

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{]t, \infty[}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)



# MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES

Support de cours 2024-2025

Modélisation des obligations : présentation et utilisation en assurance

Frédéric PLANCHET

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

## SOMMAIRE

<b>1. Préambule .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Rappel : l'approche d'Heath, Jarrow et Morton (HJM) .....</b>	<b>4</b>
<b>3. Le modèle de Vasicek généralisé (Hull et White).....</b>	<b>5</b>
3.1. Description du modèle.....	5
3.2. Mise en œuvre .....	7
3.2.1. Discrétisation exacte.....	7
3.2.2. Utilisation de la discrétisation d'Euler.....	7
3.3. Utilisation avec les probabilités historique et risque neutre .....	8
3.4. Exemple d'alternative : le modèle CIR étendu .....	9
<b>4. La prise en compte du défaut et de la liquidité : le modèle LMN .....</b>	<b>10</b>
<b>5. Estimation et calibrage .....</b>	<b>11</b>
5.1. Construction de la courbe des taux .....	11
5.2. Estimation du modèle de Vasicek généralisé .....	12
5.3. Lien avec la volatilité des actions .....	13
<b>6. Dérivés de taux .....</b>	<b>14</b>
<b>7. Quelques remarques sur l'actualisation .....</b>	<b>15</b>
7.1. Formule d'actualisation .....	16
7.2. Relations entre taux <i>forward</i> et taux court.....	16
7.3. Estimation des taux <i>forward</i> initiaux .....	17
<b>8. Références.....</b>	<b>18</b>

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

## 1. Préambule

Les obligations sont un composant majeur de l'allocation d'actifs d'un organisme assureur. De ce fait, le modèle retenu pour décrire la dynamique de la courbe des taux et les anticipations de prix des obligations constitue un élément important du générateur de scénarios économiques.

La logique de cohérence avec les valeurs de marché imposée par Solvabilité 2 conduit ainsi à privilégier les modèles utilisant la courbe des taux initiale comme paramètre en lieu et place des modèles factoriels classiques de type Vasicek ou CIR.

L'objectif de la présente note est, après avoir rappelé les principales caractéristiques du cadre proposé par Heath, Jarrow et Morton (cf. HEATH et al. [1990]) en 1990, de décrire de manière détaillée l'utilisation du modèle de Vasicek généralisé, qui est d'une certaine manière le modèle mono factoriel le plus simple s'appuyant sur la courbe des taux initiale.

Les conséquences de l'utilisation d'une courbe de taux sur l'estimation de la volatilité du modèle pour les actions sont également discutées.

Enfin, une introduction aux modèles d'évaluation des obligations présentant un risque de défaut est effectuée. Le modèle proposé par Longstaff, Mithal et Neis (LONGSTAFF et al. [2005]) est utilisé de par sa souplesse de mise en œuvre.

### Notations

On rappelle ici les notations qui seront utilisées dans la suite. On définit ainsi  $P(t, T)$  le prix d'une obligation sans coupon définie par la valeur en  $t$  d'une unité monétaire qui sera payé en  $T$ . On obtient alors le taux de rendement (continu) par  $R_c(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$

et le taux de rendement discret  $R(t, T) = P(t, T)^{\frac{1}{T-t}} - 1$  ; en passant à la limite lorsque la maturité se rapproche du terme on pose  $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R_c(t, T)$  qui définit le taux sans risque instantané.

En posant alors  $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$  on définit le taux à terme (taux forward) instantané.  $f(t, T)$  représente le taux d'intérêt sans risque pour un prêt contracté au temps  $t$  débutant à  $T$  pour une période infinitésimale. Ces diverses définitions impliquent en particulier que :

$$P(t, T) = \exp \left[ -\int_t^T f(t, s) ds \right] \text{ et } r(t) = f(t, t).$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty[}(T_x)$$

Le prix d'une obligation sans risque de défaut de nominal  $N$ , de maturité  $T$  et de taux facial  $\rho$  se déduit des prix des zéro-coupons  $P(t, T)$  via la formule :

$$O_t = N \times \left( \rho \sum_{i=t+1}^T P(t, i) + P(t, T) \right).$$

On est donc amené pour valoriser des titres obligataires à déterminer le prix des zéro-coupons  $P(t, T)$ .

## 2. Rappel : l'approche d'Heath, Jarrow et Morton (HJM)

La méthodologie de HEATH, JARROW et MORTON [1990] permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. HJM ne propose pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail. Ce cadre est discuté de manière complète dans RACICOT et THÉORET [2006].

On suppose que la dynamique du taux à terme (*forward*) instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

où  $W$  est un mouvement brownien sous la probabilité historique. L'équation différentielle est complétée par la donnée de la valeur initiale  $f(0, T) = f^*(0, T)$  où  $f^*(0, T)$  représente le taux *forward* instantané supposé observable sur le marché. L'utilisation des taux à terme instantanés présente l'avantage de conduire à condition nécessaire et suffisante simple d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), qui est la positivité de tous les taux à terme (cf. HULL [1999]).

Cette hypothèse d'absence d'arbitrage impose une condition sur  $\mu$  et  $\sigma$ . Plus précisément, si  $\lambda(t, T)$  est le processus vérifiant la relation :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s) ds - \lambda(t, T) \right]$$

alors la condition d'absence d'arbitrage s'exprime par l'indépendance de  $\lambda(t, T)$  vis-à-vis de  $T$ . Mais la complexité d'estimation de la prime de risque  $\lambda(t)$  à partir du marché des titres obligataires pose problème. Pour contourner le problème, HJM proposent de faire appel à la mesure risque neutre  $Q$ . Sous cette mesure, l'évaluation du prix d'une obligation ne fait en effet pas intervenir  $\lambda(t)$ .

Dorénavant, on suppose donc que la dynamique du taux *forward* instantané  $df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$  est écrite dans l'univers risque neutre. L'hypothèse

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty[}(T_x)$$

d'absence d'arbitrage impose alors  $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$ . Ainsi, pour déterminer la valeur d'une obligation sans risque de défaut, il convient de suivre les différentes étapes détaillées ci-après :

- On observe sur le marché la courbe des taux *forward* instantanés  $f^*(0, T)$ .
- On choisit un processus de volatilité  $\sigma(t, T)$ .
- Via la relation donnée quelques lignes plus haut, on en déduit la valeur de  $\mu(t, T)$ . On détermine le taux *forward* instantané dans l'univers risque neutre :
  - $f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s$  avec  $f(0, T) = f^*(0, T)$ .
- On retrouve le taux court terme en utilisant la relation suivante :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \mu(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s.$$

Finalement, l'expression du prix d'une obligation sans coupon et sans risque de défaut s'écrit :

$$P(t, T) = E_t \left[ \exp - \left\{ \int_t^T f(0, u) du + \int_0^t \int_t^T \mu(s, u) duds + \int_0^t \int_t^T \sigma(s, u) dudW_s \right\} \right].$$

Le grand avantage de la méthodologie HJM est d'introduire comme paramètre de départ la courbe des taux *forward* instantanés au temps 0.

### 3. Le modèle de Vasicek généralisé (Hull et White)

#### 3.1. Description du modèle

Il s'agit d'un cas particulier de modèle HJM dans lequel on suppose que le processus de volatilité vérifie la relation suivante, où  $k$  est une constante positive :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}.$$

Cette forme est facilement interprétable : plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue. Du fait des contraintes du cadre HJM, le processus de dérive se déduit de l'expression de  $\sigma(t, T)$  :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \frac{\sigma^2}{k} \left( e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)} \right).$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

On retrouve ensuite l'équation stochastique *forward* instantané :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} \left( e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)} \right) dt + \sigma e^{-k(T-t)} d\tilde{W}_t$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\begin{aligned} f(t, T) \\ = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} \left( 1 - e^{-k(T-t)} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} \left( 1 - e^{-kT} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} d\tilde{W}_s \end{aligned}$$

On déduit ensuite la valeur du taux court terme à partir de la valeur du taux *forward* :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} \left( 1 - e^{-kt} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s.$$

La relation  $P(t, T) = \mathbf{exp} \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\}$  permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans

coupon :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \mathbf{exp} \left[ - \frac{K^2 (T-t)}{2} L(t) + K(T-t) (f(0, t) - r(t)) \right],$$

avec :  $K(T-t) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$  et  $L(t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-2k(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt})$ .

Dans ce modèle,  $f(t, T)$  possède une distribution normale d'espérance  $f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2} (K(T-t)^2 - K(T)^2)$  et de variance  $e^{-2k(T-t)} L(t)$ ,  $r(t)$  possède une

distribution normale d'espérance  $f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} K^2(t)$  et de variance  $L(t)$  et  $P(t, T)$

possède une distribution log normale dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$- E(\ln P(t, T)) = \ln \left( \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) - \frac{K^2 (T-t)}{2} L(t) + \frac{\sigma^2}{2} K(T-t) K^2(t) ;$$

$$- V(\ln P(t, T)) = K^2 (T-t) \times L(t).$$

$f(0, T)$  et  $P(0, T)$  sont là encore directement observés sur le marché.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

### 3.2. Mise en œuvre

Le modèle présenté ci-dessus est décrit en temps continu et doit donc être discrétisé pour pouvoir être utilisé en pratique.

#### 3.2.1. Discrétisation exacte

On peut ici exploiter le fait que la volatilité ne dépend que du temps pour construire une discrétisation exacte du processus ; en effet, on peut observer que :

$$r(t+\delta) - e^{-k\delta} r(t) = f(0, t+\delta) - e^{-k\delta} f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} (K^2(t+\delta) - e^{-k\delta} K^2(t)) + \sigma e^{-k\delta} \int_t^{t+\delta} e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s$$

Compte tenu de la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien, on en déduit finalement la discrétisation exacte :

$$r(t+\delta) - e^{-k\delta} r(t) = f(0, t+\delta) - e^{-k\delta} f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} (K^2(t+\delta) - e^{-k\delta} K^2(t)) + \sqrt{L(\delta)} \times \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  suit une loi normale centrée réduite. Dans ce schéma, aucun biais n'est introduit dans la loi de  $r(t+\delta)$ .

#### 3.2.2. Utilisation de la discrétisation d'Euler

On peut également discrétiser directement la représentation :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s$$

en posant :

$$r_n(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \sum_{i=1}^n e^{-k(t-t_i)} (\tilde{W}(t_i) - \tilde{W}(t_{i-1}))$$

où  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = t$  est une subdivision de  $[0, t]$ . Du fait des propriétés du mouvement brownien cela revient à poser :

$$r_n(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \sum_{i=1}^n e^{-k(t-t_{i-1})} \sqrt{t_i - t_{i-1}} \varepsilon_i$$

En posant  $\delta = \frac{t}{n}$  et  $t_i = i \times \delta = \frac{i \times t}{n}$  on obtient la relation :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$r_{\delta}(n\delta) = f(0, n\delta) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kn\delta})^2 + \sigma\sqrt{\delta} e^{-kn\delta} \sum_{i=1}^n e^{+k(i-1)\delta} \varepsilon_i.$$

On note alors que  $E(r_{\delta}(n\delta)) = E(r(n\delta))$  donc la discrétisation n'introduit pas de biais pour l'espérance du taux instantané. Par contre, la variance de  $r_{\delta}(n\delta)$  s'écrit :

$$V(r_{\delta}(n\delta)) = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kn\delta}) \times \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1} = V(r(n\delta)) \times \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1}$$

La constante  $c_{\delta} = \left( \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$  tend vers 1 lorsque  $\delta \rightarrow 0$  ; pour que la discrétisation soit satisfaisante, il faut choisir un pas  $\delta$  assez petit pour que  $c_{\delta}$  soit proche de 1. Si pour des contraintes de temps de calcul on utilise un pas de discrétisation trop grossier, il convient alors de corriger le biais de variance introduit par la discrétisation en utilisant :

$$\tilde{r}_{\delta}(n\delta) = f(0, n\delta) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kn\delta})^2 + c_{\delta} \times \sigma\sqrt{\delta} e^{-kn\delta} \sum_{i=1}^n e^{+k(i-1)\delta} \varepsilon_i.$$

### 3.3. Utilisation avec les probabilités historique et risque neutre

Le modèle ci-dessus est revient à spécifier sous la probabilité risque neutre (Q) la dynamique suivante pour le taux court :

$$dr(t) = k(b(t) - r(t))dt + \sigma dW_t^Q$$

avec  $b(t) = \partial_2 f(0, t) + k \times f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2$ . Dès lors que l'on cherche à calculer, à une date donnée  $t$ , la distribution de la valeur d'un ZC dont le prix est de la forme  $P(t, T) = P(t, T, r(t))$ , il est nécessaire de disposer de la distribution de  $r(t)$  en probabilité historique  $P$ . On est ainsi naturellement amené à rechercher une dynamique pour  $r(t)$  sous  $P$  dont la forme soit compatible avec la forme de la dynamique sous  $Q$ . Mais si la dynamique historique d'un facteur de risque est :

$$dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t$$

alors on sait que sous  $Q$  (cf. CAJA et PLANCHET [2010]) :

$$dx_t = (\mu(t, x_t) - \lambda(t) \times \sigma(t, x_t))dt + \sigma(t, x_t)dW_t^Q$$

où  $\lambda(t)$  est le prix de marché du risque, qui ne dépend pas du facteur  $x_t$ . On constate qu'en posant  $\mu(t, r_t) = k \times (b - r_t)$  ou en d'autres termes en fixant la dynamique historique

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

du taux court selon  $dr(t) = k(b - r(t))dt + \sigma dW_t$  on obtient une dynamique cohérente avec le modèle de Vasicek généralisé en supposant que le prix de marché du risque s'écrit :

$$\lambda(t) = \frac{k(b - b_t)}{\sigma}.$$

En d'autres termes, le modèle de Vasicek généralisé peut être vu comme un modèle à facteur où le taux court suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard avec la spécification ci-dessus du prix de marché du risque.

### 3.4. Exemple d'alternative : le modèle CIR étendu

Les notations sont celles de PLANCHET et al. [2011]. L'adaptation du modèle CIR au cadre HJM repose sur la recherche d'une dynamique du taux *forward* qui conduise à la dynamique du taux court suivante :

$$dr_t = a(t)(b(t) - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

On peut montrer (cf. RACICOT et THÉORET [2006]) que le processus de volatilité HJM doit être de la forme :

$$\sigma(t, T) = \sigma\sqrt{r_t}D(t, T), \quad \sigma^*(t, T) = \sigma\sqrt{r_t}B(t, T)$$

avec  $D(t, T) = \frac{\partial B}{\partial T}(t, T)$ ,  $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)ds$  et  $B$  vérifie l'équation différentielle de

Ricatti suivante (cf. Hull et White [1990]) :

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t, T) = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) + a(t)B(t, T) - 1$$

avec la condition aux limites  $B(T, T) = 0$ . Enfin, on doit reproduire la courbe des taux *forward* initiale :

$$f(0, T) = r_0 D(0, T) + \int_0^T a(s)b(s)D(s, T)ds.$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon est alors donné par la formule :

$$P(t, T) = \exp\left(-r_t B(t, T) - \int_t^T a(s)b(s)B(s, T)ds\right).$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

La mise en œuvre pratique de ce modèle n'est pas simple car l'équation différentielle vérifiée par  $B$  n'a pas de solution explicite (voir par exemple sur cette question SHIU et YAO [1999]) et il faut donc se tourner vers une résolution numérique. Au surplus, il faut déterminer les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$ .

#### 4. La prise en compte du défaut et de la liquidité : le modèle LMN

On souhaite maintenant prendre en compte un écart avec le taux sans risque pour rendre compte de la présence de risques de défaut et / ou de liquidité. On présente ici très sommairement le cadre proposé dans LONGSTAFF et al. [2005] qui permet de compléter le modèle de taux sans risque avec une modélisation du *spread*. On suppose que le défaut est décrit par un processus d'intensité

$$d\lambda(t) = (\alpha - \beta \times \lambda(t))dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)} dW_\lambda(t)$$

et que le *spread* comporte également une part associée à la liquidité décrite par un simple mouvement brownien :

$$d\gamma(t) = \eta dW_\gamma(t)$$

D'un modèle mono-factoriel dans lequel l'aléa était issu du taux court, on passe ainsi à un modèle à trois facteurs de risque, le taux court, l'intensité du défaut et la liquidité. Dans ce cadre, on montre que le prix en  $t$  le prix d'une obligation servant un coupon  $c$  et avec un taux de perte en cas de défaut égal à  $\omega$  est donné par la formule générale :

$$\begin{aligned} CB(t, T) = & E_t \left( c \times \int_t^T \mathbf{exp} \left( - \int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) du \right) \\ & + E_t \left( \mathbf{exp} \left( - \int_t^T (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) \right) \\ & + E_t \left( (1 - \omega) \times \int_t^T \lambda_u \mathbf{exp} \left( - \int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) du \right) \end{aligned}$$

Le prix de l'obligation est donc simplement égal à l'espérance la somme des flux qu'elle sert, l'actualisation étant effectuée au taux corrigé du risque  $r_s + \lambda_s + \gamma_s$ . Du fait de l'utilisation d'un processus affine pour le processus de défaut, on obtient des expressions explicites pour  $CB(t, T)$  et pour des primes de CDS (cf. LONGSTAFF et al. [2005] et DUFFIE et al. [2000]).

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [ (T_x) ]$$

## 5. Estimation et calibrage

### 5.1. Construction de la courbe des taux

En amont de l'estimation d'un modèle il est nécessaire de construire la courbe des taux ZC initiale. Parmi les nombreux modèles proposés dans la littérature, le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987]) est souvent utilisé de par sa bonne flexibilité et sa facilité de mise en œuvre.

Le taux à terme instantané s'écrit (avec les notations de RONCALLI [1998]) dans ce modèle :

$$f(t, T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{T-t}{\tau_1} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)$$

ce qui conduit en posant  $\tau = T - t$ , comme le taux zéro-coupon  $R_t(\tau)$  se calcule à partir

de  $R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_t(u) du$ , à l'expression :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right).$$

En posant  $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$  et  $\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$ , l'expression ci-dessous s'écrit:

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

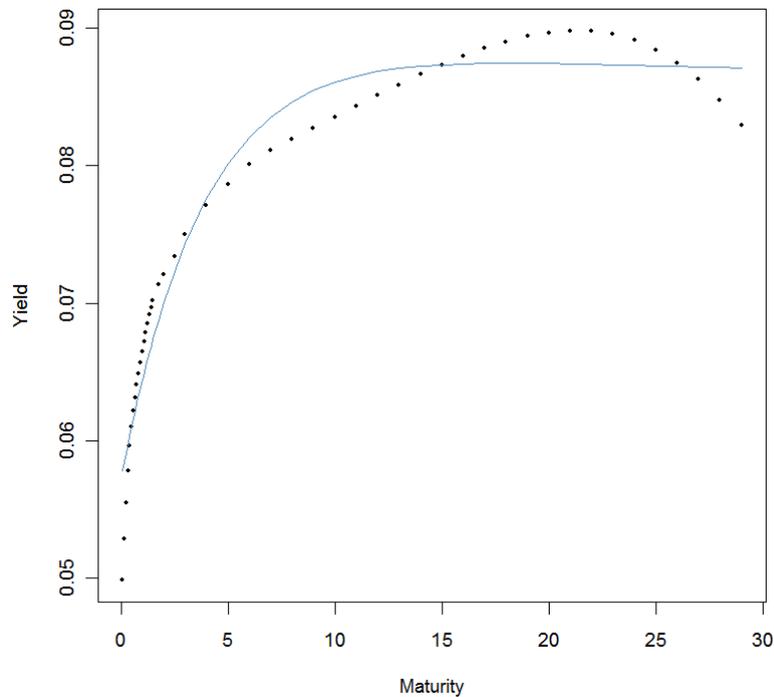
On peut donner une interprétation aux paramètres de forme du modèle qui correspondent respectivement au taux long, à l'opposé du *spread* et à la convexité. On utilise parfois la relation ci-dessus sous la forme :

$$R_t(\tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left( 1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

où  $r_0(t) = l(t) - s(t)$  est le taux court instantané. Cette équation présente l'avantage de faire apparaître des facteurs de détermination du taux zéro-coupon facilement interprétables : le taux court, le taux long et la convexité.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t;\infty} [ (T_x) ]$$

**Remarque :** La détermination du nombre de facteurs déterminant la forme de la courbe des taux et leur interprétation a fait l'objet de nombreux travaux, dont on trouvera une synthèse dans RONCALLI [1998]. On conclut de ces études que les trois facteurs  $l(t)$ ,  $s(t)$  et  $c(t)$  expliquent classiquement plus de 95 % de la variance de la courbe.



## 5.2. Estimation du modèle de Vasicek généralisé

De l'égalité  $P(0,T) = \exp \left[ - \int_0^T f(0,s) ds \right]$  on déduit que :

$$\ln P(0,T+h) - \ln P(0,T) = - \int_T^{T+h} f(0,s) ds$$

ce qui permet d'utiliser, pour  $h$  petit, l'approximation :

$$\begin{aligned} f(0,T) &= \frac{-1}{h} (\ln P(0,T+h) - \ln P(0,T)) \\ &= \frac{1}{h} ((T+h) \times R_c(0,T+h) - T \times R_c(0,T)) \end{aligned}$$

Avec  $h=1$  on peut alors construire une approximation de la courbe des taux *forward* à partir de la courbe des taux *ZC*. Dans le modèle de Vasicek généralisé (cf. HULL et WHITE [1990]), le taux court satisfait :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$dr(t) = \left[ \partial_2 f(0, t) + k(f(0, t) - r(t)) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 \right] dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

que l'on peut écrire  $dr(t) = k(b(t) - r(t))dt + \sigma dW_t^Q$  en posant :

$$b(t) = \partial_2 f(0, t) + k \times f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2.$$

L'estimation des paramètres de ce modèle est délicate (cf. ROGERS [1995]). Deux approches sont envisageables :

- l'utilisation de dérivés de taux pour lesquels on dispose d'une formule fermée dans le modèle de Vasicek généralisé, en cherchant les paramètres qui minimisent un écart quadratique avec des prix observés pour ces dérivés.
- l'utilisation de la vision historique du modèle. En effet, on a vu *supra* que l'on pouvait associer au modèle de Vasicek généralisé une dynamique du taux court en probabilité historique. Les paramètres peuvent alors en être estimés par régression. De plus les paramètres  $(k, \sigma)$  sont identiques sous les deux mesures.

On utilise ensuite l'estimateur  $(\hat{k}, \hat{\sigma})$  de  $(k, \sigma)$  obtenu par l'une ou l'autre de ces techniques comme estimateur de  $(k, \sigma)$  dans le modèle étendu.

### 5.3. Lien avec la volatilité des actions

On considère le modèle :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma_a dW_t^a$$

$$dr(t) = k[b(t) - r(t)]dt + \sigma dW_t^b$$

avec  $dW_t^a dW_t^b = \rho dt$  et :

$$b(t) = \partial_2 f(0, t) + k \times f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2.$$

On sait (cf. QUITTARD-PINON [2002]) que le prix d'une option d'achat est alors égal à :

$$C(0, T) = S \times N(d_1) - K \times P(0, T) \times N(d_2)$$

où :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K \times P(0,T)}\right) + \frac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \sqrt{\tau} \text{ et } \tau = \int_0^T \left( \sigma^2 K(T-u)^2 + 2\rho\sigma_a\sigma K(T-u) + \sigma_a^2 \right) du$$

avec  $K(u) = \frac{1 - e^{-ku}}{k}$ . On peut noter que  $\rho$  est l'opposé du coefficient de corrélation entre le rendement du sous-jacent et le rendement du ZC. On trouve après quelques calculs :

$$\tau = \left( \frac{\sigma^2}{k^2} + \frac{2\rho\sigma\sigma_a}{k} + \sigma_a^2 \right) T + 2 \left( \frac{\sigma^2}{k^2} - \frac{\rho\sigma\sigma_a}{k} \right) K(T) - \frac{L(T)}{k^2}.$$

en notant  $L(t) = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt})$ .

L'obtention de la volatilité  $\sigma_a$  par inversion du prix d'une option d'achat nécessite donc l'estimation préalable du modèle de taux et du coefficient de corrélation linéaire entre les rendements.

## 6. Dérivés de taux

On définit un *caplet* comme une option, qui à un instant donné  $T_i$ , paye la différence entre le taux de référence actuel et le taux d'exercice  $K$  du *caplet*. En notant  $L_i = L(T_{i-1}, T_i)$  le taux au comptant (annualisé) à la date  $T_{i-1}$  pour la maturité  $T_i$ , le flux du *caplet* est donné par la formule suivante :

$$X_{T_i} = N \times \tau_i \times [L_{i-1} - K]^+$$

avec  $N$  et  $\tau_i = T_i - T_{i-1}$  respectivement le nominal et la durée entre les instants  $T_{i-1}$  et  $T_i$ , exprimée en année. Les dates  $T_{i-1}$  et  $T_i$  sont appelées expiration (*reset*) et maturité. On peut noter que percevoir  $\tau_i \times [L_{i-1} - K]^+$  à la date  $T_i$  est équivalent à percevoir

$Y_{i-1} = \frac{[\tau_i L_{i-1} - \tau_i K]^+}{1 + \tau_i L_{i-1}}$  à la date  $T_{i-1}$ . Mais on peut écrire

$$Y_{i-1} = (1 + \tau_i K) \left[ \frac{1}{1 + \tau_i K} - \frac{1}{1 + \tau_i L_{i-1}} \right]^+$$

et on reconnaît dans cette expression le flux d'une option de vente de prix d'exercice  $\frac{1}{1 + \tau_i K}$  sur le zéro-coupon  $\frac{1}{1 + \tau_i L_{i-1}}$ .

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

Un *Cap* est un portefeuille de *caplets*. C'est donc une collection d'options d'achat européennes dont le sous-jacent est proportionnel au taux de référence considéré. Le flux du *Cap* de durée  $[T_\alpha, T_\beta]$  est donné par :

$$C = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \times [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+.$$

En pratique, une entité qui doit s'acquitter d'une dette par des règlements à chaque date  $T_i$  à un taux d'intérêt, connu en  $T_{i-1}$  pour la période  $[T_{i-1}, T_i]$  égal à  $L_i = L(T_{i-1}, T_i)$  et qui achète un *Cap* paiera  $L_i - [L_i - K]^+ = \min(L_i, K)$  : elle limite donc son risque au paiement du taux  $K$  à chaque période.

Pour obtenir le prix d'un *Cap*, on utilise la formule de Black :

$$Cap^{black} = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i Bl(K, F(0, T_{i-1}, T_i), \sigma_{\alpha, \beta})$$

où :

$$Bl(K, F, \sigma_{\alpha, \beta}) = F\Phi(d_1(K, F, \sigma_{\alpha, \beta})) - K\Phi(d_2(K, F, \sigma_{\alpha, \beta}))$$

$$\text{avec } d_{1,2}(K, F, \sigma_{\alpha, \beta}) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) \pm 0,5 \times (\sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}})^2}{\sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}}.$$

- $\sigma_{\alpha, \beta}$  est la volatilité implicite du *Cap* considéré sur toute la durée de vie  $[T_\alpha, T_\beta]$  de l'option.
- $K$  est le taux d'exercice du *Cap* ;
- $F(0, T_{i-1}, T_i)$  est le taux *forward* de la période  $[T_{i-1}, T_i]$
- $N$  est le nominal.

## 7. Quelques remarques sur l'actualisation

On note  $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right)$  où  $r(t)$  désigne le taux court à la date  $t$ .  $\delta(t)$  est le montant (aléatoire) qu'il faut placer au taux sans risque pour disposer d'un capital unitaire à la date  $t$ . On en déduit en particulier que le prix d'un zéro-coupon de maturité  $t$  est égal, à la date 0, à  $P(0, t) = E\left(\exp\left(-\int_0^t r(u) du\right)\right)$ , l'espérance étant prise sous la probabilité risque neutre.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty[}(T_x)$$

La courbe des taux ZC initiale, définie par  $R(0,t) = -\frac{1}{t} \ln P(0,t)$  contraint donc la dynamique du taux court (futur) puisqu'on doit avoir  $R(0,t) = -\frac{1}{t} \ln E \left( \exp \left( -\int_0^t r(u) du \right) \right)$ .

### 7.1. Formule d'actualisation

Plus généralement,  $\delta(t)$  est le facteur d'actualisation à appliquer à un flux aléatoire  $X(t)$  pour le ramener à la date initiale. La valeur initiale de ce flux est alors égale, de part les propriétés de la mesure risque neutre, à  $v(X(t)) = E[\delta(t) \times X(t)]$ . Dans le cas particulier  $X(t) = 1$  on retrouve  $v(1) = P(0,t)$ .

On distingue alors deux situations, selon que l'aléa sur le flux  $X(t)$  est d'origine financière ou non. Plus précisément on distingue deux sources d'aléa, représentées techniquement par deux espaces probabilisés filtrés,  $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, Q^f)$  pour le risque financier et  $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, P^a)$  pour le risque d'assurance. Alors la valeur *best estimate* d'un risque mêlant les deux sources de risque est égale à :

$$v(X(t)) = E^{Q^f \otimes P^a} [\delta(t) \times X(t)].$$

Lorsque  $X(t)$  ne dépend pas de l'état du monde financier (un pur risque de mortalité par exemple) alors cette formule conduit à :

$$\begin{aligned} v(X(t)) &= E^{Q^f \otimes P^a} [\delta(t) \times X(t)] = E^{Q^f} [\delta(t)] \times E^{P^a} [X(t)] \\ &= P(0,t) \times E^{P^a} [X(t)] \end{aligned}$$

et on retrouve l'actualisation classique à l'aide de la courbe des taux ZC initiale. Dans le cas général, les interactions actif / passif empêchent cette simplification et la formule  $v(X(t)) = E^{Q^f \otimes P^a} [\delta(t) \times X(t)]$  n'a pas de simplification particulière. L'actualisation est alors plus complexe que la simple multiplication par la valeur d'un ZC.

### 7.2. Relations entre taux forward et taux court

On peut noter par ailleurs que le prix d'un ZC est aussi égal à :

$$P(0,t) = \exp \left( -\int_0^t f(0,u) du \right)$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [ (T_x) ]$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

avec  $f(0, u)$  la courbe des taux *forward* initiale. En particulier, la courbe des taux *ZC* initiale est liée à la courbe des taux *forward* initiale par la relation :

$$R(0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(0, u) du .$$

On a par ailleurs  $\mathbf{exp} \left( - \int_0^t f(0, u) du \right) = E \left( \mathbf{exp} \left( - \int_0^t r(u) du \right) \right)$ , ce qui s'écrit également :

$$E \left( \mathbf{exp} \left( - \int_0^t [r(u) - f(0, u)] du \right) \right) = 1 .$$

Cette égalité traduit le fait que le taux *forward* initial (connu)  $f(0, u)$  ne peut pas être trop éloigné, en moyenne, de la projection du taux court (aléatoire)  $r(u)$ . Comme la fonction  $g(x) = e^x$  est convexe, on dispose de l'inégalité de Jensen,  $E(g(X)) \geq g(E(X))$  qui conduit à :

$$\mathbf{exp} \left( - \int_0^t [E(r(u)) - f(0, u)] du \right) \leq 1 ,$$

d'où l'on déduit que  $\int_0^t [E(r(u)) - f(0, u)] du \geq 0$ . Ainsi, en moyenne (y compris en intégrant la dimension temporelle dans le calcul), l'anticipation du taux court a tendance à être supérieure au taux *forward*. Soit  $h(u) = E(r(u)) - f(0, u)$  ; on a  $h(0) = 0$  et  $\int_0^t h(u) du \geq 0, \forall t \geq 0$ . Cela implique que pour  $t$  assez petit  $h(t) \geq 0$  et donc  $E(r(t)) \geq f(0, t)$  ; mais cette inégalité peut ne plus être vérifiée ensuite.

### 7.3. Estimation des taux *forward* initiaux

La relation  $R(0, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(0, u) du$  peut être utilisée pour calculer les  $f(0, t)$  à partir des

$R(0, t)$  en discrétisant l'intégrale  $\frac{1}{t} \int_0^t f(0, u) du \approx \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t f(0, k)$  pour  $t \geq 1$ . Cela revient à

utiliser l'approximation  $f(0, s) \approx - \frac{\ln(P(0, s^+)) - \ln(P(0, s))}{s^+ - s}$ .

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

En pratique le facteur d'actualisation  $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right)$  se calcule à partir d'une discrétisation du processus  $r(t)$ ,  $\delta(t) \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^n r(t_{i-1}) \times (t_i - t_{i-1})\right)$  avec  $0 = t_0 < \dots < t_n = t$ . Il est alors pratique d'utiliser le taux d'actualisation discret  $R_t$  tel que  $\delta(t) = (1 + R_t)^{-t}$ , soit :

$$R_t = \delta(t)^{\frac{1}{t}} - 1 = \exp\left(\frac{1}{t} \int_0^t r(u) du\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^n r(t_{i-1}) \times (t_i - t_{i-1})\right) - 1$$

Avec un pas de discrétisation constant tel que  $t_i = i \times \frac{t}{n}$ , on a simplement :

$$R_n = \left(\prod_{i=1}^n e^{r_{i-1}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

## 8. Références

- CAJA A., PLANCHET F. [2010] « [La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?](#) », *Assurances et gestion des risques*, Vol.78 (3/4).
- DUFFIE D., PAN J., SINGLETON K.J. [2000] « Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions », *Econometrica* 68, 1343–1376.
- HEATH D., JARROW R., MORTON K. [1990] « Bond pricing and the term structure of interest rate: a discret time approximation », *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 25, 419-440.
- HULL J.C. [1999] *Options, futures and other derivatives*, 4th edition, Prentice-Hall.
- HULL J.; WHITE A. [1990] « [Pricing Interest-Rate-Derivative Securities](#) », *Rev. Fin. Studies*, pp.573-592.
- LONGSTAFF F.A.; MITHAL S.; NEIS E. [2005] "[Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market](#)", *Journal of Finance*, Vol. LX, n° 5.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2005] [Simulation de trajectoires de processus continus](#), *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 5, 1-13.
- QUITTARD-PINON F. [2002] *Mathématiques financières, les essentiels de la gestion*, EMS.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

---

RACICOT F.E., THÉORET R. [2006] « [Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues](#) », UQUAM, Working Paper.

ROGERS L.C.G. [1995] « [Which model for term-structure of interest rates should one use?](#) », *Mathematical Finance*, IMA vol. 65, Springer, 93-116.

RONCALLI T. [1998] [La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique](#), Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV

SHUI E.S.W., YAO Y. [1999] « Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models », *Proceedings of the 9<sup>th</sup> AFIR Colloquium*.