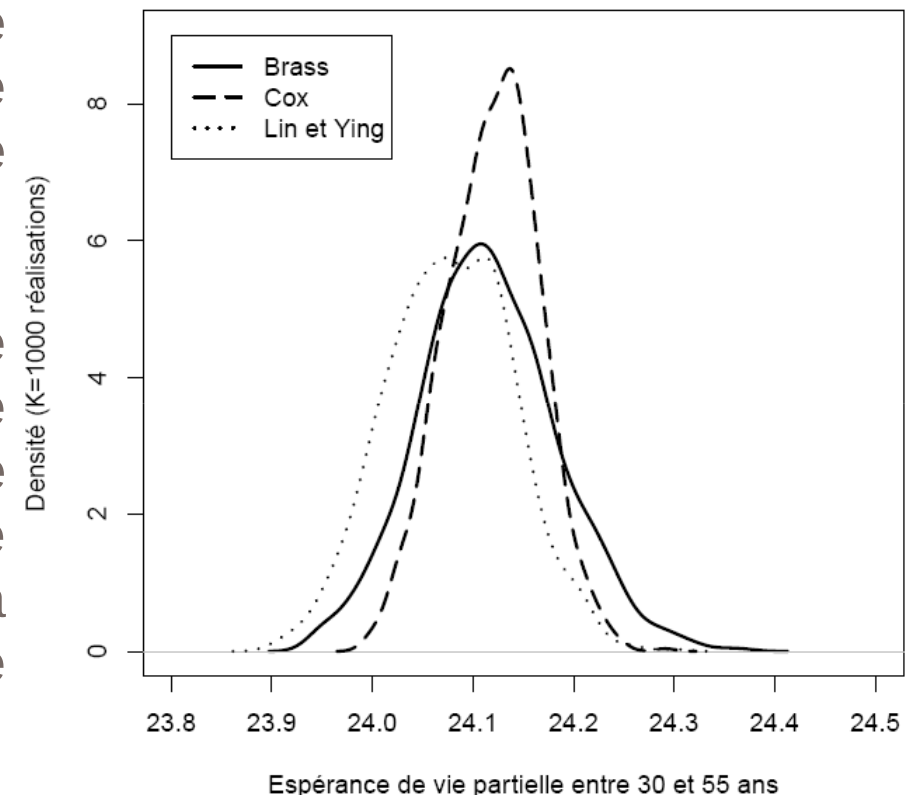
Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les espérances de vie partielles (Togo)

Dans la continuité des observations précédentes il apparaît que la distribution de l'espérance de vie partielle issue du modèle de Cox présente une queue moins épaisse que celle issue du modèle de Brass.

En d'autres termes, les tables de mortalité issues des taux simulés à partir du modèle multiplicatif intégrant l'hétérogénéité à l'aide de facteurs observables présentent une volatilité plus faible que celles issues des taux simulés à partir du modèle de Brass utilisé indépendamment pour chaque sous-population.

Dist. des espérances de vie partielles à 30 ans (Togo)



3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les provisions (Togo)

Statistique	Brass		Cox		Lin et Ying	
	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés
Moyenne	$4,18.10^{-2}$	$4,03.10^{-2}$	$4,06.10^{-2}$	$4,01.10^{-2}$	$4,22.10^{-2}$	$4,17.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,18.10^{-2}$	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,54.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,70.10^{-2}$	Sans objet	$3,74.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,34.10^{-2}$	Sans objet	$4,61.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,74.10^{-2}$	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,83.10^{-2}$
Coefficient $c(\Upsilon)$	Sans objet	7,91 %	Sans objet	5,15 %	Sans objet	6,41 %

Avec les données du Togo, la prise en compte du risque systématique diminue de 3,6 % la provision calculée lorsque l'on retient le modèle de Brass, alors que la baisse est de 1,2 % pour les modèles de Cox et de Lin et Ying.

3. Réduction du risque d'estimation en présence d'hétérogénéité



Évolution des risques d'estimation selon les modèles

Impact sur les provisions (Togo)

Les résultats illustrent une diminution de l'impact du risque d'estimation sur les provisions de plus de 50 % avec les modèles de la deuxième approche (Cox et Lin et Ying), par rapport à l'impact observé avec le modèle de la première approche (Brass). En outre, avec les modèles de la seconde approche, la mesure de risque d'estimation diminue de 20 à 35 %.

Néanmoins, dans notre exemple on note en parallèle que le poids du risque d'estimation dans les provisions est comparable au poids du risque de modèle (qui reflète l'évolution de la provision selon le choix de modèle).

Dans la recherche d'un modèle permettant de réduire le risque d'estimation, une attention particulière doit donc également être accordée aux conséquences en termes de risques de modèles.

Conclusion



En présence d'hétérogénéité, on se retrouve avec de petits échantillons pour chaque segment et une attention particulière doit alors être accordée à l'incertitude des estimateurs.

Les intervalles ou bandes de confiance sont utiles dans le cadre d'estimateurs non paramétriques, mais présentent un intérêt plus limité lorsque l'on utilise un modèle paramétrique.

Dans le cas d'un modèle, il faut pouvoir mesurer l'incertitude sur les valeurs ajustées. Un cadre relativement général pour effectuer cette mesure en dehors d'une estimation par maximum de vraisemblance est présenté ici à partir d'une méthode de rééchantillonnage des taux bruts.

Cet outil de mesure fait apparaître que la modélisation de l'hétérogénéité à partir de modélisations indépendantes de sous-populations n'est pas appropriée car elle fait apparaître un risque d'estimation significatif.

Conclusion



Il convient alors de se tourner vers un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables, qui présente plusieurs avantages parmi lesquels on retient :

- la diminution de l'impact du risque d'estimation sur la provision estimée (baisse de plus de 50 % par rapport à l'impact issu d'une modélisation indépendante de chaque sous-population) ;
- la capacité à modéliser les taux de décès lorsque les données sont sensiblement limitées.

Le choix d'un tel modèle présente toutefois des inconvénients :

- l'hypothèse sur la constance des différences relatives (Cox) ou absolues (Lin et Ying) des taux de décès instantanés ;
- de manière générale, l'impact potentiel en termes de risque de modèle.

Références



- Cao H. [2005] *A comparison Between the Additive and Multiplicative Risk Models*, Mémoire d'actuariat, Université Laval.
- Cox D. R. [1972] « Regression Models and Life-Tables », *Journal of the Royal Society. Series B (Methodological)*, Vol. 34, No. 2.
- Droesbeke J.-J., Fichet B., Tassi P. [1989] (éditeurs) « Analyse statistique des durées de vie », *Economica*.
- Hill C., Com-Nougué C., Kramar A., Moreau T., O'Quigley J., Senoussi R., Chastang C. [1990] « Analyse statistique des données de survie », *Inserm, Médecine – Sciences, Flammarion*.
- Kamega A., Planchet F. [2010], « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2136*.
- Kamega A., Planchet F. [2011a], « Analyse et comparaison des populations générale et assurée en Afrique subsaharienne francophone pour anticiper la mortalité future », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP 2138*.
- Kamega A., Planchet F. [2011b], « Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables », *Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 11, No 21*.
- Klein J. P., Moeschberger M. L. [2005] « Survival Analysis – Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer, 2nd edition*.
- Kone M.G.K. [2007] « État des lieux de l'assurance vie dans les pays de la CIMA », *CIMA*.
- Lin D. Y., Ying Z. [1994] « Semiparametric analysis of the additive risk model », *Biometrika, n. 81*.
- Lopez O. [2007] *Réduction de dimension en présence de données censurées*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.
- Martinussen T., Scheike T. H. [2006] « Dynamic Regression Models for Survival Data », *Springer*.
- Planchet F. [2006], « Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers – (Tables TGH 05 et TGF 05) – Notice de présentation », *Institut des actuaires*.
- Planchet F., Kamega A., Ziguélé M. [2010], « Confection des tables de mortalité réglementaires pour la zone CIMA », *CIMA/WINTER & Associés (confidentiel)*.
- Planchet F., Leroy G. [2009] « Quel niveau de segmentation pertinent ? », *La Tribune de l'Assurance, n. 142*.
- Planchet F., Thérond P. [2006] « Modèles de Durée - Applications actuarielles », *Economica*.
- Vaupel J. W., Manton K. G. Stallard E. [1979] « The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality », *Demography, Vol. 16, No. 3*.



Frédéric Planchet

fplanchet@ressources-actuarielles.net

Aymric Kamega

akamega@ressources-actuarielles.net

**Institut de Science Financière et
d'Assurance**

50 avenue T. Garnier
69007 LYON

<http://www.ressources-actuarielles.net/>
<http://www.ressources-actuarielles.net/blog>
<http://www.ressources-actuarielles.net/afrique>