

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{]t;\infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Prim' Act



Construction de tables de mortalité prospectives

Le contexte de l'assurance

Version 1.3

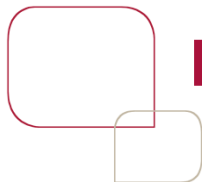
Octobre 2013

Frédéric PLANCHET

frederic@planchet.net

Julien TOMAS

julien.tomas@univ-lyon1.fr



Préambule

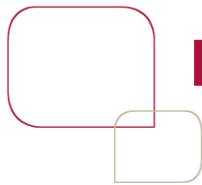
Dans cette présentation, on s'intéresse à la construction de tables de mortalité prospectives pour un organisme assureur.

Les travaux présentés sont issus des réflexions du groupe de travail « mortalité » de l'Institut des Actuaire (<http://www.ressources-actuarielles.net/gtmortalite>).

La réglementation actuelle impose aux assureurs d'utiliser des tables de mortalité « prudentes » (Art. A335-1 C. Ass.) ce qui conduit à construire des tables majorant les taux de décès pour les risques en cas de vie et majorant les espérances de survie pour les risques en cas de vie (y compris les rentes).

La nouvelle réglementation prudentielle (Solvabilité 2), se propose d'expliciter la marge de prudence à intégrer aux provisions techniques et impose donc en conséquence d'effectuer une évaluation sans biais de la mortalité.

Cette modification a des impacts importants sur la manière dont est appréhendée la construction de tables de mortalité pour le calcul des provisions.



Préambule

Un organisme d'assurance ne peut plus, dans ce nouveau cadre, utiliser dans ajustement des tables issues de la réglementation et doit mesurer directement son risque de mortalité / longévité.

On propose ici un cadre méthodologique pour répondre à cette exigence, en examinant :

- le positionnement en niveau ;
- la prise en compte des dérives de mortalité.

La question de la fermeture de la table n'est pas abordée ici (voir par exemple Denuit et Quashie (2005) pour une revue sur ce sujet).

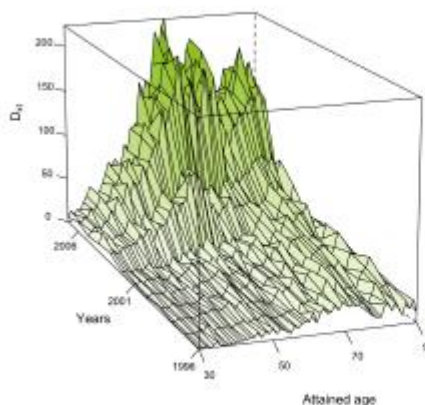
Le cadre proposé permet de prendre en compte le risque d'estimation.

Enfin, on décrit une application dont la mise en œuvre pratique s'avère aujourd'hui plus contrainte et nécessite des simplifications importantes. Ce point sera évoqué.

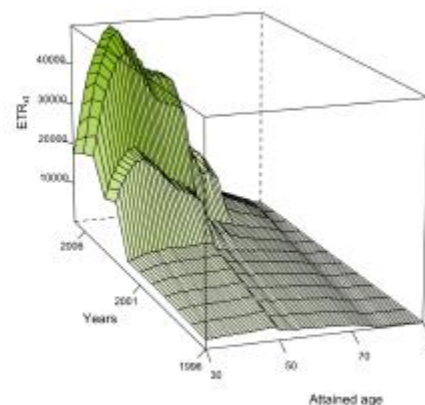
Les données exploitées pour le cadre général sont issus de portefeuilles d'assurance

Portfolios	Mean Age In	Mean Age Out	Mean Expo	Mean Age at death	Period of observation	
					Beginning	End
P1	38.36	43.42	5.06	53.47	01/01/1996	31/12/2007
P2	44.28	45.76	1.48	51.68	01/01/2005	31/12/2007
P3	43.18	45.44	2.26	76.98	01/07/2004	30/06/2007
P4	51.43	61.74	10.31	77.92	01/01/1996	31/12/2007
P5	42.48	44.60	2.12	54.42	01/01/2003	31/12/2007
P6	47.42	51.15	3.73	71.84	01/01/1996	31/12/2007
P7	55.77	56.78	1.01	72.44	01/01/2006	31/12/2007
P8	53.65	55.06	1.41	62.28	01/01/2005	31/12/2007

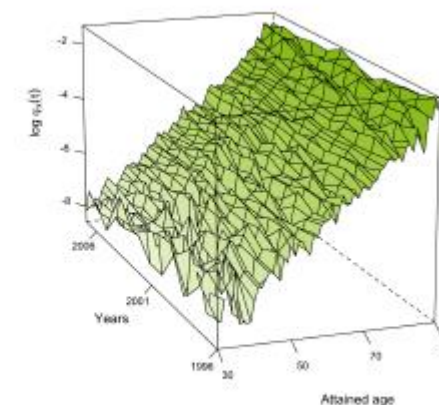
Le comportement en termes de décès est résumé par les données brutes suivantes :



(a) $D_{x,t}$



(b) $E_{x,t}$



(c) $\log \varphi_x(t)$

1. Cadre méthodologique
2. Résultats et validation
3. Les tables de place

SOMMAIRE

Mortalité prospective

1. Cadre méthodologique

Notations et cadre de travail

On fait l'hypothèse de constance des fonctions de hasard par morceau, i.e. :

$$\varphi_{x+u}(t+v) = \varphi_x(t), 0 \leq u, v < 1$$

ce qui assure que les temps de séjour sont localement des variables exponentielles et que les probabilité conditionnelles de sortie sont liées à la fonction de hasard par la relation simple :

$$\varphi_x(t) = -\ln(1 - q_x(t))$$

Dans ce cas, chercher un estimateur du maximum de vraisemblance pour φ est équivalent à supposer que le nombre de sorties observées suit une loi de Poisson :

$$D_{x,t} \approx \text{Poisson}(E_{x,t} \times \varphi_x(t))$$

où on a noté E l'exposition au risque.

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

Le modèle de base retenu consiste à écrire

$$D_x \approx \text{Poisson}\left(E_x \times \exp(\psi(x))\right)$$

avec ψ une fonction lisse non spécifiée. Le rôle des modèles linéaires généralisés est celui d'un modèle en arrière plan qui est ajusté localement. On utilise la méthode de vraisemblance locale pour estimer la fonction lisse ψ . Les méthodes de vraisemblance locale pour l'ajustement des tables de mortalité ont été appliquées par Delwarde et *al.* (2004), Debón et *al.* (2006) et plus récemment par Gschlössl et *al.* (2011).

Une description exhaustive de la technique est proposée dans Tomas (2013, Ch.3). Ces techniques peuvent également être utilisées dans un cadre multidimensionnel (*cf.* Tomas et Planchet (2013a)).

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau : remarque

Dans un contexte d'assurance, il est indispensable d'introduire l'exposition au risque dans la fonction de perte compte tenu de la taille restreinte des groupes considérés.

Cette contrainte n'est pas respectée par tous les modèles « standards » (la version originale de Lee et Carter (1992) par exemple n'utilise pas l'exposition mais fait en contrepartie l'hypothèse que les fluctuations d'échantillonnage sont négligeables.

La variante proposée par Brouhns et *al.* (2002) lève cette restriction du modèle d'origine, mais en contrepartie elle rend indissociables l'ajustement en niveau et la détermination de la tendance.

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

Le modèle retenu (présenté ici sans les indices temporels pour simplifier les expressions) consiste à partir de

$$D_x \approx \text{Poisson}(E_x \times \exp(\psi(x)))$$

et à faire l'hypothèse que ψ est une fonction « régulière » de x , ce qui conduit à écrire qu'au voisinage d'un point

$$y_j = \psi(x_j) \approx \psi(x_i) + \psi'(x_i)(x_j - x_i) + \dots + \frac{\psi^{(p)}(x_i)}{p!}(x_j - x_i)^p = x^T \beta$$

avec $x = \left(1, x_j - x_i, \dots, (x_j - x_i)^p\right)^T$ et $\beta = \left(\psi(x_i), \psi'(x_i), \dots, \frac{\psi^{(p)}(x_i)}{p!}\right)$

En se plaçant dans le cadre des modèles GLM on peut calculer la log-vraisemblance associée à une observation $l(y_j, x^T \beta)$ et en déduire la log-vraisemblance globale :

$$L(\beta | \lambda, x_i) = \sum_{j=1}^n l(y_j, x^T \beta) w_j(\lambda)$$

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

On utilise dans l'étude le noyau d'Epanechnikov

$$w(\lambda) = \frac{3}{4}(1-u^2)1_{\{|u|\leq 1\}}$$

et les poids $w_j = w\left(\frac{2}{\lambda-1}|x_j - x_i|\right)$

Compte tenu de la structure de base du modèle, $D_x \approx \text{Poisson}(E_x \times \exp(\psi(x)))$, le modèle GLM est utilisé avec l'exposition comme variable *offset* et la fonction de lien logarithme.

La sélection des paramètres de lissage (la fenêtre d'observation $2/(\lambda-1)$ et le degré du polynôme p) est un compromis entre deux objectifs : l'élimination des irrégularités et l'ajustement aux données. Cela souligne l'importance d'une investigation poussée comme condition d'un jugement fiable. En pratique on va choisir les paramètres de lissage pour équilibrer le compromis entre le biais et la variance.

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

Une stratégie consiste à évaluer un nombre d'ajustements candidats et à utiliser un critère pour sélectionner parmi ces ajustements celui qui aura le score le plus faible. Dans cette étude, on utilise critère d'Akaike (AIC) basé sur la déviance :

$$AIC = D + 2 \times v$$

$$\text{où } D = \sum_x \left(D_x \ln \left(\frac{D_x}{E_x \hat{\phi}_x(t)} \right) - (D_x - E_x \hat{\phi}_x(t)) \right)$$

Le nombre de degrés de liberté v est déterminé par le rang de la matrice « chapeau ».

NB : en pratique les calculs sont effectués avec le package locfit.

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

On peut décliner ce cadre avec différentes spécifications de la fonction ψ , en intégrant ou non dans son expression une référence externe pour apporter de la structure :

Model	Formula	Ref. table	Estimation method	
			Local lik.	Min. dist.
M1	$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \exp(f_1(x,t)))$		M1	
M2	$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \exp(f_2(\log(\varphi_x^{\text{ref}}(t))))$	INSEE TG05	M2.INSEE M2.TG05	
M3	$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \varphi_x^{\text{ref}}(t) \exp(f_1(x,t)))$	INSEE TG05	M3.INSEE M3.TG05	
M4	$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \exp(f_1(x,t) + f_2(\log(\varphi_x^{\text{ref}}(t))))$	INSEE TG05	M4.INSEE M4.TG05	
M5	$\text{logit } \varphi_x(t) = \alpha + \beta \text{logit } \varphi_x^{\text{ref}}(t) + \epsilon_{x,t}$	INSEE TG05		M5.INSEE M5.TG05

Une approche alternative (M5) est examinée et utilisée comme point de comparaison.

1. Cadre méthodologique

Positionnement en niveau

Les tables de références utilisées sont :

- des tables « population générale » construites par l'INSEE (tables prospectives 2060) publiées en 2010 et qui actualisent une précédente version publiée en 2007 ;
- des tables propres aux assureurs (TGH/F 05) construites en 2006 à partir de données issues de portefeuilles d'assurance et utilisées pour le provisionnement des rentes viagères.

1. Cadre méthodologique

Détermination de la tendance

L'ajustement de la surface de mortalité réalisé à l'étape précédente est non paramétrique en x et en t .

Il s'agit alors d'extrapoler les évolutions en fonction du temps, qui ne sont pas directement identifiable dans la décomposition des forces de mortalité (comme c'est par exemple le cas pour le modèle de Lee-Carter).

On retient alors une approche en deux temps :

- décomposition de la surface *via* une ACP pour faire apparaître des coefficients dépendants du temps affectant des vecteurs propres ne dépendant que de l'âge ;
- extrapolation en fonction du temps de ces coefficients.

Le seconde étape est classique en s'appuyant sur une décomposition ARIMA de la série, elle n'est pas détaillée ici.

1. Cadre méthodologique

Détermination de la tendance

On cherche une décomposition de la surface de mortalité de la forme

$$\ln(\hat{\phi}_x(t)) = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{u=t_m}^{t_M} \ln(\hat{\phi}_x(u)) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + \varepsilon_t(x) = \chi(x) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + \varepsilon_t(x)$$

En suivant la logique de Lee et Carter (1992) et en notant Z la matrice

$$Z = \left(\hat{y}_t^*(x) = \ln(\hat{\phi}_x(t)) - \chi(x) / x = x_m, \dots, x_M, t = t_m, \dots, t_M \right)$$

on peut s'appuyer sur les décompositions en sous-espaces propres de ZZ' (pour ϕ) et $Z'Z$ (pour β).

On impose la condition d'identifiabilité (différente de celle imposée par Lee et Carter) :

$$\sum_{k=1}^K \phi_k(x)^2 = 1$$

1. Cadre méthodologique

Détermination de la tendance - alternative

On peut aussi lire la décomposition ci-dessus comme une décomposition d'une fonction de x à t fixé avec ϕ une base orthonormée de L^2 dont on ne conserve que les K premiers termes. Il s'agit donc d'une décomposition d'une fonction de x à partir de fonctions simples. Cette approche est décrite de manière détaillée dans Hyndman et Ullah (2007) et Ramsay et Silverman (2005, Ch.8).

Remarque : on a choisi ici de lisser la surface avant d'identifier les tendances, certains auteurs ont proposé des lissages intégrés à l'ACP (cf. Silverman (1996)).

1. Cadre méthodologique

Détermination de la tendance

La difficulté est alors de déterminer de manière optimale la base ϕ . En d'autres termes il faut minimiser la variance des scores

$$Z_{t,k} = \int (\ln(\hat{\phi}_x(t)) - \chi(x)) \phi_k(x) dx$$

sous les contraintes $\int \phi_k(x)^2 dx = 1$ $\int \phi_k(x) \phi_l(x) dx = 0, k \neq l$

Julien (2013) a proposé une version simplifiée d'un algorithme présenté dans Hyndman et Ullah (2007) qui permet de construire ϕ et β à partir d'une décomposition de

$$\hat{y}_t^*(x) = \ln(\hat{\phi}_x(t)) - \chi(x)$$

sur une base arbitraire. La base initiale reste à spécifier dans le cadre de l'ajustement par vraisemblance locale de l'étape précédente (elle est naturelle pour un ajustement à l'aide de splines par exemple, cf. le package demography).

1. Cadre méthodologique

Risque d'estimation

Le risque d'estimation est potentiellement pénalisant pour un assureur car il s'agit d'un risque systématique qui peut conduire à une sous-estimation des engagements.

Le modèle proposé ici permet *a priori* de le prendre en compte à la fois au niveau du niveau et de la tendance.

On présente dans la suite l'idée retenue pour la tendance, qui est décrite dans Juillard et *al.* (2008).

Le principe est de considérer les résidus de l'ajustement obtenus lors de la modélisation de la dérive temporelle et d'ajuster des lois de Pareto aux « grandes valeurs » de ces résidus.

1. Cadre méthodologique
2. **Résultats et validation**
3. Les tables de place

SOMMAIRE

Mortalité prospective

2. Résultats et validation

Une fois les tables construites se pose la question de leur validation.

L'examen de la qualité de l'ajustement est effectuée sur nos 3 niveaux :

- la proximité des observations et du modèle (tests du SMR, du rapport de vraisemblance, de Wilcoxon, *etc.*),
- la régularité de l'ajustement avec les tests des signes et des *runs*,
- et la plausibilité et la cohérence des tendances d'évolution.

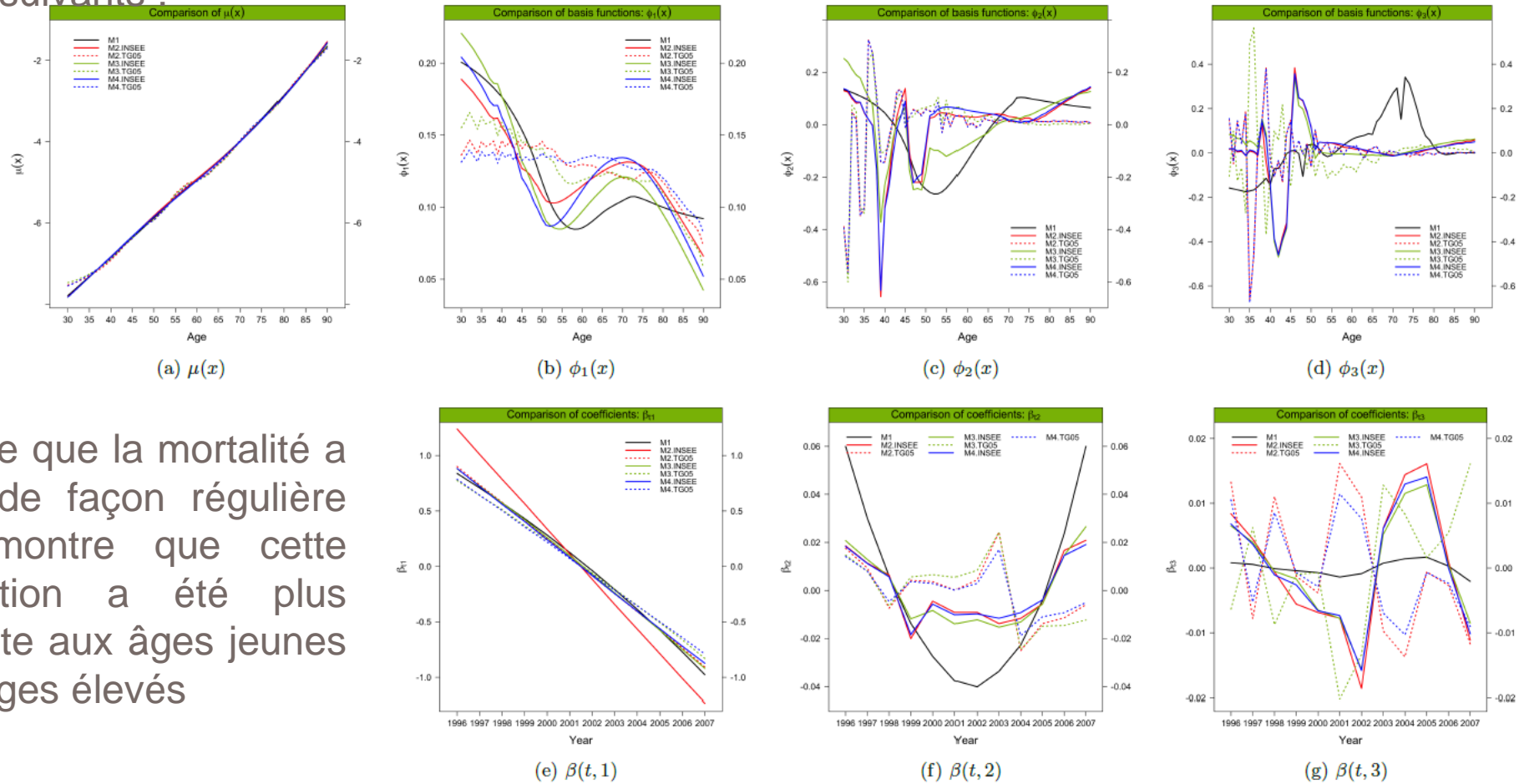
2. Résultats et validation

Les ajustements obtenus dans les différentes spécifications sont comparés en utilisant différents tests synthétisés dans le tableau ci-dessous :

		M1	M2.INSEE	M2.TG05	M3.INSEE	M3.TG05	M4.INSEE	M4.TG05	M5.INSEE	M5.TG05
Fitted DF		7.56	4.02	3.94	4.88	4.88	4	4	NA	NA
Deviance		1302.53	1302.83	1328.04	1296.58	1351.66	1313.93	1366.80	1355.92	1417.08
Standardised residuals	> 2	86	84	92	86	93	87	94	86	100
	> 3	24	22	24	23	24	23	26	26	31
Signs test	+(-)	327(405)	319(413)	336(396)	345(387)	343(389)	334(398)	337(395)	333(399)	368(364)
	p-value	0.0043	0.0005	0.0291	0.1296	0.0962	0.0198	0.0350	0.0162	0.9117
Runs test	Nb of runs	346	326	322	328	302	332	306	334	319
	Value	-1.55	-3.00	-3.46	-3.17	-5.02	-2.77	-4.82	-2.61	-3.91
	p-value	0.1188	0.0026	5.28e - 4	0.0014	5.25e - 7	0.0056	1.46e - 6	0.0089	8.86e - 5
Kolmogorov Smirnov test	Value	0.0327	0.0286	0.0601	.0286	0.0642	0.0286	0.0614	0.0300	0.0683
	p-value	0.8262	0.9239	0.1419	0.9239	0.0978	0.9239	0.1257	0.8955	0.0657
χ^2		1400.19	1402.53	1418.89	1405.81	1445.53	1421.85	1466.93	1473.63	1545.42
R ²		0.9326	0.9256	0.9325	0.9312	0.9325	0.9302	0.9306	0.9221	0.9306
MAPE (%)		25.86	26.81	26.41	25.86	26.69	26.01	26.51	26.84	26.63
SMR - 1 (%)		-0.79	0.29	0.21	0.11	0.30	1.22e - 12	-7.77e - 13	1.87	2.87

2. Résultats et validation

La décomposition en composantes principales de la surface ajustée s'appuie sur les facteurs suivants :



β_1 montre que la mortalité a décliné de façon régulière et ϕ_1 montre que cette amélioration a été plus importante aux âges jeunes qu'aux âges élevés

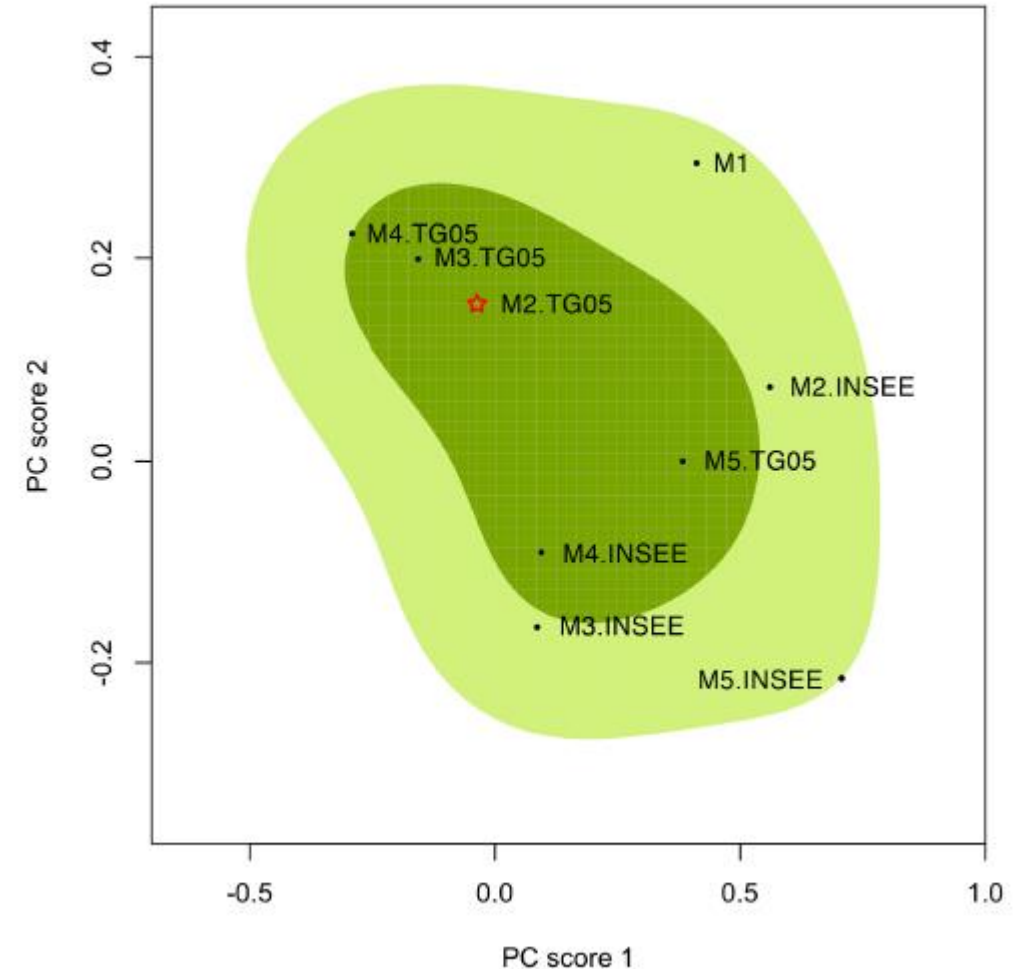
Figure 3: Basis functions and associated coefficients with $K = 3$, for models M1, M2, M3 and M4, male population.

2. Résultats et validation

La comparaison des tendances est un point délicat.

En complément des comparaisons « classiques », on peut par exemple utiliser les graphes HDR introduits par Hyndman (1996) et utilisés initialement pour détecter les points aberrants.

Ici les « individus » sont les profils d'espérance de maintenance résiduelle pour une cohorte donnée.



1. Cadre méthodologique
2. Résultats et validation
3. **Les tables de place**

SOMMAIRE

Mortalité prospective

3. Les tables de place

Le cadre général décrit *infra* a été appliqué pour fournir aux assureurs, dans le cadre de la mise en place de la nouvelle réglementation :

- une référence de mortalité pour la place dans son ensemble, élaborée sur la base d'un ensemble de portefeuille jugé représentatif ;
- des méthodes pour construire une table propre à un portefeuille particulier.

La période d'observation disponible est toute fois plus réduite et rend délicate l'extrapolation des coefficients β .

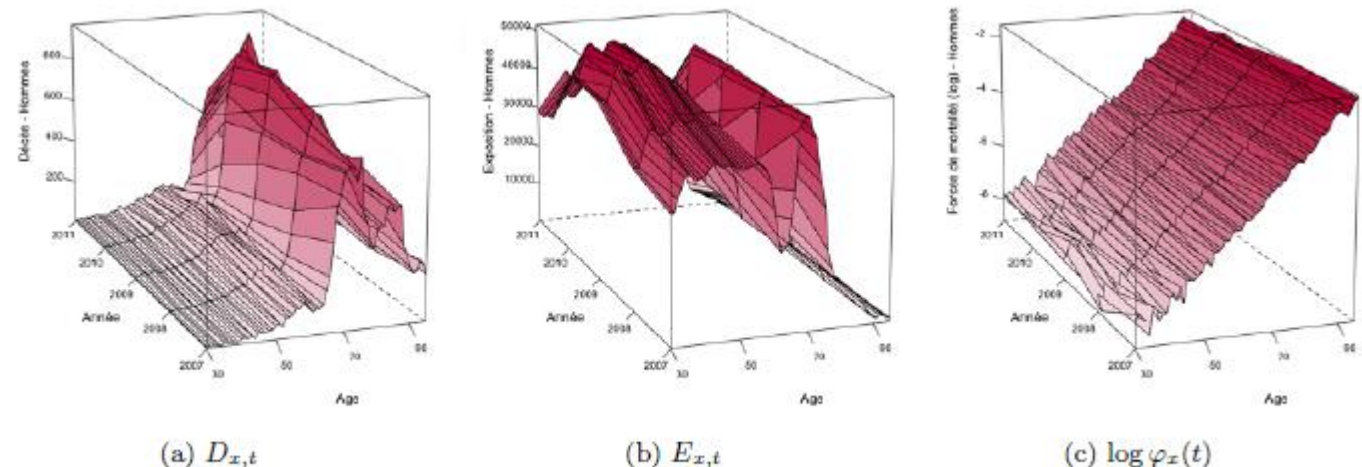
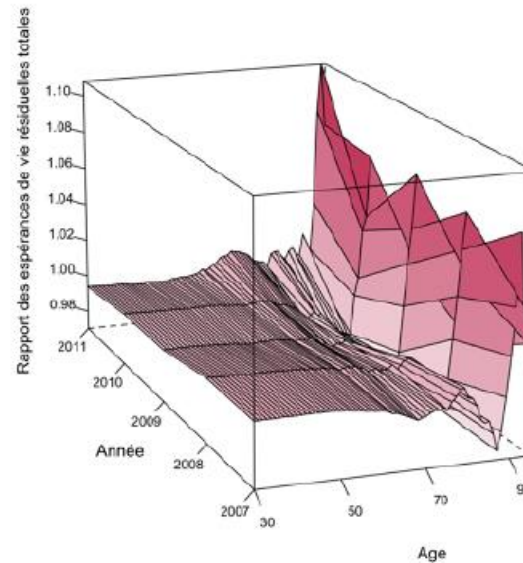


FIGURE 1: Surfaces de mortalité observées des données agrégées, population masculine.

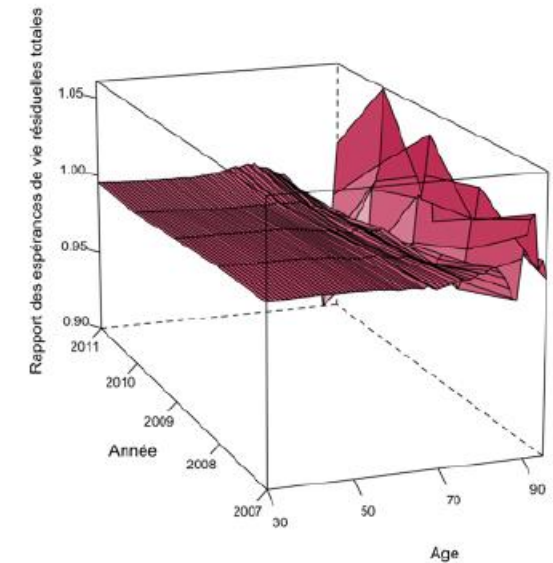
3. Les tables de place

La méthode a donc été dégradée :

- on ajuste par la méthode de vraisemblance locale une table du moment ;
- on reprend les tendances issues d'une table de référence après les avoir préalablement régularisées



(a) Population masculine

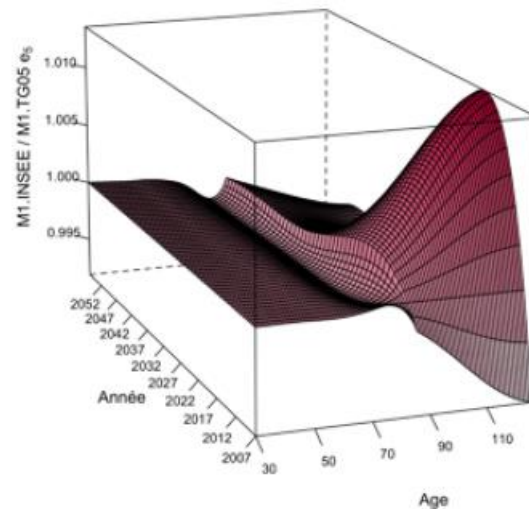


(b) Population féminine

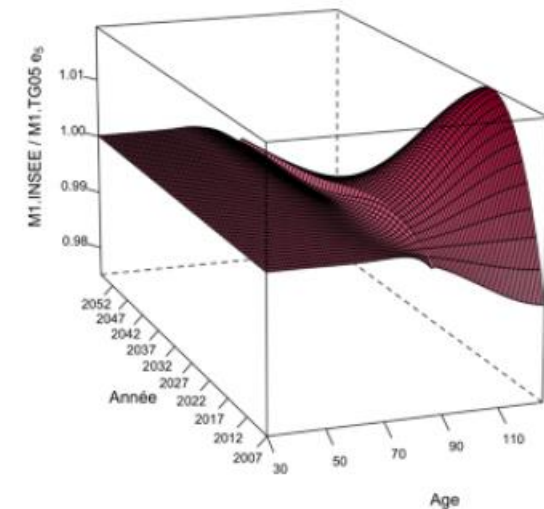
FIGURE 14: Comparaison des espérances de vie résiduelles partielles observées et ajustées pour le modèle M1.INSEE.

3. Les tables de place

L'impact du choix de la référence sous-jacente (INSEE ou TGH/F 05) est relativement modeste. Il joue toutefois lorsque l'on s'intéresse à la cohérence des projections par sexe, en vérifiant notamment que les taux de mortalité des hommes restent supérieurs à ceux des femmes.



(a) M1.INSEE / M1.TG05, population masculine



(b) M1.INSEE / M1.TG05, population féminine

Détection des tendances

La détection des tendances est un point délicat. Elle est effectuée ici avec des décompositions en valeurs singulières.

Une première piste de travail consiste à fournir une expression fonctionnelle de la surface construite avec les techniques de vraisemblance locale pour pouvoir utiliser les techniques d'ACP fonctionnelles, *a priori* plus robustes.

La seconde voie d'approfondissement est de quantifier le risque d'estimation en tenant compte conjointement de l'incertitude sur le positionnement en niveau et de l'incertitude sur la tendance.

Risque d'estimation : tendance

Des analyses effectuées par un régime de retraite sur ce sujet conduisent à estimer que le risque de longévité peut être couvert par une provision spécifique évaluée entre 3 et 4 % de la provision mathématique (PM).

L'application de la norme Solvabilité 2 en la matière conduirait à un taux de l'ordre de 4,5 % de la PM.

Dans Juillard (2008), le risque de longévité dans le cadre de la population française pour laquelle la tendance d'évolution est modélisée par le modèle de Lee-Carter et mesuré.

A partir des chiffres de cet article (*cf.* p.10) on conclut que le quantile à 95 % pour la PM (à taux 0) représente 2,3 % de celle-ci. On en déduit que le besoin en capital au niveau de 99,5 % (niveau retenu par Solvabilité 2) est approximativement $2,3 \% \times 2,57 / 1,96 = 3,0 \%$.

Risque d'estimation : niveau

On doit observer que cette évaluation doit être complétée d'un capital additionnel associé au risque de ne pas utiliser la bonne table « en niveau ». Une première estimation du besoin en capital associé à ce risque peut être tirée de Kamega et Planchet (2010) qui fournit un ordre de grandeur d'environ 1 %.

- Debón, A., Montes, F., and Sala, R. (2006). A comparison of nonparametric methods in the graduation of mortality : Application to data from the Valencia region (Spain). *International statistical Review*, 74(2), 215–233.
- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K. [2002] A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables, *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 373-393.
- Delwarde, A., Kachkhdze, D., Olie, L., and Denuit, M. (2004). Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie. *Bulletin Français d'Actuariat*, 6(12), 77–102.
- Denuit M., Quashie A. (2005) Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges, Document de travail n°WP04-13, UCL.
- Gschlössl, S., Schoenmaekers, P., and Denuit, M. (2011). Risk classification in life insurance : methodology and case study. *European Actuarial Journal*, 1(1), 23–41.
- Hyndman, R. J. (1996). Computing and graphing highest density regions. *The American Statistician*, 50(2), 120{126.
- Hyndman, R. J. and Ullah, M. (2007). Robust forecasting or mortality and fertility rates: A functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10), 4942{4956.
- Juillard M., Planchet F., Thérond P.E. (2008) Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée, *Assurances et gestion des risques*, Vol. 76 (3).
- Kamega A., Planchet F. [2010] Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience, *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, WP2136.
- Lee R.D., Carter L. (1992) Modelling and forecasting the time series of US mortality, *Journal of the American Statistical Association* 87,659-671.

Références bibliographiques

- Loader, C. R. (1996). Local likelihood density estimation. *The Annals of Statistics*, 24(4), 1602–1618.
- Loader, C. R. (1999). *Local Regression and Likelihood*. Statistics and Computing Series. New York : Springer Verlag.
- Planchet, F. and Thérond, P. (2011). Modélisation statistique des phénomènes de durée – Applications actuarielles. Assurance Audit Actuariat. Economica Paris.
- Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (2005). *Functional data analysis*. Springer-Verlag New-York, Inc., Second edition.
- Silverman, B. W. (1996). Smoothed functional principal components analysis by choice of norm. *The Annals of Statistics*, 24(1), 1{24.
- Tibshirani, R. J. and Hastie, T. J. (1987). Local likelihood estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398), 559–567.
- Tomas, J. (2013). Quantifying biometric life insurance risks with non-parametric methods. Ph.D. thesis, Amsterdam School of Economics Research Institute.
- Tomas, J. and Planchet, F. (2013a). Multidimensional smoothing by adaptive local kernel-weighted loglikelihood with application to long-term care insurance *Insurance: Mathematics & Economics*, 52(3), 573–589.

Frédéric PLANCHET

frederic@planchet.net

Julien TOMAS

julien.tomas@univ-lyon1.fr

ISFA

50 avenue Tony Garnier

F - 69007 Lyon

+33-4-37-38-74-37

<http://www.ressources-actuarielles.net>

<http://blog.ressources-actuarielles.net>