

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t; \infty[} (T_x)$$

ressources-actuarielles.net



Calcul du SCR : méthode LSMC

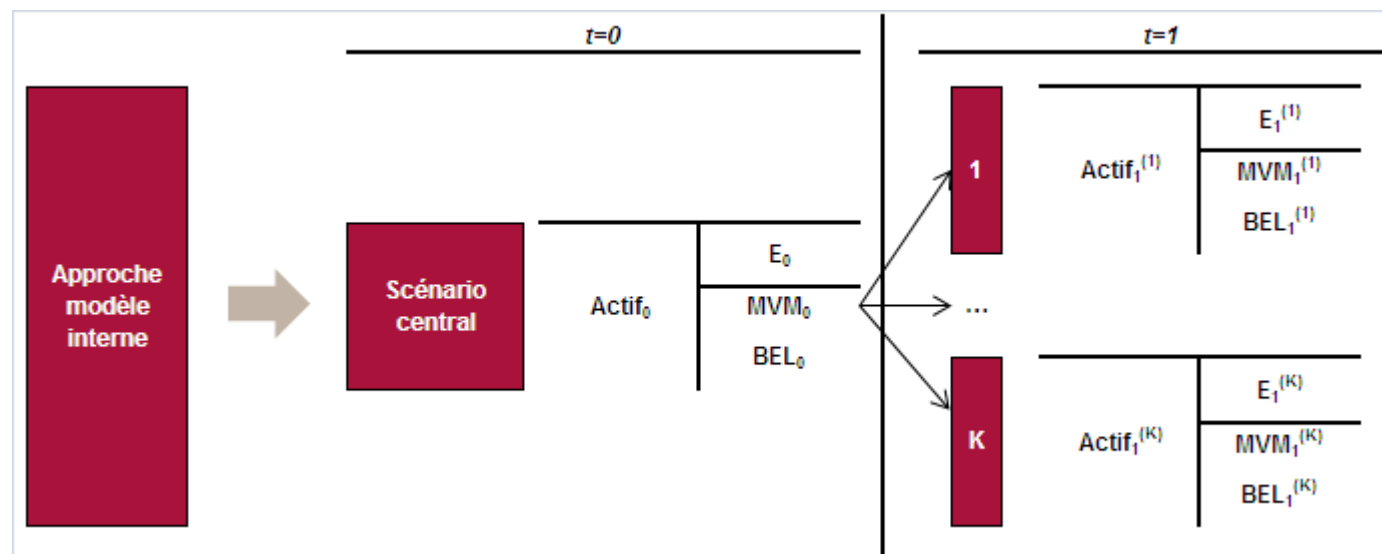
Version 2.3

Avril 2017

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

Préambule

On rappelle que le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (cf. Guibert et al. [2010]) :



et que le SCR doit être solution de l'équation en x :

$$P(E_1 < 0 | E_0 = x) \leq 0,5\%$$

où on a noté

$$E_t = A_t - L_t$$

Préambule

Dans le contexte de l'assurance vie, le calcul d'un *best estimate* conduit à devoir évaluer :

$$\Lambda = \sum_{j \geq 1} \frac{F_j}{(1 + R_j)^j} = \sum_{j \geq 1} \delta(j) \times F_j \quad \longrightarrow \quad BEL = E^{P^A \otimes Q^F} (\Lambda)$$

ce qui en pratique s'effectue (souvent) par simulation. De ce fait, la résolution de l'équation implicite

$$P(E_1 < 0 | E_0 = x) \leq 0,5\% \quad \longrightarrow \quad SCR = VaR_{99,5\%} \left(\frac{F_1 + PT_1}{1 + R_1} \right) - PT_0$$

qui est envisageable analytiquement en assurance non-vie, s'appuie sur des techniques numériques dans le cadre de l'assurance vie.

L'objectif de cette présentation est de discuter les techniques envisageables pour cela. Elle s'appuie sur Bauer et *al.* [2010], dont on reprend les notations et illustrations.



1. **Cadre général**
2. Approche SdS
3. Algorithme LSMC
4. Un exemple

1. Cadre général

En premier lieu, on utilise une définition un peu différente du SCR pour éviter le caractère implicite de l'équation en considérant la fonction de perte :

$$L = E_0 - \frac{E_1}{1+i}$$

Le SCR est alors le plus petit x tel que

$$P(L > x) \leq 0,5\%$$

ce qui conduit à l'expression souvent utilisée :

$$SCR = E_0 - P(0,1) \times VaR_{0,5\%}(E_1)$$

NB : dans ce cadre le SCR dépend du montant global de capital initial.

Il reste à définir le calcul des fonds propres E .

1. Cadre général

Les fonds propres peuvent être déterminés de deux manières, selon que l'on adopte le point de vue de l'actionnaire ou celui de l'assuré.

Avec le point de vue de l'assuré, on est conduit à des expressions de la forme :

$$E_0 = A_0 - E^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times F_j \right) \quad E_1 = A_1 - E_1^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 2} \frac{\delta(j)}{\delta(1)} \times F_j \right)$$

Du point de vue de l'assureur, on retrouve une démarche proche de celle adoptée par la MCEV, consistant à ajouter à l'actif net réévalué (ANAV) la valeur actuelle des profits futurs (VIF=PVFP-TVFOG) :

$$E_0 = ANAV_0 + E^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times X_j \right) \quad E_1 = ANAV_1 + X_1 + E_1^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 2} \frac{\delta(j)}{\delta(1)} \times X_j \right)$$

NB : on ignore ici le coût des risques non couvrables (CRNHR) et donc la marge pour risque.

1. Cadre général

A partir de maintenant on s'intéresse à la structure de :

$$V_1 = E_1^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 2} \delta_1(j) \times X_j \right) = E^{P^A \otimes Q^F} \left(\sum_{j \geq 2} \delta_1(j) \times X_j \mid Y_u, u \in [0,1] \right)$$

Y est un processus markovien décrivant les risques financiers. En pratique on peut supposer que l'état du bilan ne dépend pas de l'ensemble de la trajectoire de Y mais d'un nombre fini de variables d'états, que l'on notera D , également markovien. D décrit l'état des polices.

Pour simplifier les calculs on considérera uniquement les risques financiers (considérés comme couvrables), ce qui conduit finalement à :

$$V_1 = E^Q \left(\sum_{j \geq 2} \delta_1(j) \times X_j \mid (Y_1, D_1) \right)$$



1. Cadre général
2. **Approche SdS**
3. Algorithme LSMC
4. Un exemple

2. Approche SdS

On distingue les calculs des fonds propres en $t=0$ (estimation d'une valeur) et en $t=1$ (estimation d'une distribution). A la date initiale, on doit calculer :

$$V_0 = E^Q \left(\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times X_j \right)$$

Compte tenu de la complexité du problème, on effectue ce calcul par simulation et on pose :

$$\tilde{V}_0(K_0) = \frac{1}{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} \sum_{j \geq 1} \delta^{(k)}(j) \times X_j^{(k)}$$

Les fonds propres initiaux s'en déduisent *via*

$$\tilde{E}_0 = ANAV_0 + \tilde{V}_0(K_0)$$

2. Approche SdS

En $t=1$, on simule des réalisations des variables d'état sur la première période, ce qui permet de définir :

$$V_1^{(i)} = E^Q \left(\sum_{j \geq 2} \delta_1(j) \times X_j \middle| (Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) \right) \quad \sigma_1^{(i)} = \sqrt{V^Q \left(\sum_{j \geq 2} \delta_1(j) \times X_j \middle| (Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) \right)}$$

On doit alors, comme en 0, estimer ces termes par simulation, ce qui conduit à poser :

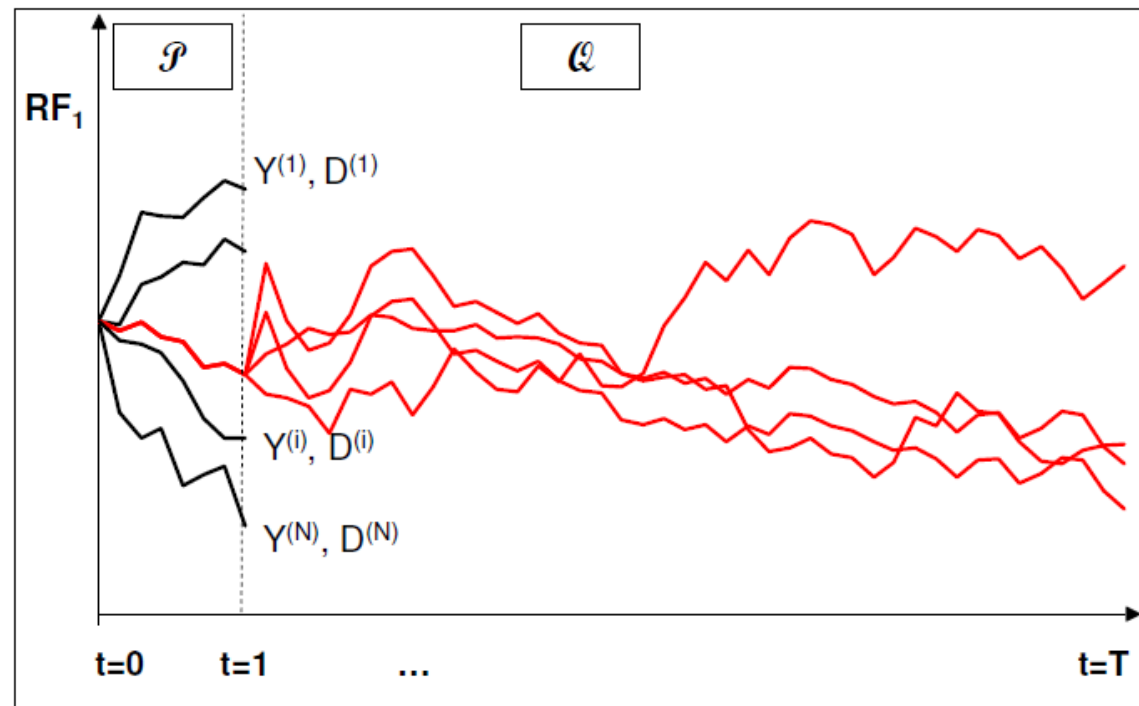
$$\tilde{V}_1^{(i)}(K_1^{(i)}) = \frac{1}{K_1^{(i)}} \sum_{k=1}^{K_1^{(i)}} \sum_{j \geq 2} \delta^{(i,k)}(j) \times X_j^{(i,k)} \quad \tilde{\sigma}_1^{(i)}(K_1^{(i)}) = \sqrt{\frac{1}{K_1^{(i)} - 1} \sum_{k=1}^{K_1^{(i)}} \left(\Lambda_1^{(i,k)} - \tilde{V}_1^{(i)}(K_1^{(i)}) \right)^2}$$

avec $\Lambda_1^{(i,k)} = \sum_{j \geq 2} \delta_1^{(i,k)}(j) \times X_j^{(i,k)}$ et finalement :

$$\tilde{E}_1^{(i)} = ANAV_1^{(i)} + \tilde{V}_1^{(i)}(K_1^{(i)}) + X_1^{(i)}$$

2. Approche SdS

L'estimateur de la variance est utile car le nombre de simulations secondaires peut dépendre *a priori* des variables d'état et devoir être d'autant plus grand que la volatilité est élevée :



2. Approche SdS

On est alors en mesure de construire un estimateur du SCR qui est un quantile de la variable

$$L = E_0 - \frac{E_1}{1+i}$$

Il suffit donc de trouver un estimateur du quantile d'ordre α de la variable $Z = -E_1$ et on en déduit, par exemple avec le quantile empirique :

$$S\tilde{C}R = \tilde{E}_0 - \frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i}$$

Il reste alors à examiner les propriétés de cet estimateur et notamment à choisir de manière optimale les valeurs de N , K_0 et K_1 .



1. Cadre général
2. Approche SdS
3. **Algorithme LSMC**
4. Un exemple

3. Algorithme LSMC

L'algorithme LSM (*Least Square Monte Carlo*) est une méthode de Monte Carlo visant à estimer des espérances conditionnelles via un ensemble de fonctions de base (polynômes de Laguerre, polynômes d'Hermite, fonctions trigonométriques).

Cette méthode a par exemple été utilisée afin de valoriser des options bermudiennes pour évaluer les espérances conditionnelles relatives aux temps d'arrêt de l'option (*cf.* Longstaff et Schwartz [2001]).

L'idée est que dans un espace de Hilbert H (espace vectoriel normé complet dont la norme est un produit vectoriel) de base hilbertienne $\{e_i\}$ alors :

$$\forall f \in H, f = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i \Rightarrow E[X | Y] = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$$

3. Algorithme LSMC

Bauer et *al.* [2010] retiennent cette méthode mais en considérant que la base hilbertienne $\{e_j\}$ est constituée de polynômes à 4 inconnues :

- l'actif de la compagnie ;
- la fonction de perte ;
- le résultat de première année ;
- le taux court de première année.

On notera la similitude entre cette approche et celle des portefeuilles de réplication, qui consiste à constituer un portefeuille composée d'un produit linéaire d'actifs financiers de base afin de minimiser l'écart quadratique entre la valeur de ce portefeuille et la valeur du *best estimate* des engagements d'assurance.

La stratégie LSM est plus « pratique » dans le sens où elle laisse plus de libertés pour la base hilbertienne $\{e_j\}$.

3. Algorithme LSMC

V_1 est une variable dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \sigma(Y_1, D_1), P)$ et on peut donc décomposer cette variable aléatoire sur une base de cet espace :

$$V_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \times e_k(Y_1, D_1) \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k \times e_k(Y_1, D_1) = V_1^{(M)}(Y_1, D_1)$$

Il faut donc déterminer les coefficients α_k . Pour cela on s'appuie sur la simulation de trajectoires des variables d'état, $i=1, \dots, N$:

$$\left(Y_t^{(i)}, D_t^{(i)} \right)_{t=1, \dots, T}$$

Le long de chacune de ces trajectoires, on calcule

$$\Lambda_i = \sum_{j \geq 2} \delta_1^{(i)}(j) \times X_j^{(i)}$$

3. Algorithme LSMC

On peut alors construire un estimateur de α en posant :

$$\hat{\alpha}^{(N)} = \mathbf{argmin} \sum_{i=1}^N \left(\Lambda_i - \sum_{k=1}^M \alpha_k \times e_k \left(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)} \right) \right)^2$$

ce qui conduit finalement à l'approximation

$$V_1 \approx V_1^{(M,N)}(Y_1, D_1) = \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^{(N)} \times e_k(Y_1, D_1)$$

On en déduit finalement des réalisations des fonds propres

$$E_1^{(i)} = ANAV_1^{(i)} + X_1^{(i)} + V_1^{(M,N)}(Y_1, D_1)$$

La distribution empirique de ces réalisations permet de construire un estimateur du SCR.

3. Algorithme LSMC

Choix des régresseurs

L'un des points délicats de l'algorithme est le choix de la base $e_k(Y_1, D_1)$

L'erreur d'estimation est définie par :

$$SMSE = \sum_{i=1}^N E_1 \left(V_1^{(i)} - \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^{(N)} \times e_k \left(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)} \right) \right)^2$$

et peut être estimée par :

$$\begin{aligned} \tilde{SMSE} &= \sum_{i=1}^N \left(\Lambda_1^{(i)} - \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^{(N)} \times e_k \left(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)} \right) \right)^2 - \sum_{i=1}^N \tilde{\sigma}_1^{(i)} \\ &+ 2Tr \left(\varepsilon (\varepsilon' \varepsilon)^{-1} \varepsilon' \text{diag} \left(\tilde{\sigma}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\sigma}_1^{(N)} \right) \right) \end{aligned}$$

3. Algorithme LSMC

Convergence

La convergence dans L^2 de $V_1^{(M)}(Y_1, D_1)$ est immédiate, par construction de cette approximation. Il faut donc justifier la convergence en loi :

$$V_1^{(M,N)}(Y_1, D_1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} V_1^{(M)}(Y_1, D_1)$$

Cette justification n'est pas simple car on effectue un changement de mesure en $t=1$ pour passer de la probabilité historique à la probabilité risque neutre. On peut se référer à Longstaff et Schwartz [2001] sur ce point.

Bauer et *al.* [2010] proposent également une approche basée sur la construction d'un nouvel espace probabilisé, qui reste à formaliser dans le cas général.

3. Algorithme LSMC

Parmi les approches alternatives on peut citer :

- la recherche d'approximation par des formules fermées de la valeur de marché du passif (*cf.* Bonnin et *al.* [2012]) ;
- des majorants analytiques du SCR (*cf.* Bauer et *al.* [2010]) ;
- des méthodes d'optimisation des simulations secondaires (*cf.* Nteukam et Planchet [2010]) ;
- l'optimisation de l'approche SdS (*cf.* Devineau et Loisel [2009]) ;
- les approches par réplication (*cf.* Revelen [2009]).



1. Cadre général
2. Approche SdS
3. Algorithme LSMC
4. **Un exemple**

4. Un exemple

On reprend l'exemple présenté dans Bauer et *al.* [2010] d'un simple contrat d'épargne avec taux garanti avec une maturité fixée T et impossibilité de sortie anticipée.

L'actif est constitué d'un actif synthétique de type B&S avec un modèle de taux mono-factoriel de Vasicek :

$$dA_t = \mu A_t dt + A_t \left(\rho \sigma dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right)$$

$$dr_t = \kappa (\xi - r_t) dt + \sigma_r dW_t$$

Le prix de marché du risque associé au taux court est supposé constant de sorte que sous la probabilité risque neutre (*cf.* Caja et Planchet [2010]) :

$$dr_t = \kappa \left(\left(\xi - \frac{\lambda \sigma_r}{\kappa} \right) - r_t \right) dt + \sigma_r dW_t$$

4. Un exemple

On obtient des résultats avec l'algorithme LSM ayant l'allure suivante :

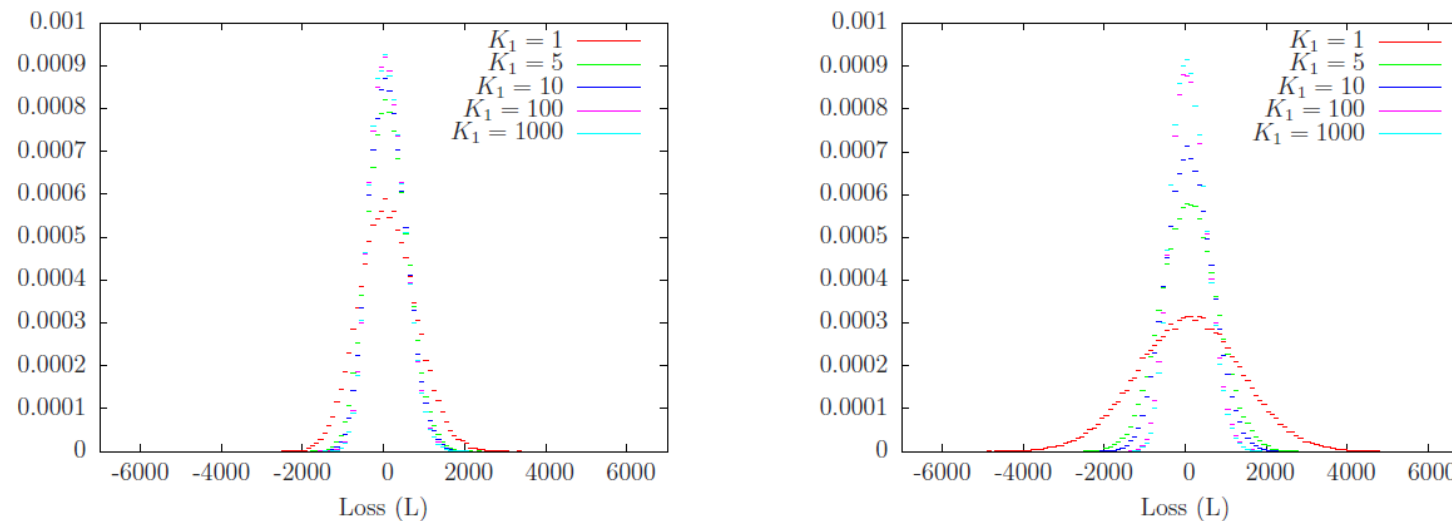


Figure 2: Empirical density function for different choices of K_1 for the estimator based on the policyholders' cash flows (left) and the shareholders' cash flows (right), $N = 100,000$, $K_0 = 250,000$

On compare alors les résultats obtenus dans différentes configurations.

4. Un exemple

Utilisation de l'approche SdS

K_1	policyholders' cash flows		shareholders' cash flows	
	\widetilde{SCR}	$\widetilde{AC}_0/\widetilde{SCR}$	\widetilde{SCR}	$\widetilde{AC}_0/\widetilde{SCR}$
1	1994.0	94%	3432.5	55%
5	1404.7	134%	1874.6	100%
10	1332.7	141%	1606.5	117%
100	1261.2	149%	1279.1	147%
1000	1246.3	151%	1254.6	149%

Table 2: Estimated SCR and estimated solvency ratio for different choices of K_1 , $K_0 = 250,000$, $N = 100,000$, Nested Simulations Approach

4. Un exemple

On fixe ici un « budget » de simulation et on compare les résultats issus des approches SdS et LSM :

N	K_1	Mean ($\widetilde{\text{SCR}}$)	Empirical Variance	Estimated Bias	Estimated MSE	Corrected Mean
160,000	600	1247.7	24.6	1.4	26.6	1246.3
320,000	300	1249.3	15.8	2.9	24.0	1246.4
640,000	150	1251.3	7.9	5.7	40.6	1245.6
1,280,000	75	1257.4	4.2	11.4	133.1	1246.1

Table 3: Choice of N and K_1 for the Nested Simulations Approach Approach,
 $K_0 = 1,500,000$

Avec l'algorithme LSM le temps de calcul est réduit d'un facteur 35 environ sur cet exemple.

N	Mean ($\widehat{\text{SCR}}$)	Empirical Variance	Solvency Ratio
160,000	1245.4	110.9	151%
320,000	1245.9	39.1	151%
640,000	1245.3	24.0	151%
1,280,000	1245.4	12.1	151%

Table 5: Results for the LSM estimator

4. Un exemple

Le choix des régresseurs nécessite une étude spécifique :

#	Regression Function	Mean (SCR)
1	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1$	1007.3
2	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2$	1165.5
3	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1$	1272.6
4	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2$	1276.5
5	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1$	1233.2
6	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1$	1233.9
7	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1}$	1241.3
8	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_8^{(N)} \cdot L_1 \cdot e^{r_1}$	1244.5
9	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_8^{(N)} \cdot L_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_9^{(N)} \cdot e^{A_1/10000}$	1245.9

Table 4: Estimated SCR for different choices of the regression function, $K_0 = 1, 500, 000$, $N = 320, 000$, LSM Approach

Conclusion

Le calcul d'un SCR dans le cadre d'un modèle interne est techniquement difficile.

Le recours à des méthodes d'optimisation des approches directes de type SdS est inévitable.

La mise en œuvre des méthodes de calcul, que ce soit l'approche directe (SdS) ou des alternatives plus efficaces (LSM), nécessite une attention particulière portée au choix des estimateurs, des nombres de simulation et de cadre de modélisation.

Références

- BAUER D., BERGMANN D., REUSS A. [2010] « Solvency II and nested simulations - a least-squares monte carlo approach. » In Proceedings of the 2010 ICA congress.
- BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2014b] « Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA », *European Actuarial Journal*, <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-014-0086-z>.
- CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, , Vol.78 (3/4).
- DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] « Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des simulations dans les simulations pour le calcul du capital économique Solvabilité II », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°17.
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.
- LONGSTAFF F.A. ; SCHWARTZ E.S. [2001] « Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, 14, 1, 113–147.
- NTEUKAM T. O., PLANCHET F., REN J. [2014] « Internal Model in Life insurance: Application of Least Square Monte-Carlo in Risk Assessment », Les cahiers de recherche de l'ISFA, n°2014.12.
- NTEUKAM O., PLANCHET F. [2012] « Stochastic Evaluation of Life Insurance Contract: Model Point on Asset Trajectories & Measurement of the Error Related to Aggregation », *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 51, pp. 624-631.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.
- REVELEN J. [2009] « Replicating Portfolio et capital économique en assurance vie », Mémoire d'ingénieur, ISFA / Ecole Centrale de Lyon.