

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net



MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES

Support de cours 2023-2024

Les garanties « plancher » sur les contrats en unités de compte (GMDB)

Frédéric PLANCHET

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

SOMMAIRE

1. Introduction	3
2. Les contrats à garantie plancher	3
2.1. Les différentes garanties	4
2.2. Le risque associé à la garantie plancher	5
3. Analyse du coût de la garantie.....	6
3.1. Cas du contrat uni-support	6
3.1.1. Lissage du coût de la garantie sur la durée du contrat.....	7
3.1.2. Évaluation par simulation	8
3.1.2.1. Approche classique	9
3.1.2.2. Optimisation : l'échantillonnage d'importance.....	9
3.2. Le cas multi-supports	11
3.2.1. Approximation de GENTLE	11
3.2.2. Évaluation par simulation	14
3.2.2.1. Approche classique	14
3.2.2.2. Réduction de variance : utilisation d'une variable de contrôle	15
4. Choix de la probabilité	17
5. Prise en compte des imperfections de couverture.....	19
5.1. Coûts de transaction et imperfections de couverture.....	19
5.1.1. Algorithme de projection.....	19
5.1.2. Illustration numérique	21
5.2. Prise en compte des décès	22
5.2.1. Prise en compte globale des options.....	23
5.2.2. Prise en compte du risque de mortalité.....	24
6. Mise en œuvre pratique	25
6.1. Le cas d'un contrat uni-support	25
6.2. Le cas d'un contrat multi-supports	27
7. Annexe.....	28
8. Références.....	29

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

1. Introduction

On distingue principalement deux types de contrats d'épargne : les contrats dits « en euros » et les contrats « en unités de compte » (UC). Les premiers offrent aux assurés, à leur échéance, une somme fixée à laquelle s'ajoutent les participations aux bénéfices techniques et financiers alors que les seconds garantissent des parts d'actifs.

Ces actifs sont appelés supports, ils sont de divers types (FCP, actions, SCPI, SICAV, etc.) et sont sélectionnés par l'assuré lors de ses versements selon des règles variables selon le contrat. L'assureur ne supporte alors aucun risque financier.

Toutefois de nombreuses garanties sont adossées aux contrats en UC pour les rendre plus attractifs. Exprimées en euros, ces garanties font supporter un risque à l'assureur, qu'il convient d'évaluer et de provisionner.

Le but de ce document est de présenter l'une de ces garanties typique, la « garantie plancher » et d'examiner la question de son évaluation en « juste valeur » sur un contrat en UC à support unique puis sur des contrats multi-supports.

Pour cela, on présente la garantie dans une première partie, puis on l'évalue, que ce soit dans le cas uni-support ou dans le cas multi-supports.

La garantie plancher dans un contrat en unités de compte assure au bénéficiaire le versement d'un capital minimum K fixé contractuellement, quelles que soient les fluctuations de son épargne. Du point de vue de la théorie des options, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie est représenté par une option de vente que le bénéficiaire possède vis-à-vis de la compagnie d'assurances. La tarification du risque est donc intimement liée au choix du modèle d'évaluation de prix des actifs financiers.

Ce document se limite à l'analyse des garanties en cas de décès (GMDB), une approche générale pour la prise en compte de garanties plus générales est proposée dans BAUER et al. [2007].

2. Les contrats à garantie plancher

Les contrats en unités de compte sont des contrats où les fonds sont investis sur des unités de placement telles que des actions de SICAV ou des parts de SCI. La liste des supports admissibles est détaillée aux articles L131-1 et R131-1 du Code des Assurances. La valorisation de ces contrats dépend donc du comportement des différents marchés financiers. En contrepartie d'un risque accru, ces supports offrent *a priori* des gains potentiels plus importants qu'un contrat classique de type obligataire.

Un contrat à support unique est un contrat dont le portefeuille adossé est composé d'une seule unité de compte (*i.e.* d'un seul actif financier), alors qu'un contrat « multi-supports » est un contrat dont le portefeuille adossé est composé de plusieurs unités de compte.

Les performances d'un contrat en UC s'apprécient sur le long terme. Ce type d'investissement peut donc répondre à certaines attentes des assurés concernant leur retraite. Outre la valorisation d'un capital, c'est surtout la constitution d'un complément de retraite qui est désignée comme la principale raison de l'investissement.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

2.1. Les différentes garanties

Avec le développement considérable des contrats en unités de compte et l'évolution à la baisse des marchés financiers, il est naturel de s'intéresser aux types de garanties que peuvent proposer ces contrats à leurs souscripteurs. Les turbulences des marchés financiers, illustrée par la baisse d'environ 60 % du CAC 40 en 2001, puis en 2008, ont en effet rappelé aux investisseurs le risque lié à ce type de placements.

Contrairement aux contrats en euros qui peuvent garantir contractuellement un rendement minimum, les contrats en unités de compte sans garantie décès font supporter à l'assuré l'intégralité du risque lié aux fluctuations des marchés financiers : en effet les conditions générales ne garantissent pas une valeur en euros pour le contrat mais un nombre d'unités de compte, dont la valeur dépend des évolutions de la bourse.

Ainsi, si l'assuré vient à décéder, le montant versé au bénéficiaire est égal au montant de la provision mathématique à la date du décès. Et d'un point de vue comptable, le montant de cette provision constituée est égal pour chaque support au nombre de parts détenues multiplié par la valeur de marché de l'unité de compte considérée.

Au vu de la chute des marchés boursiers, les assureurs sont amenés à proposer de partager le risque de marché avec l'assuré, et du même coup rendre le contrat plus sécurisé, et donc plus attractif, aux yeux de l'investisseur. Cela s'est concrétisé par l'ajout de garanties décès optionnelles aux contrats. La plus répandue sur le marché est la « garantie plancher ». Cette garantie a pour but de protéger les ayants droit du souscripteur en cas de décès de celui-ci contre une baisse des marchés financiers. Ceci se concrétise par le versement, en cas de décès de l'assuré, d'une prestation égale au maximum entre le cumul des primes investies, nettes des frais de souscription et des rachats éventuels, que l'on notera K , et le montant de la provision mathématique à la date du décès de l'assuré. Ainsi, quelles que soient les fluctuations boursières, le bénéficiaire du contrat recevra au minimum le cumul des primes investies nettes des frais de souscription (et nettes de rachats, le cas échéant). Cette garantie accompagnait obligatoirement les contrats en unités de compte avant la réforme du cadre réglementaire en 1992.

Plaçons-nous dans le cas du versement d'une prime unique S_0 , de manière formelle, si S_t représente le montant de la provision mathématique à l'instant t , et si T est la date de décès de l'assuré, le bénéficiaire recevra une prestation égale à $\mathbf{Max}(S_T, S_0)$ où S_0 représente le montant initial investi net de frais de souscription.

D'autres garanties plus perfectionnées existent sur le marché pour ces contrats mais le principe est identique. On peut citer la garantie décès indexée qui propose une prestation dont le montant est au minimum égal à la prime investie, capitalisée avec un taux particulier. Le bénéficiaire recevra alors en cas de décès de l'assuré une somme égale à $\mathbf{Max}(S_T, S_0 \times e^{rT})$ où r est le taux continu annuel de valorisation de la garantie et où T représente la durée entre la date d'investissement initial et la date de décès de l'assuré. La garantie décès cliquet propose quant à elle comme prestation minimum la plus haute

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

valeur de l'unité de compte durant la période de référence. Formellement, la prestation est alors égale à $\mathbf{Max}(S_T, \mathbf{Max}_{i=0, \dots, T} S_i)$.

Les méthodes d'évaluation de ces différentes garanties sont proches, et dans la suite on considère le plus souvent que la garantie est fixée, et correspond au remboursement en cas de décès d'un montant au moins égal à l'investissement initial.

2.2. Le risque associé à la garantie plancher

Il s'agit d'une combinaison d'un risque de mortalité et d'un risque de marché. En effet, la garantie plancher ne sera exercée que si l'assuré décède à une date où la situation de l'épargne est défavorable.

Le risque de mortalité est un risque classique pour un assureur vie, il peut être pris en compte avec les tables de mortalité et il se mutualise. Dans l'hypothèse d'une mutualisation suffisante, c'est à dire sur un gros portefeuille, aucune prime de risque n'est donc associée à ce risque.

Le risque de marché, quant à lui, est beaucoup plus délicat à évaluer et à maîtriser, notamment du fait qu'il ne se mutualise pas. Il provient des fluctuations boursières des supports que l'assuré a choisis dans son contrat. Évaluer ce risque implique donc des modélisations de cours boursiers.

Formalisons de manière mathématique le coût de la garantie plancher pour l'assureur. Le principe est que, si l'assuré décède alors que la valeur du support est inférieure au capital minimum garanti, l'assureur va devoir financer la différence.

On considère un assuré d'âge x à la date d'évaluation du coût de la garantie. Nous prenons comme hypothèse que les décès sont uniformément répartis sur l'année. Nous supposons aussi que les prestations au titre de la garantie décès seront versées en fin d'année. Ainsi, si l'assuré décède entre la $i^{\text{ème}}$ année et la $(i+1)^{\text{ème}}$ année, l'assureur va devoir verser au bénéficiaire désigné par l'assuré une prestation égale à $\mathbf{Max}(K, S_{i+1})$ où (S_i) représente le cours de l'actif à la date i (S_0 étant le cours de l'actif à la souscription) et où K représente le capital minimum garanti. On observe alors que :

$$\mathbf{Max}(K, S_{i+1}) = S_{i+1} + [K - S_{i+1}]^+$$

L'assureur possède dans son portefeuille les actifs représentant l'investissement de l'assuré et de valeur S_{i+1} . Le coût de la garantie à la charge de l'assureur à la date du décès est donc égal à :

$$[K - S_{i+1}]^+.$$

De manière plus formelle, le flux actualisé auquel doit faire face l'assureur est donné, pour un assuré d'âge x , par :

$$\Lambda = e^{-rT_x} [K - S_{T_x}]^+ \mathbf{1}_{T_x \leq T},$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

où T désigne le terme du contrat. La valeur à l'origine de ce flux est donc¹, avec l'aide du théorème des probabilités totales, en conditionnant par la survenance du décès, si la mutualisation est parfaite :

$$\begin{aligned} V &= E^{P^a \otimes Q^F}(\Lambda) = E^{P^a \otimes Q^F} \left(e^{-rT_x} [K - S_{T_x}]^+ \mathbf{1}_{T_x \leq T} \right) \\ &= \sum_{n=1}^T \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \times q_{x+n-1} \times E^{Q^F} \left[e^{-rn} [K - S_n]^+ \right] \end{aligned}$$

On reconnaît en particulier dans l'expression $P = E^{Q^F} \left[e^{-rn} [K - S_n]^+ \right]$ le prix d'une option de vente (put) de prix d'exercice K et de maturité n .

Remarque :

La formule précédente comporte une approximation concernant l'âge de l'assuré. En effet la date d'évaluation peut ne pas correspondre à la date anniversaire de la naissance de l'assuré. On trouvera en annexe le coût de la garantie, si l'on exprime l'âge x de l'assuré sous la forme $x = y + u$ où $y \in \mathbb{N}$ et $u \in]0,1[$.

3. Analyse du coût de la garantie

Dans ce paragraphe, on va chercher à expliciter la formule déterminée ci-dessus dans différentes situations.

Pour ce faire, on étudie en premier lieu le cas d'un contrat uni-support et l'on verra que l'on dispose d'une formule fermée si l'on modélise l'évolution du cours de l'actif par un mouvement brownien géométrique. On présente en particulier dans ce cas le lissage du coût de la garantie sur la durée de vie du contrat.

On s'intéresse ensuite au cas où l'actif est constitué de plusieurs supports. On estime le coût de la garantie par l'approximation de Gentle puis par simulation.

3.1. Cas du contrat uni-support

Dans cette partie, l'actif du contrat n'est constitué que d'un seul support. On suppose que le cours du support est correctement décrit par un mouvement brownien géométrique. On note S_t le cours du support à la date t :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

¹ Voir [cette présentation](#) pour un rappel du principe général de calcul de la valeur économique d'une séquence de flux financiers.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

où B_t est un mouvement brownien standard. Le coût de la garantie s'exprime alors sous la forme² :

$$\begin{aligned} V &= E^{P^a \otimes Q^F} \left[e^{-rT_x} \left[K - S_{T_x} \right]^+ \mathbf{1}_{T_x \leq T} \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times q_{x+t-1} \times E^{Q^F} \left[e^{-rt} \left[K - S_t \right]^+ \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times q_{x+t-1} \times \left[K e^{-rt} N(-d_2(t)) - S_0 N(-d_1(t)) \right] \end{aligned}$$

où $d_2(t) = \frac{\ln S_0 / K + (r - \sigma^2 / 2)t}{\sigma \sqrt{t}}$ et $d_1(t) = d_2(t) + \sigma \sqrt{t}$, en appliquant la formule de Black

et Scholes pour une option de vente. On a posé :

- ✓ x l'âge du souscripteur,
- ✓ T la durée du contrat (de l'ordre d'une dizaine d'années),
- ✓ K le capital minimum garanti par le contrat,
- ✓ S_0 la valeur initiale de l'actif ;
- ✓ N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Se pose alors la question du financement de cette garantie ; la préfinancer complètement n'est pas forcément optimal et peut induire un coût élevé lors de la souscription du contrat. On s'intéresse alors à étaler ce financement sur la durée du contrat.

3.1.1. Lissage du coût de la garantie sur la durée du contrat

Dans ce qui précède, l'engagement associé à la garantie plancher a été évalué à la date de souscription du contrat ; en pratique, l'assureur va souhaiter lisser cette charge sur la durée du contrat.

On suppose donc que la société finance la garantie par un prélèvement annuel sur l'encours des placements, prélèvement au taux α . On peut ainsi écrire les flux actualisés espérés, conditionnellement à l'environnement financier, respectivement pour l'assureur :

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times q_{x+t-1} \times e^{-rt} \left[K - S_t (1-\alpha)^t \right]^+$$

et l'assuré :

$$C = \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times \alpha \times e^{-r(t-1)} S_{t-1} \times (1-\alpha)^{t-1}.$$

² Cette formule est parfois désignée par « formule des puts moyens pondérés ».

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Les expressions ci-dessus traduisent le fait que la prestation est payée au moment du décès alors que les cotisations sont perçues tant que l'assuré est vivant. La valeur économique de ces flux s'obtient alors par :

$$E^{Q^f}(P) = \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times q_{x+t-1} \times E^{Q^f} \left(e^{-rt} \left[K - S_t (1-\alpha)^t \right]^+ \right)$$

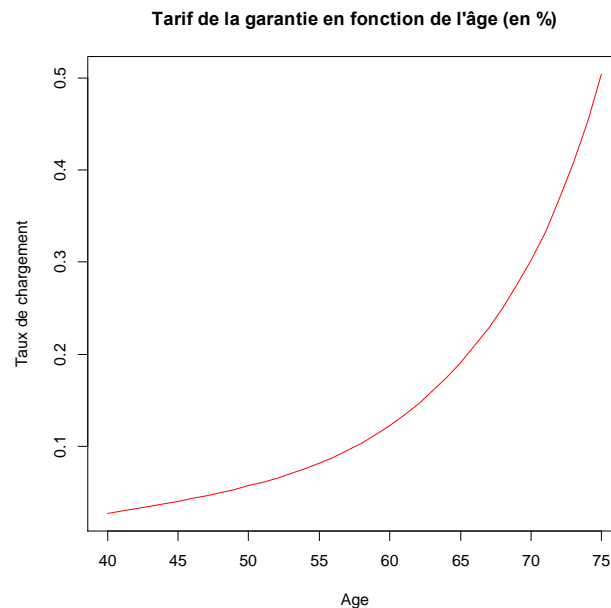
$$E^{Q^f}(C) = \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times \alpha \times E^{Q^f} \left(e^{-r(t-1)} S_{t-1} \right) \times (1-\alpha)^{t-1} = \alpha \times S_0 \times \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times (1-\alpha)^{t-1}$$

Le taux naturel de tarification pour une tête d'âge x , noté α_x est obtenu en égalant l'engagement de l'assureur et l'engagement de l'assuré, soit :

$$E^{Q^f}(P) = E^{Q^f}(C)$$

La résolution de cette équation en α (par dichotomie par exemple), conduit à un taux applicable pour chaque âge à la souscription x fixé.

En prenant à titre d'exemple un taux sans risque de 3 %, une durée du contrat de 10 ans, une volatilité de l'actif de 16 % et en supposant la mortalité décrite par la table TH 00-02, on trouve l'allure suivante du chargement en fonction de l'âge à la souscription :



3.1.2. Évaluation par simulation

Dans le cas simple d'un contrat en UC uni-support dans lequel le processus des cours est supposé suivre un mouvement brownien géométrique, on a vu qu'il était possible d'obtenir une formule fermée pour le coût de la garantie ; cependant, dans le cas des contrats multi-supports, ou si le sous-jacent est modélisé par un autre type de processus, il n'est en général pas possible d'obtenir une formule fermée.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

Dans ce contexte, il est naturel de se tourner vers des méthodes d'évaluation du coût par simulation du cours de l'action (sous la probabilité risque-neutre) et, le cas échéant, des décès. En effet la simulation d'un grand nombre N de cours de l'action indépendants permet la détermination approchée du coût moyen de la garantie. Elle autorise en plus l'évaluation d'indicateurs de risque, tels que la variance de l'engagement, ou, plus généralement, de toute fonctionnelle attachée à la distribution de cet engagement. La comparaison d'une évaluation par simulation et du résultat obtenu par formule fermée pourra notamment permettre d'étalonner le simulateur pour fixer le nombre d'itérations en fonction de la valeur des paramètres retenus, afin d'obtenir le degré de précision souhaité.

Dans la suite on fait l'hypothèse que le portefeuille est de taille suffisante pour qu'il y ait mutualisation du risque démographique, et on ne simule donc que le cours de l'action. La méthode présentée s'étend sans difficulté au cas de la simulation du risque démographique.

3.1.2.1. Approche classique

On note :

- ✓ S_i^j la $j^{\text{ème}}$ simulation du cours de l'action à la date i ,
- ✓ C_j le coût de la garantie dans la $j^{\text{ème}}$ simulation,
- ✓ \bar{C} le coût moyen empirique.

On a alors $S_i^j = S_{i-1}^j \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma \varepsilon \right\}$ où ε suit une loi normale centrée réduite, et on pose :

- ✓ $C_j = \sum_{i=1}^n q_{x+i} \frac{l_{x+i}}{l_x} v^{i+1} (K - S_i^j)^+$ où $v = e^{-r}$
- ✓ $\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_j$

\bar{C} est un estimateur sans biais et convergent de C , le prix de la garantie plancher. On se référera à PLANCHET et al. [2011] pour la simulation des réalisations de loi normale.

3.1.2.2. Optimisation : l'échantillonnage d'importance

On observe que le calcul à mener $C = e^{-rT} E \left([K - S_T]^+ \right)$ est, dans une approche par simulation, plus ou moins aisé en fonction de la position de S_T par rapport à K : typiquement si la valeur du sous-jacent en 0 est telle que $K \ll S_0$, le nombre de trajectoires franchissant le seuil K sera faible et si on simule trop directement toutes les trajectoires, un grand nombre d'entre elles ne sera finalement pas utilisé (si $K \leq S_T$, la trajectoire d'influe pas directement sur le prix de l'option).

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

De manière générale lorsque l'on veut calculer par simulation une fonctionnelle de la forme :

$$I(f) = E(f(X)) = \int f(x) F_X(dx)$$

une manière de réduire la variance est de ne plus simuler sous la loi F_X , mais à l'aide d'une loi instrumentale qui tienne compte de la répartition du produit $f(x) F_X(dx)$. En supposant que la loi de X admet une densité, l'idée est donc d'écrire

$$I(f) = \int f(x) F_X(dx) = \int f(x) \frac{f_X(x)}{h(x)} h(x) dx$$

et d'observer que la variance de l'estimateur naturel associé $I_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{f_X(x_i)}{h(x_i)}$ est égale à :

$$V(I_n(f)) = \int \left(f(x) \frac{f_X(x)}{h(x)} - I(f) \right)^2 h(x) dx.$$

L'idée est donc de choisir h de sorte que les valeurs de x pour lesquelles le produit $f_X \times f$ est grand soient souvent sélectionnées, et celles pour lequel il est faible le soit rarement. Dans le cas de l'évaluation du prix C d'une option qui nous concerne ici, on observe alors que pour un vecteur gaussien X et une constante m on a :

$$E(g(X)) = E \left(g(X+m) \exp \left(-m \cdot X - \frac{\|m\|^2}{2} \right) \right)$$

et C est de la forme $C = e^{-rT} E \left[\left[K - \exp(\sigma X) \right]^+ \right]$ avec X une variable aléatoire gaussienne.

En choisissant alors m tel que l'exercice de l'option soit « fréquent », par exemple $e^{\sigma m} = K$ on doit logiquement optimiser la vitesse de convergence. On utilise alors la formulation :

$$C = e^{-rT} E \left[\exp \left(-mX - \frac{m^2}{2} \right) \left[K - \exp(\sigma(X+m)) \right]^+ \right]$$

pour faire le calcul par simulation, qui converge plus rapidement que l'approche directe.

La manière de choisir la loi instrumentale dans cet exemple est en fait un cas particulier d'une démarche plus générale pour les diffusions, au travers du théorème de Girsanov. En effet, le changement de probabilité du théorème de Girsanov fournit une loi instrumentale « naturelle ». On peut appliquer ceci au calcul du prix d'une option dans le modèle de Heston (voir sur ce sujet BAUD [2002]).

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

3.2. Le cas multi-supports

Les contrats en unités de compte comportent souvent de nombreux supports, de nature variée. On supposera ici que l'actif du contrat est composé de k supports. Pour un décès entre t et $t+1$, le flux suivant est à la charge de l'assureur par le biais de la garantie plancher :

$$\left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_{t+1}^i \right)^+$$

C'est le flux d'une option sur panier, analysé dans GENTLE [1992]. On suppose que les cours des supports suivent les dynamiques :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dB_t^i$$

avec (formellement) $dB^i dB^j = \rho_{i,j} dt$. On a donc sous la probabilité risque neutre :

$$S_t^i = S_0^i \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t + \sigma_i B_t^i \right).$$

Il n'y a pas de formule fermée exacte pour aboutir sur le prix d'une option sur panier constitué de deux actifs ayant de telles dynamiques. La raison en est que la distribution de la combinaison linéaire de lois log-normales n'est pas simple à calculer. Toutefois Gentle propose une approximation permettant d'aboutir à une formule fermée approchée³, approximation qui est décrite ci-après.

3.2.1. Approximation de GENTLE

Supposons que l'actif est composé de k supports dont les cours suivent les mouvements browniens géométriques ci-dessus en proportion $(\omega_j)_{1 \leq j \leq k}$. On cherche à évaluer la valeur actuelle du titre dont le flux en T est :

$$\left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_T^i \right)^+.$$

Comme on l'a vu précédemment, la théorie générale de l'évaluation par arbitrage permet de montrer que cette valeur est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre du flux au terme actualisé, soit :

$$P(T) = E^Q \left[e^{-rT} \left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_T^i \right)^+ \right].$$

³ Voir également l'article de DEELSTRA et al. sur le sujet.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

Notons $F_j(s, t)$ le prix *forward*⁴ de l'actif S^j en s pour une livraison en t . Comme $F_i(0, T) = S_0^i e^{rT}$ on pose :

$$\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i S_0^i}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_0^j} = \frac{\omega_i F_i(0, T)}{\sum_{j=1}^k \omega_j F_j(0, T)}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} e^{-rT} \left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_T^i \right)^+ &= \sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 \left(\frac{K e^{-rT}}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0} - \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0} S_T^i e^{-rT} \right)^+ \\ &= e^{-rT} \sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 e^{rT} \left(\tilde{K} - \sum_{i=1}^k \hat{\omega}_i \tilde{S}_T^i \right)^+ \end{aligned}$$

et on en déduit immédiatement que :

$$P(T) = e^{-rT} E^{Q^F} \left[\sum_{j=1}^k \omega_j F_j(0, T) \left(\tilde{K} - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \right)^+ \right],$$

puis :

$$P(T) = e^{-rT} \sum_{j=1}^k \omega_j F_j(0, T) E^{Q^F} \left[\left(\tilde{K} - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \right)^+ \right],$$

où on a posé :

$$\tilde{K} = \frac{K}{\sum_{j=1}^k \omega_j F_j(0, T)} = \frac{K e^{-rT}}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_T^j = \frac{S_T^j}{F_j(0, T)} = S_T^j e^{-rT}.$$

On est ainsi formellement ramené à un calcul analogue au calcul d'origine, mais effectué sur les transformées *forward*. Gentle propose d'approximer la moyenne arithmétique pondérée des \tilde{S}_T^j par la moyenne géométrique⁵. En effet, la dynamique de la moyenne géométrique étant gaussienne, on se ramène à un calcul classique de type Black et Scholes. Plus précisément on suppose que l'écart à l'espérance de la moyenne arithmétique et son équivalent pour la moyenne géométrique sont distribués de la même manière. En d'autres termes on est conduit à écrire :

⁴ Prix en s du contrat qui convient de la livraison ferme de l'actif sous-jacent à la date t . Ce formalisme est en fait inutile ici, mais permet de généraliser facilement ce qui suit au cas de taux d'intérêt stochastiques.

⁵ Ce qui suit pourrait être déroulé sur les prix d'origine sans passer par les versions *forward*.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$A_T = \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \approx E(A_T - G_T) + \prod_{j=1}^k (\tilde{S}_T^j)^{\hat{\omega}_j} = E(A_T - G_T) + G_T.$$

Cette approximation est satisfaisante pour des échéances rapprochées, pour des échéances supérieures à 10 ans elle sera de moins bonne qualité. En reportant dans l'expression précédente il vient :

$$P(T) \approx e^{-rT} \sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 E^Q \left[\left(\tilde{K} + E^Q \left(G_T - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \right) - G_T \right)^+ \right]$$

On observe alors que comme $S_T^i = S_0^i \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) T + \sigma_i B_T^i \right)$, le processus forward a pour expression :

$$\tilde{S}_T^i = \exp \left(-\frac{\sigma_i^2}{2} T + \sigma_i B_T^i \right),$$

ce qui conduit à :

$$G_T = \prod_{j=1}^k (\tilde{S}_T^j)^{\hat{\omega}_j} = \exp \left(\sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j B_T^j - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \frac{T}{2} \right).$$

On a par ailleurs trivialement :

$$V \left[\sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j B_T^j \right] = \sum_{i,j=1}^k \hat{\omega}_i \sigma_i \hat{\omega}_j \sigma_j \rho_{i,j} T = v^2 T.$$

Ce qui implique, en utilisant le fait que $E(X) = \exp \left(m + \frac{\sigma^2}{2} \right)$ si $X \approx LN(m, \sigma^2)$, que

$$E^{Q^F} (G_T) = \exp \left[\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right]. \text{ On en déduit :}$$

$$\sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \sim N \left(\exp \left\{ \left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right\}, v^2 T \right).$$

D'autre part :

$$E^{Q^F} \left[G_T - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \tilde{S}_T^j \right] = \exp \left[\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right] - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j E^Q \left[e^{-rT} \frac{S_T^j}{S_0^j} \right] = \exp \left[\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right] - 1$$

car les prix actualisés sont des martingales sous Q. On obtient alors le résultat à partir du lemme suivant :

Lemme : Soit ε une variable aléatoire gaussienne centrée et de variance $\sigma^2 > 0$ sous la probabilité Q. $\forall a, b \in \mathbf{R}$, on a :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$E^Q \left[\left(b - a e^{\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^2} \right)^+ \right] = b N(-h + \sigma) - a N(-h)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $h = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{a}{b} + \frac{\sigma}{2}$.

En choisissant $a = \exp \left(\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right)$, $b = \tilde{K} + \exp \left(\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right) - 1$ et

$\varepsilon = \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j B_T^j$ on obtient :

$$P(T) \approx \left(\sum_{j=1}^k \omega_j S_j^0 \right) \left\{ \tilde{K} + \exp \left(\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right) - 1 \right\} N(-l_2(T)) - \exp \left(\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right) N(-l_1(T))$$

$$\text{où } l_{1,2}(T) = \frac{\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} - \ln \left(\tilde{K} + \exp \left(\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right) - 1 \right) \pm \frac{1}{2} v^2 T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

3.2.2. Évaluation par simulation

Le recours aux techniques de simulation fournit une alternative efficace aux approximations de type « Gentle » lorsque la formule fermée n'est pas accessible.

3.2.2.1. Approche classique

Pour simplifier les notations on considère le cas de 2 actifs ; le cas général se traite de la même manière. En décorrélant les mouvements browniens, on obtient alors :

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dB_t^1$$

et

$$\frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2 dt + \sigma_2 \left(\rho dB_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} d\hat{B}_t^2 \right)$$

avec $dB_t^1 d\hat{B}_t^2 = 0$. On peut donc discrétiser de la manière suivante les dynamiques des cours :

$$S_{t+1}^1 = S_t^1 (1 + \mu_1 + \sigma_1 \varepsilon_1)$$

et

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$S_{t+1}^2 = S_t^2 \left(1 + \mu_2 + \sigma_2 \left(\rho_{1,2} \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} \varepsilon_2 \right) \right)$$

On suit alors la démarche décrite à la section 3.1.2 ci-dessus.

3.2.2.2. Réduction de variance : utilisation d'une variable de contrôle

Dans le cas multi-supports il peut être utile d'optimiser la simulation afin d'augmenter la vitesse de convergence, et de diminuer ainsi les ressources nécessaires à l'obtention d'un niveau de précision souhaité. La méthode de la variable de contrôle permet ici d'améliorer sensiblement la vitesse de convergence, elle est donc présentée ci-après.

On se place dans le cadre général d'une estimation par une méthode de Monte-Carlo ; on se donne donc une variable aléatoire X de loi F_X et on souhaite estimer une fonctionnelle de la forme :

$$I(f) = E(f(X)) = \int f(x) F_X(dx)$$

La méthode de Monte Carlo standard consiste à effectuer n tirages iid dans la loi de X et à proposer comme estimateur de I :

$$I_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

On cherche des estimateurs de I avec une variance plus faible que l'estimateur de Monte-Carlo standard, dans le but de réduire l'amplitude de l'intervalle de confiance. L'idée est ici de substituer à un calcul complexe deux calculs plus simples (voir l'analogie avec le passage en probabilité *forward* neutre) en posant :

$$I_n(f, \beta) = I_n(f) - \beta (I_n(h) - I(h))$$

de sorte que $I(h) = E(h(X))$ soit connue. β est déterminé pour que la variance de $I_n(f, \beta)$ soit faible. Cette variance se calcule simplement, avec des notations évidentes :

$$\sigma^2(I_n(f, \beta)) = \sigma_f^2 + \beta^2 \sigma_h^2 - 2\beta \text{cov}(I_n(f), I_n(h)),$$

ce qui permet de voir que le β optimal est donné par $\beta^* = \frac{\text{cov}(I_n(f), I_n(h))}{\sigma_h^2}$ et que la

variance minimale ainsi atteinte est $(1 - \rho^2(f, h)) \sigma_f^2$. β^* n'est pas connu mais peut être approché par une simulation préliminaire.

Dans le contexte d'une option sur panier, on sait construire des réalisations de $X_t = \left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_t^i \right)^+$ au travers de la simulation du vecteur $(B_1(t), \dots, B_k(t))$ et de la

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

discrétisation exacte de S , $S_t^i = S_0^i \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i B_t^i\right)$. On peut utiliser l'estimateur

direct $I_n^t = \frac{e^{-rt}}{n} \sum_{i=1}^n x_t^i$.

On observe alors que si on remplace dans la définition de $X_t = \left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_t^i\right)^+$ la moyenne

arithmétique $A_t = \sum_{i=1}^k \omega_i S_t^i$ par la moyenne géométrique des sous-jacents, on retrouve une expression que l'on peut calculer explicitement, comme produit de variables log-normales ; on pose donc :

$$G_t = \prod_{i=1}^k (S_t^i)^{\omega_i} \text{ et } I_t^g = E^Q\left(e^{-rt} (K - G_t)^+\right)$$

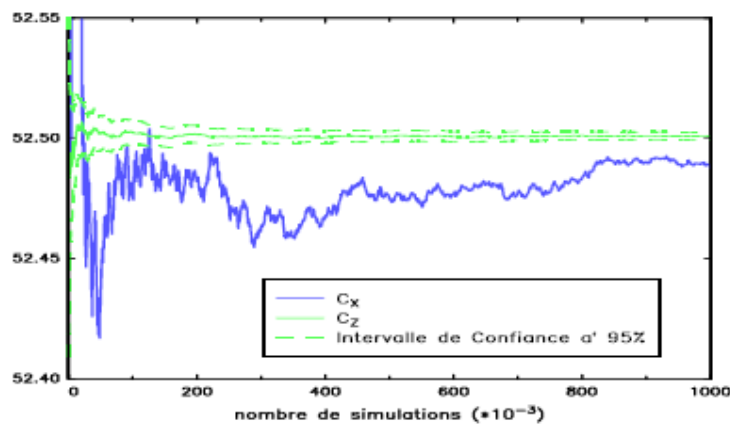
On trouve après quelques manipulations analogues à ce que l'on a fait *supra* que :

$$G_t = G_0 \exp\left(\left(\tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)t + \tilde{\sigma} B_t\right)$$

avec $\tilde{r} = r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} - \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$, $\tilde{\sigma} = \frac{1}{k} \sqrt{\Sigma' \Omega \Sigma}$ en posant $\Omega = (\rho_{ij})$ et $\Sigma = (\sigma_i)$. Avec ces éléments le calcul de $I_t^g = E^Q\left(e^{-rt} (K - G_t)^+\right)$ ne pose pas de problème en utilisant la formule de Black et Scholes. On écrit donc :

$$I_t = I_t^g + E^Q\left[e^{-rt} \left((K - A_t)^+ - (K - G_t)^+\right)\right]$$

et on fait du Monte-Carlo pour le second terme, qui s'analyse alors comme un terme du second ordre. Le gain est d'autant plus important que K est petit par rapport à A .



$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

4. Choix de la probabilité

Dans les calculs menés jusqu'à présent, il a été supposé que les conditions d'AOA étaient réunies et les prix des actifs contingents ont été évalués en prenant l'espérance des flux actualisés sous la probabilité risque-neutre.

Cependant cette hypothèse peut apparaître forte et, à certains égards, mal adaptée au contexte de l'évaluation d'un engagement.

On observera en effet en premier lieu que les options évaluées ont des maturités longues, jusqu'à 8 ou 10 ans ; il n'existe pas sur les marchés d'options de ce type, et la construction explicite du portefeuille de couverture n'est pas possible.

Par ailleurs, si l'assureur ne met pas en œuvre une stratégie de couverture, mais reste dans une logique de l'évaluation d'un engagement et du calcul d'une provision, il peut sembler plus naturel et cohérent d'utiliser le principe d'équivalence, et donc de mener les évaluations sous la probabilité historique.

Dans ce cas, la formule explicite obtenue pour les contrats uni-support devient :

$$P(S, t+1, K) = Ke^{-r(t+1)}N(-d_2) - S \times N(-d_1)$$

où :

- ✓ r est le taux sans risque,
- ✓ N désigne la fonction de répartition de la loi $N(0;1)$,

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(i+1)}{\sigma\sqrt{i+1}}$$

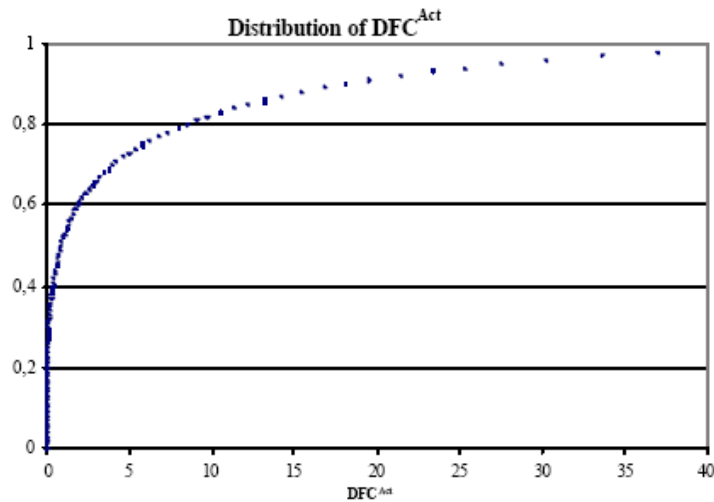
La similitude des formules donnant l'espérance du coût de l'assureur ne doit pas masquer les profondes différences entre l'approche « financière » (probabilité risque neutre) et l'approche « actuarielle » (probabilité historique) :

- ✓ dans l'approche « financière », l'assureur fait face au risque en mettant en œuvre une stratégie de couverture ; il est important de noter que la validité de l'approche suppose que la stratégie de couverture est effectivement mise en œuvre et n'est pas un simple moyen de mener les calculs.
- ✓ dans l'approche « actuarielle » l'assureur s'appuie sur le principe d'équivalence, la prime pure étant égale à la valeur moyenne des coûts futurs actualisés, et la couverture du risque passant par la constitution de provisions.

Ces éléments sont détaillés dans PLANCHET [2006]. En matière de gestion du risque, FRANTZ et al. [2003] remarquent qu'en tant que gestionnaire du risque, les deux situations peuvent être envisagées : mettre en œuvre ou pas la couverture financière (même si elle est imparfaite du fait des frottements évoqués précédemment). Les deux graphiques suivants sont repris de FRANTZ et al. [2003].

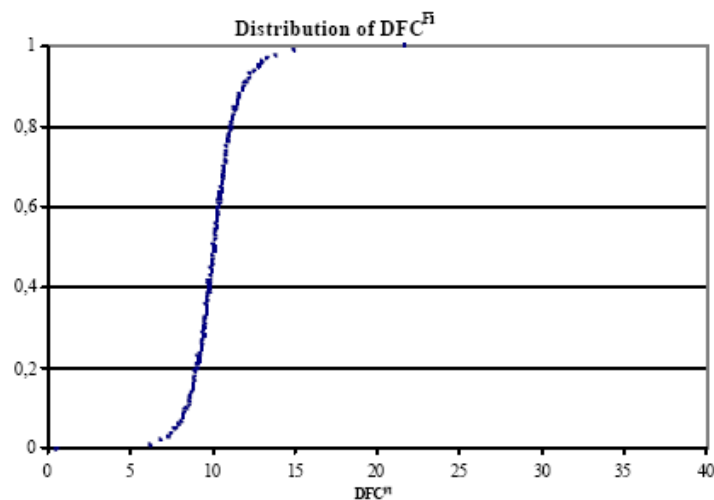
$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

Le graphe ci-dessous reprend la distribution de la valeur actuelle des flux futurs lorsque la couverture financière n'est pas mise en place :



De manière alternative, il est possible de mettre en œuvre la stratégie de couverture de manière à minimiser le risque. Il s'agit alors de déterminer le coût de la couverture et de mesurer le risque résiduel.

Dans leurs travaux, FRANTZ et al. (2003) font l'hypothèse que les frais liés aux achats et aux cessions de titre sont nuls, que les recompositions de portefeuille sont annuelles et que donc, seuls les coûts de recomposition liés au caractère non-continu de ceux-ci présentent une charge pour le gestionnaire. La distribution de la valeur actuelle des flux futurs dans l'approche lorsque la gestion active de la couverture est mise en place a alors l'allure suivante :



La mise en œuvre effective de la couverture a pour effet de réduire considérablement le risque supporté par l'assureur, même si elle ne conduit pas à l'éliminer complètement du fait du caractère discret des recompositions du portefeuille. Il subsiste donc un risque résiduel malgré la mise en place de la couverture. Par ailleurs, à ce risque vient s'ajouter

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [(T_x)]$$

celui résultant de la mutualisation imparfaite des décès : les montants couverts sont déterminés à partir de l'estimation des décès futurs du portefeuille.

5. Prise en compte des imperfections de couverture

Lorsque la garantie est valorisée avec la formule des *puts* moyens pondérés en probabilité risque neutre, deux facteurs génèrent mécaniquement des imperfections de couverture et des besoins de réajustement :

- la mutualisation imparfaite des décès ;
- l'impossibilité matérielle de réajuster la position en continu.

En introduisant des coûts de transaction proportionnels aux volumes échangés, il est possible d'évaluer le coût de ces imperfections :

- d'une part le coût de l'erreur de couverture lié au caractère discret des réallocations ;
- d'autre part le coût des transactions associées.

En partant de la décomposition suivante de la valeur de la garantie, pour une tête d'âge x :

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \times q_{x+t-1} \times E^{Q^F} \left[e^{-rt} [K - S_t]^+ \right]$$

on considère dans un premier temps la couverture d'une option de maturité T ; pour cela on discrétise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles avec un pas $\delta_N = \frac{T}{N}$ et on cherche la suite des $(\alpha_i(T), \beta_i(T))_{1 \leq i \leq N}$ fixant les quantités respectives d'actif risqué et d'actif sans risque qu'il faut détenir à chaque période discrète pour assurer la réplication du flux $[K - S_T]^+$.

5.1. Coûts de transaction et imperfections de couverture

5.1.1. Algorithme de projection

La valeur du portefeuille d'arbitrage constitué à l'origine s'écrit avec des notations évidentes :

$$W = -P(S_0, T, K, r, \sigma) + \alpha_0 S_0 + \beta_0$$

La stratégie d'immunisation contre les variations du sous-jacent conduit à la contrainte $\frac{\partial W}{\partial S} = 0$ qui ajoutée au fait que la valeur initiale du portefeuille est nulle ($W = 0$) conduit à :

$$\alpha_0(T) = -N(-d_1(T)) \quad \beta_0(T) = P(S_0, T, K, r, \sigma) - \alpha_0(T) S_0$$

En supposant les frais proportionnels aux volumes échangés le coût de la mise en place de la couverture est :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} [(T_x)]$$

$$c_0 = \gamma \times (|\alpha_0| S_0 + |\beta_0|)$$

La position est réajustée chaque mois; lors du $i^{\text{ème}}$ réajustement, $i = 1, \dots, N - 1$, la valeur de l'actif est alors simulée (discrétisation exacte) :

$$S_i = S_{i-1} \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta_N + \sigma \sqrt{\delta_N} \varepsilon \right)$$

avec $\delta_N = \frac{T}{N}$. On peut noter que l'actif doit ici être simulé sous la probabilité historique, la gestion du portefeuille de couverture nécessitant la connaissance de la distribution sous cette probabilité des coûts de couverture. La valeur du portefeuille de couverture qui avait été établi à la période précédente est alors :

$$W = -P \left(S_{i\delta_N}, T \left(1 - \frac{i}{N} \right), K, r, \sigma \right) + \alpha_{i-1}(T) S_{i\delta_N} + \beta_{i-1}(T) \exp(r\delta_N)$$

On applique la même règle ($W=0$ et $\frac{\partial W}{\partial S} = 0$) qui conduit à fixer les proportions d'actif risqué et d'actif sans risque et à calculer les coûts de transaction :

$$c_i = \gamma \times (|\alpha_i - \alpha_{i-1}| S_{i\delta_N} + |\beta_i - \beta_{i-1}| e^{r\delta_N})$$

Les coûts de transaction et les erreurs de couverture sont alors sommés. Plus précisément, en notant :

$$W(t, S_t, \alpha, \beta) = -P(S_t, T-t, K, r, \sigma) + \alpha S_t + \beta \exp(r\delta_N)$$

Au moment du $i^{\text{ème}}$ réajustement, la valeur du portefeuille juste avant le réajustement s'exprime sous la forme :

$$w_i^- = W(i\delta_N, S_{i\delta_N}, \alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$$

Il reste alors à choisir $\alpha_i(T)$ et $\beta_i(T)$ de sorte que $W=0$ et $\frac{\partial W}{\partial S} = 0$. Les coefficients ainsi obtenus s'écrivent :

$$\alpha_i(T) = -N(-d_1(S_i, T - i\delta_N)) \quad \beta_i(T) = P(S_{i\delta_N}, T - i\delta_N, K, r, \sigma) - \alpha_i(T) S_{i\delta_N}$$

La somme des coûts des réallocations s'écrit⁶ :

$$cr = - \sum_{i=1}^N w_i^- \exp(-ri\delta_N)$$

On peut obtenir le coût du réajustement de manière plus directe, en notant que :

$$w_i^- = S_{i\delta_N} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) + (\beta_i - \beta_{i-1} e^{r\delta_N}).$$

⁶ Le signe moins exprime le fait que lorsque w est positif, l'assureur est en situation de sur-couverture.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

La charge globale des imperfection se calcule selon

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (c_i - w_i^-) \exp(-ri\delta_N)$$

La prise en compte de ces imperfections modifie profondément la nature des montants calculés :

- ✓ en situation idéale de décès connus et de réajustements en temps continu, le « coût de la garantie » s'interprète comme le montant qu'il faut investir initialement pour être certain de faire face à ses engagements quel que soit l'état de la nature ;
- ✓ en situation d'imperfection, les coûts qui viennent s'ajouter à ce montant de base assurent qu'en moyenne, le capital initial est suffisant pour couvrir l'engagement.

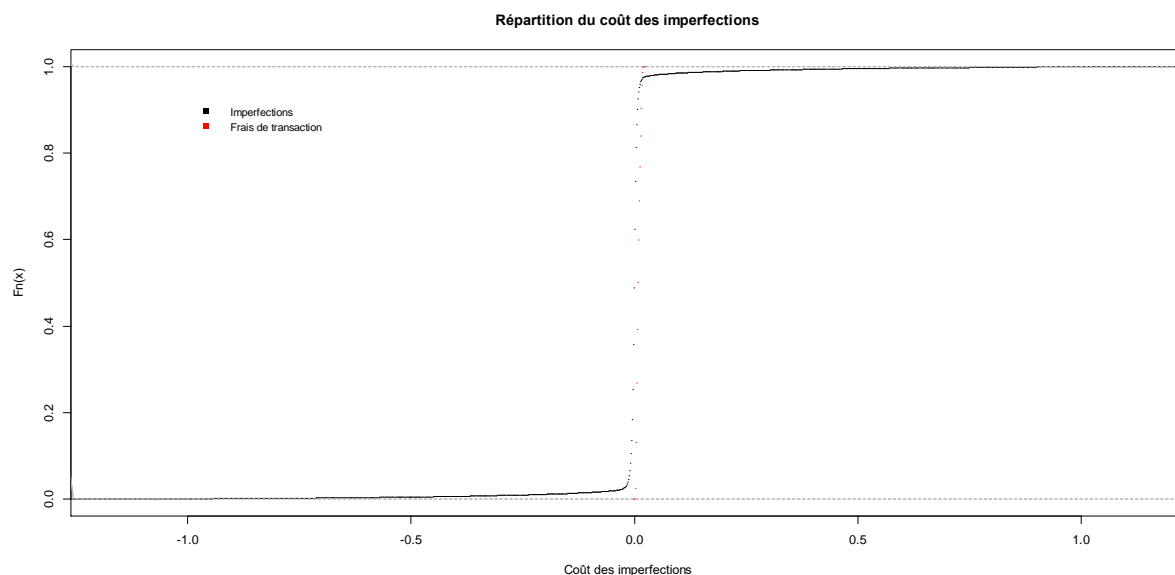
Il est donc nécessaire d'estimer la distribution de ε pour déterminer le montant du capital supplémentaire à immobiliser.

5.1.2. Illustration numérique

L'illustration présentée est construite sur la base des hypothèses suivantes :

- un taux sans risque de 3 %,
- une durée du contrat de 10 ans,
- une volatilité de l'actif de 16 %,
- un taux de frais de transaction de 0,1 % du volume de la transaction.

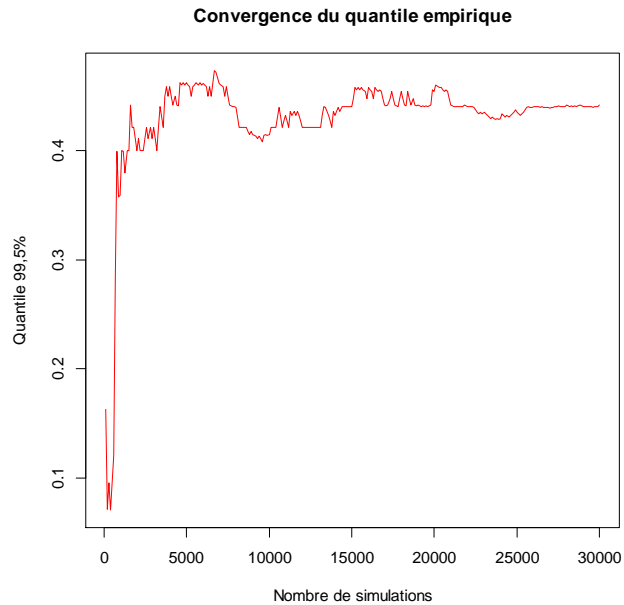
On suppose d'abord que les réallocations sont effectuées de manière hebdomadaire, ce qui conduit à la distribution empirique suivante des coûts :



On observe comme attendu une distribution fortement concentrée autour de 0. Le coût moyen ressort à 0,75 %. Afin d'évaluer le risque associé à la distribution ci-dessus, on évalue le quantile empirique au niveau de 99,5 %, qui est égal à 35 %. Le graphique suivant permet

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[} (T_x)$$

de vérifier la stabilité raisonnable de l'estimateur de ce quantile compte tenu du nombre de simulations utilisés (30 000) :



Les écarts de couverture conséquence des réallocations discrètes conduisent donc à une situation très risquée, le quantile à 99,5 % des pertes étant de près de 35 % de l'investissement initial. L'augmentation de la fréquence des ajustements permet logiquement de diminuer ce risque, en le ramenant à 23 % environ au prix toutefois d'un doublement du coût moyen de la stratégie qui est égal à 1,5 %. Ces niveaux très élevés sont la conséquence du fait que l'on ne considère ici qu'une seule option, très longue (10 ans) et sans prise en compte des probabilités de décès. La situation plus réaliste de la prise en compte de ces probabilités est présentée ci-après.

5.2. Prise en compte des décès

Les formules obtenues reposent sur la mutualisation du risque de décès, et ne sont donc valables que dans le cas d'un portefeuille de taille importante.

Lorsque la taille du portefeuille ne permet pas cette approximation, il convient d'intégrer dans la démarche une mesure du risque associé au caractère aléatoire de décès.

On notera à ce stade que l'approche « financière » ne peut s'adapter directement à ce nouveau contexte, car une stratégie de couverture doit être déterminée *a priori*, ce qui n'est pas possible si la date de décès est aléatoire. On doit donc intégrer dans le raisonnement les réajustements réguliers de la couverture en fonction des décès observés.

L'approche par simulation permet d'intégrer ces réajustements de manière simple, comme on le verra ci-dessous⁷. Concrètement, cela implique que dans l'approche « financière », un

⁷ Voir notamment CHENUT et al. [2003].

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

montant de fonds propres doit être dédié au contrôle du risque d'inadéquation de la couverture et des réajustements que cette inadéquation implique.

5.2.1. Prise en compte globale des options

On cherche ici à déterminer la distribution du coût à la charge de l'assureur en intégrant l'ensemble des flux à couvrir, contrairement à ce que l'on a fait jusqu'à présent où on ne considérait qu'un seul flux. On se place pour simplifier dans le cas d'un support unique modélisé par un mouvement brownien géométrique, ce qui permet en pratique de simuler l'évolution du cours de l'actif risqué sous la probabilité historique par :

$$S_t^i = S_{t-\delta_N}^i \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta_N + \sigma \sqrt{\delta_N} \varepsilon \right\},$$

où $\delta_N = \frac{T}{N}$ est le pas de discrétisation retenu, associé à la fréquence de réallocations et $t = n \times \delta_N$ pour $n = 1, \dots, N-1$. Le flux de prestation pour l'assuré j à la date t est :

$$F_{j,t} = [K - S_t]^+ \mathbf{1}_{\{T_{x(j)}=t\}}.$$

On suppose dans un premier temps les décès parfaitement mutualisés. La quantité d'actif risqué détenue à la date t pour couvrir les options jusqu'au terme T est égale à :

$$a_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N+1}^{N-1} \alpha_t(k\delta_N)_{(k-1)\delta_N} P_{x(j)} q_{x(j)+(k-1)\delta_N},$$

avec $\alpha_t(k\delta_N) = -N(-d_1(S_t, k\delta_N - t))$ la part d'actif risqué nécessaire pour couvrir une option de vente à la date t d'échéance $k\delta_N$. On a de même pour l'actif non risqué

$b_t = \sum_{j \in J} \sum_{k=t\delta_N+1}^{N-1} \beta_t(k\delta_N)_{(k-1)\delta_N} P_{x(j)} q_{x(j)+(k-1)\delta_N}$. A chaque période l'assureur supporte donc un

coût de :

$$c_t = k \times \left(|a_t - a_{t-\delta_N}| S_{t\delta_N} + |b_t - b_{t-\delta_N}| e^{r\delta_N} \right) + S_{t\delta_N} (a_t - a_{t-\delta_N}) + (b_t - b_{t-\delta_N}) e^{r\delta_N},$$

qui est la somme des frais de transaction et de la charge de réallocation proprement dite. Le coût global en 0 pour l'ensemble des assurés, sur la période considérée, est donc la variable aléatoire :

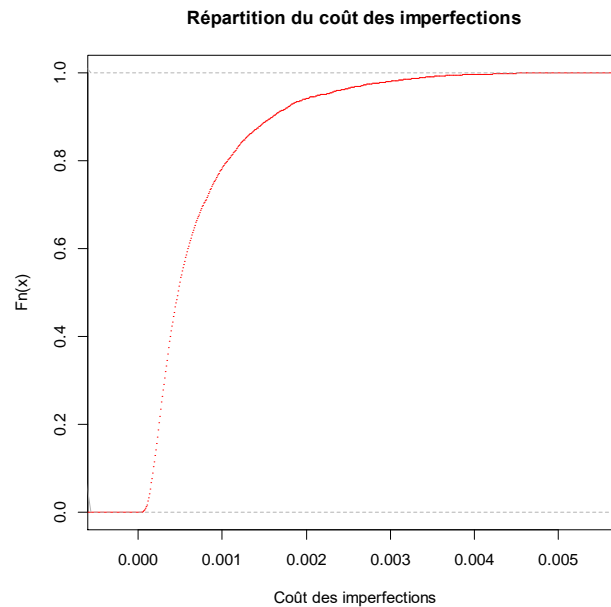
$$\Lambda = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-m\delta_N} \left(c_{n\delta_N} + \sum_{j \in J} E^{P^a} (F_{j,n\delta_N}) \right)$$

avec $E^{P^a} (F_{j,t}) = [K - S_t]^+ \frac{l_{x(j)+t}}{l_{x(j)}} q_{x(j)+t}$. De la sorte on construit aisément la distribution

empirique de la valeur actuelle de la charge future.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t;\infty}[(T_x)]$$

Avec les valeurs numériques de l'exemple précédent, on trouve, pour des réallocations hebdomadaires, un quantile à 99,5 % de l'ordre de 2,1 % pour un coût moyen de la stratégie de 0,40 %. En passant à des réajustements quotidiens, on obtient un quantile à 0,4 % et un coût moyen de 0,1 %. L'allure de la distribution est la suivante :



5.2.2. Prise en compte du risque de mortalité

On peut généraliser cette démarche au cas où on ne suppose plus les décès parfaitement mutualisés. On convient pour cela qu'en t on calcule la couverture future comme si les décès futurs des survivants à la date t étaient parfaitement mutualisés ; on obtient alors la quantité suivante d'actif risqué à détenir :

$$a_t = \sum_{j \in J_t} \sum_{k=t\delta_N^{-1}+1}^{N-1} \alpha_t(k\delta_N) p_{x(j)+t} q_{x(j)+k\delta_N}$$

qui est maintenant une variable aléatoire. De même pour b_t . La charge des sinistres actualisée est maintenant de la forme :

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-m\delta_N} \left(c_{n\delta_N} + \sum_{j \in J_{n\delta_N}} F_{j,n\delta_N} \right).$$

Si formellement cette expression est très proche de la version précédente, elle en diffère sur le fait que l'ensemble J_t est aléatoire.

En simulant des réalisations de l'actif financier (en probabilité historique) et de la mortalité, on peut ainsi construire un échantillon de Λ et obtenir alors différents indicateurs associés à la distribution de la charge actualisée : distribution empirique, espérance, variance, etc. Cette approche permet également de mesurer l'importance des risques financier et d'assurance en utilisant l'équation de décomposition de la variance :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty} (T_x)$$

$$V[\Lambda] = E[V(\Lambda|M)] + V[E(\Lambda|M)].$$

On calcule les estimateurs empiriques $\bar{\lambda}_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \lambda_{i,k}$ et $\bar{\bar{\lambda}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{\lambda}_i = \frac{1}{IK} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \lambda_{i,k}$. Les quantités ci-après sont des estimateurs sans biais et convergents respectivement de $E[V(\Lambda|M)]$ et de $V[E(\Lambda|M)]$:

$$\hat{E}[V(\Lambda|M)] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\lambda_{i,k} - \bar{\lambda}_i)^2, \quad \hat{V}[E(\Lambda|M)] = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\bar{\lambda}_i - \bar{\bar{\lambda}})^2.$$

La limite pratique de cette approche est liée au volume des calculs à effectuer. Au surplus, on constate que le risque d'assurance associé à la mortalité est très faible par rapport au risque financier. Aussi, l'hypothèse simplificatrice de parfaite mutualisation des décès est-elle en pratique justifiée. Au surplus, dans un cas réel il faut pour effectuer les calculs ci-dessus être capable de déterminer les coefficients $(\alpha_i(T), \beta_i(T))_{1 \leq i \leq N}$; cela est possible dans le cas du modèle de Black et Scholes, mais rarement explicitement dans un modèle plus général.

6. Mise en œuvre pratique

En pratique le volume de données disponibles peut nécessiter une optimisation numérique de la procédure de calcul de la provision pour s'effectuer en un temps raisonnable et ne pas consommer trop de ressource de calcul. Comme la valeur de la garantie s'exprime sous la forme :

$$V(S, T, K, x) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{x+t} \times l_{x+t}}{l_x} \times P(S, t+1, K)$$

où x est l'âge du souscripteur, T est la durée du contrat, K le capital minimum garanti par le contrat et S la valeur initiale de l'actif, on cherche une approche permettant de déterminer un barème *a priori* et de l'utiliser de manière directe pour le calcul de la provision d'un contrat donné.

6.1. Le cas d'un contrat uni-support

Dans le cas uni support, et sous l'hypothèse que le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$, on dispose grâce à Black et Scholes d'une formule fermée de la valeur de l'option de vente donnée par :

$$P(S, t, K) = Ke^{-rt} N(-d_2) - S \times N(-d_1)$$

où :

- ✓ r est le taux sans risque,

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

✓ ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

On peut remarquer que $P(S, t, K) = K \left[e^{-rt} N(-d_2) - S \times N(-d_1) \right] = K \pi\left(\frac{S}{K}, t\right)$ avec $\pi(x, t) = P(x, t, 1)$. On en déduit :

$$V(S, T, K, x) = K \sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{x+t} \times l_{x+t}}{l_x} \times \pi\left(\frac{S}{K}, t+1\right)$$

Le prix à l'origine d'une option de vente de maturité t s'écrit avec la probabilité risque-neutre $P(S, t, K) = e^{-rt} E[K - S_t]^+$. On déduit de cette représentation que si K est une fonction déterministe de t alors le prix de l'option associée est $P(S, t, K_t) = e^{-rt} E[K_t - S_t]^+$.

Enfin, si des frais exprimés en pourcentage de l'encours sont prélevés à chaque période, on a si γ est le taux de frais la valeur de l'option qui est égale à $P\left(S \times (1-\gamma)^t, t, K_t\right)$.

Ainsi, si le contrat comporte une part α investie dans un fonds en € rémunéré au taux r_e et que le montant garanti est le montant investi $K = K_e + K_u$, le montant sous risque sur l'unité de compte diminue au cours du temps et on a $K_t^u = \left[K - K_e \times (1+r_e)^t \right]^+$.

$$V(S, T, K, K_e, x) = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{x+t} \times l_{x+t}}{l_x} \times P\left(S \times (1-\gamma)^{t+1}, t+1, \left[K - K_e \times (1+r_e)^{t+1} \right]^+\right)$$

Remarque : on peut noter que $K_u = S$ n'est vraie que pour les contrats qui démarrent à la date de l'évaluation ; pour les contrats anciens, le montant investi correspond à une valeur passée du cours du sous-jacent.

Comme précédemment on peut factoriser la prime initialement investie :

$$P\left(S \times (1-\gamma)^{t+1}, t+1, \left[K - K_e \times (1+r_e)^{t+1} \right]^+\right) = K \times \pi\left(\frac{S}{K} \times (1-\gamma)^{t+1}, t+1, \frac{K_e}{K} \times (1+r_e)^{t+1}\right).$$

En posant $\pi(x, t, y) = P\left(x, t, [1-y]^+\right)$ pour obtenir :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{t, \infty}[(T_x)]$$

$$V(S, T, K, K_e, x) = K \times \sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{x+t} \times l_{x+t}}{l_x} \times \pi \left(\frac{S}{K} \times (1-\gamma)^{t+1}, t+1, \frac{K_e}{K} \times (1+r_e)^{t+1} \right)$$

Cette expression est utile d'un point de vue pratique, car on peut discrétiser les plages de valeurs possibles pour les dimensions x et y dans $\pi(x, t, y) = P(x, t, [1-y]^+)$ pour déterminer un barème de provisionnement applicable pour 1 € de prime totale investie.

6.2. Le cas d'un contrat multi-supports

Supposons que l'actif soit composé de k supports dont les cours suivent des mouvements browniens géométriques en proportion $(\omega_j)_{1 \leq j \leq k}$. Pour un décès entre t et $t+1$, le flux suivant est à la charge de l'assureur par le biais de la garantie plancher :

$$\left(K - \sum_{i=1}^k \omega_i S_{t+1}^i \right)^+$$

Le processus décrivant l'évolution du portefeuille $S_t = \sum_{i=1}^k \omega_i S_t^i$ est une moyenne

arithmétique de mouvements browniens géométriques et n'a donc pas de loi simple (car somme de loi log-normale). On peut toutefois se ramener au cas d'un seul support en observant que si l'on remplace la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique

$$S_t^g = \prod_{i=1}^k (S_t^i)^{\omega_i}.$$

C'est le flux d'une option sur panier, analysé par GENTLE. Lorsque les cours des supports suivent les dynamiques :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dB_t^i$$

avec (formellement) $dB^i dB^j = \rho_{i,j} dt$, il n'y a pas de formule fermée exacte pour aboutir sur le prix d'une option sur panier. Toutefois GENTLE propose une approximation permettant d'aboutir à une formule fermée approchée⁸. On note :

$$\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i S_i}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j} \text{ et } \tilde{K} = \frac{K e^{-rT}}{\sum_{j=1}^k \omega_j S_j}$$

Alors :

⁸ Voir également l'article de DEELSTRA et al. sur le sujet.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[}(T_x)$$

$$P(S, \omega, T, K) \approx \left(\sum_{j=1}^k \omega_j S_j \right) \left\{ \tilde{K} + \exp \left\{ \left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right\} - 1 \right\} N(-l_2(T))$$

$$- \exp \left\{ \left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right\} N(-l_1(T))$$

$$\text{où } l_{1,2}(T) = \frac{\left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} - \ln \left(\tilde{K} + \exp \left\{ \left(v^2 - \sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j^2 \right) \frac{T}{2} \right\} - 1 \right) \pm \frac{1}{2} v^2 T}{v \sqrt{T}}$$

$$v^2 = \frac{1}{T} \text{Var} \left[\sum_{j=1}^k \hat{\omega}_j \sigma_j B_T^j \right] = \sum_{i,j=1}^k \hat{\omega}_i \sigma_i \hat{\omega}_j \sigma_j \rho_{i,j}$$

Par rapport à la version uni-support en posant $\pi(x, \omega, t, y) = P(x, \omega, t, [1-y]^+)$

$$V(S, \omega, T, K, K_e, x) = K \times \sum_{t=0}^{T-1} \frac{q_{x+t} \times l_{x+t}}{l_x} \times \pi \left(\frac{S}{K} \times (1-\gamma)^{t+1}, \omega, t+1, \frac{K_e}{K} \times (1+r_e)^{t+1} \right)$$

Toutefois, la présence du terme ω complique la formule car les coefficients comme la volatilité v dépendent de ω , et donc d'une information propre au souscripteur.

7. Annexe

Si $u \in]0,1[$ et si on suppose que les décès sont uniformément répartis, alors ${}_u q_x = u \times q_x$

Donc :

$$1 - {}_u p_x = u(1 - p_x)$$

et donc :

$${}_u p_x = 1 - u + u \times p_x$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$q_{y+u+i} \times {}_i p_{y+u} = (1 - p_{y+u+i}) \times {}_i p_{y+u} = \left(1 - \frac{{}_1 p_{y+i}}{{}_u p_{y+i}} \right) \times \frac{{}_i p_y}{{}_u p_y} = \left(1 - \frac{{}_1 p_{y+i} \times {}_u p_{y+i+1}}{{}_u p_{y+i}} \right) \times \frac{{}_i p_y \times {}_u p_{y+i}}{1 - u + u \times p_y}$$

$$= \left(1 - \frac{{}_1 p_{y+i} \times [1 - u + u \times p_{y+i+1}]}{1 - u + u \times p_{y+i}} \right) \times \frac{{}_i p_y \times (1 - u + u \times p_{y+i})}{1 - u + u \times p_y}$$

Il vient donc la valeur de la garantie :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t, \infty[} (T_x)$$

ressources-actuarielles.net

$$V = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{{}_1P_{y+i} \times [1 - u + u \times p_{y+i+1}]}{1 - u + u \times p_{y+i}} \right) \times \frac{{}_iP_y \times (1 - u + u \times p_{y+i})}{1 - u + u \times p_y} \times P(S_o, i, K)$$

8. Références

- AUGROS J. C., MORENO M. [2002] *Les dérivés financiers et d'assurance*, Paris : Economica.
- BAUER D., KLING A., RUSS J. [2007] [A Universal Pricing Framework for Guaranteed Minimum Benefits in Variable Annuities](#), Working Paper, AFIR.
- BLACK F., SCHOLES M. [1973] “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, **81** (3), pp. 637-654.
- BAUD N. [2002] [Méthodes de Monte-Carlo](#), support de cours ENSAI.
- BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S. [1976] “The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee”, *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 195-213.
- CHENUT X., FRANTZ C., WALHIN J.F. [2003] [“Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee”](#), Colloque AFIR.
- DEELSTRA G., LIINEV J., VANMAELE M., [“Pricing of arithmetic basket options by conditioning”](#), *Insurance: Mathematics and Economics*, **34** (1), 1-23.
- GENTLE D. [1993] « Basket weaving », *Risk*, vol. 6, n°6, 51-52.
- HARRISSON J.M., KREPS D. [1979] “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, **20**.
- HARRISSON J.M., PLISKA S. [1981] “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, **11**.
- HULL J.C. [1999] *Options, Futures & Other Derivatives*, 4^{ème} édition, Prentice-Hall.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition revue et augmentée*, Paris : Economica.
- KARATZAS I., SHREVE S.E. [1988] *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.
- LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^{nde} édition, ellipses.
- MERLUS S., PEQUEUX O. [2000] [“Les garanties plancher des contrats d’assurance vie en unités de compte : tarification et couverture”](#), mémoire d’actuaire ENSAE.
- PLANCHET F. [2006] « Le risque neutre », la Tribune de l’Assurance (rubrique « le mot de l’actuaire »), n°107 du 04/12/2006.
- QUITTARD-PINON F. [2002] *Mathématiques financières*, ems.